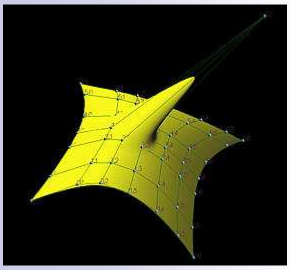
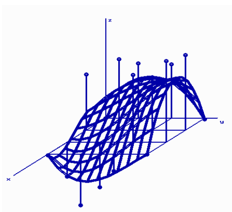
Plochy počítačové grafiky II

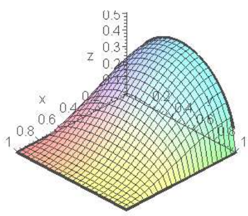


Interpolační plochy
Bezierovy pláty nad obdélníkovou a trojúhelníkovou sítí
Recionální Bezierovy pláty
B-spline
NURBS

Konstrukce a zadání plochy

- hraniční křivky
- sítí bodů
- Kinematicky vytvořené křivky
  - rotační plochy (vnikne rotací křivky okolo přímky)
  - plochy vzniklé skládáním pohybů – posun, rotace
- Analytický předpis ploch - parametrické, explicitní, implicitní vyjádření





Tenzorový součin

- Jestliže $B = < b_0(u), b_1(u), \ldots b_m(u), >$ je báze vektorového prostoru polynomů proměnné u st. nejvýše m, (ozn. $P^m(u)$)
  $C = < c_0(v), c_1(v), \ldots c_n(v), >$ je báze vektorového prostoru polynomů proměnné v st. nejvýše n (ozn. $P^n(v)$), pak

  $$B \times C = \{ b_i(u) \cdot c_j(v);\ 0 \le i \le m; 0 \le j \le n \}$$

  je báze vekt. prostoru polynomů dvou proměnných u, v, stupně nejvýše m a n. ozn: $P^{m,n}(u,v) = P^m(u) \otimes P^n(v)$

  $$P^{m,n}(u,v) = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \alpha_{ij} b_i(u) c_j(v); \alpha_{ij} \in R \right\}$$

- Př: Taylorova báze $\{u^i v^j;\ 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n\}$
  Bernsteinovy polynomy $\{B_i^m(u).B_j^n(v);\ 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n\}$
  B-spline baze $\{N_i^m(u).N_j^n(v);\ 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n\}$

Interpolační plocha

Dáno:

$(m+1) \times (n+1)$ bodů $\vec{P}_{ij}$

$m+1$ hodnot u_i

$n+1$ hodnot v_j

$\vec{P}(u_i, v_j) = \vec{P}_{ij}\ ;\quad i = 0,\ldots,m;\ j = 0,\ldots,n$

Interpolace vektorovým polynomem:

$$\vec{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \vec{a}_{ij} u^i v^j$$

Řešení soustavy rovnic

Dáno: $$\vec{P}_{ij} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \vec{a}_{ij} u^i v^j$$

$$\Downarrow$$

$(m+1)\times(n+1)$ rovnic pro $\vec{a}_{ij}$

Hledaná interpolační plocha

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \vec{a}_{ij} u^i v^j$$

Lagrangeovy polynomy

$$\vec{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \vec{P}_{ij} L_i^m(u) L_j^n(v)$$

$$L_i^m(u) = \frac{\prod_{j=0,\dots,m,\, j\neq i}(u-u_j)}{\prod_{j=0,\dots,m,\, j\neq i}(u_i-u_j)} \;;\; i = 0,\dots,m$$

$$L_i^m(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \qquad i,j = 0,\dots,m$$

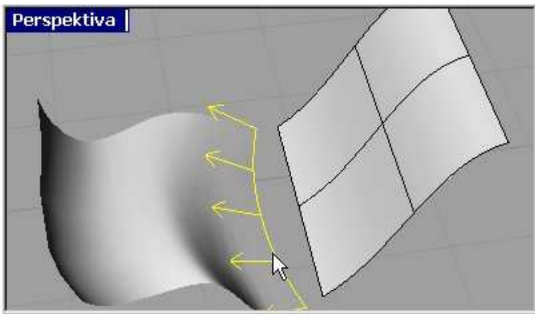
Příčné tečné vektory

- Směrové vektory tečen *v*- křivky sestrojené podél okrajové *u*-křivky.

$$P_0(v)=\frac{\partial P(u,v)}{\partial u}(u=0,v);\; P_1(v)=\frac{\partial P(u,v)}{\partial u}(u=1,v);$$

- Směrové vektory tečen *v*- křivky sestrojené podél okrajové *u*-křivky

$$P_0(u)=\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}(u,v=0);\; P_1(u)=\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}(u,v=1);$$



Bezierovy pláty

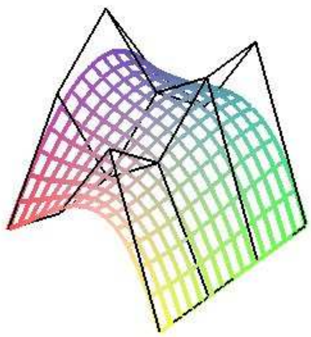
$$X(u,v)=\left(B_{0,n}(u),B_{1,n}(u),\ldots,B_{n,n}(u)\right)\cdot U\cdot\left(B_{0,m}(v),B_{1,m}(v),\ldots,B_{n,m}(v)\right)$$

U….mapa plochy

$$U=\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ . & . & \cdots & . \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nm} \end{pmatrix}$$

$B_{i,n}$….Bernsteinovy polynomy

$$B_{i,n}(u)=\binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i}$$



BÉZIERŮV BIKUBICKÝ PLÁT

$$X(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_{i,j}(u,v)P_{i,j},\, u\in[0,1],\, v\in[0,1]$$

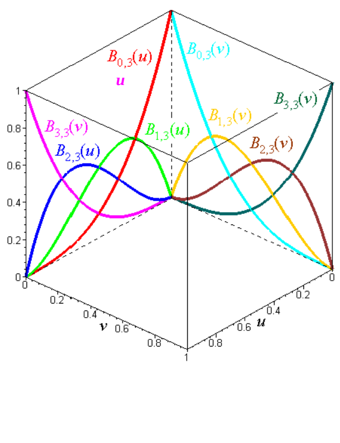
$$U=\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1m} \\ . & . & \dots & . \\ P_{n0} & P_{n1} & \dots & P_{nm} \end{pmatrix}$$

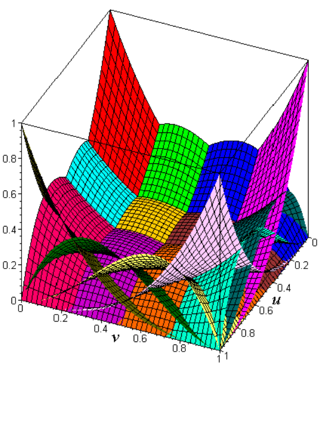
$$\mathbf{B}^{u}=\begin{bmatrix}B_{0,3}(u) & B_{1,3}(u) & B_{2,3}(u) & B_{3,3}(u)\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{v}=\begin{bmatrix}B_{0,3}(v) & B_{1,3}(v) & B_{2,3}(v) & B_{3,3}(v)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}^{u}*\mathbf{B}^{v}=\begin{bmatrix} B_{0,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{1,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{2,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{3,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{3,3}(v) \end{bmatrix}$$

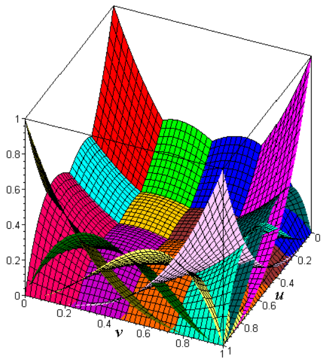
BÉZIERŮV BIKUBICKÝ PLÁT

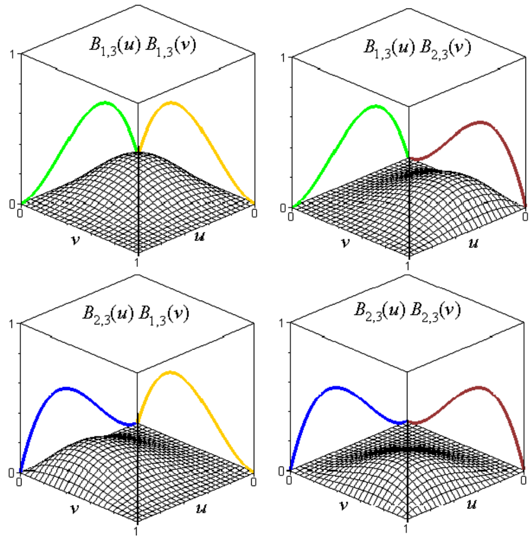
$$\mathbf{B}=\mathbf{B}^{u}*\mathbf{B}^{v}=\begin{bmatrix} B_{0,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{1,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{2,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{3,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{3,3}(v) \end{bmatrix}$$



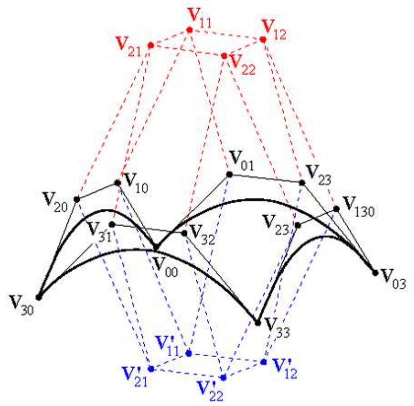


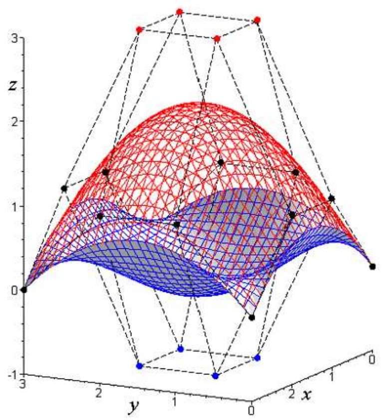
BÉZIERŮV BIKUBICKÝ PLÁT





BÉZIERŮV BIKUBICKÝ PLÁT





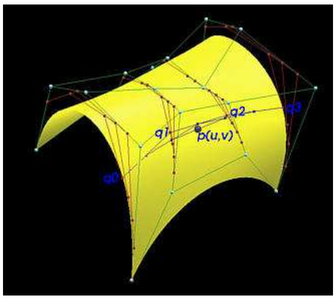
- ***Poloha vnitřních vrcholů B. plátu nemá vliv na tvar okrajových křivek***
- ***Okrajové křivky Bézierovy kubiky***

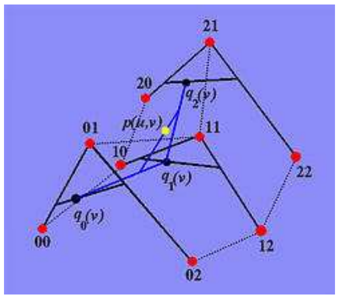
Algoritmus de Casteljau po křivkách

$$X\left(u_0, v\right) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} P_{ij} B_{in}\left(u_0\right) B_{jm}\left(v\right) = \sum_{j=0}^{m} B_{jm}\left(v\right) \sum_{i=0}^{n} P_{ij} B_{in}\left(u_0\right) = \sum_{j=0}^{m} B_{jm}\left(v\right) Q_j\left(u_0\right)$$

$X\left(u_0, v_0\right)$ je bod na Bezierově ploše $\Rightarrow$

je to bod na Bezierově křivce s řídícími body $Q_0\left(u_0, v_0\right), Q_1\left(u_0, v_0\right), \ldots Q_n\left(u_0, v_0\right)$

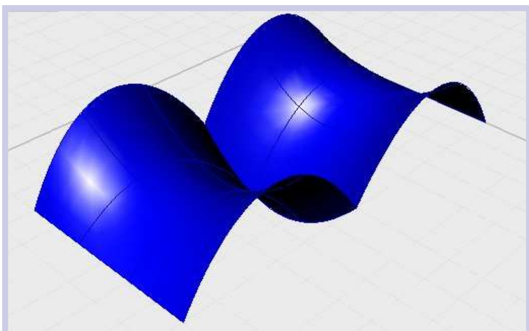




Plátování

- C^0- pláty mají společný okraj, ale různé příčné tečné vektory

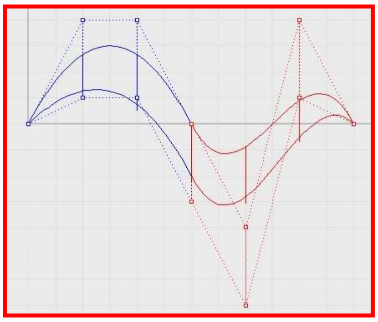
$$U = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ . & . & \cdots & . \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nm} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} P_{0m} & Q_{01} & \cdots & Q_{0m} \\ P_{1m} & Q_{11} & \cdots & Q_{1m} \\ . & . & \cdots & . \\ P_{nm} & Q_{n1} & \cdots & Q_{nm} \end{pmatrix}$$

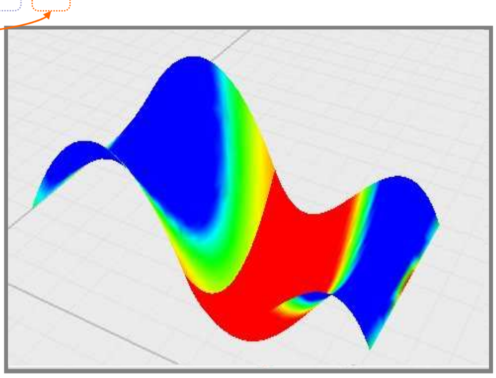


Plátování

- C^1- pláty mají společný okraj i příčné tečné vektory podél společného okraje

$$U=\begin{pmatrix} P_{00} & \cdots & P_{0m-1} & P_{0m} \\ P_{10} & \cdots & P_{1m-1} & P_{1m} \\ . & . & \cdots & . \\ P_{n0} & \cdots & P_{1m-1} & P_{nm} \end{pmatrix} \qquad \tilde{U}=\begin{pmatrix} P_{0m} & Q_{01} & \cdots & Q_{0m} \\ P_{1m} & Q_{11} & \cdots & Q_{1m} \\ . & . & \cdots & . \\ P_{nm} & Q_{n1} & \cdots & Q_{nm} \end{pmatrix} \qquad P_{im}=\frac{P_{i,m-1}+Q_{i,1}}{2}$$





Plátování

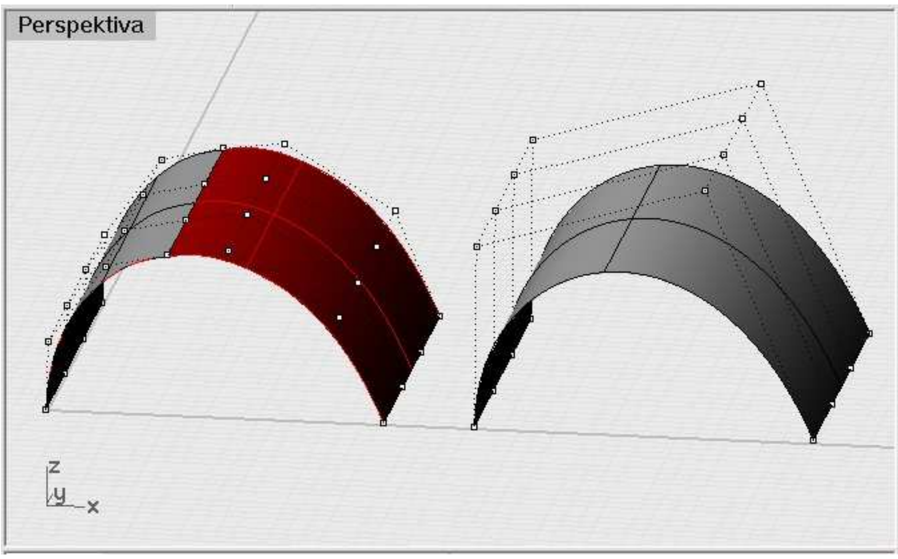
- C^2- pláty mají společný okraj, příčné tečné vektory podél společného okraje a společnou křivost parametrických křivek

$$U=\begin{pmatrix} P_{00} & \cdots & P_{0m-1} & P_{0m} \\ P_{10} & \cdots & P_{1m-1} & P_{1m} \\ . & . & \cdots & . \\ P_{n0} & \cdots & P_{1m-1} & P_{nm} \end{pmatrix} \qquad \tilde{U}=\begin{pmatrix} P_{0m} & Q_{01} & \cdots & Q_{0m} \\ P_{1m} & Q_{11} & \cdots & Q_{1m} \\ . & . & \cdots & . \\ P_{nm} & Q_{n1} & \cdots & Q_{nm} \end{pmatrix}$$

$$P_{im}=\frac{P_{i,m-1}+Q_{i,1}}{2}$$

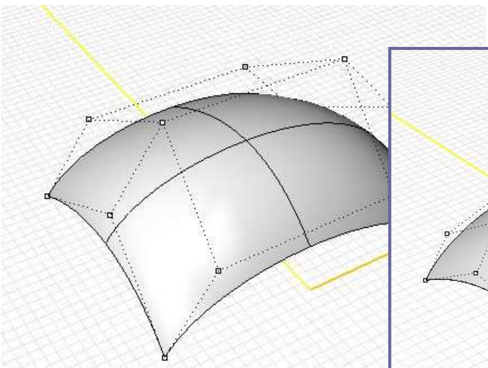
$$Q_{i2}=P_{i,m-2}+2\left(Q_{i,1}-P_{i,m-1}\right)$$

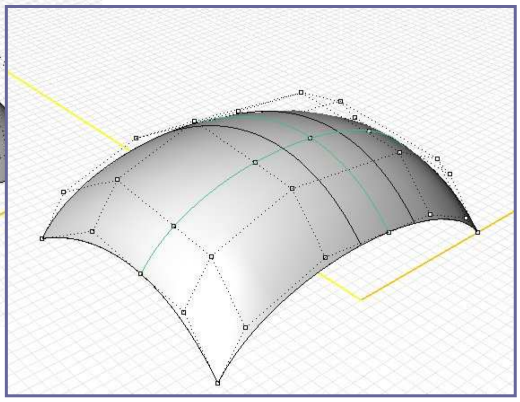
Subdivision



Převod Bezierovy plochy na síť

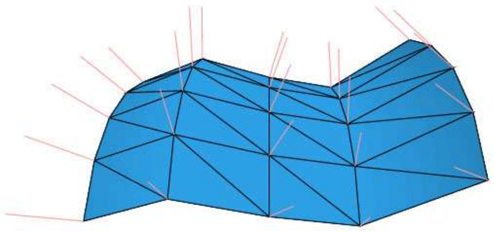
Algoritmus de Casteljau – opakováním subdivision pro řádky i pro sloupce zadáme plochu pomocí 4 řídících polygonů

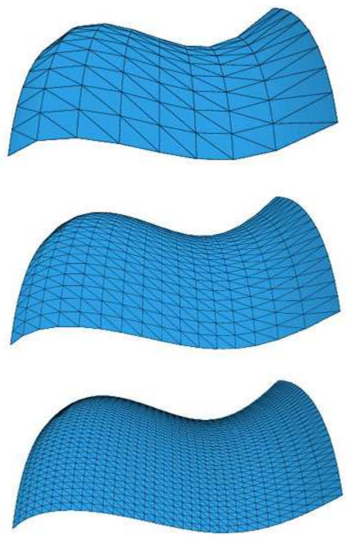




Převod Bezierovy plochy na trojúhelníkovou síť

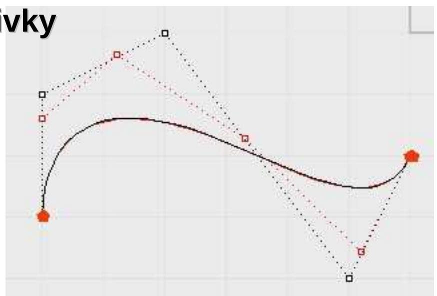
Naivní algoritmus – vypočítáme body pro konstantní přírůstky parametrů plochy





Zvýšení stupně Bezierovy křivky

$$\boxed{\begin{aligned} Q_i &= \alpha_i P_{i-1} + (1-\alpha_i) P_i \\ \alpha_i &= \frac{i}{n+1} \qquad i = 0 \ldots n+1 \end{aligned}}$$



- Př: Kvadratická Bezierova křivka je dána body P_0, P_1, P_2. Zadejte tutéž parabolu pomocí 4 řídících bodů.

$$Q_0 = P_0;\ Q_1 = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1;\ Q_2 = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2;\ Q_3 = P_2$$

$$X(t) = (1-t)^3 Q0 + 3t(1-t)^2 Q1 + 3t^2(1-t) Q2 + t^3 Q3$$

$$X(t) = P0 - 2P0t + P0t^2 + 2tP1 - 2t^2 P1 + t^2 P2$$

$$X(t) = (1 - 2t + t^2) P0 + (-2t^2 + 2t) P1 + t^2 P2$$

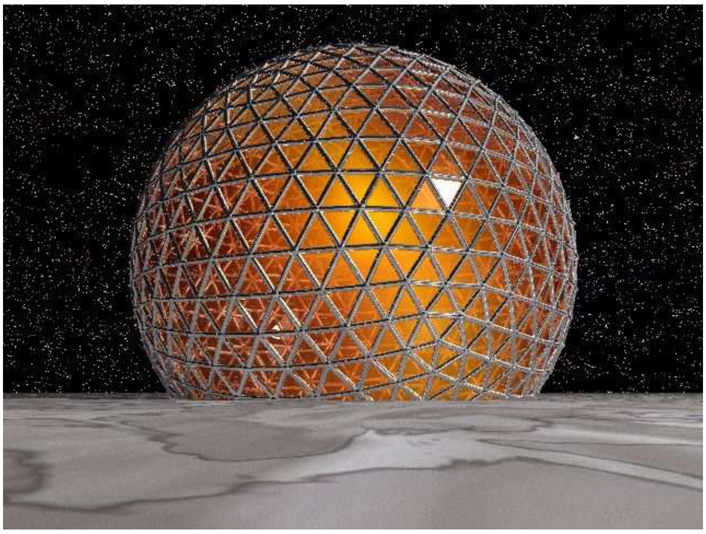
Zvýšení stupně Bezierova plátu

- Dáno (m+1)x(n+1) bodů P_{ij} (stupeň plochy (m,n)) $\Rightarrow$ Zvýšení na (m+1)x(n+2) bodů Q_{ij} (stupeň plochy (m,n+1))

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{i,j} &= \alpha_{i,j} P_{i,j-1} + \left(1-\alpha_{i,j}\right) P_{i,j} \\ \alpha_{i,j} &= \frac{j}{n+1} \qquad j = 0 \ldots n+1 \end{aligned}}$$

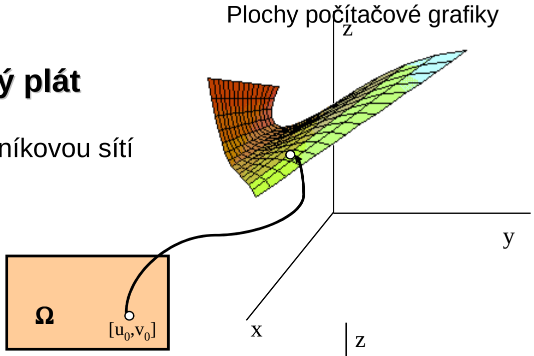
$$U = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \ldots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \ldots & P_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ P_{m0} & P_{m1} & \ldots & P_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow U = \begin{pmatrix} Q_{00} & Q_{01} & \ldots & Q_{0n+1} \\ Q_{10} & Q_{11} & \ldots & Q_{1n+1} \\ . & . & \ldots & . \\ Q_{m0} & Q_{m1} & \ldots & Q_{mn+1} \end{pmatrix}$$

Trojúhelníková síť



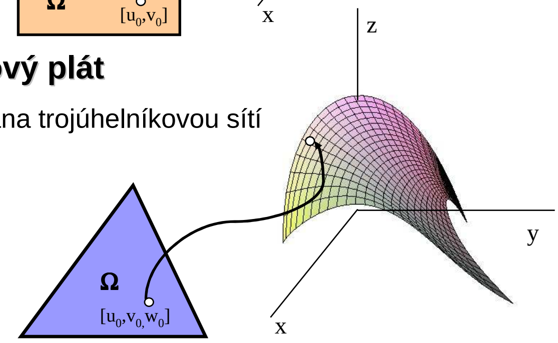
Bezierův obdélníkový plát

- Plocha st. *n.m* je dána obdélníkovou sítí (n+1)(m+1) bodů $\mathbf{P}_{ij}$



Bezierův trojúhelníkový plát

- Plocha stupně $n=i+j+k$ je dána trojúhelníkovou sítí ½(n+1)(n+2) bodů $\mathbf{P}_{ijk}$

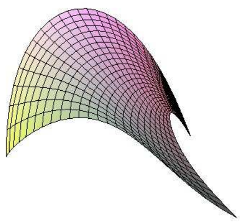


Barycentrické souřadnice

$u+v+w=1$

$u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0,$

Bezierův trojúhelníkový plát



- Plocha je dána trojúhelníkovou sítí ½(n+1)(n+2) bodů

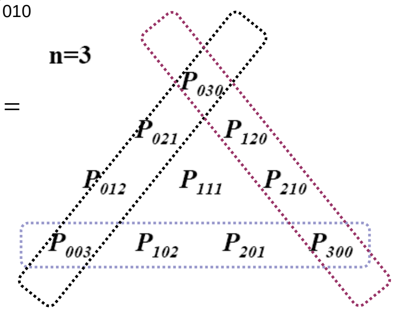
$$\mathbf{P}_{ijk}$$

- stupeň plochy $n=i+j+k$
- Plát stupně 1 – trojúhelník P_{001}, P_{100}, P_{010}

$$X(u,v) = P_{001} + u\left(P_{100} - P_{001}\right) + v\left(P_{010} - P_{001}\right) =$$

$$= vP_{010} + \left(1-u-v\right)P_{001} + uP_{100}$$

$$X(u,v,w) = uP_{100} + vP_{010} + wP_{001};\ \ u+v+w=1$$



Bezierův trojúhelníkový plát st. 2

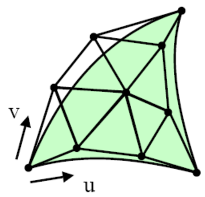
$$X(u,v,w) = (uP_{002} + vP_{101} + wP_{011})u +$$
$$(uP_{101} + vP_{200} + wP_{110})v + (uP_{011} + vP_{110} + wP_{020})w =$$
$$= P_{002}u^2 + P_{101}2uv + P_{200}v^2 + P_{011}2uw + P_{110}2vw + P_{020}w^2$$

$$X(u,v,w) = \sum_{\substack{i,j,k>0 \\ i+j+k=n}} P_{ijk} B^n{}_{ijk}(u,v,w)$$

$$B^n{}_{ijk}(u,v,w) = \frac{n!}{i!\,j!\,k!} u^i v^j w^k$$

$$\begin{array}{ccccc} & & P_{020} & & \\ & P_{011} & & P_{110} & \\ P_{002} & & P_{101} & & P_{200} \end{array}$$

Bezierův trojúhelníkový plát



Dáno: (n+1).(n+2)/2 řídících bodů P_{ijk}
$0 \leq i,j,k;\ i+j+k=n$

$$P(u,v,w) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_{ijk} B^n_{ijk}(u,v,w)$$

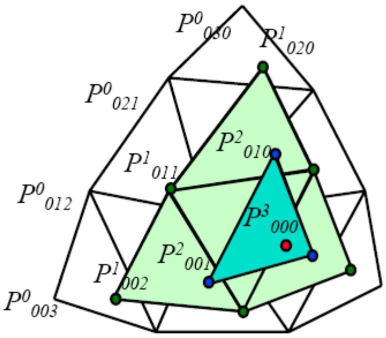
$$B^n_{ijk}(u,v,w) = \frac{n!}{i!\,j!\,k!} u^i v^j w^k$$

1. $B^n_{iik}(u,v,w) \geq 0; \quad 0 \leq u,v,w; u+v+w=1$
2. $\sum_{\substack{i,j,k\geq 0 \\ i+j+k=n}} B^n_{ijk}(u,v,w) = 1$
3. $B^n_{ijk} = u.B^{n-1}_{i-1,j,k} + v.B^{n-1}_{i,j-1,k} + w.B^{n-1}_{i,j,k-1}$

n=3

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P_{030} & & & \\ & & P_{021} & & P_{120} & & \\ & P_{012} & & P_{111} & & P_{210} & \\ P_{003} & & P_{102} & & P_{201} & & P_{300} \end{array}$$

Bezier. trojúhelník - alg.De Casteljau

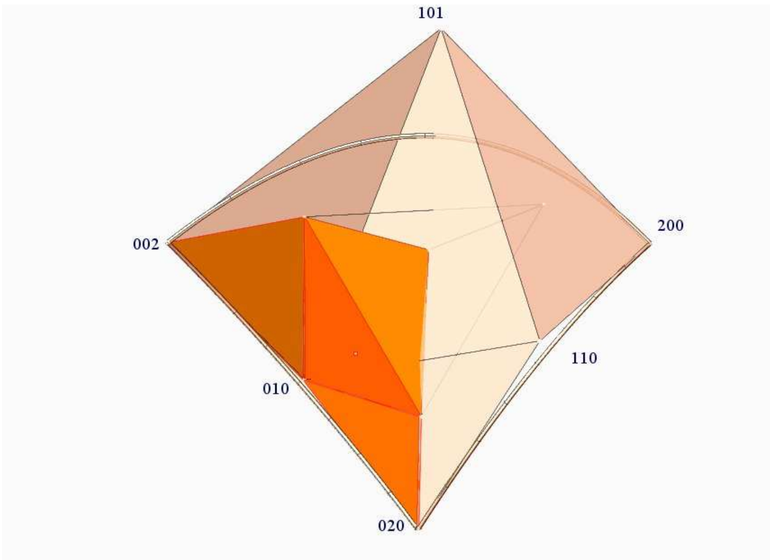


for i=0 to n do
for j=0 to n-i do
{$k=n-i-j$; $\mathbf{P}^0_{ijk}=\mathbf{P}_{ijk}$};

for l=1 to n do
for i=0 to n-l do
for j=0 to n-l-i do
{ $k=n-l-i-j$;
$\mathbf{P}^l_{ijk} = u.\,\mathbf{P}^{l-1}_{i+1,j,k} + v.\,\mathbf{P}^{l-1}_{i,j+1,k} + (1-u-v).\,\mathbf{P}^{l-1}_{i,j,k+1}$
}
$P(u,v) = \mathbf{P}^n_{0,0,0}$

Plochy počítačové grafiky

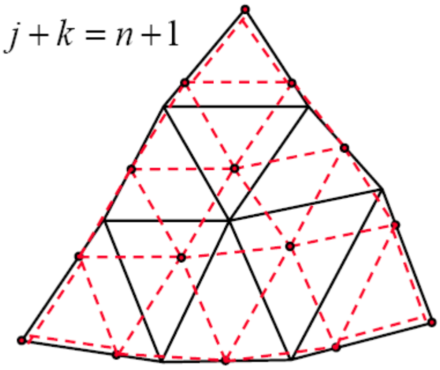
Bezierův trojúhelník-subdivision



Zvýšení stupně Bezier.trojúhel. plátu

$$P^*_{ijk} = \frac{1}{n+1}\left(i.P_{i-1,j,k} + j.P_{i,j-1,k} + k.P_{i,j,k-1}\right)$$

$$0 \le i, j, k; i + j + k = n+1$$



Racionální Bezierova plocha

- Řídící body jsou zadány v afinním prostoru vnořeném do projektivního prostoru P^3.

$$P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, 1) \cong (w_{ij}x_{ij}, w_{ij}y_{ij}, w_{ij}z_{ij}, w_{ij})$$

Bezierova plocha v P^3 $X(u,v) = (\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \widetilde{x_3}, \widetilde{x_4})$

$$\widetilde{x_1} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_{ij}x_{ij}B_{in}(u)B_{jm}(v)$$

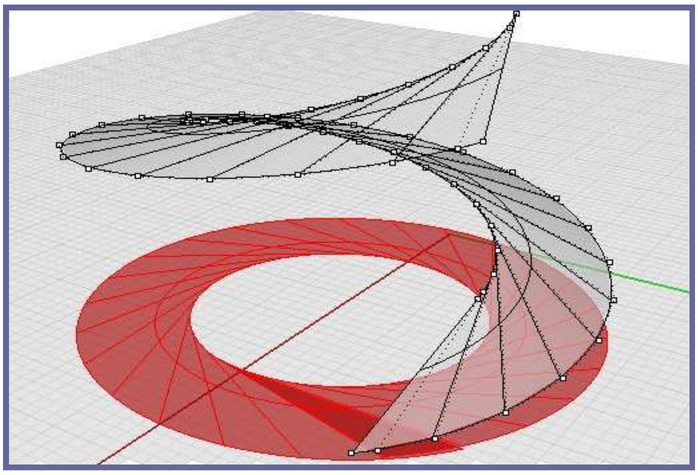
$$\widetilde{x_2} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_{ij}y_{ij}B_{in}(u)B_{jm}(v)$$

$$\widetilde{x_3} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_{ij}z_{ij}B_{in}(u)B_{jm}(v)$$

$$\widetilde{x_4} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_{ij}B_{in}(u)B_{jm}(v)$$

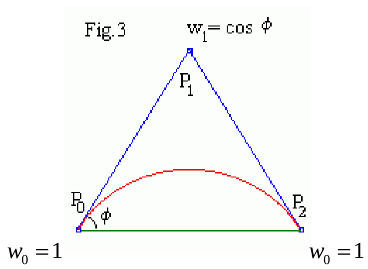
$$\Rightarrow \quad P(u,v) = \frac{\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_{ij}P_{ij}B_{in}(u)B_{jm}(v)}{\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_{ij}B_{in}(u)B_{jm}(v)}$$

Kinematicky vytvořené plochy



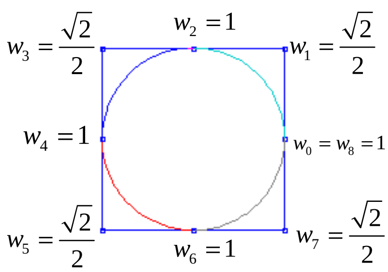
Kružnice jako kvadratický NURBS

Oblouk - Bezierova kvadrika
1. Délka úseků na tečnách musí být shodná
2. Vektor uzlových bodů [0,0,0,1,1,1]



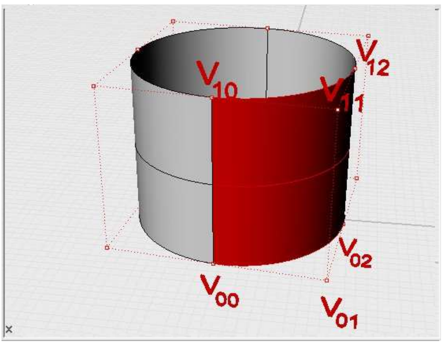
Kružnice – kvadratický NURBS
1. Řídící vrcholy jsou tvořeny vrcholy opsaného čtverce a středy stran
2. Vektor uzlových bodů

$$\left[0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,1,1\right]$$



Válec jako Racionální Bezierova plocha

- ¼ Rotační válcové plochy .



$$P(u,v)=\frac{\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_{ij}P_{ij}B_{in}(u)B_{jm}(v)}{\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w_{ij}B_{in}(u)B_{jm}(v)}$$

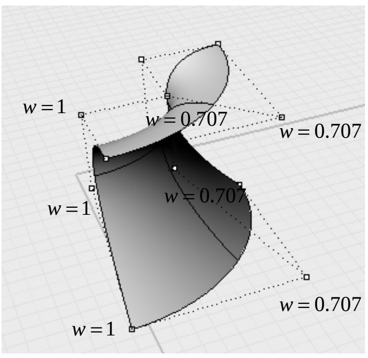
$$V_{00}=[r,0,0] \quad w_{00}=1$$
$$V_{01}=[r,r,0] \quad w_{01}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$V_{02}=[0,r,0] \quad w_{02}=1$$
$$V_{10}=[r,0,v] \quad w_{10}=1$$
$$V_{11}=[r,r,v] \quad w_{11}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$V_{12}=[0,r,v] \quad w_{12}=1$$

$r=1, v=2$

$$\mathrm{X}(u,v):=\left[\frac{(-\sqrt{2}+2+3v\sqrt{2}-4v)(-1+v)}{\sqrt{2}-2-4v\sqrt{2}+6v+4v^2\sqrt{2}-6v^2}, \frac{(2-2\sqrt{2}-4v+3v\sqrt{2})v}{\sqrt{2}-2-4v\sqrt{2}+6v+4v^2\sqrt{2}-6v^2}, 2u\right]$$

Rotační plocha

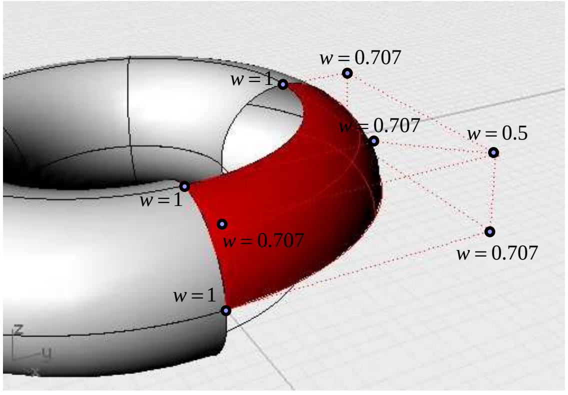
- Je dán meridián plochy jako (Neracionální) Bezierova křivka v rovině (x,z).
- Řídící body $P_i=[x_i,0,z_i]$



$$V_{0i}=[x_i,0,z_i] \quad w_{0i}=1$$
$$V_{1i}=[x_i,x_i,z_i] \quad w_{1i}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$V_{2i}=[0,x_i,z_i] \quad w_{2i}=1$$

Anuloid jako Racionální Bezierova plocha

- 1/16 Anuloidu .



$$V_{00} = [0, R, r] \qquad w_{00} = 1$$
$$V_{01} = [0, R+r, r] \qquad w_{01} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$V_{02} = [0, R+r, 0] \qquad w_{02} = 1$$

$$V_{10} = [R, R, r] \qquad w_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$V_{11} = [R+r, R+r, r] \qquad w_{11} = 0.5$$
$$V_{12} = [R+r, R+r, 0] \qquad w_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

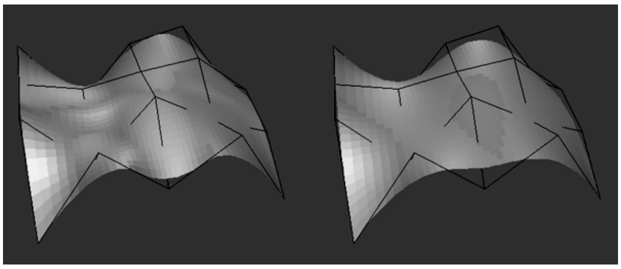
$$V_{20} = [R, 0, r] \qquad w_{20} = 1$$
$$V_{21} = [R+r, 0, r] \qquad w_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$V_{22} = [R+r, 0, 0] \qquad w_{22} = 1$$

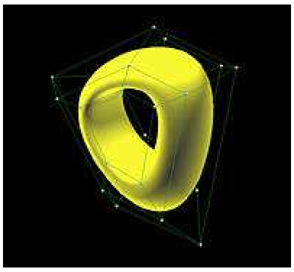
Racionální Bezierův trojúhelník

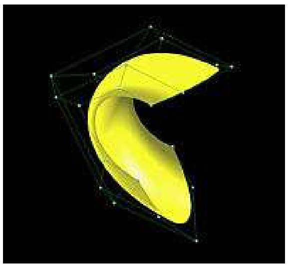
- Je dána trojúhelníková síť P_{ijk}. Každý řídící bod má svou váhu w_{ijk}

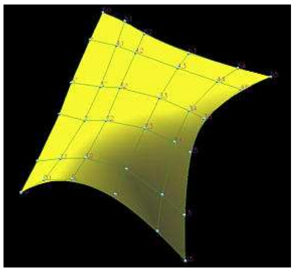
$$P(u,v,w) = \frac{\sum\limits_{i,j,k\geq 0}^{i+j+k=n} w_{ijk} P_{ijk} B^n{}_{ijk}(u,v,w)}{\sum\limits_{i,j,k\geq 0}^{i+j+k=n} w_{ijk} B^n{}_{ijk}(u,v,w)}$$

BSpline









BSpline

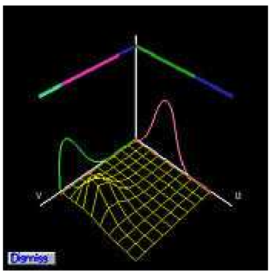
$$X(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}N_{i,k}(u)\,N_{j,l}(v)$$

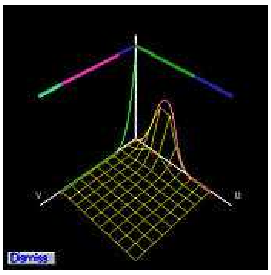
Plocha je určena:

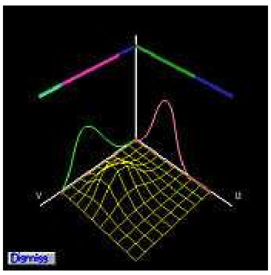
- řídící sítí (m+1)x(n+1) bodů
- Stupněm k pro bázové polynomy parametru u
- Stupněm l pro bázové polynomy parametru v
- Uzlovými vektory parametrizace pro parametry u a v.

$$N_{i1}=\begin{cases}1 & \text{pro} \quad t\in\langle t_i,t_{i+1}\rangle \\ 0 & \quad jinde\end{cases}$$

$$N_{ik}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{ik-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$



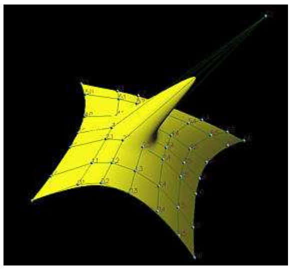




Vlastnosti BSpline

- Lokalita změn
- Podmínka konvexního obalu
- Afinní invariance
- Interpolace okrajem – hraniční křivky jsou B-spline křivky pro uzlové hodnoty parametrů

$U = (u_0 = . . . = u_k, u_{k+1}, . . . , u_m, u_{m+1} = . . . = u_{m+k+1}),$
$V = (v_0 = . . . = v_l, v_{l+1}, . . . , v_n, v_{n+1} = . . . = v_{n+l+1})$



NURBS

Racionální B-spline plocha

$$P(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{ij}P_{ij}N_i^k(u)N_j^l(v)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{ij}N_i^k(u)N_j^l(v)}$$

$$R_{i,j}^{m,n}(u,v) = \frac{\omega_{ij}N_i^k(u)N_j^l(v)}{\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\omega_{rs}N_r^k(u)N_s^l(v)}$$

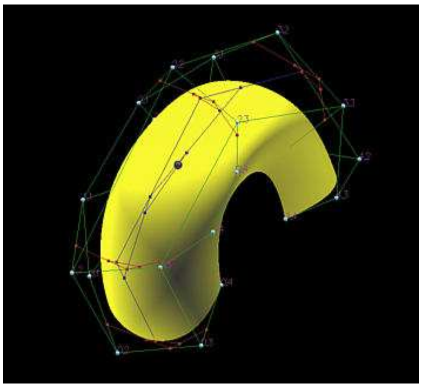
$$\boxed{P(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}R_{ij}^{mn}(u,v)}$$

Vlastnosti NURBS

- **Lokalita změn** – Změna polohy libovolného bodu Pij nebo jeho váhy změní tvar plochy pouze pro interval $(u_i, u_{i+m+1}) \times (v_j, v_{j+n+1})$
- **Podmínka konvexního obalu** - Plocha leží v konvexním obalu sítě řídících bodů
- **Projektivní invariantnost** – není nutné zobrazovat všechny body plochy, ale při projektivních transformacích stačí zobrzit pouze řídící body
- **Spojitost** – parametrická křivka $X(u,v_0)$ má C^{m-k} spojité parciální derivace v bodě odpovídajícím parametru u, je-li násobnost uzlu u rovna k.

NURBS

- De Boorův algoritmus



Vytažení křivky jako NURBS

Profilová NURBS křivka stupně k je dána řídícími body P_i, i=0…n.
Je dán vektor posunutí a.

$$C(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(u)}$$

Dva sloupce matice řídících bodů jsou dány původními řídícími body a body posunutými ve směru vektoru a.

$$P_{i0}=P_i$$
$$P_{i1}=P_i+\vec{a}$$

$$X(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{1} w_i P_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,1}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{1} w_i N_{i,k}(u) N_{j,1}(v)}$$

Přímkové plochy jako NURBS

Jsou dány dvě NURBS křivky

- Sjednotíme stupeň a uzlové vektory obou křivek.
- Křivky se osadí novým uzlovým vektorem a sjednotí se tak, aby měly stejný počet řídicích bodů.
- Povrch se vytvoří za pomocí řídicích bodů a uzlových vektorů obou křivek. Každá křivka se stává řádkem hodnot v matici řídicích bodů.