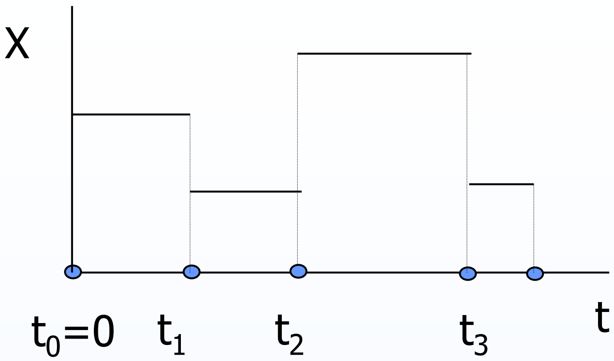
Markovovy řetězce se spojitým časem
CTMC
(Continuous – time Markov Chain)

	1	2	3	4	5
1	0	0,1	0,2	0,3	0,4
2	0,2	0,3	0	0,2	0,3
3	0,4	0,2	0,3	0,1	0
4	0	0,3	0,4	0,3	0
5	0	0	0	0	1

Markovovy procesy



Diskrétní stavový prostor $S=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Spojitý obor parametru t $t \in R$

Proces je Markovův (**CTMC**), jestliže znalost několika minulých hodnot funkce X nepřináší o rozložení pravděpodobnosti její současné hodnoty *X(t)* více informace nežli znalost jediné – té poslední z nich.

$$P(X(t)=e_i / X(t_n)=e_n, X(t_{n-1})=e_{n-1}, \ldots, X(t_0)=e_0) = P(X(t)=e_i / X(t_n)=e_n)$$

Označme $p_{ij}(s,t) = P(X(s+t)=e_j / X(s)=e_i)$

Daný proces je **homogenní**, jsou-li pravděpodobnosti p_{ij} závislé pouze na délce časového úseku *t*, nikoliv na jeho počátku *s*.

$$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t)$$

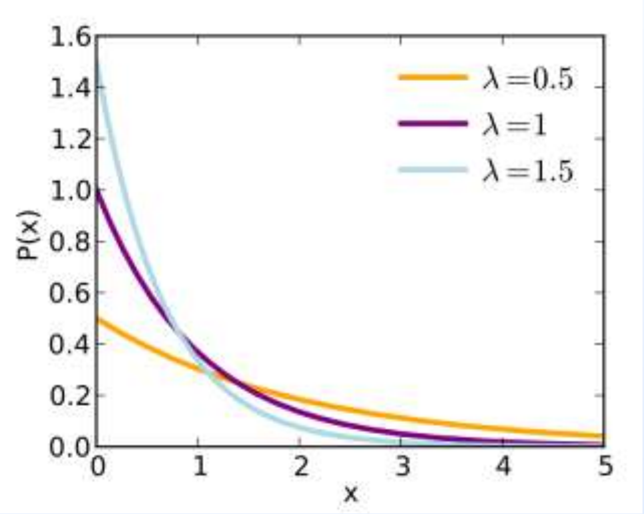
Rozložení intervalu mezi změnami

Předpokládejme, že v čase t je systém ve stavu e_i. Jaká je pravděpodobnost $p_{ii}(\Delta t)$, že se tento stav nezmění v průběhu časového intervalu $(t, t+\Delta t)$.

(nezávislá na t– proces je homogenní).

$$\left.\begin{array}{l} p_{ii}(0)=1 \\ p_{ii}(\Delta t) \text{ je klesající} \\ p_{ii}(\Delta t + \Delta s) = p_{ii}(\Delta t).\, p_{ii}(\Delta s) \end{array}\right\} \quad p_{ii}(\Delta t) = e^{-q\Delta t}$$

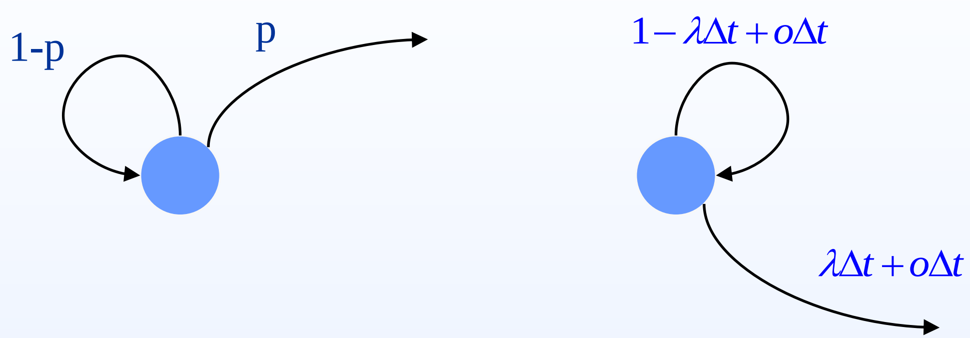
$$A(\Delta t) = P(\tau < \Delta t) = 1 - p_{ii}(\Delta t) = 1 - e^{-q\Delta t}$$



Doba setrvání homogenního Markovova procesu X(t) ve stavu e_i má exponenciální rozdělení s parametrem - q_{ii} (**intenzitou výstupu**).

Markovovy procesy
Diskrétní čas DTMC Spojitý čas CTMC

DTMC CTMC



- Pst., že během Δt se nic nestane,setrvání systému ve stavu

$$P(\tau > \Delta t) = e^{-q\cdot\Delta t} = 1 - q\cdot\Delta t + o(\Delta t)$$

- Pst., že za dobu Δt nastane událost, systém daný stav opustí

$$P(\tau < \Delta t) = 1 - e^{-q\cdot\Delta t} = q\cdot\Delta t + o(\Delta t)$$

Matice přechodu pro diskrétní čas

	1	2	3	4	5
1	0	0,1	0,2	0,3	0,4
2	0,2	0,3	0	0,2	0,3
3	0,4	0,2	0,3	0,1	0
4	0	0,3	0,4	0,3	0
5	0,5	0	0	0	0,5

$$a(n+1) = a(n) \cdot P$$

$$a(n) = a(0) \cdot P^{(n)}$$

Rozložení ustáleného stavu:

$$a = \lim_{n\to\infty} a(n) = a(0) \cdot \lim_{n\to\infty} P^n$$

$$\boxed{a = a \cdot P}$$

WolframAlpha computational intelligence

0.2y+0.4z+0.5v=x,0.1x+0.3y+0.2z+0.3u=y,0.2x+0.3z+(

Upload Examples Random

Input:

$\{0.2\,y + 0.4\,z + 0.5\,v = x,\ 0.1\,x + 0.3\,y + 0.2\,z + 0.3\,u = y,\ 0.2\,x + 0.3\,z + 0.4\,u = z,\ 0.3\,x + 0.2\,y + 0.1\,z + 0.3\,u = u,\ 0.4\,x + 0.3\,y + 0.5\,v = v,\ x + y + z + u + v = 1\}$

Solution:

$u \approx 0.168013,\quad v \approx 0.280206,\quad x \approx 0.235953,\quad y \approx 0.152405,\quad z \approx 0.163423$

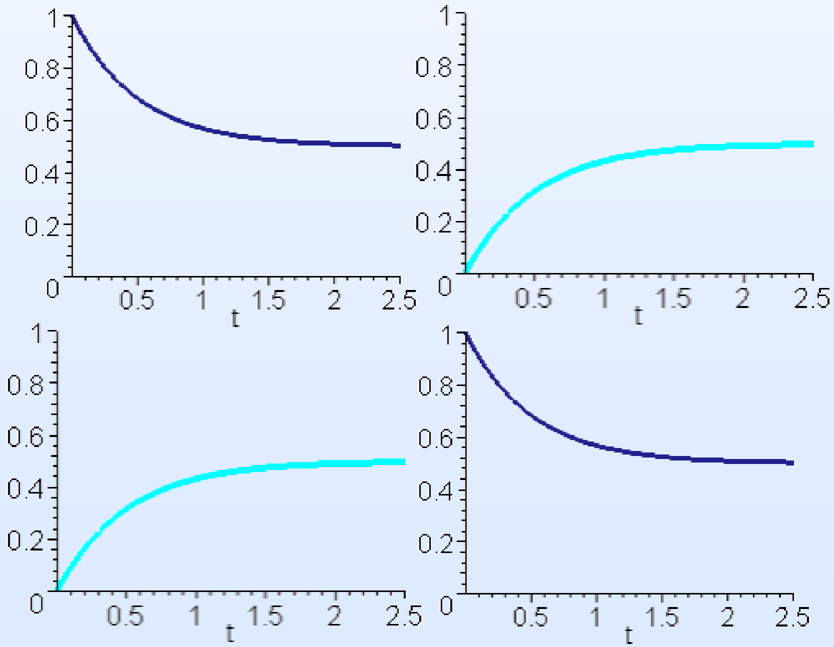
Matice přechodu pro spojitý čas

Matice přechodu – matice časových funkcí P(t)=(p_{ij}(t))

Matice P(t) je čtvercová, všechny její prvky jsou funkce se společným Df =[0, ∞)I Hf =[0,1]. Řádkový součet funkcí je konstantní funkce f(t) = 1.

Př: Je dán proces se dvěma stavy S={0,1}

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} & \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



Rozložení pravděpodobnosti v čase t

$$a(t) = a(0) \cdot P(t)$$

Matice přechodu pro spojitý čas

Matice přechodu – matice časových funkcí $P(\Delta t)=(p_{ij}(\Delta t))$

Pro $\Delta t \to 0$ $\quad p_{ij}(\Delta t)\to 0$ pro $i\neq j$

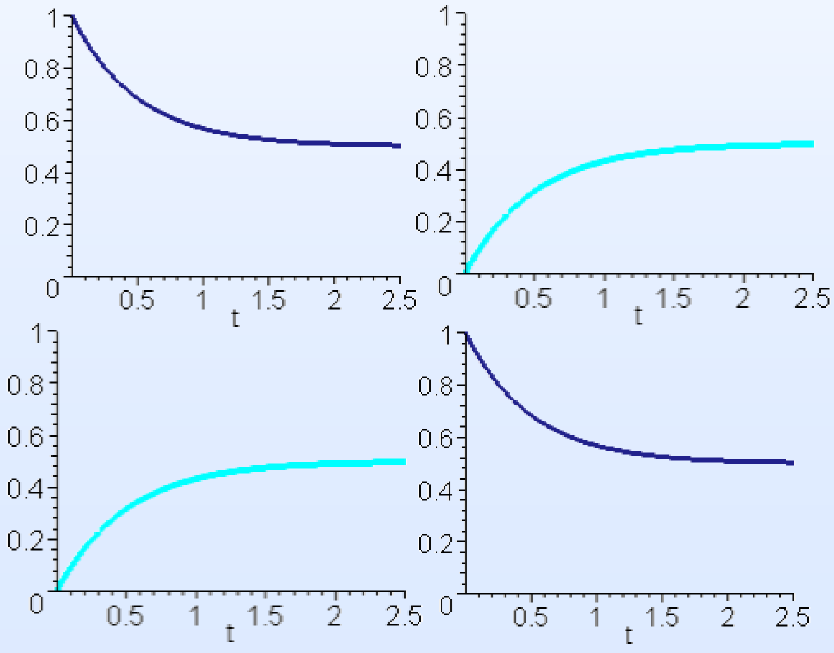
$\quad p_{ii}(\Delta t)\to 1$

$$P(0) = E$$

Se zvětšujícím se intervalem se pravděpodobnost přechodu zvětšuje

Př: Je dán proces se dvěma stavy S={0,1}

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} & \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



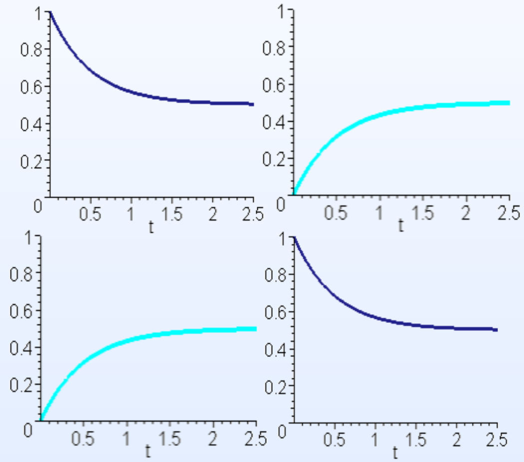
Namísto matice přechodu P(t) zadáme matici intenzit Q, tzv. generátor.

$$P'(t) = P(t) \cdot Q$$

Matice intenzit (infinitesimální generátor) $Q = (q_{ij})$

Doba setrvání procesu ve stavu e_i má exponenciální rozdělení s parametrem - q_{ii} (**intenzitou výstupu**).

$$p_{ii}\left(\Delta t\right) = e^{q_{ii}\cdot\Delta t} = 1 + q_{ii}\cdot\Delta t + o\left(\Delta t\right)$$



Definice intenzit přechodu q_{ii} a výstupu q_{ij}

$$q_{ii} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ii}\left(\Delta t\right)-1}{\Delta t} \qquad q_{ij} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}\left(\Delta t\right)}{\Delta t}$$

Vztah matice přechodu P a matice intenzit

$$p_{ij}\left(\Delta t\right) = q_{ij}\Delta t + o\left(\Delta t\right)$$
$$p_{ii}\left(\Delta t\right) = 1 + q_{ii}\Delta t + o\left(\Delta t\right)$$

$$P'(0) = Q$$

$$p_{ii}(\Delta t) - 1 - \Delta t q_{ii} = o(\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t} - \frac{\Delta t q_{ii}}{\Delta t} = 0$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t} = q_{ii}$$

□

Matice intenzit (infinitesimální generátor) $Q = (q_{ij})$

- Doba setrvání procesu ve stavu e_i má exponenciální rozdělení s parametrem - q_{ii} (**intenzitou výstupu**). Intenzita výstupu je záporné číslo, všechny intenzity přechodu jsou kladné.
- Intenzity výstupu a přechodu jsou pro homogenní (stacionární) proces konstantní.
- Řádkový součet matice intenzit je 0.

$$p_{ii}(\Delta t) + \sum_j p_{ij}(\Delta t) = 1$$

$$q_{ii} = -\sum_{i \neq j} q_{ij}$$

$$1 + q_{ii}\Delta t + \sum_j q_{ij}\Delta t = 1$$

□

Položením $P \doteq Q\Delta t + E$ prakticky zdiskretizujeme CTMC, přechody se můžou udát jen v dostatečně malých intervalech Δt.

$$p_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$$
$$p_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)$$

Matice intenzit -příklad

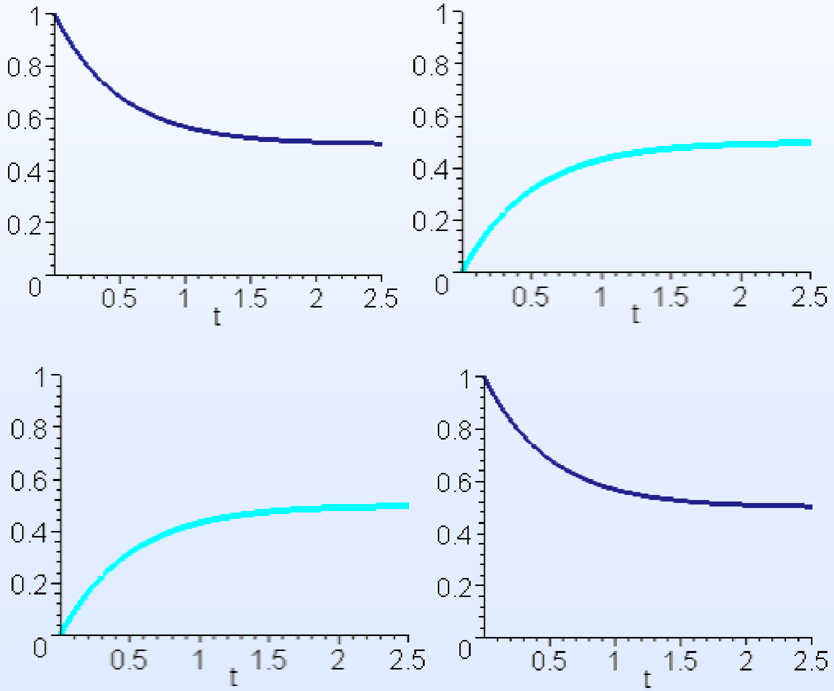
$$P'(t) = P(t)\cdot Q \qquad P(0) = E$$

$$q_{ii} = -\sum_{i\neq j} q_{ij}$$

$$p_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$$
$$p_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)$$

Př: Je dána matice přechodu, určete matici intenzit.

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} & \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-2\,t)} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



1. Způsob -Taylorův rozvoj

$$P = \begin{pmatrix} 1-\Delta t + o(\Delta t) & \Delta t + o(\Delta t) \\ \Delta t + o(\Delta t) & 1-\Delta t + o(\Delta t) \end{pmatrix}$$

2. Způsob - P´(0)=Q

$$Q := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Kolmogorovovy diferenciální rovnice

- Chapman – Kolmogorovova rovnost

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s)\, p_{kj}(t)$$

$$P(s+t) = P(s) \cdot P(t)$$

- Matice intenzit může být jakákoliv čtvercová matice, jejíž všechny nediagonální prvky jsou nezáporné a řádkové součty jsou 0.
- Pokud známe matici intenzit Q můžeme určit matici přechodu ze systému přímých (zpětných) Kolmogorových rovnic.

$$P'(t) = P(t) \cdot Q \qquad P(0) = E$$

- Soustava rovnic má řešení ve tvaru: $P(t) = P(0) \cdot e^{Qt}$

* Výpočet matice přechodu z matice intenzit

$$P(t) = \exp(Q \cdot t)$$

P(t) je určena až na násobek konstantní maticí $P(t) = V(t) \cdot C$

$$P'(t) = Q \cdot P(t)$$

$$V'(t) \cdot C = Q \cdot V(t) \cdot C$$

Výpočet konstantní matice C: $P(0) = V(0) \cdot C \Rightarrow C = V^{-1}(0)$

$$V(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \cdot v_1; e^{\lambda_2 t} \cdot v_2; \ldots; e^{\lambda_n t} \cdot v_n\right)$$

kde $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ jsou vlastní čísla matice Q
a $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ jsou vlastní vektory k příslušným vlastním číslům, psané do sloupce.

$$P(t) = V(t) \cdot V^{-1}(0)$$

Rozdělení pravděpodobnosti stavů

- Matice přechodu – matice časových funkcí P(t)=($p_{ij}(t)$)
- Označme vektor pravděpodobnosti stavů $e_1, e_2, e_3, \ldots$ v čase t.

$$a(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_k(t), \ldots)$$

$$a(t) = a(0) \cdot P(t)$$

$$a'(t) = a(0) \cdot P'(t)$$

$$a'(t) = a(0) \cdot P(t) \cdot Q$$

$$a'(t) = a(t) \cdot Q$$

- Stabilizovaný stav

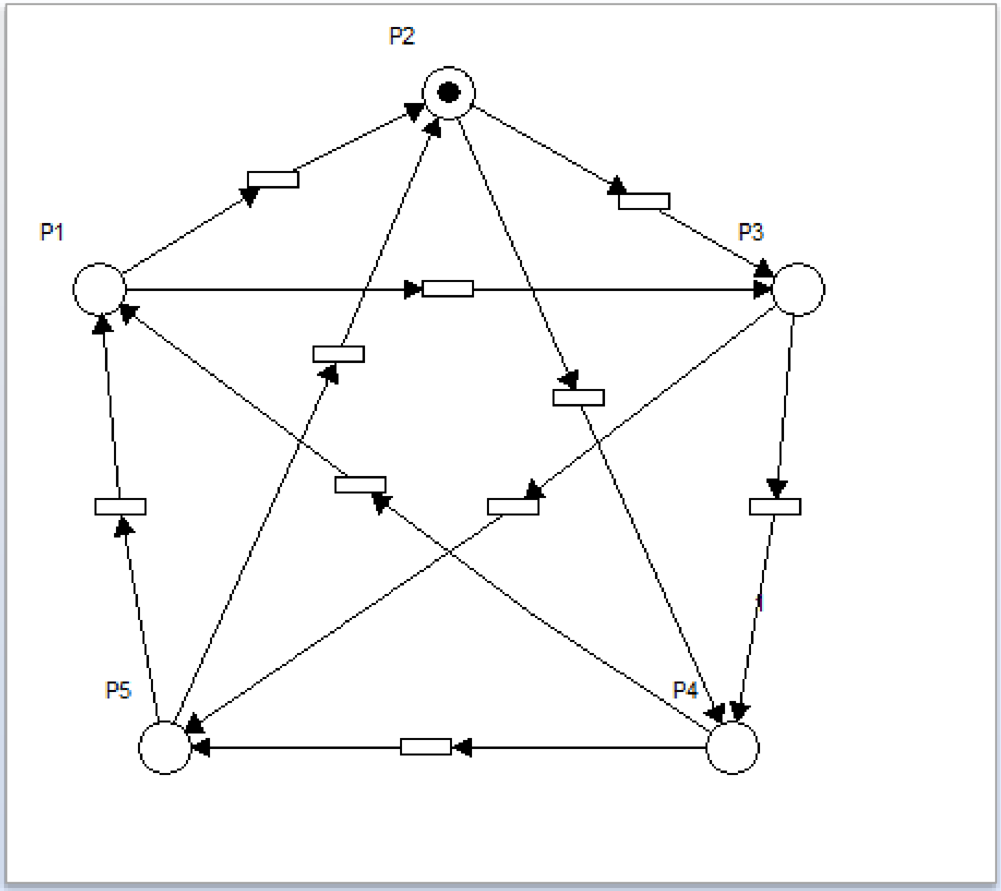
$$a = \lim_{t \to \infty} a(t)$$

- Jestliže stabilizovaný stav *a* existuje, pak

$$\lim_{t \to \infty} a'(t) = \lim_{t \to \infty} a(t) \cdot Q$$

$$0 = a \cdot Q$$

SPN jako Markovovský řetězec



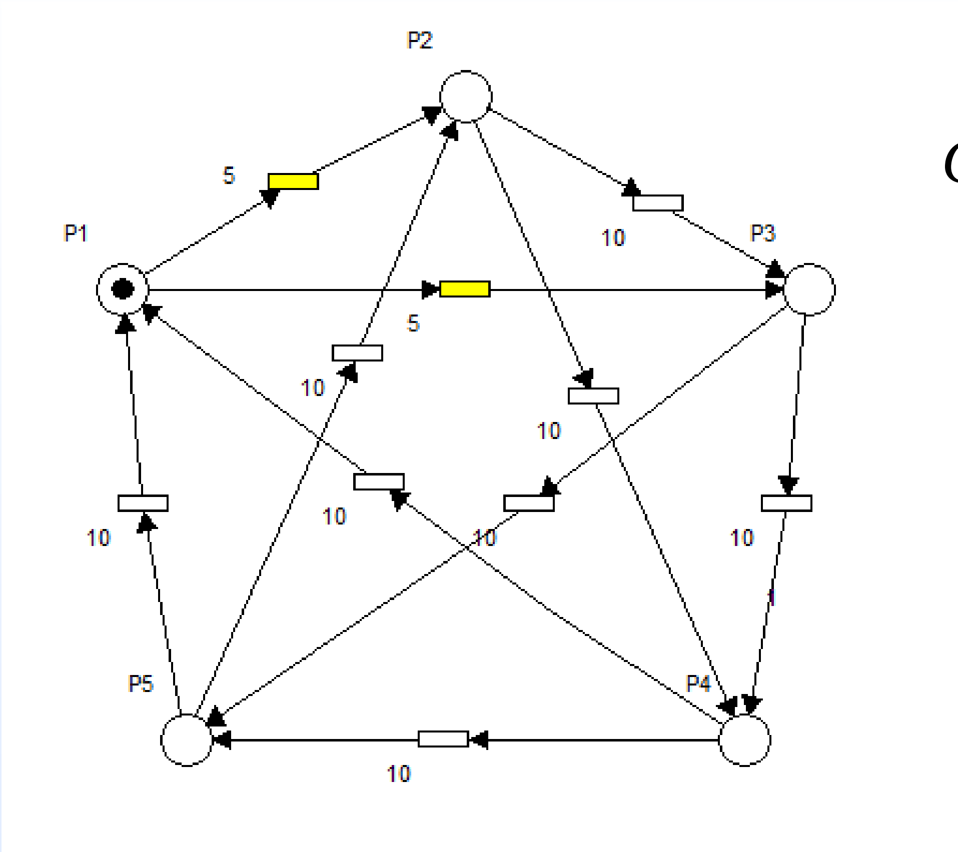
$$Q := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Jsou-li zpoždění všech přechodů exponenciální se stejnou intenzitou, bude **ustálený stav *a***

$$0 = a \cdot Q$$

$$a = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

SPN jako Markovovský řetězec



$$Q=\begin{pmatrix} -24 & 12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Jsou-li zpoždění všech přechodů exponenciální a intenzita výstupu ze stavu P1 je dvojnásobná, bude **ustálený stav *a***

$$0 = a \cdot Q$$

$$a = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

SPN jako Markovovský řetězec

$$P'(t) = P(t) \cdot Q \quad P(0) = E$$

$$Q = \begin{pmatrix} -24 & 12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = P(0) \cdot e^{Qt}$$

Numerické řešení exponenciály ve Scilabu:
např. pro $t = 1$ je P(1) = exp(Q.1), dále P(2) = exp(Q.2)…
Ověříme, zda pro t→∞ konverguje P(t) k matici se stejnými řádky

```
P1 = linalg_expm(Q);
```

0.1111111	0.2222222	0.2222223	0.2222222	0.2222222
0.1111111	0.2222222	0.2222222	0.2222223	0.2222222
0.1111111	0.2222222	0.2222223	0.2222222	0.2222223
0.1111111	0.2222222	0.2222222	0.2222223	0.2222222
0.1111111	0.2222222	0.2222222	0.2222222	0.2222222

Shrnutí - analýza CTMC

- Sestrojení grafu diferenciálních přechodů na základě dané formulace problému

- Sestavení matice intenzity přechodů **Q**.
- Pokud je nezbytné zkoumání vývoje pravděpodobností stavů v čase, je třeba vypočítat matici přechodu P(t), tj. sestavit soustavy Kolmogorovových diferenciálních rovnic z matice intenzit Q a určit exponenciálu.

$$P(t) = P(0) \cdot e^{Qt}$$

- Nalezení stacionárního řešení

- Výpočet požadovaných charakteristik

$$a \cdot Q = o$$

$$Q^T \cdot a^T = o$$

Výpočet stacionárního vektoru pro 2 stavy

$$a \cdot Q = o$$

$$Q^T \cdot a^T = o$$

Úloha: Sledujeme stav datového projektoru. Pst, že je přístroj po uplynutí času t [měsíc] od poslední opravy stále v bezvadném stavu P(τ>*t*) = e^{-2t}. Je-li přístroj pokažený, pak pst, že za čas t nedošlo k opravě P(τ>*t*) = e^{-20t}. Určete stacionární stav.

$$Q = \begin{array}{cc} \scriptstyle OK & \scriptstyle KO \\ \end{array}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 20 & -20 \end{pmatrix}$$

$$aQ = o$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 20 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2a_1 + 20a_2 = 0$$

$$2a_1 - 20a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$\left[a = \left(\frac{10}{11}, \frac{1}{11} \right) = (0{,}91; 0.091) \right]$$

Výpočet stacionárního vektoru pro 2 stavy

$$a \cdot Q = o$$

$$Q^T \cdot a^T = o$$

Řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic ***aQ* = *o***. Pro použití software a Gaussovy eliminace, musíme zaměnit pořadí činitelů *aQ*, tj. musíme rovnici transponovat. Pokud je systém ustálený má matice Q^T defekt 1 a tedy řešení soustavy tvoří vektorový prostor dim 1.

Vybereme vektor, splňující normalizační podmínku $\boldsymbol{a_1 + a_2 = 1}$.

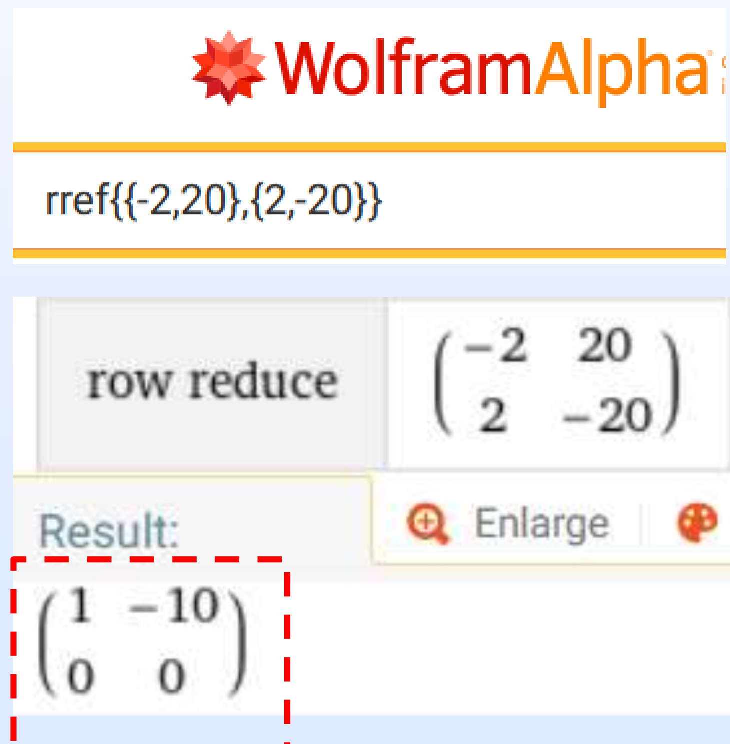
$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} OK & KO \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 20 & -20 \end{pmatrix} \end{array}; Q^T = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 2 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 2 & -20 \end{pmatrix} \sim \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$a_1 - 10a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$\left[a = \left(\frac{10}{11}, \frac{1}{11} \right) \right]$$



$$a \cdot Q = o$$

$$Q^T \cdot a^T = o$$

Výpočet stacionárního vektoru pro 3 stavy

Úloha: CTMC je dán maticí intenzit Q. Určete stacionární stav *a*.

Postup: Řešíme soustavu lineárních rovnic $\boldsymbol{Q^T a = o}$. Pokud je systém ustálený má matice Q^T defekt 1 a tedy řešení tvoří vektorový prostor dim 1.

Vybereme vektor, splňující normalizační podmínku $\boldsymbol{a_1 + a_2 + a_3 = 1}$.

$$Q = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}; Q^T = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

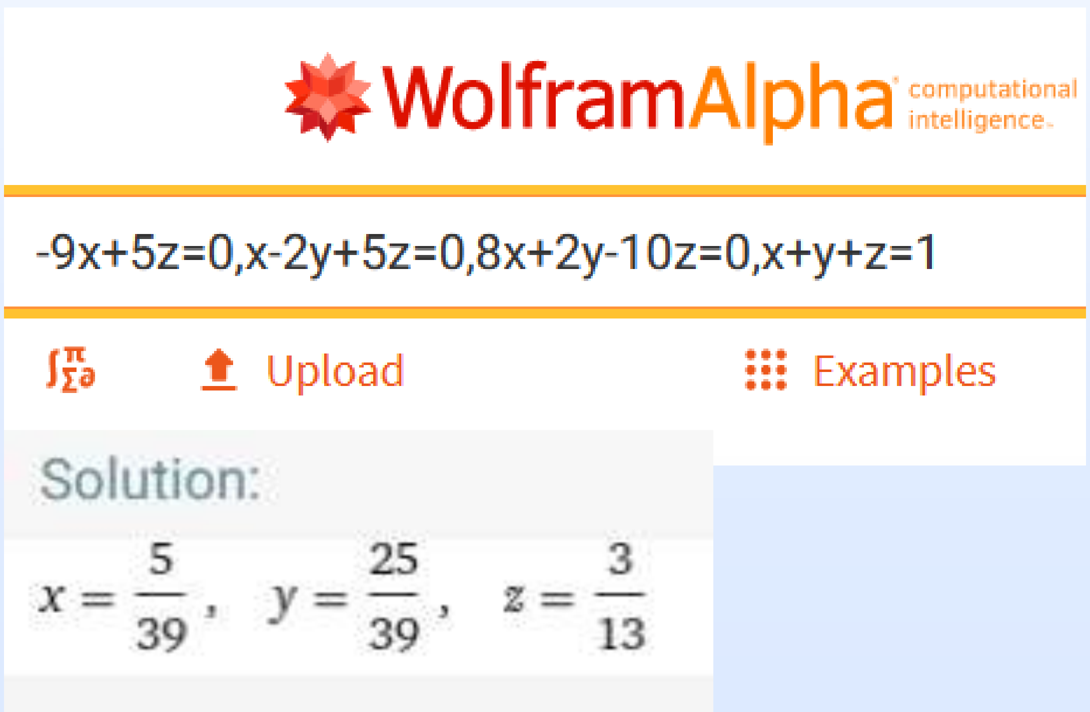
$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{25}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[a = \left(\frac{5}{39}, \frac{25}{39}, \frac{9}{39} \right) \right]$$

Výpočet stacionárního stavu – Wolfram Alpha

$$Q = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}; Q^T = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

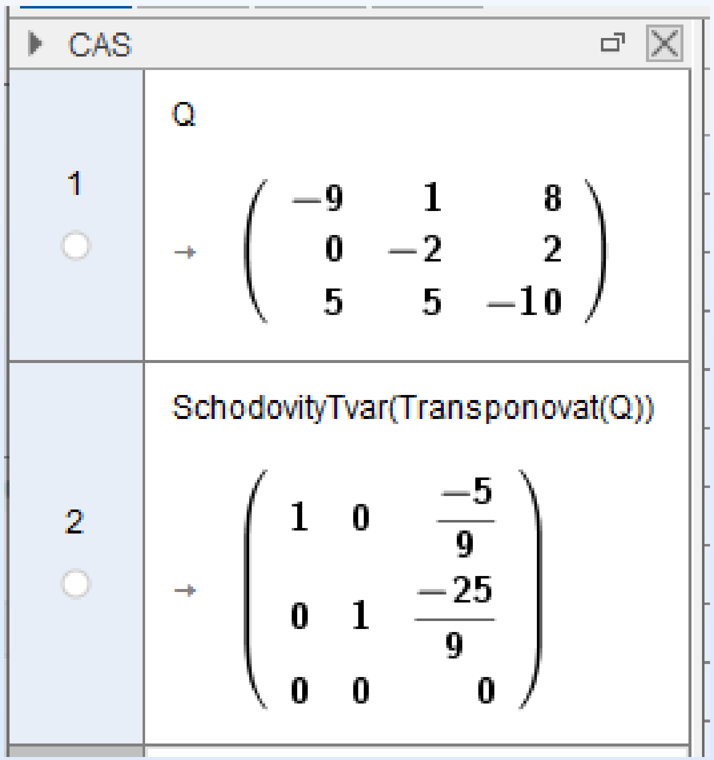
$$\begin{aligned} -9x + 5z &= 0 \\ x - 2y + 5z &= 0 \\ 8x + 2y - 10z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$



Výpočet stacionárního stavu – GeoGebra

$$Q = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}; Q^T = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Matici Q^T upravíme Gaussovou eliminací na schodovitý tvar a poté přepíšeme do rovnic. Nakonec vypočítáme parametr t z normalizační podmínky x + y + z = 1.



$$x + 0y - \frac{5}{9}z = 0$$

$$0x + y - \frac{25}{9}z = 0$$

$$a = \left(t, 5t, \frac{9}{5}t\right); t + 5t + \frac{9}{5}t = 1$$

$$a = \left(\frac{5}{39}, \frac{25}{39}, \frac{9}{39}\right)$$

Výpočet stacionárního stavu – GeoGebra, 2. způsob

Buď zapíšeme seznam rovnic o neznámých x, y, z, t do vstupního řádku, nebo v prostředí CAS s jakýmikoliv jmény pro neznámé.

$$Q = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}; Q^T = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$-9x + 5z = 0$$
$$x - 2y + 5z = 0$$
$$8x + 2y - 10z = 0$$
$$x + y + z = 1$$

Vstup: Vyresit({-9x+5z=0,x-2y+5z=0,8x+2y-10z=0,x+y+z=1})

CAS

1 Solve({-9a+5c=0,a-2b+5c=0,8a+2b-10c=0,a+b+c=1})

$\rightarrow \left\{ \left\{ a = \frac{5}{39}, b = \frac{25}{39}, c = \frac{3}{13} \right\} \right\}$

Př: Najděte matici pravděpodobností přechodu Markovova procesu s maticí intenzit Q. Určete stacionární řešení.

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \exp(Q \cdot t)$$

$$\boxed{P(t) = V(t) \cdot V^{-1}(0)}$$

$$\lambda_1 = 0;\ v_1 = (1,1)$$

$$\lambda_2 = -5;\ v_1 = (2,-3)$$

$$V(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \cdot v_1; e^{\lambda_2 t} \cdot v_2; \ldots; e^{\lambda_n t} \cdot v_n\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-5t} \\ 1 & -3e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$Pt = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} \end{bmatrix}$$

- Stabilizovaný stav

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = a(0) \cdot \lim_{t\to\infty} P(t) = (a_0(0), a_1(0)) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

- Stacionární stav

$$a \cdot Q = o \Rightarrow a = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Exponenciálu od matice Qt lze získat z Matlabu, Scilabu, **nebo příkazem** `expm` **na webu** WolframAlpha.

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P(t) = \exp\left(Q \cdot t\right)}$$

```
>> syms t;
>> Q=[-2 2;3 -3]
Q =
    -2      2
     3     -3

>> Pt=simplify(expm(t*Q))

Pt=
[ 2/(5*exp(5*t)) + 3/5, 2/5 - 2/(5*exp(5*t))]
[ 3/5 - 3/(5*exp(5*t)), 3/(5*exp(5*t)) + 2/5]
```

WolframAlpha

expm({{-2,2},{3,-3}}*t)

Result: Enlarge Cu

$$\begin{pmatrix} \frac{2e^{-5t}}{5} + \frac{3}{5} & \frac{2}{5} - \frac{2e^{-5t}}{5} \\ \frac{3}{5} - \frac{3e^{-5t}}{5} & \frac{3e^{-5t}}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

- Stacionární stav

$$a \cdot Q = o \Rightarrow a = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Výpočet stacionárního stavu převedením na DTMC. Pro malé Δt nahradíme funkce matice Pt tečnami

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Pt = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} \end{bmatrix}$$

Položením $P \doteq Q\Delta t + E$ prakticky zdiskretizujeme CTMC, přechody se můžou udát jen v dostatečně malých intervalech Δt.

$$P(\Delta t) \doteq \begin{pmatrix} 1-2\Delta t & 2\Delta t \\ 3\Delta t & 1-3\Delta t \end{pmatrix}$$

$$aP = a$$

$$a_1\left(1-2\Delta t\right) + a_2 3\Delta t = a_1$$

$$\underline{a_1 2\Delta t + a_2\left(1-3\Delta t\right) = a_2}$$

$$a_1 - 2\Delta t a_1 + a_2 3\Delta t = a_1$$

$$\underline{a_1 2\Delta t + a_2 - 3a_2\Delta t = a_2}$$

$$-2a_1 + 3a_2 = 0$$

$$\underline{2a_1 - 3a_2 = 0}$$

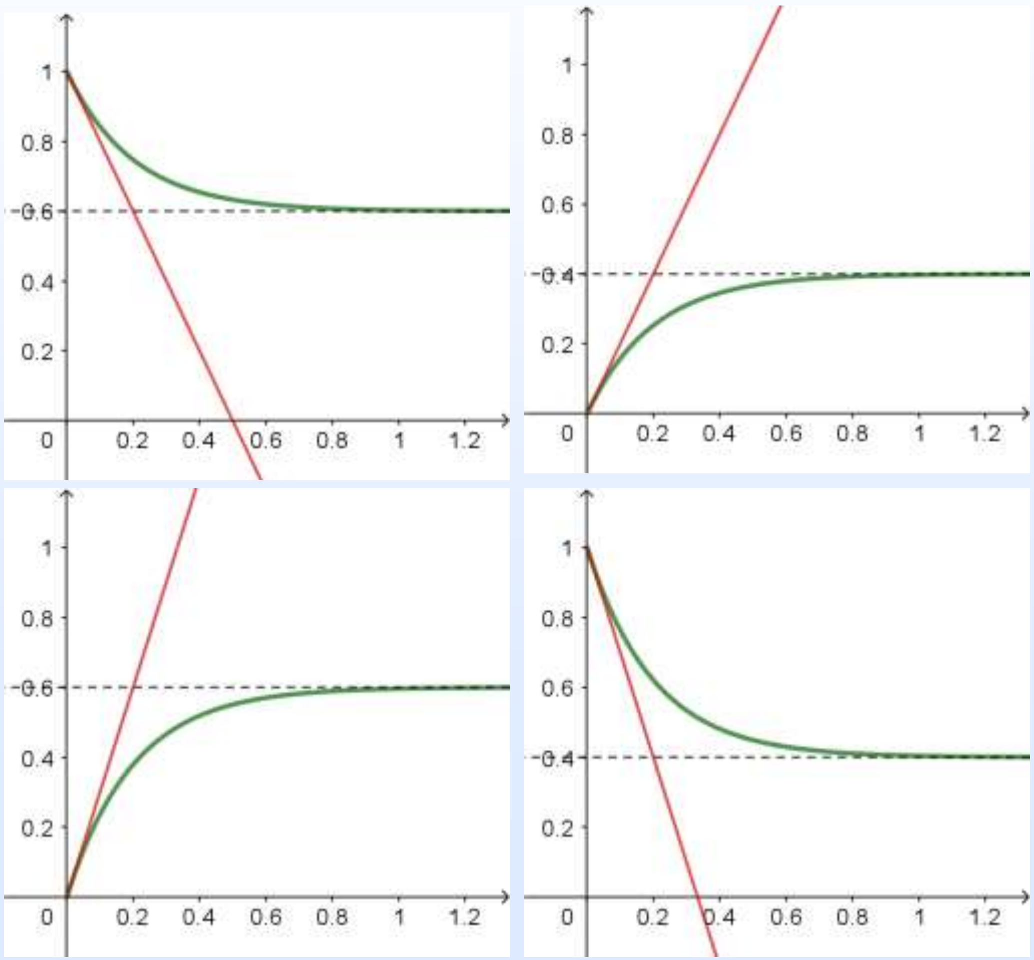
- Stabilizovaný a tedy i stacionární stav.

$$a \cdot Q = o \Rightarrow a = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Výpočet stacionárního stavu převedením na DTMC.
Pro malé Δt nahradíme funkce matice Pt tečnami

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P(\Delta t) \doteq \begin{pmatrix} 1-2\Delta t & 2\Delta t \\ 3\Delta t & 1-3\Delta t \end{pmatrix}}$$



$$\boxed{Pt = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mathbf{e}^{(-5\,t)} \end{bmatrix}}$$

$$a \cdot Q = o \Rightarrow a = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Úkol 1: Markovův proces má stavy A,B,C. Intenzita přechodu mezi krajními stavy A a C je nulová, všechny ostatní intenzity jsou stejně velké ***q* = 2**. Určete funkci pravděpodobnosti stavu **B**, víme-li s jistotou, že je na začátku systém ve stavu B.

$$P(t) = \exp(Qt)$$
$$a(t) = a(0) \cdot P(t)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(0,1,0)*expm({{-2,2,0},{2,-4,2},{0,2,-2}}*t)

Upload Examples

Input:

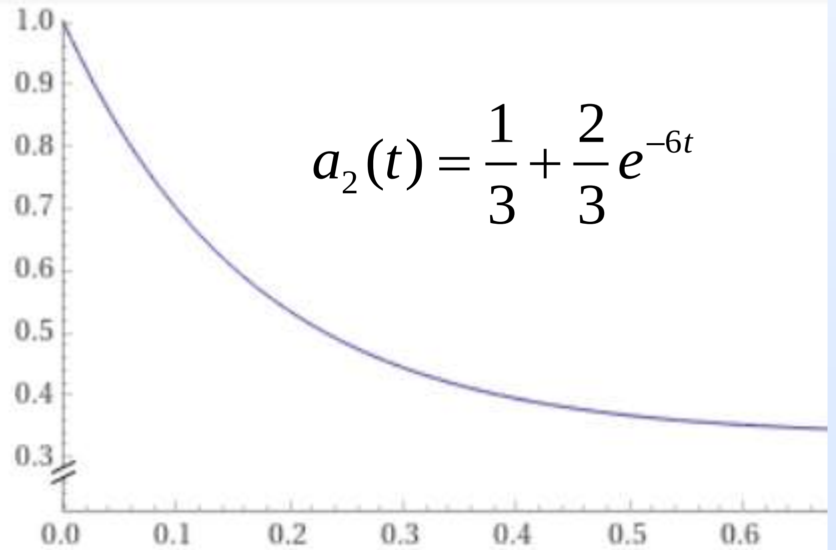
$$\{0, 1, 0\}.\mathrm{MatrixExp}\left[\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} t\right]$$

Exact result:

$$\left\{\frac{1}{3} - \frac{e^{-6t}}{3}, \boxed{\frac{2e^{-6t}}{3} + \frac{1}{3}}, \frac{1}{3} - \frac{e^{-6t}}{3}\right\}$$

plot	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(2e^{-6t})$	$t = 0$ to 0.7

Plot:



$$a_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-6t}$$

Úkol 2: Do fronty přicházejí náhodně zákazníci v Poissonově toku. Průměrná délka intervalu mezi příchody je 1 minuta. V okamžiku kdy přijde 4. zákazník, skupina zákazníků odchází (je obsloužena) a okamžitě se začne vytvářet nová fronta. Určete rozložení pstí stabilizovaného stavu.

Určete průměrný počet zákazníků ve frontě.

$$aQ = o$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[a = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), E(X) = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = \frac{3}{2} \right]$$