Teorie hromadné obsluhy (Queuing Theory)

Mgr. Šárka Voráčová, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky

voracova@fd.cvut.cz

http://www.fd.cvut.cz/department/k611/PEDAGOG/K611THO.html

Literatura

- Š. Voráčová, M. Pěnička, J. Veselý: Úvod do modelování procesů Petriho sítěmi, skriptum FD ČVUT v Praze, 2008
- M. Friesl: Statistika hypertextově, home.zcu.cz/~friesl/hpsb/tit.html
- H. Řezanková & kol: Interaktivní učebnice statistiky, http://iastat.vse.cz/

Ke stažení na vnitřní síti H: studenti /THO

- G. Dohnal: učební text THO
- Operační analýza, podklady k přenáškám ZČU Plzeň 2003
- J. Šrámek: Pravděpodobnost a statistika – absolutní minimum

Příklady systému hromadné obsluhy

zákazník	linka	obsluha
letadlo	přistávací dráha	přistání
kupující	pokladna	placení nákupu
telefonní účastník	centrála	spojení
stroj	seřizovač	seřízení
cestující	autobus	doprava
počítač	tiskárna	vytisknutí úlohy
automobil	SSZ	průjezd křižovatkou

THO – odvětví aplikované matematiky, zkoumá činnost systémů, v nichž se opakovaně vyskytují požadavky vykonat posloupnost operací, které jsou co do vzniku a okamžiku výskytu zpravidla náhodné

- Cílem THO je vyhledávání závislostí mezi charakterem vstupu požadavků, produktivitou linek a efektivností obsluhy.

  Na základě těchto znalostí můžeme zlepšit činnost systému pomocí účelných změn.

- VYUŽITÍ LINKY X ZTRÁTA ČASU ZÁKAZNÍKŮ

Psychologie front

- Prostředí
- Očekávání
- Spravedlnost

Historie

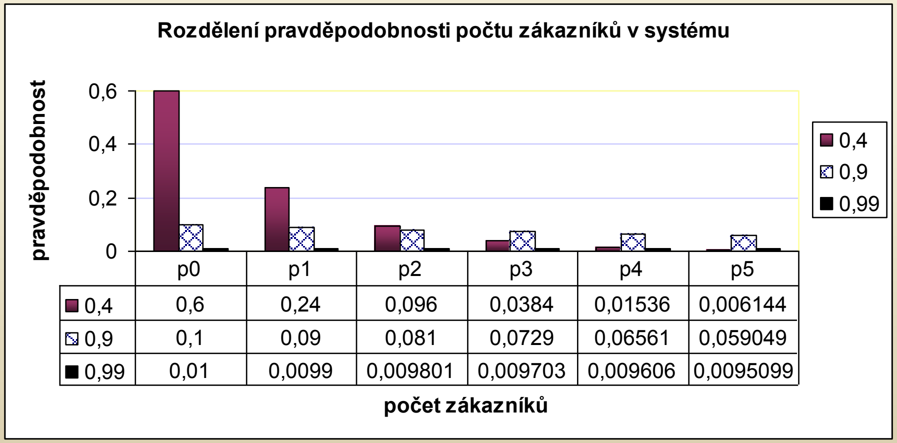
- Dánský matematik Agner Krarup Erlang (1878 – 1929)
  1908 začíná pro firmu Copenhagen Telephone pracovat na úkolu zkrátit čekací doby vybavování telefoních hovorů
  - 1909 The Theory of Probability and Telephone Conversations
  - 1917 vztahy pro výpočet množství odmítnutých hovorů a čekacích dob na navázání hovor
- Další průkopníci: Poloczech, Kolmogorov, Khinchin, Palme
  - 1953 Kendallova klasifikace systémů hromadné obsluhy X/Y/n
  - 1969 Littleovy formule
  - 1986 1.číslo odb. časopisu The Journal of Queueing Systems
  - 1995 1. mezinárodní symposium THO

Metody Teorie hromadné obsluhy

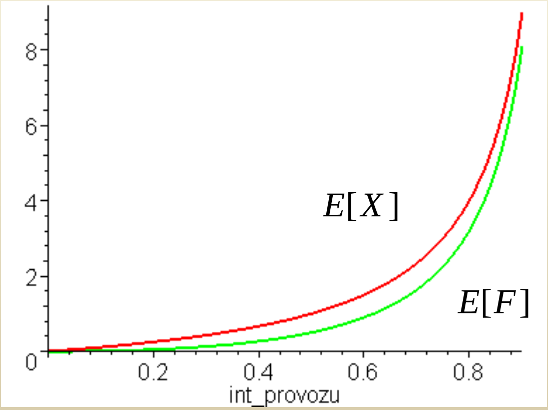
- analytické
  - Výsledkem je obecná funkce
  - lze studovat vnitřní souvislosti

Příklad: V systému M / M / 1 / ∞ se pravděpodobnost, že je linka obsazena *k* zákazníky řídí předpisem:

$$p_k = (1-\rho)\rho^k$$



	p0	p1	p2	p3	p4	p5
0,4	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,01536	0,006144
0,9	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561	0,059049
0,99	0,01	0,0099	0,009801	0,009703	0,009606	0,0095099

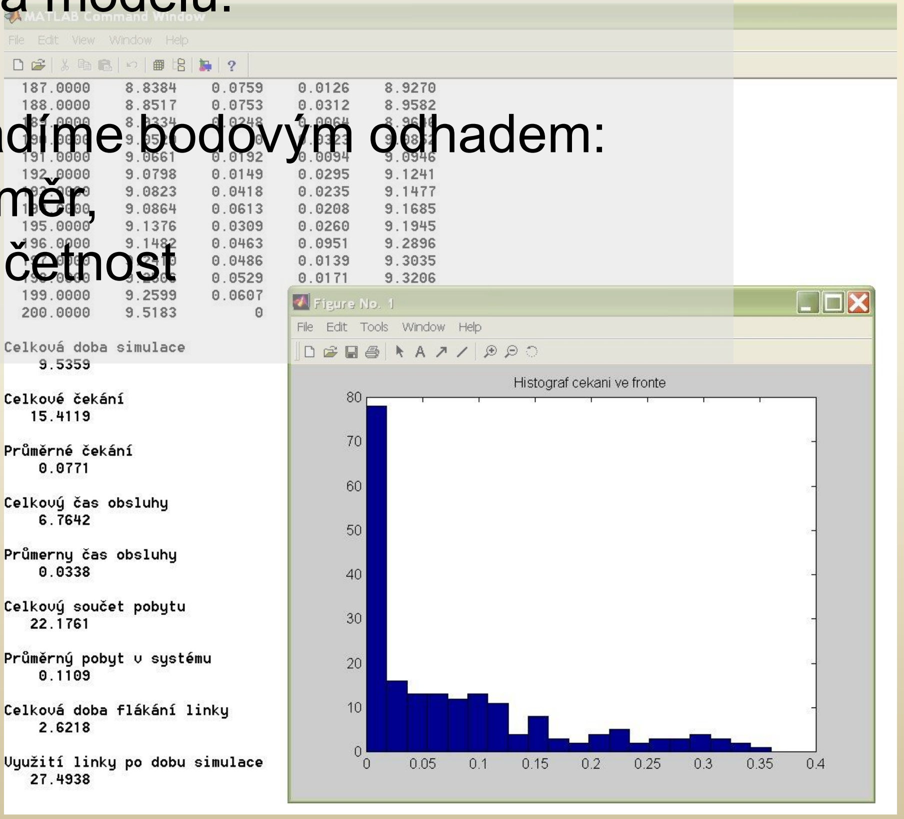


Metody Teorie hromadné obsluhy

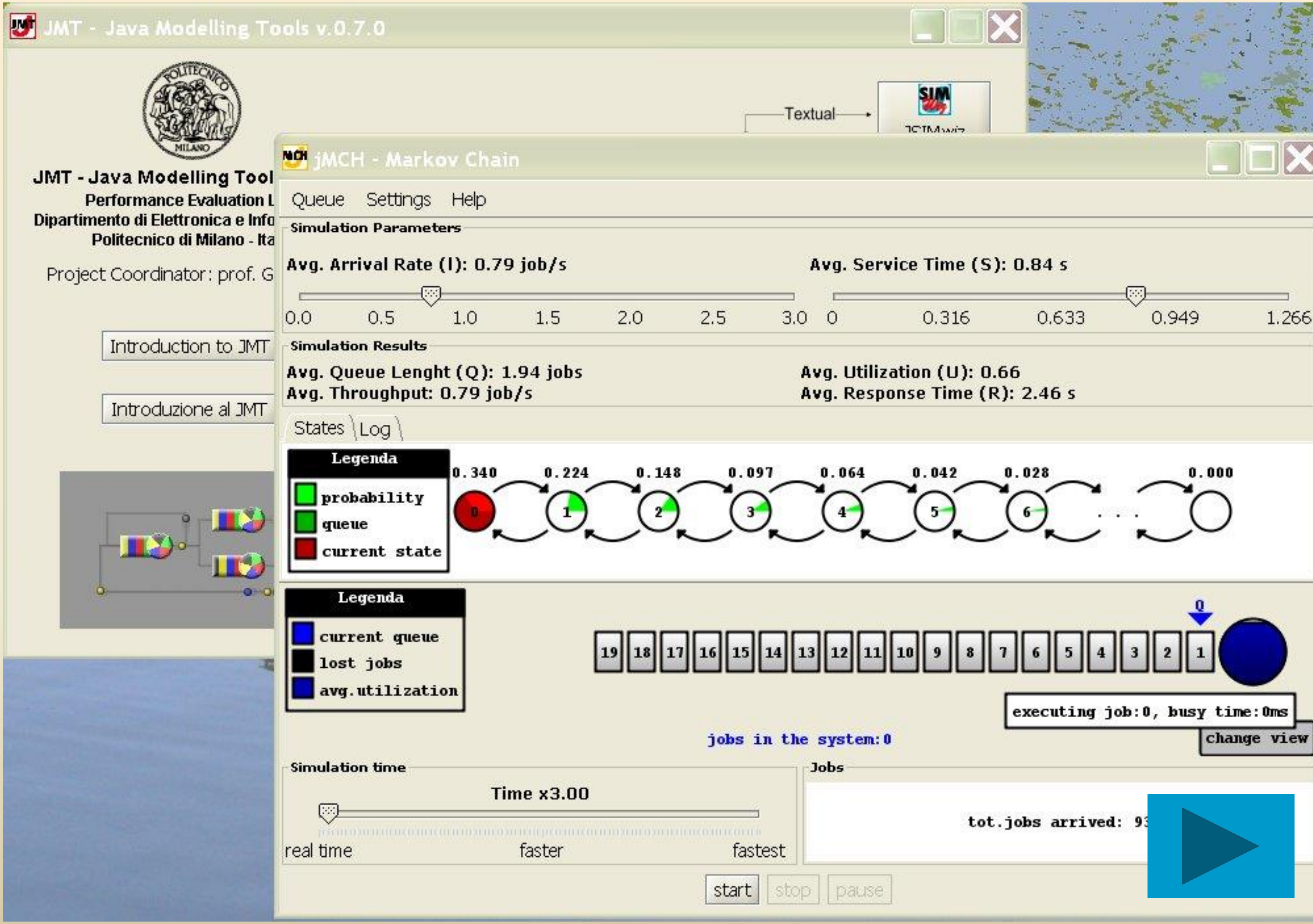
- **Simulační**

  – Systém nahradíme simulačním modelem se stejnými pravděpodobnostními charakteristikami a chování mnohonásobně simulujeme na modelu.

  – Charakteristiky výstupu nahradíme bodovým odhadem:
  střední hodnota - průměr,
  pravděpodobnost - rel. četnost

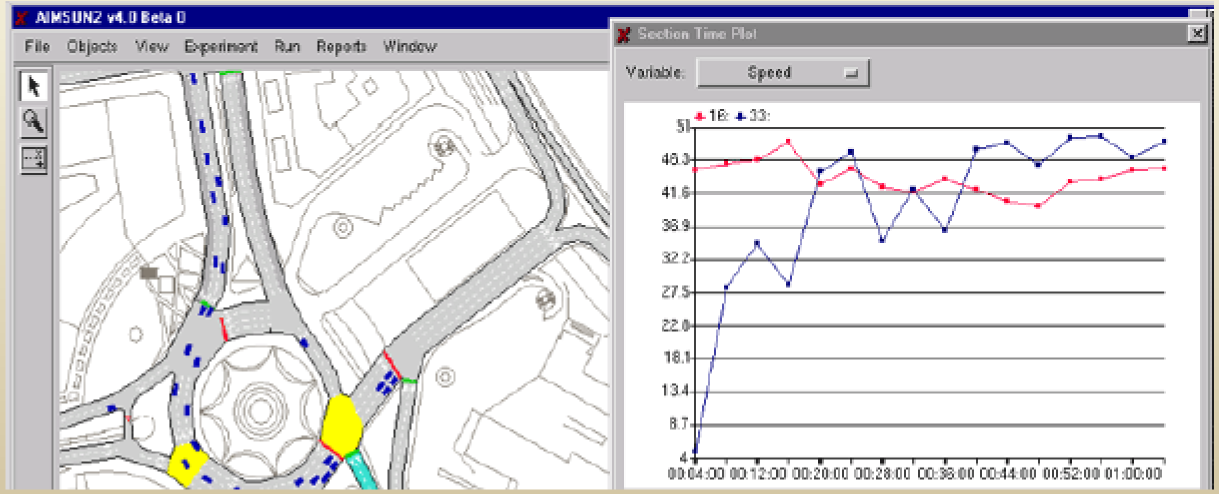


Java Modelling Tools



THO v dopravě

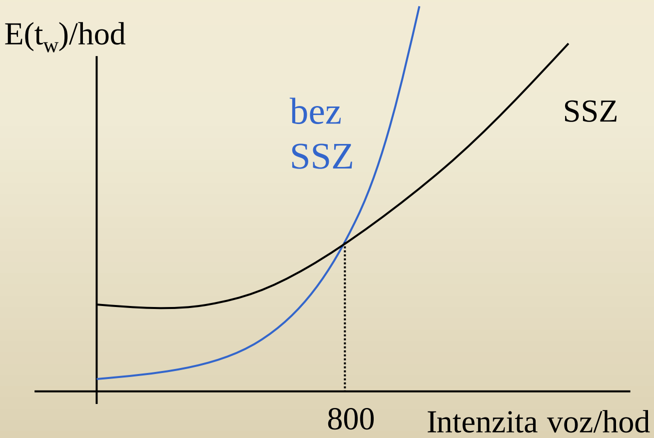
- řízené i neřízené křižovatky, okružní i mimoúrovňové křižovatky, chodecké přechody,
- posouzení vzniku kongescí jejich důvodů a dopadů
- vliv preference MHD, pěší a cyklistické dopravy na kapacitu komunikací
- reakce dopravy na havárie a jiné mimořádnosti,
- prognózované nárůsty intenzit dopravy, např. při nové výstavbě,
- přínos telematických aplikací (navádění, proměnné dopravní značení)



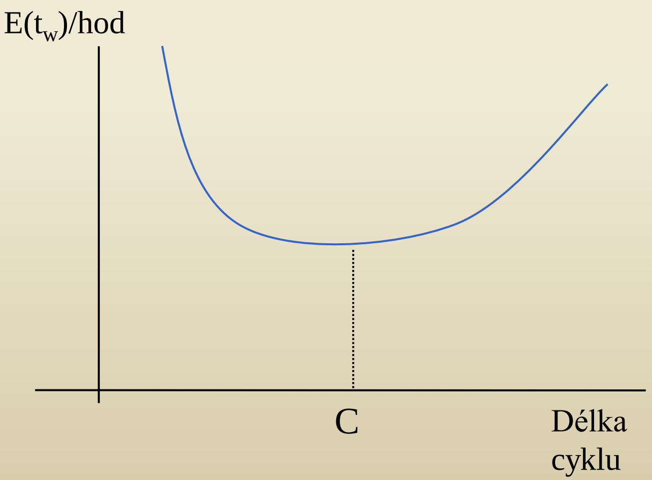
THO v dopravě

- signální plány
- dynamické metody řízení SSZ,

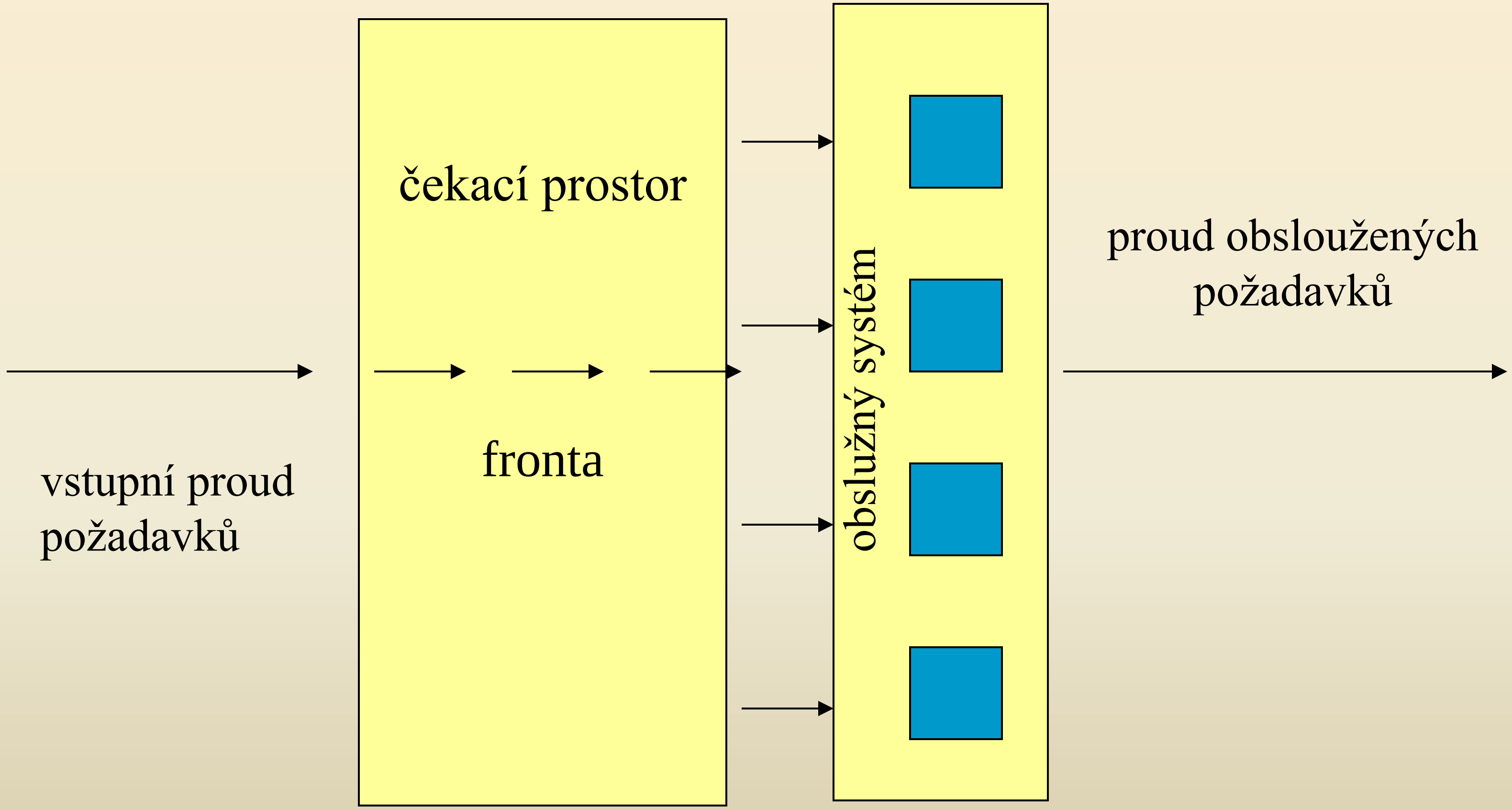
Závislost ztrátových časů na intenzitě



Závislost ztrátových časů na délce cyklu signálního plánu



Systém hromadné obsluhy



Jaké základní informace o systému hromadné obsluhy potřebujeme?

- Popis zákonitostí vzniku a příchodu požadavku do systému (vstupní tok)
- Popis osudu vstoupivších zákazníků v případě, že nemohou být hned obslouženi.
  (frontový režim)
- Počet obslužných linek a popis průběhu vlastní obsluhy (organizace obsluhy)

$\Rightarrow$Motivace vzniku Kendallovy klasifikace systémů hromadné obsluhy

X / Y / n

Náhoda při hře

Martingale:

- Vsadíš řekněme 1 dolar na barvu, kterou si vybereš (červená či černá) a budeš stále sázet jen na ni.
- Roztočíš ruletu a čekáš …
- Pokud prohraješ, zdvojnásobíš sázku, takže vsadíš příště 2 dolary. Pak řekněme, že znova prohraješ, tak příště vsadíš 4 dolary. A když zas prohraješ, tak příště vsadíš 8 dolarů. Řekněme, že už konečně padla barva, kterou jsi vsadil. Casino ti dá ke tvým vsazeným 8 dolarům svých 8, takže máš teď 16 dolarů. Spočítej si, kolik jsi vsadil: 1 + 2 + 4 + 8 = 15 dolarů, takže - vydělal jsi 1 dolar!
- Pak začneš sázet znova 1 dolar…

Náhoda při hře

Pravděpodobnost výhry při sázce na barvu:

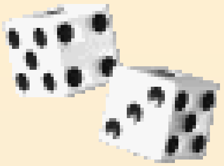
p = 18/37 = 0,486

Průměrný “zisk” při *n* sázkách částky č:

- n.č + 2.č.n.p = n.č.(-0,027)

Dlouhodobý zisk kasina je 2,7% ze vsazených částek.

Chevalier de Mere



- **Hod jednou kostkou**
  Chevalier de Mere přijímal sázky na to, že hodí minimálně jednu šestku ve čtyřech po sobě následujících hodech.
  Pravděpodobnost padnutí šestky je v každém hodu 1/6. Domníval se, že jeho šance na padnutí šestky ve čtyřech hodech je tedy (1/6) × 4 = 2/3.
- **Správně:** Vypočítáme pravděpodobnost doplňkového jevu k počtu nepříznivých možností: $P(A) = 1 - (5/6)^4 = 0{,}517746914$

- **Hod dvěma kostkami.**
  Vyhrajeme, pokud se nám alespoň jedenkrát podaří hodit 2 šestky ve 24 hodech.
  Pravděpodobnost vrhnutí dvou šestek v jednom hodu je 1/36.
  De Mere předpokládal, že jeho šance je tedy (1/36) × 24 a tedy opět 2/3 .
- **Správně**: Pravděpodobnost výhry bude:
  $P(A) = 1 - (35/36)^{24} = 0{,}491403876$.

Základy teorie pravděpodobnosti

- Prostor elementárních jevů *S* – množina všech možných jevů
- Náhodný jev *A,B,...* – podmnožina výběrového prostoru *S*

- každý jev *A* je svázán s mírou možnosti (pravděpodobnosti) *P(A)* jeho výskytu při opakování

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N}$$

Vlastnosti pravděpodobnosti:

$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$$

Podmíněná pravděpodobnost

- Pravděpodobnost, že nastal jev A za podmínky, že nastal jev B, se nazývá podmíněná pravděpodobnost. Označujeme P(A/B)

  - Házíme kostkou.
  - Náhodný jev *A* – padne číslo 5
B – padne liché číslo
  - Pravděpodobnost, že padne číslo 5 za podmínky, že padlo liché číslo
$P(A/B)=1/3$

Zákon úplné pravděpodobnosti, Bayesův vztah

- Uvažujme jevy $\{B_1, B_2, \ldots B_n\}$ jako úplný systém neslučitelných jevů výběrového prostoru S. Pak

$$A = \bigcup_i \left(A \cap B_i \right)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A / B_i) \cdot P(B_i)$$

Aposteriorn
í psti

Apriorní psti

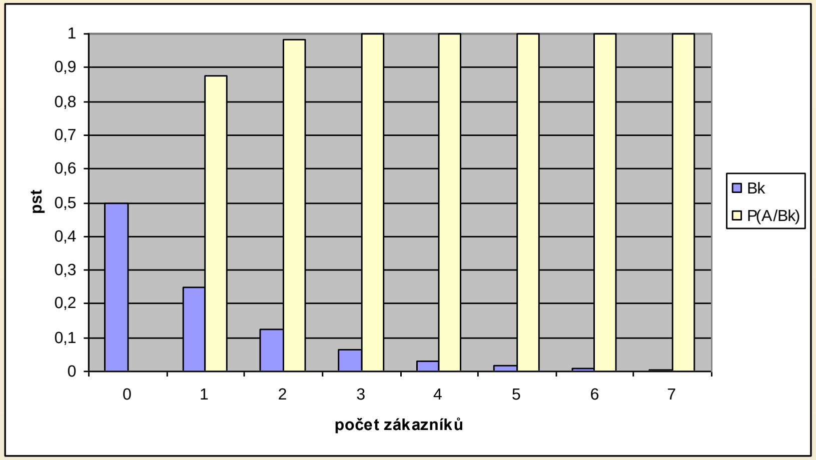
$$P(B_i / A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A / B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / B_i) \cdot P(B_i)}$$

Příklad M/M/1

- A – příchozí zákazník rezignuje na obsluhu
- B_k – systém je v okamžiku příchodu zákazníka obsazen k zákazníky

$$P\left(B_k\right)=\left(1-\rho\right)\rho^k;\ \rho<1$$

$$P\left(A/B_k\right)=1-\left(\frac{1}{8}\right)^k$$



1. Určete pravděpodobnost, že náhodně příchozí zákazník rezignuje na obsluhu.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)\cdot P(B_i)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right](1-\rho)\rho^k=\left(1-\rho\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho^k\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{8}\right)^k\right]=1-\frac{1-\rho}{1-\frac{\rho}{8}}=\frac{-7\rho}{\rho-8}$$

2. Určete pst, že je v systému 5 zákazníků, víme-li, že zákazník rezignoval na obsluhu.

$$P(B_5/A)=\frac{P(A/B_5)\cdot P(B_5)}{P(A)}=\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^5\left(1-\rho\right)\rho^5}{\frac{-7\rho}{\rho-8}}=\frac{4681}{32768}\left(\rho-1\right)\rho^4\left(\rho-8\right)$$

Náhodná veličina

Výsledek náhodného pokusu, daný reálným číslem je hodnotou náhodné veličiny.

Náhodná veličina je libovolná reálná funkce *X* definovaná na množině elementárních E pravděpodobnostního prostoru S.

- **Diskrétní náhodná veličina**
  může nabývat pouze spočetně mnoha hodnot
  (počet aut v náhodně vybraná domácnost, výsledek hodu kostkou)
- **Spojitá náhodná veličina**
  může nabývat všech hodnot z nějakého intervalu
  (doba bezporuchového chodu zařízení, výška náhodně vybraného člověka)

Náhodná veličina

- Proměnná, jejíž hodnota je určena výsledkem náhodného pokusu.
- Každému el. jevu *E* z prostoru všech jevů S přiřadíme reálné číslo X(E), takové, že pro každé reálné číslo *a* je jevem i množina

$$A = \{E; X(E) \le a\}$$

- **Diskrétní náhodná veličina** (množina hodnot je konečná, nebo spočetná) je popsána pravděpodobnostní funkcí P(*a*)=P(*X*(*E*)=a), nebo diskrétní distribuční funkcí
- **Spojitá náhodná veličina** (množina hodnot je interval $I \subset R$)
  - distribuční funkce F(*x*)

$$F(x) = P(X \le x)$$

  - hustota pravděpodobnosti f(*x*)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \qquad F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(u)du$$

Střední hodnota a rozptyl

- Střední hodnota
  - diskrétní náhodné veličiny $$E[x] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$
  - spojité náhodné veličiny $$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

vlastnosti střední hodnoty:
E[c.X] = c.E[X]
E[X+Y] = E[X] + E[Y]
E[X .Y] = E[X] . E[Y] pro X, Y nezávislé

- Rozptyl
  - diskrétní náhodné veličiny $$V[x] = \sum_i \left(x_i - E[X]\right)^2 P(X = x_i)$$
  - spojité náhodné veličiny $$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f(x) dx$$

Příklad:

Zkoumáme systém se dvěma linkami a s omezenou kapacitou zásobníku r =2. Na základě relativních četností jsme odhadli pravděpodobnosti stavu systému.

$$p_0 = \frac{1}{16};\; p_1 = \frac{4}{16}; p_2 = \frac{6}{16}; p_3 = \frac{4}{16}; p_4 = \frac{1}{16};$$

Určete :

- průměrný počet zákazníků v systému
- průměrný počet zákazníků ve frontě
- vytíženost systému

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{4}{16} + 2\cdot\frac{6}{16} + 3\cdot\frac{4}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = 2$$

$$E[F] = 1\cdot\frac{4}{16} + 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

$$E[X] = E[F] + E[S]$$

$$\frac{E[S]}{2} = \frac{1}{2}\left[1\cdot\frac{4}{16} + 2\cdot\left(\frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{8} = 81\%$$

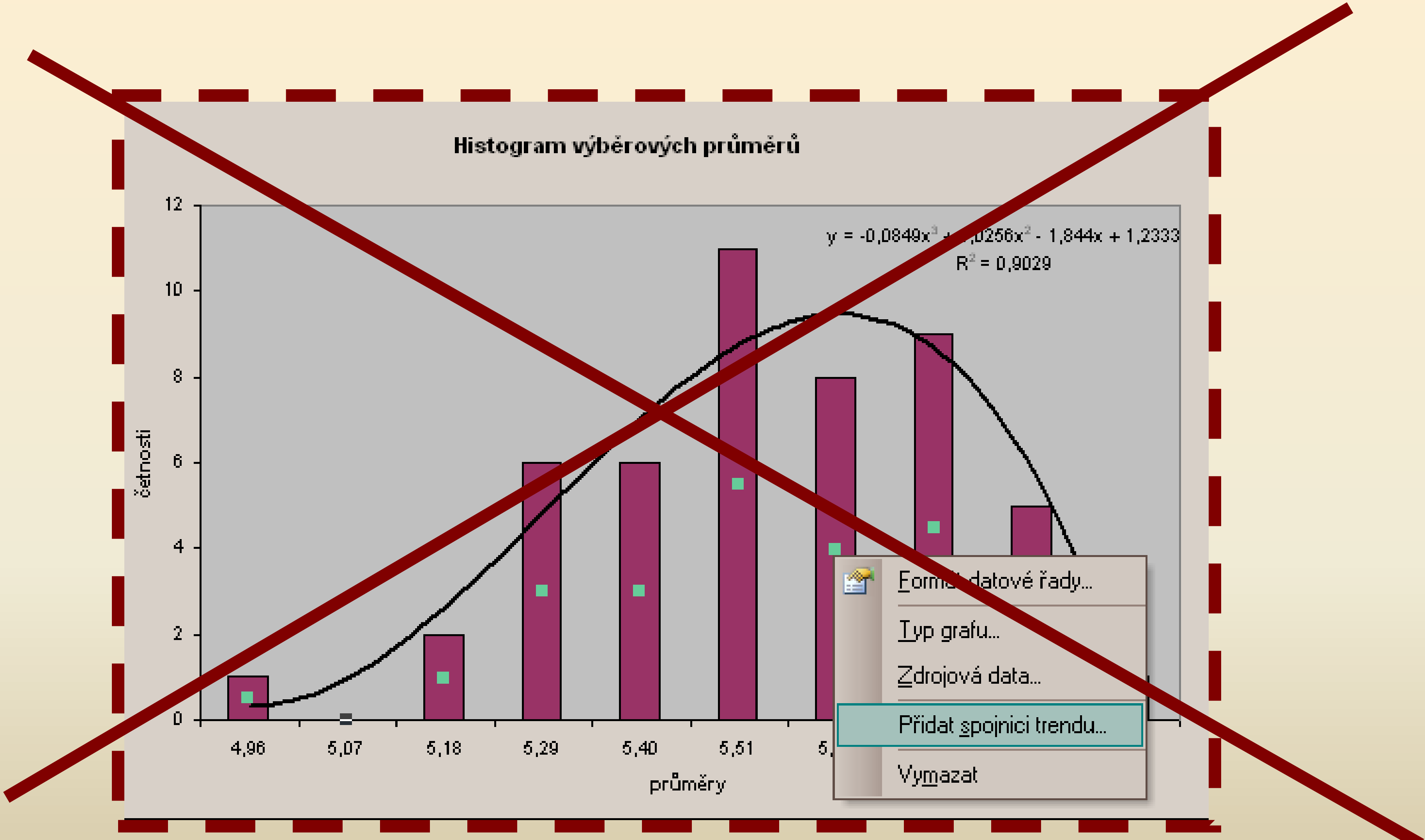
Vybrané rozložení pravděpodobnosti

- Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti
  - Binomické
  - Geometrické
  - Poissonovo

- Spojité rozdělení pravděpodobnosti
  - Rovnoměrné
  - Normální
  - Exponenciální
  - Erlangovo

http://www.socr.ucla.edu/htmls/SOCR_Distributions.html

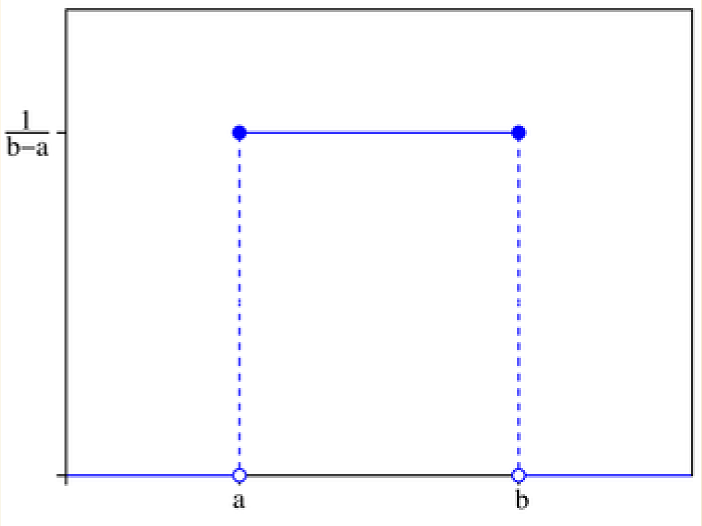
Spojnice trendu x hustota pravděpodobnosti



Rovnoměrné rozdělení spojité náhodné veličiny

$$f(x)=\frac{1}{b-a};\quad a\le x\le b$$

$$E[X]=\frac{a+b}{2};\quad V[X]=\frac{(a+b)^2}{12}$$



Příklad: Tramvaje jezdí pravidelně každých 5 minut. Na zastávku přijdeme náhodně.

1. Určete pravděpodobnost, že budeme čekat nejvýš 1 minutu

$$f(x)=\frac{1}{5};\quad 0\le x\le 5$$

$$P(x<1)=\int_0^1\frac{1}{5}dx=\left[\frac{1}{5}x\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

2. Určete průměrnou dobu čekání

$$E[X]=\frac{5}{2};$$

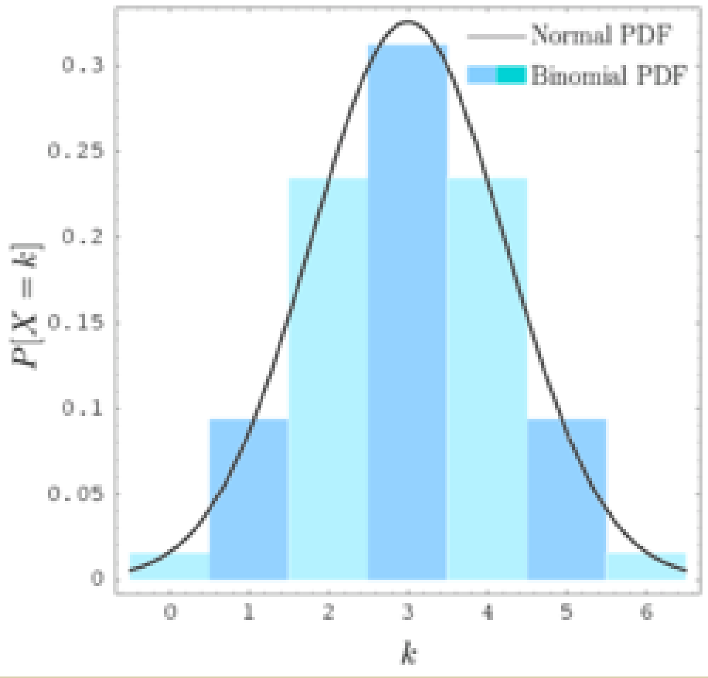
Binomické rozdělení diskrétní náhodné veličiny

- Nechť i je počet úspěšných výsledků z *n* provedených nezávislých experimentů, kde pravděpodobnost úspěšného výsledku je dána *p*, potom

$$p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$E[X] = n \cdot p$$

$$V[X] = np(1-p)$$



Geometrické rozdělení diskrétní náhodné veličiny

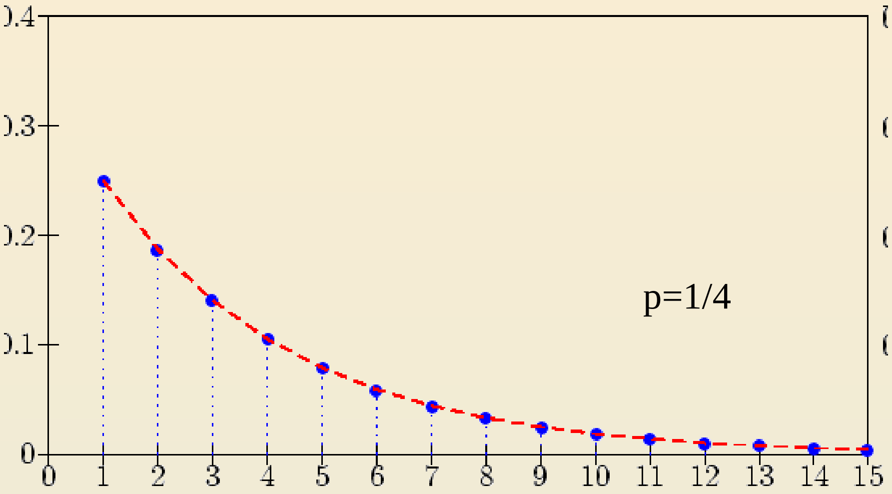
Počet pokusů do prvního úspěšného výsledku.

Experimenty jsou nezávislé, pravděpodobnost úspěchu je dána *p*.

$$p_i = P(X = i) = p\ (1-p)^{i-1}$$

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

$$V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$



Příklad: Zařízení kontrolujeme pravidelně jednou za hodinu. Pravděpodobnost, že se za hodinu zařízení nepokazí je 0,9. Určete pravděpodobnost, že k chybě zařízení dojde při šesté kontrole. Určete průměrnou dobu bezvadného chodu.

$$p = 0{,}1$$

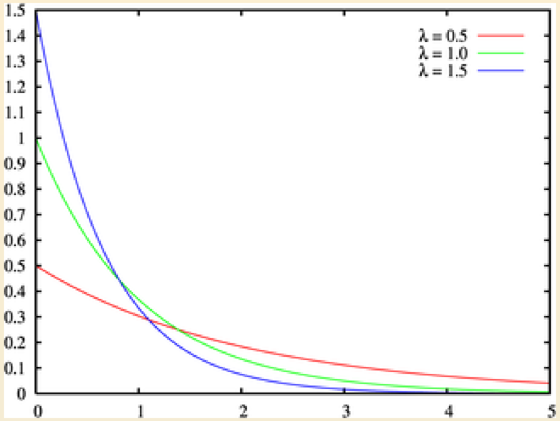
$$P(X = 6) = 0{,}1 \cdot (0{,}9)^5 = 0{,}059$$

$$E[X] = \frac{1}{0.1} = 10\ (hod)$$

Exponenciální rozdělení spojité náhodné veličiny

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \quad 0 \le x \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}; \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$



Příklad:

1. Doba dvou po sobě následujících jevů je exponenciálně rozdělená náhodná veličina s parametrem λ. Určete průměrný počet jevů za časovou jednotku.

$$E[T] = \frac{1}{\lambda}$$

2. Doba bezvadného chodu nového automobilu je náhodná veličina λ=1/10 [rok].
a) Určete pravděpodobnost, že se do 5 let neobjeví žádná závada.

$$P(X \ge 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10}x}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = 0,606$$

b) Určete průměrnou dobu bezvadného chodu auta.

$$E[T] = \frac{1}{0.1} = 10 \ (let)$$

Poissonovo rozdělení diskrétní náhodné veličiny

- počet výskytů sledovaného jevu v určitém časovém intervalu t, jestliže posloupnost časových okamžiků sledovaného jevu tvoří ordinální homogenní proces s nezávislými přírůstky (Elementární tok).

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad E[X]=\lambda \cdot t$$