

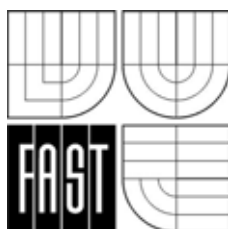
**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
**FAKULTA STAVEBNÍ**

---

**ING. JIŘÍ KYTÝR, CSc.**  
**ING. ZBYNĚK KERŠNER, CSc.**  
**ING. ROSTISLAV ZÍDEK**  
**ING. ZBYNĚK VLK**

**ZÁKLADY**  
**STAVEBNÍ MECHANIKY**

**MODUL BD01-MO2**  
**PRŮŘEZOVÉ CHARAKTERISTIKY**



**STUDIJNÍ OPORY**  
**PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA**

---



# OBSAH

<b>1 Úvod.....</b>	<b>5</b>
1.1 Cíle.....	5
1.2 Požadované znalosti.....	5
1.3 Doba potřebná ke studiu .....	5
1.4 Klíčová slova.....	5
<b>2 Těžiště rovinných geometrických útvarů .....</b>	<b>7</b>
2.1 Těžiště rovinných čar .....	7
2.1.1 Obecná rovinná křivka.....	7
2.1.2 Složená rovinná čára.....	8
2.2 Těžiště rovinných obrazců .....	8
2.2.1 Obecný rovinný obrazec .....	9
2.2.2 Složený rovinný obrazec.....	9
2.2.3 Obrazec ohraničený polygonem .....	10
<b>3 Kvadratické momenty rovinných obrazců.....</b>	<b>13</b>
3.1 Momenty setrvačnosti jednoduchých obrazců.....	13
3.2 Deviační momenty jednoduchých obrazců .....	13
3.3 Transformace k posunutým osám .....	15
3.3.1 Momenty setrvačnosti k rovnoběžným osám .....	15
3.3.2 Deviační moment k posunutým osám.....	16
3.4 Transformace k pootočeným osám .....	16
3.4.1 Analytické řešení .....	17
3.4.2 Hlavní momenty setrvačnosti .....	18
3.4.3 Mohrova kružnice .....	19
3.5 Poloměr a elipsa setrvačnosti.....	20
3.6 Polární moment setrvačnosti.....	21
3.6.1 Polární momenty ke dvěma libovolným bodům.....	22
3.7 Kvadratické momenty složených obrazců .....	23
3.7.1 Obrazec ohraničený polygonem .....	23
<b>4 Studijní prameny .....</b>	<b>31</b>
4.1 Seznam použité literatury.....	31
4.2 Seznam doplňkové studijní literatury .....	31
4.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny .....	31



# 1 Úvod

## 1.1 Cíle

Základy stavební mechaniky pokračují v tomto druhém modulu opět s využitím poznatků z fyziky týkajících se vektorů, sil a jejich působení, momentu síly, rovnováhy apod. Pro potřeby stavební mechaniky je také v tomto modulu rozšířeno na úroveň potřebnou ke zvládnutí navazujících témat v předmětech Statika a Pružnost a pevnost.



Jak je již uvedeno v prvním modulu Základů stavební mechaniky, je naším konečným cílem výpočet nosných stavebních konstrukcí z hlediska jejich dimenzování podle jednotlivých materiálů. Ve druhém modulu se zaměříme na výpočet polohy těžiště a kvadratických momentů rovinných obrazců. Ve třetím a čtvrtém modulu Základů stavební mechaniky se budeme zabývat řešením staticky určitých konstrukcí, v předmětu Statika pak řešením staticky neurčitých konstrukcí.

## 1.2 Požadované znalosti

Základy stavební mechaniky navazují na znalosti obecné fyziky. Student by měl být obeznámen s pojmy skalár, vektor a jaké jsou s nimi definované matematické operace, co je síla, jaké jsou Newtonovy zákony a jaké je jejich užití, co je soustava částic a její těžiště, co je moment síly a co znamená rovnováha sil a momentů sil.



Z matematického aparátu využijeme opět goniometrické funkce, vektorový počet, diferenciální a integrální počet včetně názorného významu derivace jako směrnice funkce a integrálu jako plošného obsahu pod grafem funkce.

## 1.3 Doba potřebná ke studiu

Modul obsahuje látku probíranou ve dvou týdnech semestru. Doba potřebná k nastudování jednotlivých kapitol či odstavců se tedy liší od několika minut do několika desítek minut. Záleží jednak na předchozí přípravě studenta v příslušné oblasti, jednak na obtížnosti daného tématu. Potřebná doba ke studiu celého textu činí 10 až 15 hodin.



## 1.4 Klíčová slova

mechanika, statika, síla, statický moment síly, dvojice sil, silová soustava, ekvivalence, rovnováha, těžiště, kvadratické momenty, momenty setrvačnosti, deviační momenty, transformace, hlavní momenty setrvačnosti, poloměr setrvačnosti, elipsa setrvačnosti, složený obrazec





## 2 Těžiště rovinných geometrických útvarů

Podle fyziky [3] je *těžiště* tělesa nebo soustavy těles definováno jako bod, který se pohybuje tak, jakoby v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa či soustavy a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso. Rovněž se nazývá *střed hmotnosti*, neboť je jednoznačně určen rozložením hmotnosti v soustavě. Za těžiště se označuje bod, vůči němuž je moment výsledné tíhové síly stejný jako součet všech momentů sil působících na jednotlivé částice tělesa. Pro určení těžiště rovinných geometrických útvarů využijeme v našich úvahách *statický střed* soustavy fiktivních rovnoběžných sil v rovině (odst. 3.6 prvního modulu), které jsou úměrné velikostem elementů či jednoduchých částí geometrického útvaru.



Setkáme se zde s pojmem *statického* (lineárního) *momentu* útvaru, u něhož je element (délkový  $ds$  či plošný  $dA$ ) násoben délkou.

### 2.1 Těžiště rovinných čar

V následujících dvou odstavcích probereme výpočet souřadnic těžiště rovinné čáry, a to obecné křivky a čáry složené z jednoduchých přímých event. zakřivených částí. Lze to aplikovat např. při stanovení polohy těžiště prutové (příhradové) konstrukce apod.

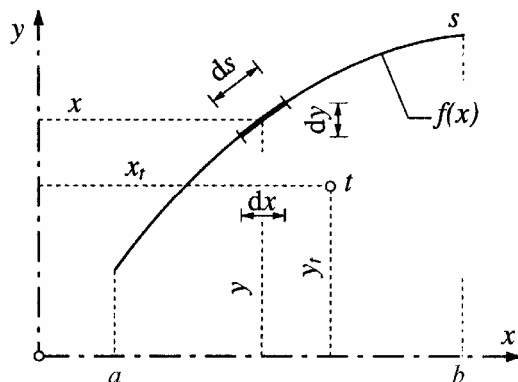
#### 2.1.1 Obecná rovinná křivka

V souřadnicové soustavě  $xy$  s počátkem  $o$  je definována obecná rovinná homogenní křivka  $s$  (obr. 2.1), která je v intervalu  $\langle a, b \rangle$  popsána funkcí  $y = f(x)$ . Rozdělme křivku na diferenciální elementy  $ds$  o souřadnicích  $x, y$ . Pro element  $ds$  platí

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (2.1)$$

takže celková délka je

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2.2)$$



Obr. 2.1: Obecná rovinná křivka

Definujme statický moment  $dU_x$  (resp.  $dU_y$ ) elementu křivky k ose  $x$  (resp.  $y$ ) jako součin délky elementu  $ds$  a vzdálenosti  $y$  (resp.  $x$ ) elementu od této osy

$$dU_x = y ds, \quad dU_y = x ds. \quad (2.3)$$

Statické momenty celé křivky pak jsou

$$U_x = \int_s dU_x = \int_s y ds = \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx = s y_t,$$

$$U_y = \int_s dU_y = \int_s x ds = \int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx = s x_t. \quad (2.4)$$

Souřadnice těžiště  $t$  křivky podle rovnice (3.37) prvního modulu jsou

$$x_t = \frac{U_y}{S} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx}, \quad y_t = \frac{U_x}{S} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx}. \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Složená rovinná čára

Složená rovinná čára sestává z  $n$  jednoduchých přímých či zakřivených částí délek  $s_1, \dots, s_n$  a má celkovou délku

$$s = \sum_{i=1}^n s_i.$$

Mají-li těžiště jednotlivých částí souřadnice  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , pak pro souřadnice těžiště složené čáry platí vztahy

$$x_t = \frac{U_y}{S} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i x_i}{\sum_{i=1}^n s_i}, \quad y_t = \frac{U_x}{S} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i y_i}{\sum_{i=1}^n s_i}. \quad (2.6)$$

Speciálním případem složené čáry je **lomená čára**. Její jednotlivé části jsou tvořeny pouze úsečkami, jejichž těžiště leží ve středech úseček.

## 2.2 Těžiště rovinných obrazců

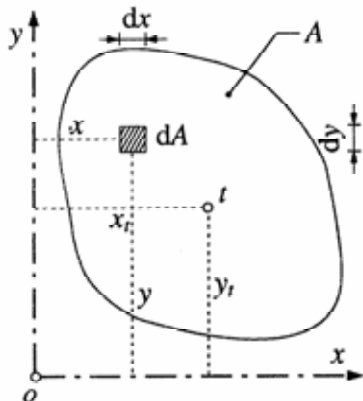
Polohu těžiště potřebujeme znát u průřezů prutů, z nichž jsou sestavovány prutové konstrukce. K osám procházejícím těžištěm se vztahují další veličiny, souřadnice těžiště proto patří k základním průřezovým charakteristikám. V následujících odstavcích budeme obecně hovořit o obrazcích.



## 2.2.1 Obecný rovinný obrazec

Uvažujme rovinný obrazec  $A$  libovolného tvaru (obr. 2.2), umístěný v souřadnicové soustavě  $x, y$ . Obrazec rozdělíme na diferenciální elementy o obsahu  $dA = dx \cdot dy$ . Celkový plošný obsah obrazce je

$$A = \int_A dA = \iint_A dx dy. \quad (2.7)$$



Obr. 2.2: Obecný rovinný obrazec

Polohu diferenciálního elementu  $dA$  určují souřadnice  $x$  a  $y$ . Statický moment  $dU_x$  (resp.  $dU_y$ ) elementu  $dA$  k ose  $x$  (resp.  $y$ ) je definován jako součin obsahu elementu a vzdálenosti  $y$  (resp.  $x$ ) elementu od příslušné osy

$$dU_x = y dA, \quad dU_y = x dA. \quad (2.8)$$

Pro celý obrazec jsou statické momenty

$$U_x = \int_A dU_x = \int_A y dA = \iint_A y dx dy, \\ U_y = \int_A dU_y = \int_A x dA = \iint_A x dx dy. \quad (2.9)$$

Souřadnice  $x_t, y_t$  těžiště  $t$  obrazce se určí ze vztahů

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{\iint_A x dx dy}{\iint_A dx dy}, \quad y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{\iint_A y dx dy}{\iint_A dx dy}. \quad (2.10)$$

Ztotožněním počátku  $o$  souřadnicové soustavy s těžištěm  $t$  obrazce vyjde  $x_t = y_t = 0$ , takže v tomto případě musí být  $U_x = U_y = 0$ . Z toho vyplývá, že **statický moment rovinného obrazce k libovolné ose jdoucí těžištěm je roven nule**.

## 2.2.2 Složený rovinný obrazec

Vyšetřovaný složený rovinný obrazec rozdělíme na  $n$  jednoduchých částí (dílků), např. obdélník, čtverec, trojúhelník, kruh, půlkruh apod., u nichž známe plošné obsahy  $A_i$  a souřadnice těžišť  $t_i (x_i, y_i)$ . Celkový plošný obsah složeného obrazce je

$$A = \sum_{i=1}^n A_i . \quad (2.11)$$

Po určení statických momentů  $U_{x,i} = A_i y_i$  a  $U_{y,i} = A_i x_i$  jednotlivých částí k osám  $x, y$  lze stanovit **souřadnice**  $x_t, y_t$  **těžiště**  $t$  celého **složeného** rovinného **obrazce** ze vztahů

$$\boxed{x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} .} \quad (2.12)$$

Obsahuje-li složený obrazec **otvor** (nebo i výřez či odstraňovanou část), potom všechny hodnoty (plošný obsah a statické momenty) týkající se otvoru musíme ve výpočtu uvažovat **záporně**.

### Otázky

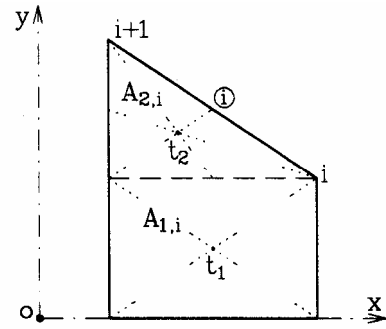
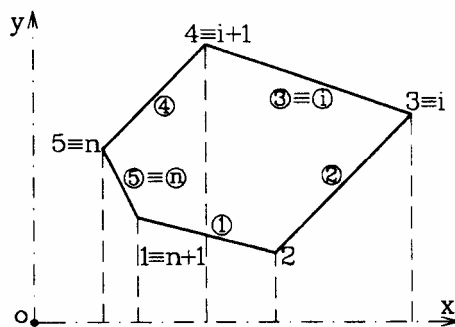


1. Jak určujeme těžiště rovinných čar a rovinných obrazců?

### 2.2.3 Obrazec ohraničený polygonem



Je-li složený rovinný obrazec ohraničený polygonem, tj. má tvar obecného mnohoúhelníku (obr. 2.3), lze souřadnice těžiště obrazce určit pomocí vztahů (2.12) vyjádřením dílčích obsahů  $A_i$  a statických momentů  $U_{x,i}, U_{y,i}$  lichoběžníků, vytvořených pod každou ohraničující úsečkou s koncovými body  $i, i+1$  (obr. 2.4). Dodržíme-li číslování vrcholů mnohoúhelníku proti směru chodu hodinových ručiček, vyjdou hodnoty veličin  $A_i, U_{x,i}, U_{y,i}$  podle obr. 2.4 kladné, v případě opačné orientace ohraničující úsečky vyjdou hodnoty záporné.



Obr. 2.3: Rovinný obrazec ohraničený polygonem Obr. 2.4: Lichoběžník  $i, i+1$

Každý lichoběžník omezený ohraničující úsečkou s koncovými body  $i, i+1$  (obr. 2.4) můžeme rozdělit na obdélník 1 a trojúhelník 2. Pro jejich plošné obsahy a souřadnice těžišť získáme výrazy

$$\begin{aligned} A_{1,i} &= (x_i - x_{i+1}) y_i, & x_{t,1} &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), & y_{t,1} &= \frac{1}{2} y_i, \\ A_{2,i} &= \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})(y_{i+1} - y_i), & x_{t,2} &= \frac{1}{3}(x_i + 2x_{i+1}), & y_{t,2} &= \frac{1}{3}(2y_i + y_{i+1}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

kde  $x_i, y_i$  jsou souřadnice bodu  $i$  ohraničujícího polygonu a  $A_i = A_{1,i} + A_{2,i}$ . Statické momenty jsou

$$U_{x,i} = A_{1,i}y_{i,1} + A_{2,i}y_{i,2}, \quad U_{y,i} = A_{1,i}x_{i,1} + A_{2,i}x_{i,2}. \quad (2.14)$$

Pro celý složený obrazec ohraničený polygonem pak odvodíme výrazy

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) (y_i + y_{i+1}),$$

$$U_x = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2),$$

$$U_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) [(2x_i + x_{i+1})y_i + (x_i + 2x_{i+1})y_{i+1}], \quad (2.15)$$

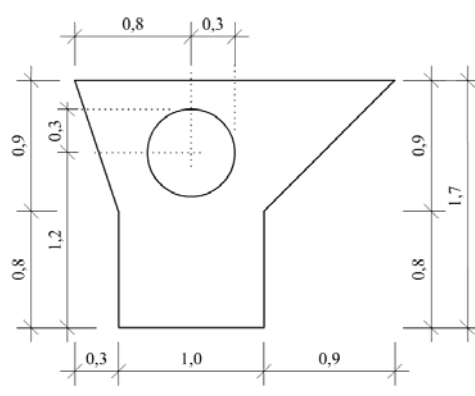
kteřé lze přímo dosadit do vztahů (2.12). Pokud bychom zvolili základní lichoběžník od ohraničující úsečky kolmo k ose  $y$ , získali bychom výraz pro  $U_y$  v jednodušším tvaru (podobně jako je odvozen pro  $U_x$ ).

Popsaný algoritmus lze velmi jednoduše použít i pro obrazce s vnitřním otvorem, který má rovněž tvar polygonu.

## Příklad 2.1

### Zadání

Stanovte polohu těžiště složeného obrazce oslabeného kruhovým otvorem podle obrázku 2.5; délkové rozměry jsou v metrech.



Obr. 2.5: Zadání příkladu 2.1

### Řešení

Vyšetřovaný složený obrazec (obr. 2.6) se skládá z obdélníku 1, z trojúhelníků 2 a 3 a z kruhového otvoru 4. Počátek souřadnicové roviny  $x, y$  volíme např. v levém dolním rohu obdélníku 1 podle obrázku 2.6.



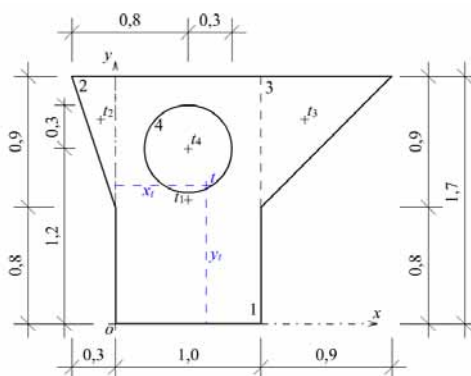
Výpočet zahájíme stanovením obsahů a souřadnic těžišť jednotlivých částí:

Obdélník 1  $A_1 = 1,0 \cdot 1,7 = 1,7 \text{ m}^2, \quad t_1(0,5; 0,85) \text{ m}.$

Trojúhelník 2  $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,135 \text{ m}^2, \quad t_2(-0,1; 1,4) \text{ m}.$

$$\text{Trojúhelník 3} \quad A_3 = \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,405 \text{ m}^2, \quad t_3(1,3; 1,4) \text{ m}.$$

$$\text{Kruh 4} \quad A_4 = \pi \cdot 0,3^2 = 0,2827 \text{ m}^2, \quad t_4(0,5; 1,2) \text{ m}.$$



Obr. 2.6: Řešení příkladu 2.1

Protože kruhová část 4 tvoří otvor, budeme v následujících sumách členy odpovídající této části odečítat. Celkový obsah složeného obrazce určíme podle vztahu (2.11)

$$A = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = 1,7 + 0,135 + 0,405 - 0,2827 = 1,9573 \text{ m}^2.$$

Souřadnice těžiště určíme ze vztahů (2.12):

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 - A_4 x_4}{A} = \\ &= \frac{1,7 \cdot 0,5 + 0,135 \cdot (-0,1) + 0,405 \cdot 1,3 - 0,2827 \cdot 0,5}{1,9573} = 0,6242 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 - A_4 y_4}{A} = \\ &= \frac{1,7 \cdot 0,85 + 0,135 \cdot 1,4 + 0,405 \cdot 1,4 - 0,2827 \cdot 1,2}{1,9573} = 0,9512 \text{ m} \end{aligned}$$

Poloha těžiště složeného obrazce je naznačena na obr. 2.6. Jak je patrné z výpočtu, je nutné u všech mezivýsledků pracovat s dostatečným (větším) počtem platných cifer, aby se neztratila přesnost výsledku.

## Shrnutí



Metodika stanovení statického středu rovinné soustavy rovnoběžných sil se uplatnila při vyšetřování polohy těžiště rovinných čar a obrazců. Byl zaveden pojem statického momentu geometrického útvaru. Nejprve jsme se zabývali výpočtem těžiště obecné rovinné křivky a složené rovinné čáry, včetně čáry lomené. Posléze byla pozornost směřována k vyšetřování polohy těžiště obecného a složeného rovinného obrazce, včetně obrazce ohraničeného polygonem.

### 3 Kvadratické momenty rovinných obrazců

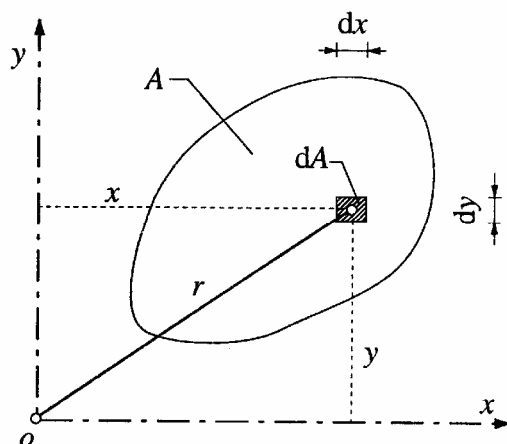
Kvadratické momenty (momenty druhého stupně) rovinných obrazců patří k důležitým geometrickým charakteristikám, s nimiž se setkáváme při statické analýze prutových konstrukcí. Jedná se o momenty setrvačnosti  $I$  a deviační momenty  $D$  rovinných obrazců, které představují průřezy reálných prutů. Označení kvadratických momentů vychází z toho, že se u těchto veličin násobí plošný prvek  $dA$  kvadrátem délky nebo součinem dvou délek.



#### 3.1 Momenty setrvačnosti jednoduchých obrazců

Vztáhneme-li obecný rovinný obrazec  $A$  (obr. 3.1) k libovolným souřadnicovým osám  $x, y$ , ležícím v rovině obrazce, jsou momenty setrvačnosti diferenciálního plošného elementu  $dA = dx dy$  ke každé této ose definovány výrazy

$$dI_x = y^2 dA, \quad dI_y = x^2 dA. \quad (3.1)$$



Obr. 3.1: Obecný rovinný obrazec

Momenty setrvačnosti celého rovinného obrazce  $A$  k příslušným souřadnicovým osám jsou

$$I_x = \int_A dI_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A dI_y = \int_A x^2 dA. \quad (3.2)$$

Velikost momentu setrvačnosti je vzhledem k definici vždy různá od nuly. Znaménko závisí pouze na znaménku plošného obsahu obrazce (otvoru přisuzujeme záporné znaménko). Základní měrovou jednotkou momentu setrvačnosti je  $m^4$ . Momenty setrvačnosti k těžištním osám se označují jako *centrální momenty setrvačnosti* a příslušné osy jako *centrální osy setrvačnosti*.

#### 3.2 Deviační momenty jednoduchých obrazců

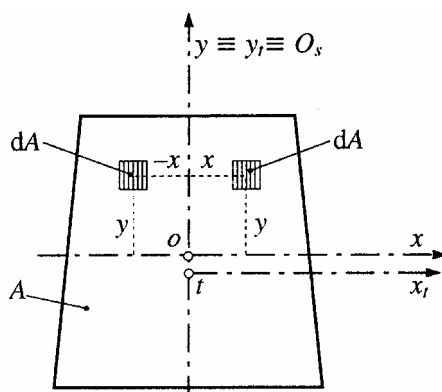
Vztáhneme-li obecný rovinný obrazec  $A$  (obr. 3.1) současně ke dvěma libovolným souřadnicovým osám  $x, y$ , ležícím v rovině obrazce, je deviační moment diferenciálního plošného prvku  $dA = dx dy$  k těmto osám definován výrazem

$$dD_{xy} = xy \, dA. \quad (3.3)$$

Deviační moment celého rovinného obrazce k souřadnicovým osám pak je

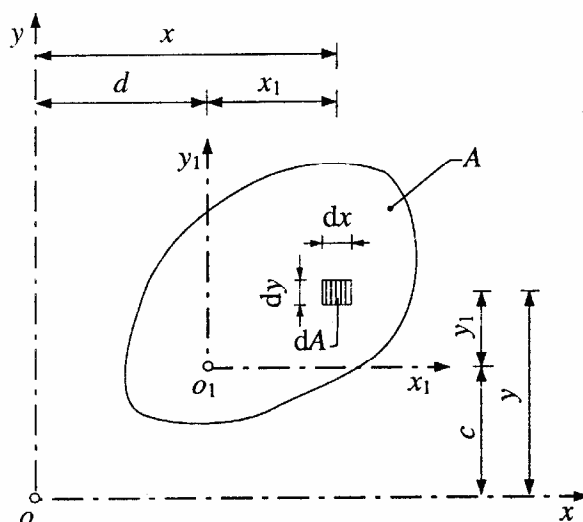
$$D_{xy} = \int_A dD_{xy} = \int_A xy \, dA. \quad (3.4)$$

Hodnota deviačního momentu (kladná, záporná či nulová) závisí na znaménkách souřadnic, popř. obsahu obrazce otvoru. Základní měrovou jednotkou deviačního momentu je  $m^4$ . Dvojice souřadnicových os, k nimž má deviační moment nulovou hodnotu, označujeme jako *hlavní osy setrvačnosti*. Jedná-li se o osy procházející těžištěm obrazce, hovoříme o *hlavních centrálních osách setrvačnosti*.



Obr. 3.2: Rovinný obrazec s jednou osou symetrie

Deviační moment rovinného obrazce s alespoň jednou osou symetrie (obr. 3.2) je k této ose a k další libovolné ose na ni kolmé roven nule. Vyplyvá to z toho, že dva souměrně umístěné diferenciální elementy mají k uvedeným osám deviační momenty stejné hodnoty, ale opačného znaménka.



Obr. 3.3: Transformace při rovnoběžném posunutí os

### 3.3 Transformace k posunutým osám

#### 3.3.1 Momenty setrvačnosti k rovnoběžným osám

V souřadnicové soustavě  $x_1, y_1$  s počátkem  $o_1$  uvažujme libovolný obecný rovinný obrazec  $A$  (obr. 3.3). Při rovnoběžném posunutí os z původní polohy  $x_1, y_1$  do nové polohy  $x, y$  o délky  $c, d$  platí pro souřadnice plošného elementu  $dA$  vztahy

$$x = x_1 + d, \quad y = y_1 + c. \quad (3.5)$$

Po dosazení výrazů (3.5) do (3.2) získáme vztahy pro momenty setrvačnosti k posunutým osám  $x, y$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA = \int_A (y_1 + c)^2 dA = \int_A y_1^2 dA + 2c \int_A y_1 dA + c^2 \int_A dA = I_{x_1} + 2cU_{y_1} + Ac^2, \\ I_y &= \int_A x^2 dA = \int_A (x_1 + d)^2 dA = \int_A x_1^2 dA + 2d \int_A x_1 dA + d^2 \int_A dA = I_{y_1} + 2dU_{x_1} + Ad^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

kde jsou využity veličiny definované v rovnicích (3.2), (2.9) a (2.7). Obecně pak můžeme vztahy (3.6) napsat ve tvaru

$$I_x = I_{x_1} \pm 2cU_{y_1} + Ac^2, \quad I_y = I_{y_1} \pm 2dU_{x_1} + Ad^2. \quad (3.7)$$

Záporné znaménko u druhého členu platí, je-li  $y < y_1$  event.  $x < x_1$ , tj. vyjdou-li délky  $c, d$  podle (3.5) záporné. Ztotožní-li se osy  $x_1, y_1$  s těžištními osami  $x_t, y_t$ , pak statické momenty  $U_{x_t} = U_{y_t} = 0$  a vztahy (3.7) přejdou na tvary

$$\boxed{I_x = I_{x_t} + Ac^2, \quad I_y = I_{y_t} + Ad^2,} \quad (3.8)$$

kteří se označují jako

**Steinerova věta:** Moment setrvačnosti rovinného obrazce k libovolné (mimotěžištní) ose je roven momentu setrvačnosti k rovnoběžné těžištní ose, zvětšenému o součin plošného obsahu obrazce a čtverce vzdálenosti obou os.



**Jakob Steiner** (1796 – 1863), švýcarský matematik, jeden z největších přispěvatelů v oboru projektivní geometrie.



### 3.3.2 Deviační moment k posunutým osám



Ze známého deviačního momentu  $D_{x_1 y_1}$  obrazce k pravoúhlým osám  $x_1, y_1$  určíme deviační moment obrazce k osám  $x, y$  rovnoběžně posunutým o délky  $c, d$ . Při využití výrazů (3.5) získáme

$$D_{xy} = \int_A xy \, dA = \int_A (x_1 + d)(y_1 + c) \, dA = D_{x_1 y_1} + dU_{x_1} + cU_{y_1} + Acd. \quad (3.9)$$

V případě, že osy  $x_1, y_1$  se ztotožní s těžištními osami  $x_t, y_t$ , nabývají statické momenty nulových hodnot a vztahy (3.9) přechází na tvar

$$D_{xy} = D_{x_t y_t} + Acd, \quad (3.10)$$

který je *analogií ke Steinerově větě*. Platí:



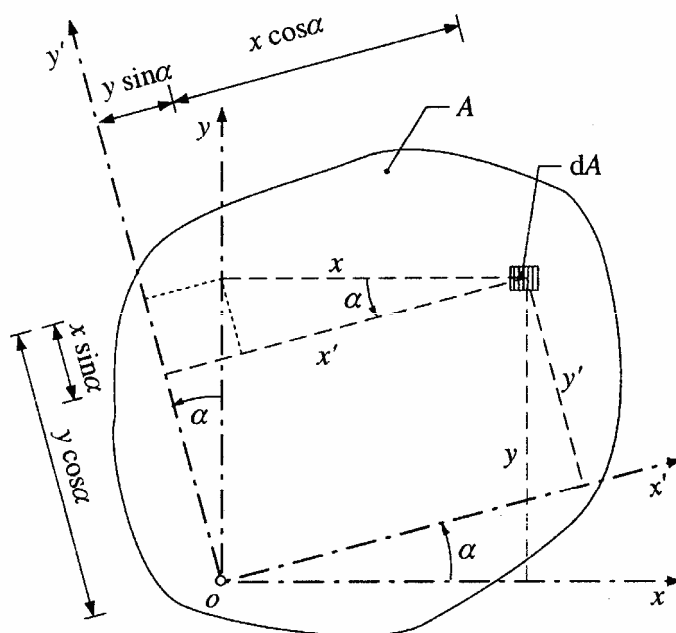
Deviační moment rovinného obrazce k libovolným (mimotěžištním) pravoúhlým osám je roven deviačnímu momentu k rovnoběžným těžištním osám, zvětšenému o součin plošného obsahu obrazce a vzdáleností příslušných rovnoběžných os.

### 3.4 Transformace k pootočeným osám



Známe-li kvadratické momenty rovinného obrazce pro pravoúhlou dvojici os  $x, y$  s počátkem  $o$  (obr. 3.4), můžeme pomocí nich určit hodnoty kvadratických momentů pro jinou dvojici pravoúhlých os  $x', y'$ , pootočenou od původních os o úhel  $\alpha$ .

Řešení lze provést analyticky nebo graficky (pomocí Mohrovy kružnice).



Obr. 3.4: Pootočení souřadnicových os





**Otto Mohr** (1835 – 1918), patrně nejvýraznější osobnost stavební mechaniky 19. století.



### 3.4.1 Analytické řešení

Plošný element  $dA$  (obr. 3.4) má v pootočené souřadnicové soustavě  $x', y'$  souřadnice



$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (3.11)$$

Kvadratické momenty obrazce k pootočeným osám vyjádříme

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_A y'^2 dA = \int_A (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 dA = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y'} &= \int_A x'^2 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + D_{xy} \sin 2\alpha, \\ D_{x'y'} &= \int_A x'y' dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dA = \\ &= \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Změnou úhlu  $\alpha$  ve vztazích (3.12) se mění hodnoty kvadratických momentů k pootočeným osám. Pro určitou polohu os  $x_0, y_0$ , pootočenou o úhel  $\alpha_0$ , mají momenty setrvačnosti extrémní hodnoty. Velikost úhlu  $\alpha_0$  zjistíme z extrému funkce; derivaci výrazu (3.12) pro  $I_{x'}$  podle proměnné veličiny  $\alpha$  položíme rovnu nule a získáme rovnici

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = -2I_x \cos \alpha \sin \alpha + 2I_y \sin \alpha \cos \alpha - 2D_{xy} \cos 2\alpha = 0, \quad (3.13)$$

která po úpravě a dosazení  $\alpha = \alpha_0$  nabývá tvar

$$\frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha_0 + D_{xy} \cos 2\alpha_0 = D_{x_0 y_0} = 0. \quad (3.14)$$

Porovnáním s poslední rovnicí (3.12) zjistíme, že momenty setrvačnosti nabývají extrémních hodnot k takovým osám  $x_0, y_0$ , k nimž má deviační moment nulovou hodnotu. Pro hledaný úhel  $\alpha_0$  úpravou (3.14) získáme vztah

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}}. \quad (3.15)$$

Této rovnici vyhovují dva úhly  $\alpha_0$  a  $\alpha_0 + \pi/2$ , které určují polohu dvou os  $x_0, y_0$  navzájem kolmých.

Extrémní hodnoty momentů setrvačnosti  $I_{x_0}, I_{y_0}$  představují tzv. **hlavní momenty setrvačnosti**, příslušející hlavním osám setrvačnosti  $x_0, y_0$ . Určíme je ze vztahů (3.12) dosazením známého úhlu  $\alpha_0$  podle (3.15), takže získáme

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0, \\ I_{y_0} &= I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.4.2 Hlavní momenty setrvačnosti

Vztahy (3.16) nejsou příliš vhodné pro numerické výpočty, neboť obsahují různé násobky úhlu  $\alpha_0$ . Uvážíme-li proto geometrické závislosti

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha_0), \quad \sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha_0),$$

získáme (3.16) jako funkce pouze dvojnásobného úhlu ve tvaru

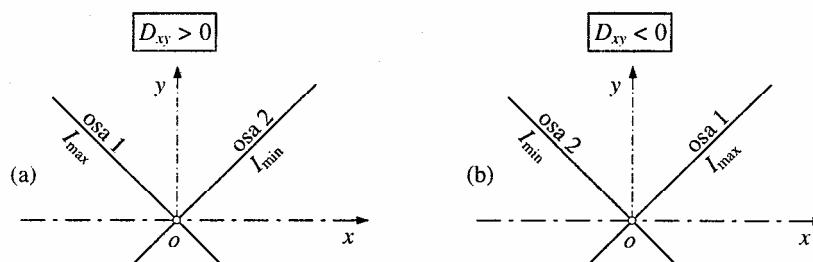
$$\begin{aligned} I_{x_0} &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0, \\ I_{y_0} &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Po uplatnění vztahů

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}, \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}$$

do rovnic (3.17) a s využitím (3.15) obdržíme po úpravě výhodnější tvar

$$I_{\max, \min} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2}. \quad (3.18)$$



Obr. 3.5: Rozlišení hlavních os setrvačnosti

Hlavní momenty setrvačnosti odpovídají **hlavním osám setrvačnosti** 1, 2. Je-li deviační moment  $D_{xy}$  obrazce k původním osám  $x, y$  kladný (obr. 3.5a), prochází osa setrvačnosti, jíž přísluší maximální (minimální) moment setrvačnosti, druhým a čtvrtým (prvním a třetím) kvadrantem. Při záporném  $D_{xy}$  (obr. 3.5b) je tomu právě naopak.

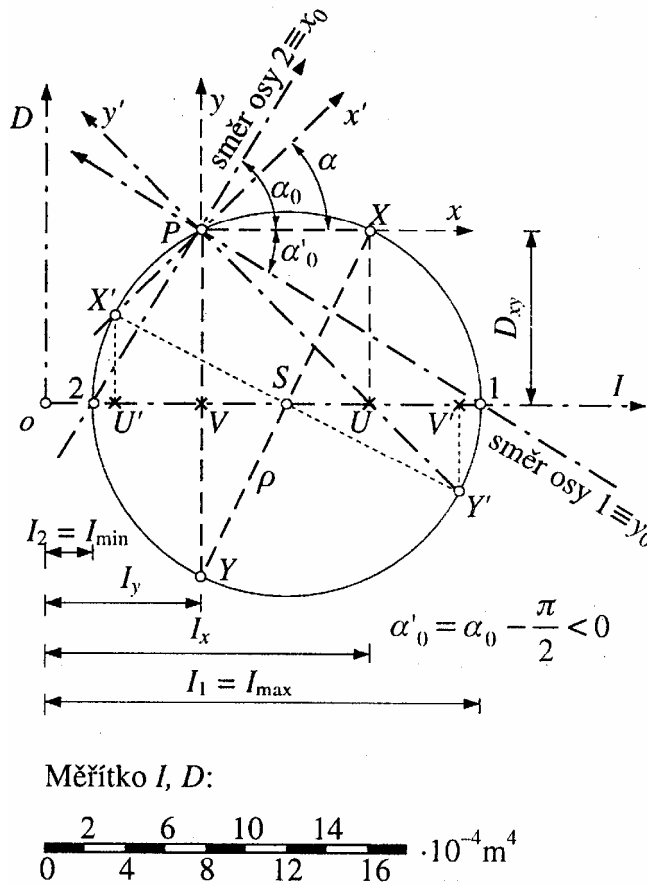
Mezi momenty setrvačnosti  $I_x, I_y$  k původním osám a  $I_{x'}, I_{y'}$  k pootočeným osám a rovněž  $I_{\max}, I_{\min}$  k hlavním osám setrvačnosti platí závislost

$$I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'} = I_{\max} + I_{\min}, \quad (3.19)$$

která vyjadřuje konstantní hodnotu součtu momentů setrvačnosti rovinného obrazce ke dvěma libovolným vzájemně kolmým osám, vedeným stejným bodem  $o$ . Vztah (3.19) se označuje jako **první (lineární) invariant momentů setrvačnosti**. Jak dokážeme v odst. 3.6, je také roven polárnímu momentu setrvačnosti obrazce pro bod  $o$ .

### 3.4.3 Mohrova kružnice

Hlavní momenty setrvačnosti lze určit také graficky pomocí Mohrovy kružnice (obr. 3.6). Vychází se ze známých hodnot kvadratických momentů k původním osám  $x, y$ .



Obr. 3.6: Mohrova kružnice

Zvolíme libovolně dvě osy  $I, D$  (obr. 3.6) navzájem kolmé, nezávislé na osách  $x, y$ . Od počátku  $O$  vyneseme na osu  $I$  hodnoty momentů setrvačnosti  $I_x = OU$  a  $I_y = OV$ . V bodech  $U, V$  kolmo k ose  $I$  vyneseme hodnotu  $D_{xy} = UX = VY$  tak, že při kladném  $D_{xy}$  vynášíme  $UX$  nad osu  $I$  a  $VY$  pod osu  $I$ . Kružnice sestrojená nad průměrem  $XY$  je Mohrovou kružnicí se středem  $S$  na ose  $I$  ve vzdálenosti

$$OS = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \quad (3.20)$$

a poloměr  $\rho$  má velikost

$$\rho = \sqrt{SU^2 + UX^2} = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2}. \quad (3.21)$$

Bodem  $X$  vedeme rovnoběžku s původní osou  $x$  a bodem  $Y$  rovnoběžku s osou  $y$ . Obě tyto rovnoběžky se protnou na Mohrově kružnici v bodu  $P$  (*pólu Mohrovy kružnice*). Označíme-li průsečíky Mohrovy kružnice s osou  $I$  body 1 a 2, pak přímkou  $P1$  a  $P2$  udávají směry hlavních os setrvačnosti, jimž přísluší hlavní momenty setrvačnosti o velikostech

$$\begin{aligned} I_{\max} &= I_1 = O1 = OS + \rho, \\ I_{\min} &= I_2 = O2 = OS - \rho. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dosazením vztahů (3.20) a (3.21) do (3.22) získáme stejné výrazy jako v (3.18).

Pootáčením pravouhlých souřadnicových os v pólu  $P$  můžeme graficky určit odpovídající hodnoty kvadratických momentů.

### Otázky



1. Co jsou hlavní momenty setrvačnosti rovinného obrazce a jak se určují?
2. Co rozumíme deviačním momentem obrazce (k daným osám), jak se stanoví, kdy je roven nule?

## 3.5 Poloměr a elipsa setrvačnosti

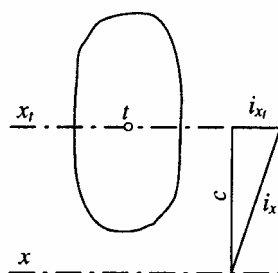


**Poloměr setrvačnosti**  $i_x$  (resp.  $i_y$ ) rovinného obrazce k ose  $x$  (resp.  $y$ ) je definován jako druhá odmocnina z podílu momentu setrvačnosti k příslušné ose a plošného obsahu obrazce, tedy

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (3.23)$$

Poloměr setrvačnosti má délkový rozměr (např. metr). Ze vztahů (3.23) naopak můžeme určit momenty setrvačnosti ze součinu obsahu obrazce a čtverce poloměru setrvačnosti:

$$I_x = A i_x^2, \quad I_y = A i_y^2. \quad (3.24)$$



Obr. 3.7: Poloměry setrvačnosti k rovnoběžným osám

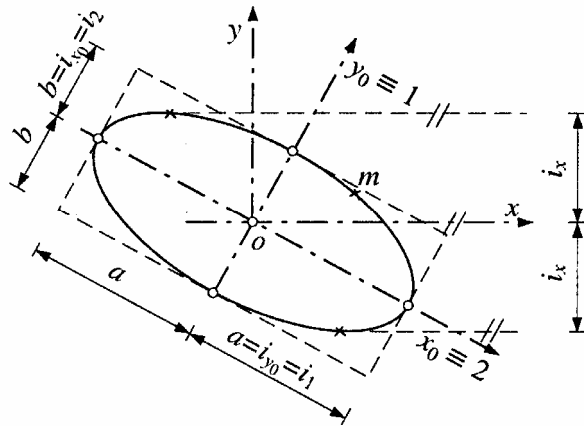
Úpravou vztahů (3.8) s přihlédnutím k (3.24) získáme vztah mezi poloměry setrvačnosti k mimotěžištní a těžištní ose (obr. 3.7)

$$i_x^2 = i_{x_i}^2 + c^2, \quad i_y^2 = i_{y_i}^2 + d^2. \quad (3.25)$$

Poloměry setrvačnosti obrazce k jeho hlavním osám nazýváme *hlavní poloměry setrvačnosti* a hlavním centrálním osám pak přísluší *hlavní centrální poloměry setrvačnosti*.

Setrvačné vlastnosti rovinného obrazce umístěného v souřadnicové soustavě  $x, y$  k počátku  $o$  graficky vyjadřuje **elipsa setrvačnosti**. Získáme ji tak, že uvažujeme v počátku  $o$  různé pravoúhlé dvojice os setrvačnosti s odpovídajícími momenty setrvačnosti a poloměry setrvačnosti. Vedeme-li rovnoběžky s osami setrvačnosti ve vzdálenosti příslušného poloměru setrvačnosti (obr. 3.8), obalí tyto přímky křivku, která je elipsou setrvačnosti pro bod  $o$ . Elipsa setrvačnosti má v souřadnicové soustavě  $x, y$  rovnici

$$I_x x^2 + I_y y^2 - 2D_{xy} xy = \frac{I_x I_y - D_{xy}^2}{A}. \quad (3.26)$$



Obr. 3.8: Elipsa setrvačnosti obrazce pro bod  $o$

Hlavní osy elipsy jsou *hlavními osami setrvačnosti*  $x_0, y_0$  obrazce a příslušné hlavní poloosy  $a, b$  elipsy jsou představovány hlavními poloměry setrvačnosti, pro něž platí vztahy

$$a = i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}, \quad b = i_{y_0} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (3.27)$$

Elipsa setrvačnosti sestavená pro těžiště obrazce se nazývá *centrální elipsa setrvačnosti* a její poloosy tvoří hlavní centrální poloměry setrvačnosti.

### 3.6 Polární moment setrvačnosti

Vztáhneme-li moment setrvačnosti rovinného obrazce k libovolnému bodu  $o$  v rovině obrazce (obr. 3.9), jedná se o tzv. polární moment setrvačnosti (patří rovněž mezi kvadratické momenty).

Polární moment setrvačnosti je definován vztahem

$$I_o = \int_A r^2 dA, \quad (3.28)$$

kde  $r$  je vzdálenost plošného elementu  $dA = dx dy$  od daného bodu  $o$ , přičemž platí vztah

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Po jeho dosazení do (3.28) obdržíme

$$I_o = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y. \quad (3.29)$$

Rovnice (3.29) dokládá, že polární moment setrvačnosti  $I_o$  rovinného obrazce k bodu  $o$  je roven součtu dvou axiálních momentů setrvačnosti  $I_x$  a  $I_y$  ke dvěma libovolným vzájemně kolmým osám  $x$  a  $y$ , procházejícím bodem  $o$ . Podle prvního invariantu momentů setrvačnosti (3.19) není velikost polárního momentu  $I_o$  závislá na směrech vzájemně kolmých os  $x$ ,  $y$ , vedených vyšetřovaným bodem  $o$ .

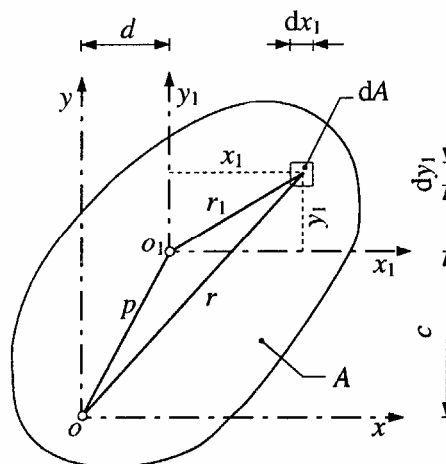
### 3.6.1 Polární momenty ke dvěma libovolným bodům

Známe-li polární moment setrvačnosti  $I_{o_1}$  k některému bodu  $o_1$  roviny obrazce (obr. 3.9), můžeme pomocí něj stanovit polární moment setrvačnosti  $I_o$  k libovolnému jinému bodu  $o$ . Vzdálenost diferenciálního elementu  $r$  určíme ze vztahu

$$r^2 = (x_1 + d)^2 + (y_1 + c)^2 \quad (3.30)$$

a po dosazení do (3.29) získáme

$$I_o = \int_A [(x_1 + d)^2 + (y_1 + c)^2] dA = I_{o_1} + 2cU_{y_1} + 2dU_{x_1} + (c^2 + d^2)A. \quad (3.31)$$



Obr. 3.9: Polární momenty setrvačnosti

V případě, že bod  $o_1$  je těžištěm obrazce, budou mít statické momenty v (3.31) nulové hodnoty a vztah se zjednoduší na tvar

$$I_o = I_t + (c^2 + d^2)A = I_t + Ap^2, \quad (3.32)$$

kde  $p$  je vzdálenost bodů  $o$  a  $o_1$  podle výrazu  $p = \sqrt{c^2 + d^2}$ .

Rovnice (3.32) je analogická Steinerově větě (3.8) a slovně ji lze vyjádřit: Polární moment setrvačnosti rovinného obrazce k libovolnému bodu roviny obrazce je roven polárnímu momentu setrvačnosti obrazce k jeho těžišti, zvětšenému o součin obsahu obrazce a čtverce vzdálenosti obou bodů.

### 3.7 Kvadratické momenty složených obrazců

V praxi se velmi často vyskytují průřezy složené z geometricky jednoduchých částí, u nichž známe (viz např. tabulku 3.1) polohu těžiště a kvadratické momenty příslušné jejich vlastním těžištním osám. Aplikací principu superpozice účinků a transformačních vztahů (3.8) a (3.10) můžeme napsat pro výsledné kvadratické momenty složeného rovinného obrazce k osám  $x, y$  vztahy

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^n I_{x,i} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i,i} + A_i c_i^2) = \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + A_i y_i^2), \\ I_y &= \sum_{i=1}^n I_{y,i} = \sum_{i=1}^n (I_{y_i,i} + A_i d_i^2) = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + A_i x_i^2), \\ D_{xy} &= \sum_{i=1}^n D_{xy,i} = \sum_{i=1}^n (D_{x_i y_i,i} + A_i c_i d_i) = \sum_{i=1}^n (D_{x_i y_i} + A_i x_i y_i), \end{aligned} \quad (3.33)$$

kde značí

$A_i$  obsah  $i$ -tého dílčího obrazce,

$I_{x_i,i} = I_{x_i}$ ,  $I_{y_i,i} = I_{y_i}$ ,  $D_{x_i y_i,i} = D_{x_i y_i}$  kvadratické momenty  $i$ -tého dílčího obrazce k jeho vlastním těžištním osám  $x_{t,i} = x_i$ ,  $y_{t,i} = y_i$ , rovnoběžným s osami  $x, y$ ,

$c_i = y_i$ ,  $d_i = x_i$  souřadnice těžišť dílčích obrazců v souřadnicové soustavě  $x, y$ .

U otvoru nebo odstraňované části v rámci celého složeného obrazce se pro plošný obsah i kvadratické momenty uvažuje záporné znaménko.

#### 3.7.1 Obrazec ohraničený polygonem

S využitím vztahů (2.13) pro plošné obsahy a souřadnice těžišť obou částí každého lichoběžníku omezeného ohraničující úsečkou s koncovými body  $i, i+1$  (obr. 2.4) určíme příslušné kvadratické momenty lichoběžníku

$$\begin{aligned} I_{x,i} &= \frac{1}{3}(x_i - x_{i+1})y_i^3 + \frac{1}{36}(x_i - x_{i+1})(y_{i+1} - y_i)^3 + A_{2,i}y_{t_2}^2, \\ I_{y,i} &= \frac{1}{12}y_i(x_i - x_{i+1})^3 + A_{1,i}x_{t_1}^2 + \frac{1}{36}(y_{i+1} - y_i)(x_i - x_{i+1})^3 + A_{2,i}x_{t_2}^2, \\ D_{xy,i} &= 0 + A_{1,i}x_{t_1}y_{t_1} - \frac{1}{72}(x_i - x_{i+1})^2(y_{i+1} - y_i)^2 + A_{2,i}x_{t_2}y_{t_2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Po dosazení za obsahy částí  $A_{1,i}$ ,  $A_{2,i}$  a souřadnice těžišť  $x_{t,1}$ ,  $y_{t,1}$ ,  $x_{t,2}$ ,  $y_{t,2}$  podle (2.13), po úpravě a sumaci obdržíme výsledné výrazy pro kvadratické momenty složeného obrazce ohraničeného polygonem ve tvaru

$$I_x = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n [(x_i - x_{i+1})(y_i^3 + y_i^2 y_{i+1} + y_i y_{i+1}^2 + y_{i+1}^3)],$$

$$I_y = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \left\{ (x_i - x_{i+1}) \left[ x_i^2 (3y_i + y_{i+1}) + 2x_i x_{i+1} (y_i + y_{i+1}) + x_{i+1}^2 (y_i + 3y_{i+1}) \right] \right\},$$

$$D_{xy} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n \left[ (3x_i^2 - x_{i+1}^2) y_i^2 + (x_i^2 - 3x_{i+1}^2) y_{i+1}^2 + 2(x_i^2 - x_{i+1}^2) y_i y_{i+1} + 2x_i x_{i+1} (y_{i+1}^2 - y_i^2) \right]. \quad (3.35)$$

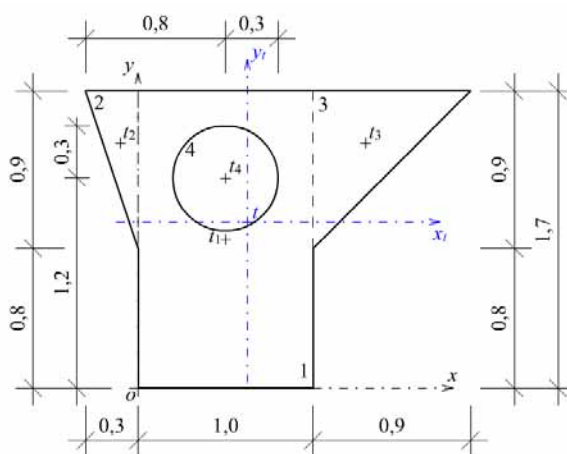
Popsaný algoritmus se hodí i pro obrazce s vnitřním otvorem, který má rovněž tvar polygonu. Přidáním částí obrazce (resp. odstraněním otvorů) při znalosti jejich těžišť, plošných obsahů a těžištních kvadratických momentů (viz tab. 3.1) můžeme snadno pomocí vztahů (3.8) a (3.10) doplnit tvary obrazce, vymykající se polygonu.

### Příklad 3.1

#### Zadání



Stanovte momenty setrvačnosti a deviační momenty složeného obrazce (obr. 3.10) z příkladu 2.1 k jeho těžištním osám, hlavní momenty setrvačnosti, směry hlavních os a poloměry setrvačnosti. Vykreslete elipsu setrvačnosti obrazce.



Obr. 3.10: Zadání příkladu 3.1

#### Řešení



Z příkladu 2.1 převezmeme plošné obsahy a polohy těžišť jednotlivých částí složeného obrazce, celkový obsah  $A = 1,9573 \text{ m}^2$  a polohu těžiště  $t(0,6242; 0,9512) \text{ m}$  a stanovíme momenty setrvačnosti a deviační momenty jednotlivých částí k těžištním osám složeného obrazce podle vztahů (3.8) a (3.10).

Obdélník 1

$$I_{x,1} = \frac{1}{12} 1,0 \cdot 1,7^3 + 1,7 \cdot (0,85 - 0,9512)^2 = 0,42683 \text{ m}^4$$

$$I_{y,1} = \frac{1}{12} 1,0^3 \cdot 1,7 + 1,7 \cdot (0,5 - 0,6242)^2 = 0,16789 \text{ m}^4$$



$$D_{xy,1} = 0 + 1,7 \cdot (0,85 - 0,9512) \cdot (0,5 - 0,6242) = 0,02137 \text{ m}^4$$

Trojúhelník 2

$$I_{x,2} = \frac{1}{36} 0,3 \cdot 0,9^3 + 0,135 \cdot (1,4 - 0,9512)^2 = 0,03327 \text{ m}^4$$

$$I_{y,2} = \frac{1}{36} 0,3^3 \cdot 0,9 + 0,135 \cdot (-0,1 - 0,6242)^2 = 0,07148 \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned} D_{xy,2} &= -\frac{1}{72} 0,3^2 \cdot 0,9^2 + 0,135 \cdot (1,4 - 0,9512) \cdot (-0,1 - 0,6242) = \\ &= -0,04489 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Trojúhelník 3

$$I_{x,3} = \frac{1}{36} 0,9 \cdot 0,9^3 + 0,405 \cdot (1,4 - 0,9512)^2 = 0,09980 \text{ m}^4$$

$$I_{y,3} = \frac{1}{36} 0,9^3 \cdot 0,9 + 0,405 \cdot (1,3 - 0,6242)^2 = 0,20319 \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned} D_{xy,3} &= +\frac{1}{72} 0,9^2 \cdot 0,9^2 + 0,405 \cdot (1,4 - 0,9512) \cdot (1,3 - 0,6242) = \\ &= 0,13195 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Kruh 4

$$I_{x,4} = \frac{\pi \cdot 0,3^4}{4} + 0,2827 \cdot (1,2 - 0,9512)^2 = 0,02386 \text{ m}^4$$

$$I_{y,4} = \frac{\pi \cdot 0,3^4}{4} + 0,2827 \cdot (0,5 - 0,6242)^2 = 0,01072 \text{ m}^4$$

$$D_{xy,4} = 0 + 0,2827 \cdot (1,2 - 0,9512) \cdot (0,5 - 0,6242) = -0,00874 \text{ m}^4$$

Kruhová část 4 tvoří otvor, proto i v tomto příkladu budeme v následujících sumách členy odpovídající této části odečítat. Celkové momenty setrvačnosti a deviační moment složeného obrazce určíme podle vztahů (3.33):

$$\begin{aligned} I_{x_i} &= I_{x,1} + I_{x,2} + I_{x,3} - I_{x,4} = \\ &= 0,42683 + 0,03327 + 0,09980 - 0,02386 = 0,53604 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_i} &= I_{y,1} + I_{y,2} + I_{y,3} - I_{y,4} = \\ &= 0,16789 + 0,07148 + 0,20319 - 0,01072 = 0,43184 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{x_i y_i} &= D_{xy,1} + D_{xy,2} + D_{xy,3} - D_{xy,4} = \\ &= 0,02137 + (-0,04489) + 0,13195 - (-0,00874) = 0,11717 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti k hlavním osám určíme ze vztahu (3.18)

$$\begin{aligned}
 I_{\max,\min} &= \frac{I_{x_t} + I_{y_t}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_t} - I_{y_t})^2 + 4D_{x_t y_t}^2} = \\
 &= \frac{0,53604 + 0,43184}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0,53604 - 0,43184)^2 + 4 \cdot 0,11717^2}, \\
 I_{\max} &= 0,61216 \text{ m}^4; \quad I_{\min} = 0,35571 \text{ m}^4.
 \end{aligned}$$

Směr hlavních os určíme ze vztahu (3.15)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{x_t y_t}}{I_{y_t} - I_{x_t}} = \frac{2 \cdot 0,11717}{0,43184 - 0,53604} = -2,2489.$$

Tomu odpovídají dva úhly

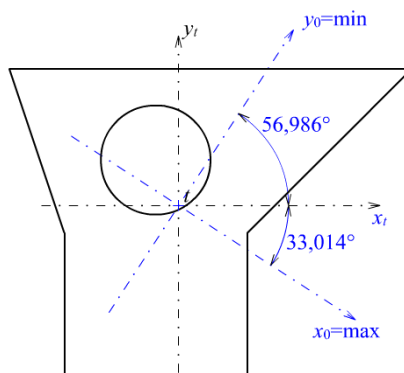
$$\alpha_0 = -33,014^\circ \text{ a } \alpha_0 = 56,986^\circ,$$

které určují polohu hlavních centrálních os  $x_0$  a  $y_0$ , ke kterým jsou vztaženy hlavní centrální momenty setrvačnosti. Protože deviační moment k původním těžištním osám složeného obrazce je kladný, prochází osa setrvačnosti, jíž přísluší maximální moment setrvačnosti  $I_{\max}$ , druhým a čtvrtým kvadrantem (viz obr. 3.11).

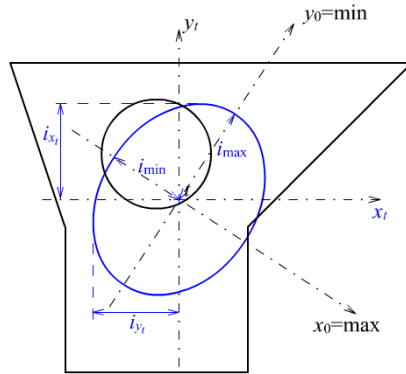
Poloměry setrvačnosti určíme podle vztahů (3.23) a (3.27)

$$\begin{aligned}
 i_{x_t} &= \sqrt{\frac{I_{x_t}}{A}} = \sqrt{\frac{0,53604}{1,9573}} = 0,5233 \text{ m}, \\
 i_{y_t} &= \sqrt{\frac{I_{y_t}}{A}} = \sqrt{\frac{0,43184}{1,9573}} = 0,4697 \text{ m}, \\
 i_{\max} &= \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{0,61216}{1,9573}} = 0,5592 \text{ m}, \\
 i_{\min} &= \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,35571}{1,9573}} = 0,4263 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Pomocí vypočtených poloměrů setrvačnosti pak sestojíme elipsu setrvačnosti (viz obr. 3.12).



Obr. 3.11: Hlavní centrální osy setrvačnosti



Obr. 3.12: Elipsa setrvačnosti

## Shrnutí

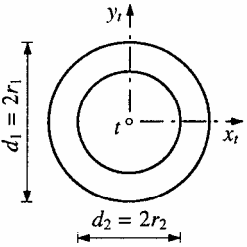
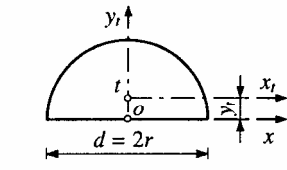
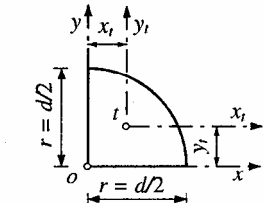
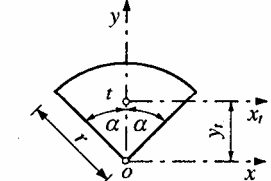
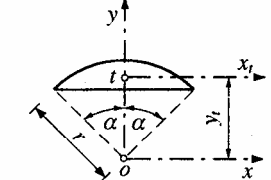
Pro účely statické analýzy prutových konstrukcí byl zaveden a osvětlen pojem kvadratických momentů rovinných obrazců. Definovali jsme pojmy momenty setrvačnosti a devisační momenty jednoduchých obrazců. Zabývali jsme se pak jejich transformacemi k posunutým osám (Steinerova věta) a k pootočeným souřadnicovým osám, abychom analyticky i graficky (pomocí Mohrovy kružnice) mohli vyšetřit hlavní, resp. hlavní centrální momenty setrvačnosti. Pojednáno bylo také o poloměru setrvačnosti a elipse setrvačnosti. Definován byl též polární moment setrvačnosti.



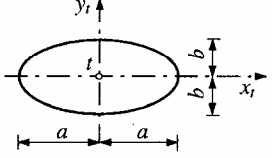
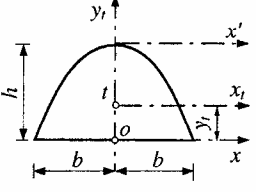
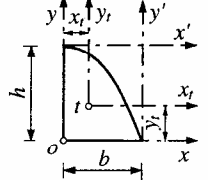
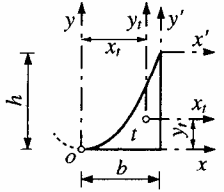
Tab. 3.1: Geometrické charakteristiky rovinných obrazců

	Tvar obrazce	Obsah $A$ , poloha těžiště $t$ , momenty setrvačnosti $I$ , polární $I_t$ a deviační $D$
Obdélník		$A = bh; x_t = \frac{b}{2}; y_t = \frac{h}{2}$ $I_{x_t} = \frac{1}{12}bh^3; I_{y_t} = \frac{1}{12}hb^3; I_x = \frac{1}{3}bh^3; I_y = \frac{1}{3}hb^3$ $D_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}; I_t = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
Čtverec		$A = a^2; x_t = y_t = \frac{a}{2}$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{a^4}{12}; I_x = I_y = \frac{a^4}{3}$ $D_{xy} = \frac{a^4}{4}; I_t = \frac{a^4}{6}$
Pravouhlý trojúhelník		$A = \frac{1}{2}bh; x_t = \frac{b}{3}; y_t = \frac{h}{3}$ $I_{x_t} = \frac{1}{36}bh^3; I_{y_t} = \frac{1}{36}hb^3; D_{x_t y_t} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3; I_y = \frac{1}{12}hb^3; D_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$ $I_x = \frac{1}{4}bh^3; I_t = \frac{bh}{36}(b^2 + h^2)$
Lichoběžník		$A = \frac{1}{2}(a+b)h; x_t = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}; y_t = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$ $I_{x_t} = \frac{(a^2 + 4ab + b^2)h^3}{36(a+b)}; I_{x'} = \frac{(3a+b)h^3}{12}$ $I_x = \frac{(a+3b)h^3}{12}; D_{xy} = \frac{(a^2 + 2ab + 3b^2)h^2}{24}$
Kruh		$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}; I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_t = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$

Tab. 3.1: Geometrické charakteristiky rovinných obrazců (pokračování)

Tvar obrazce		Obsah $A$ , poloha těžiště $t$ , momenty setrvačnosti $I$ , polární $I$ , a deviační $D$
Mezikruží		$A = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$ $I_{x_i} = I_{y_i} = \frac{\pi}{4}(r_1^4 - r_2^4) = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4)$ $I_t = \frac{\pi}{2}(r_1^4 - r_2^4) = \frac{\pi}{32}(d_1^4 - d_2^4)$
Půlkruh		$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8}; \quad y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ $I_{x_i} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$ $I_x = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128} = I_{y_i}; \quad I_o = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$
Čtvrtkruh		$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi d^2}{16}; \quad x_t = y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ $I_{x_i} = I_{y_i} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$ $D_{x_i y_i} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$
Kruhová výseč		$A = \alpha r^2; \quad y_t = \frac{2}{3}r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ $I_{x_i} = r^4 \left( \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8} - \frac{4 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right); \quad I_o = \frac{\alpha r^4}{2}$ $I_x = \frac{r^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha); \quad I_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$
Kruhová tiseč		$A = \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) r^2; \quad y_t = \frac{4r \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$ $I_{x_i} = r^4 \left( \frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{16} - \frac{8}{9} \frac{\sin^6 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$ $I_x = \frac{r^4}{16}(4\alpha - \sin 4\alpha); \quad I_y = \frac{r^4}{48}(12\alpha - 8 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$

Tab. 3.1: Geometrické charakteristiky rovinných obrazců (pokračování)

	Tvar obrazce	Obsah $A$ , poloha těžiště $t$ , momenty setrvačnosti $I$ , polární $I$ , a deviační $D$
Elipsa		$A = \pi ab$ $I_{x_t} = \frac{\pi}{4} ab^3; \quad I_{y_t} = \frac{\pi}{4} ba^3$ $I_t = \frac{\pi}{4} ab (a^2 + b^2)$
Parabolická úseč		$A = \frac{4}{3} bh; \quad y_t = \frac{2}{5} h$ $I_{x_t} = \frac{16}{175} bh^3; \quad I_{y_t} = \frac{4}{15} hb^3$ $I_x = \frac{32}{105} bh^3; \quad I_x = \frac{4}{7} bh^3$
Půl parabolické úseče		$A = \frac{2}{3} bh; \quad x_t = \frac{3}{8} b; \quad y_t = \frac{2}{5} h$ $I_{x_t} = \frac{8}{175} bh^3; \quad I_x = \frac{16}{105} bh^3; \quad I_{x'} = \frac{2}{7} bh^3$ $I_{y_t} = \frac{19}{480} hb^3; \quad I_y = \frac{2}{15} hb^3; \quad I_{y'} = \frac{3}{10} hb^3$
Parabolický trojúhelník		$A = \frac{1}{3} bh; \quad x_t = \frac{3}{4} b; \quad y_t = \frac{3}{10} h$ $I_{x_t} = \frac{37}{2100} bh^3; \quad I_x = \frac{1}{21} bh^3; \quad I_{x'} = \frac{19}{105} bh^3$ $I_{y_t} = \frac{1}{80} hb^3; \quad I_y = \frac{1}{5} hb^3; \quad I_{y'} = \frac{1}{30} hb^3$

## 4 Studijní prameny

### 4.1 Seznam použité literatury

- [1] Kadlčák, J., Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí I. Základy stavební mechaniky. Staticky určité prutové konstrukce*. Druhé vydání. VUTIUM, Brno 2000
- [2] Novotná, H., Cais, S., Ptáček, M. *Teoretická mechanika*. SNTL/ALFA, Praha 1983



### 4.2 Seznam doplňkové studijní literatury

- [3] Halliday, D., Resnick, R. a Walker, J. *Fyzika*. VUTIUM, Brno 2000
- [4] Juliš, K., Brepta, R. *Mechanika I. Statika a kinematika*. Technický průvodce 65. SNTL, Praha 1986
- [5] Meriam, J. L. *Engineering Mechanics. Statics and Dynamics*. John Wiley & Sons, New York 1978
- [6] Cais, S. *Statika stavebních konstrukcí – Dějiny stavební mechaniky*. Doplňková skripta. ČVUT, Praha 1991
- [7] Novák, O., Hořejší, J. a kol. *Statické tabulky pro stavební praxi*. Technický průvodce 51. Druhé přepracované vydání, SNTL, Praha 1978



### 4.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

- [8] <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians>



## **Poznámky**