

Modernizace studia a studijních programů, kvalita a poradenství na ČZU v Praze

Fakulta lesnická a dřevařská

Studijní materiály k přijímacím zkouškám

PRUŽNOST A PEVNOST



Tento projekt je spolufinancován EU



Fakulta lesnická
a dřevařská



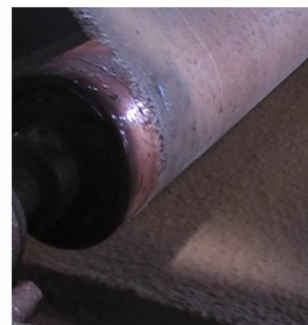
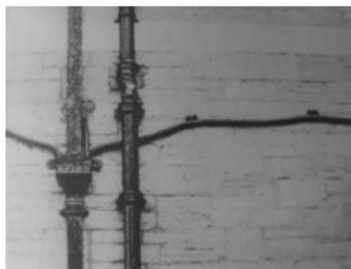
Reologie dřeva – tečení a relaxace jako dlouhodobá odezva viskoelastického materiálu

Přednáška (verze 7/2022)

doc. Ing. Vlastimil Borůvka, PhD. Dipl. Mgmt.



ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

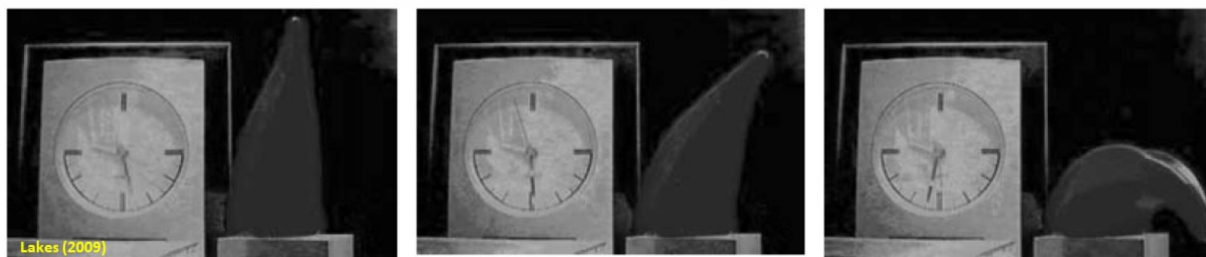


Nejprve pár slov k uvedení do problematiky. Jedná se ve své podstatě o obor, který nachází uplatnění takřka všude, neboť reologie zkoumá chování nejen kapalin a plynů, ale i tuhých těles, které za daných podmínek mohou také téct. Materiály nejenže tečou, ale mohou také pružit a mohou do určité síly odolávat a pak teprve začít téct, mohou i klouzat, například podél stěny potrubí, a podobně. Abychom tyto jevy rozlišili a mohli relevantně popsat reologické chování daného materiálu, což je pro předpověď chování jak samozřejmě v běžném životě, tak i v technologických procesech zásadní, je nezbytné provádět reologická měření nejenom přesně geometricky vymezenými senzory, s precizním stanovením působící síly a vyvolané deformace, ale i precizním stanovením okolních podmínek či vlivů. Všeobecně poznatky o tečení dřeva, tedy o reologických parametrech, mohou mít svoje uplatnění například při navrhování dřevěných prvků a staveb, ale ukazuje se, že jeho momentálně reálnější praktické využití je spíše v technologických procesech zpracování dřeva a materiálů na jeho bázi, a to například sušení, odvodňování, lisování, ohýbání, a tak dále. Čas reologie těchto materiálů v konstrukcích však dříve či později prostě přijde.

Lakes, R. Viscoelastic Materials. Cambridge University Press, New York, 2009. 461 s. ISBN: 978-0-521-88568-3.

Co je to tedy vlastně reologie?

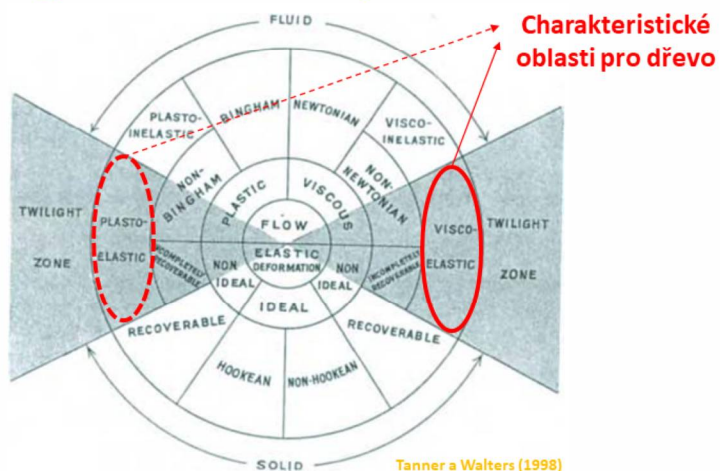
Reologie se zabývá deformací a tokem látek vlivem napětí, které na ně působí v čase.



“ΠΑΗΤΑ ΡΕΙ” – “Všechno plyne, všechno se mění” (Herakleitos)

Co je to tedy vlastně reologie? Při pružnosti předpokládáme, že deformace v materiálu nastává okamžitě po působení napětí, přičemž okamžitě znamená rychlostí šíření zvuku. Kromě pružných však máme i deformace pružné v čase, tedy vazko-pružné neboli viskoelastické a deformace plastické, tedy trvalé. Jestliže do zkoumání vztahů mezi napětím a deformací zahrneme čas, hovoříme o reologii. Reologie se tedy zabývá deformací a tokem látek vlivem napětí, které na ně v čase působí.

Reologické schéma podle Bilmese

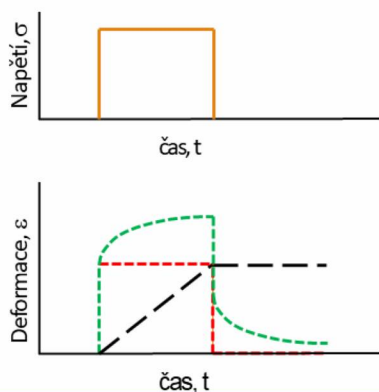


Na tomto snímku vidíte charakteristické oblasti pro dřevo, které lze podle chování při dlouhodobém (trvalém) namáhání charakterizovat jako viskózně-pružný, povětšinou lineárně se chovající materiál.

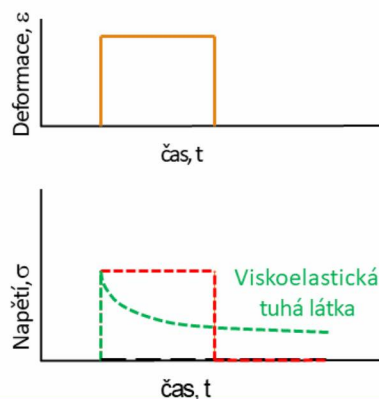
Převzato z „Tanner, R. I., Walters, K. *Rheology: An historical perspective*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1998. 255 s. ISBN: 0 444 82945 8.“ s úpravou, tj. vyznačením oblastí charakteristických pro dřevo.

Tečení a relaxace

TEČENÍ (CREEP) Konstantní napětí



RELAXACE Konstantní deformace



Nyní už nejprve ozřejmím co je vlastně tečení a co relaxace, jak můžete vidět graficky znázorněno na tomto slajdu. Pozvolný nárůst deformace v průběhu času a trvalá změna tvaru po určitém čase při nezměněných vnějších podmínkách nazýváme tečením neboli creepem. Relaxaci lze definovat jako uvolnění pružných napětí, a to narůstáním plastické deformace zatížené součásti v určitém směru, tedy creep, při současně velkém poklesu pružné deformace ve stejném směru. Zeleným zbarvením je znázorněno tečení a relaxace viskoelastické tuhé látky, kam spadá i dřevo, červeně logicky elastické látky a černě plastické. V rámci této přednášky se zaměřím na modelování tečení dřeva při dlouhodobém namáhání v ohybu. Modelovat tyto projevy můžeme na reologických modelech.

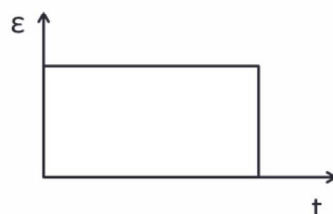
Obrázky autora.



Základní reologické prvky

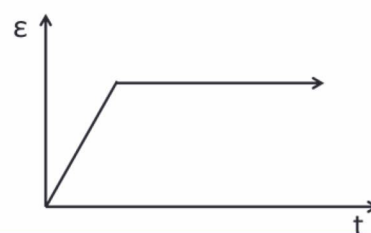
- Pružina

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E_{el}}$$



- Válec s pístem

$$\eta_{pl} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma$$



Nejprve si však musíme něco říct o dvou základních reologických prvcích, tedy o pružině a válci s pístem. Průběhy deformací v čase pro tyto prvky jsou logické, tedy pružná po zániku zatížení okamžitě zanikne a plastická zůstává.

Obrázky autora.
Fotky z wikipedie.

Jestliže se mění napětí i viskozita, tak potom:

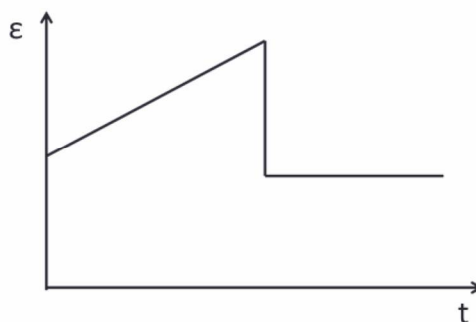
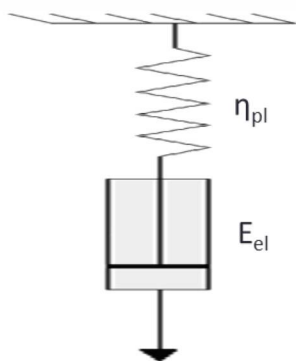
$$\varepsilon_{pl} = \int_0^t \frac{\sigma(\xi)}{\eta(\xi)} \cdot d\xi.$$

Jestliže se mění napětí i viskozita, tak potom je matematicky deformování pístu o něco složitější.

Základní reologické modely

- Maxwellův model

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} = \sigma \cdot \left(\frac{1}{E_{el}} + \frac{t}{\eta_{pl}} \right)$$



Na následujícím snímku už vidíte první z reologických modelů, a to konkrétně Maxwellův model, což je sériově zapojená pružina a válec s pístem. V tomto modelu pružina reprezentuje okamžitou pružnou deformaci a válec s pístem deformaci trvalou.

Obrázky autora.

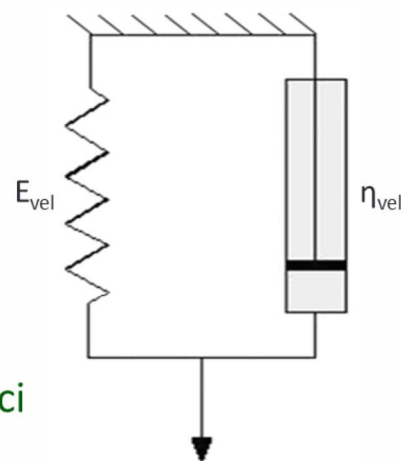
Základní reologické modely

- Kelvinův – Voigtův model

$$\sigma = \sigma_{el} + \sigma_{pl} = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta} \cdot \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}$$

Řešíme jako obyčejnou diferenciální rovnici s pravou stranou...



Pro dřevo však potřebujeme znát i podíl deformace pružné v čase, tedy viskoelastické, kterou vystihuje paralelně spojená pružina a válec s pístem, tedy Kelvinův model.

Obrázek autora.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{E}{\eta} \cdot \varepsilon \quad d \ln \varepsilon = -\frac{E}{\eta} \cdot dt \quad \varepsilon = C \cdot e^{-\frac{E}{\eta} \cdot t}$$

Variace konstant:

$$\frac{dC}{dt} \cdot e^{-\frac{E}{\eta} \cdot t} = \frac{\sigma}{\eta} \quad C = \frac{\sigma}{E} \cdot e^{\frac{E}{\eta} \cdot t} + k \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + k \cdot e^{-\frac{E}{\eta} \cdot t}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} \cdot t} \right)$$

Deformaci, respektive rovnici, kterou vidíte zde, vyřešíme jako obyčejnou diferenciální rovnici s pravou stranou, přičemž využijeme naznačenou variaci konstant. Tady už vidíte její řešení.

Jestliže se mění napětí, tak potom:

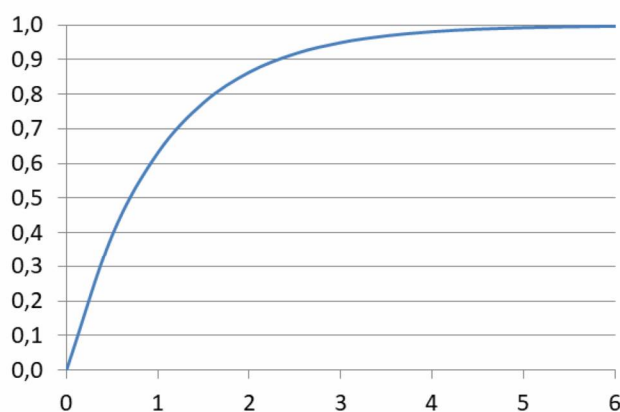
$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\xi) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} \cdot (t-\xi)} d\xi.$$

Jestliže se mění napětí, tak potom je relevantní řešení samozřejmě složitější, viz rovnice na tomto slajdu.

Relaxační čas (čas zpoždění)

$$T = \frac{\eta_{vel}}{E_{vel}}$$

1T	63,2%
2T	86,5%
3T	95,0%
4T	98,2%
5T	99,3%



Důležitým parametrem je tak zvaný relaxační čas, což je poměr viskoelastického koeficientu viskozity a modulu pružnosti. Říká nám, respektive jeho násobky, za jak dlouho a do jaké míry se ustálí deformace pružná v čase. K tomuto parametru se ještě několikrát v průběhu přednášky vrátím.

Obrázek autora.

Johannes Martinus Burgers



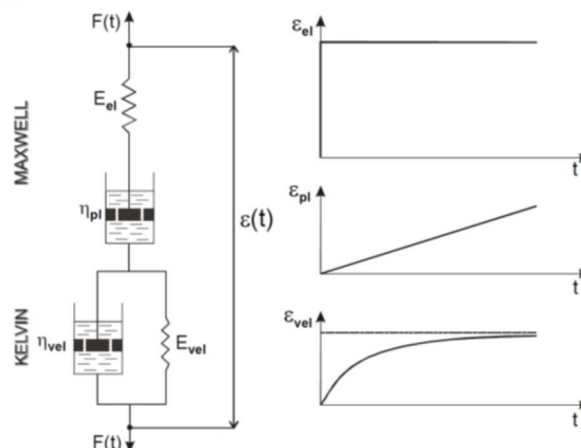
Burgerův model

$$\sigma_B = \sigma_M = \sigma_K$$

$$\varepsilon_{cel} = \varepsilon_M + \varepsilon_K$$

$$\varepsilon_{cel} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{vel} + \varepsilon_{pl}$$

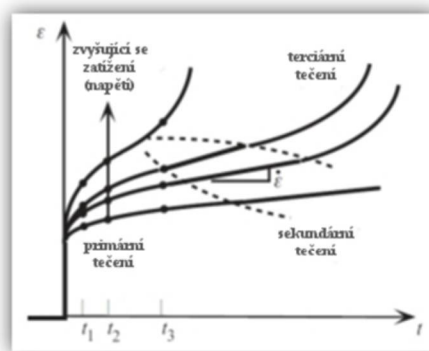
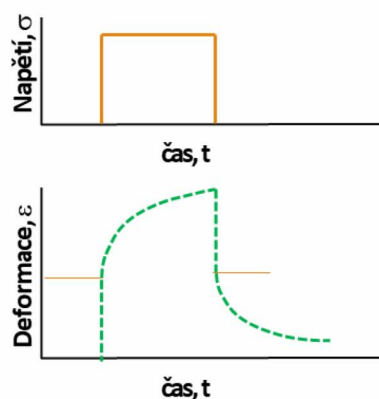
$$\varepsilon_{cel} = \frac{\sigma}{E_{el}} + \frac{\sigma}{E_{vel}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E_{vel}}{\eta_{vel}} \cdot t}\right) + \frac{\sigma}{\eta_{pl}} \cdot t$$



Na tomto snímku už vidíte tak zvaný Burgerův model, přičemž se jedná o čtyř-prvkový model, který vznikne sériovým zapojením už dříve vzpomenutých modelů, tedy Maxwellova a Kelvinova. Tento model je už plně vhodným pro dřevo, které lze podle chování při dlouhodobém či trvalém namáhání charakterizovat jako viskózně-pružný, povětšinou lineárně se chovající materiál. Vyskytují se v něm celkově čtyři reologické parametry, a to dva moduly pružnosti a dva koeficienty viskozity, respektive pět, pátým parametrem je svým způsobem už dříve vzpomenutý relaxační čas. Jejich velikost závisí například od vnitřní struktury dřeva, velikosti zatížení a charakteru klimatických podmínek.

Obrázky autora.
 Fotka z wikipedie.

Burgerův model ... zatížení - odtížení



Průběh deformace v čase je odpovídající reálnému chování dřeva při zatěžování nebo odtěžování. Tento model však není schopen relevantně reprezentovat chování dřeva za proměnlivých klimatických podmínek, tedy měnící se relativní vlhkosti a teploty vzduchu, a neřeší ani změnu parametrů v čase. Pro zajímavost na obrázku vpravo pak vidíte, jak se chová dřevo při tečení, pokud jsou vnější síly nad mezí úměrnosti ... dřívě či později by mělo dojít k destrukci ... viz terciární tečení.

Obrázky autora.

Upravený Burgerův model

Uvažuje s tím, že vlhkostní změna je v podstatě viskoelastická, tedy pružná v čase.

$$\varepsilon_{\text{cel}} = \frac{\sigma}{E_{\text{el}}} + \frac{\sigma}{E_{\text{vel}}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E_{\text{vel}}}{\eta_{\text{vel}}} \cdot t}\right) + \frac{\sigma}{\eta_{\text{pl}}} \cdot t + \frac{\sigma}{\mu_{\text{ms}}} \cdot |\Delta w| \cdot \left(1 - e^{-K_w \cdot t}\right)$$

Chování se dřeva za proměnlivých klimatických podmínek částečně řeší upravený Burgerův model, tedy přidání další viskoelastické jednotky reprezentující deformaci způsobenou změnou obsahu vlhkosti ve dřevě. Je však otázkou, zdali navrhnutá podmínka, že vlhkostní změna je viskoelastická, je opravdu opodstatněná.

Burgerův model s “nekonstantními” parametry

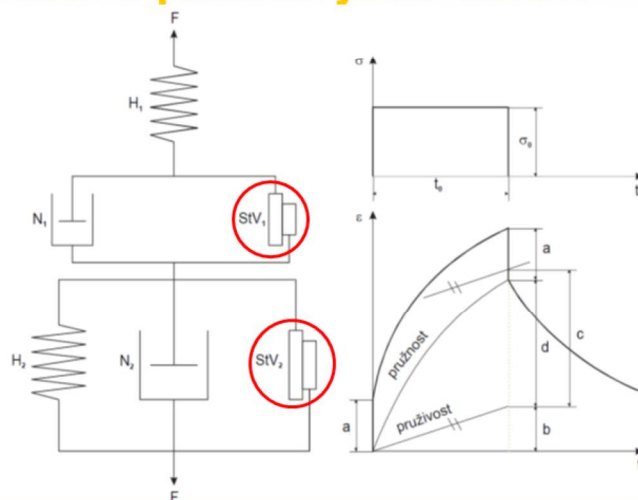
Řešení parametrů v závislosti na čase ...

$$\begin{aligned}
 \eta_{pl}(t) \cdot \frac{d\varepsilon_{pl}}{dt} &= \sigma \\
 \varepsilon_{pl}(t) &= \sigma \cdot \int_0^{t_{max}} \frac{dt}{\eta_{pl}(t)} \\
 \eta_{vel}(t) \cdot \frac{d\varepsilon_{vel}}{dt} + E_{vel}(t) \cdot \varepsilon_{vel} &= \sigma \\
 \varepsilon_{vel}(t) &= e^{-\int_0^{t_{max}} \frac{E_{vel}(t)}{\eta_{vel}(t)} dt} \cdot \sigma \cdot \int_0^{t_{max}} \frac{1}{\eta_{vel}(t)} \cdot e^{\int_0^{t_{max}} \frac{E_{vel}(t)}{\eta_{vel}(t)} dt} dt = \\
 &= e^{-\int_0^{t_{max}} \frac{E_{vel}(t)}{\eta_{vel}(t)} dt} \cdot \sigma \cdot \int_0^{t_{max}} \frac{1}{\eta_{vel}(\xi)} \cdot e^{\int_0^{\xi} \frac{E_{vel}(\xi)}{\eta_{vel}(\xi)} dt} d\xi \equiv \\
 &\equiv \sigma \cdot \int_0^{t_{max}} \frac{1}{\eta_{vel}(\xi)} \cdot e^{-\left[\int_0^{t_{max}} \frac{E_{vel}(t)}{\eta_{vel}(t)} dt - \int_0^{\xi} \frac{E_{vel}(\xi)}{\eta_{vel}(\xi)} d\xi\right]} d\xi
 \end{aligned}$$

Je tedy patrně vhodnější řešit rovnici platnou pro Burgerovo těleso tak, že se parametry mění v čase a lze je tedy považovat i za funkce vlhkosti dřeva, což bude zřejmější při praktických ukázkách. Při řešení se využívá hledání optimálních hodnot parametrů pomocí aproximace založené na Levenberg – Marquardt metodě, používá se pravidlo o konvoluci ... což už je čistě matematická záležitost.

Nelineární Burgerův model a průběh jeho tečení

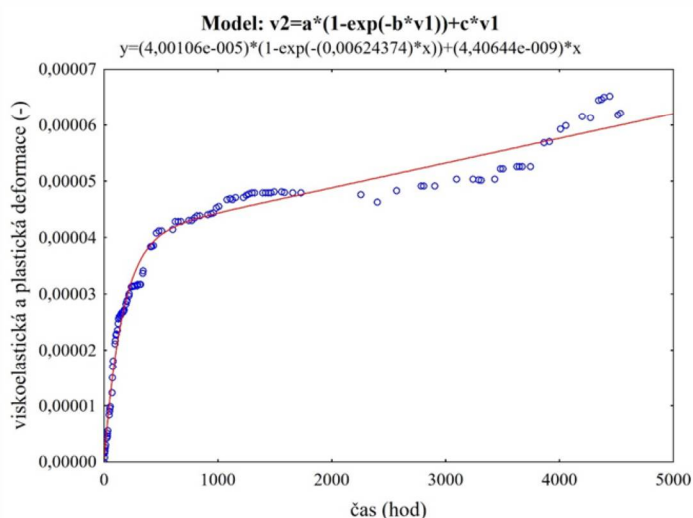
Tento nelineární model je však spíše vhodný pro vyšší zatížení blízké se k mezi úměrnosti. Z hlediska fyzikálního je vláčnost materiálů na bázi dřeva základním prvkem skutečného chování dřeva.



Na tomto slajdu vidíte další možnou úpravu základního Burgerova modelu, a to zapojení vláčných prvků do jeho struktury, respektive k jednotlivým prvkům, tedy pístu a vedle sebe zapojené pružině a pístu. V literatuře je pro něj zaužívaný název Autorova pružnovláčná hmota. Tento už nelineární model je však spíše vhodný pro vyšší zatížení blízké se napětí na mezi úměrnosti, neboť vláčné prvky se do meze vláčnosti chovají jako dokonale tuhý materiál, ale po překročení této meze se přetvářejí úplně neomezeně ... jedná se vlastně o dvě destičky, které o sebe třou ... Z hlediska fyzikálního je vláčnost materiálů na bázi dřeva základním prvkem skutečného chování dřeva. Takto vysoká hodnota zatížení, někde kolem meze úměrnosti, je ale v podmínkách praxe dosti nereálná a zároveň i nebezpečná, neboť dřevěné konstrukce se dimenzují tak, že výpočtová pevnost je cca 15 až 20% ze skutečné průměrné pevnosti dřeva, a může, respektive by se mohla vyskytovat pouze za jistých opravdu neočekávaných či nahodilých okolností. Ideální využití tohoto modelu pro dřevo je v modelování kluzu při tlaku kolmo na vlákna, a to v případě trojfázového napětově-deformačního diagramu.

Obrázky autora.

Ukázka vyhodnocení
 závislosti deformace na
 čase použitím Burgerova
 modelu (krytá vnější
 expozice pro smrkové
 dřevo při zátěži 25% z
 krátkodobé pevnosti).

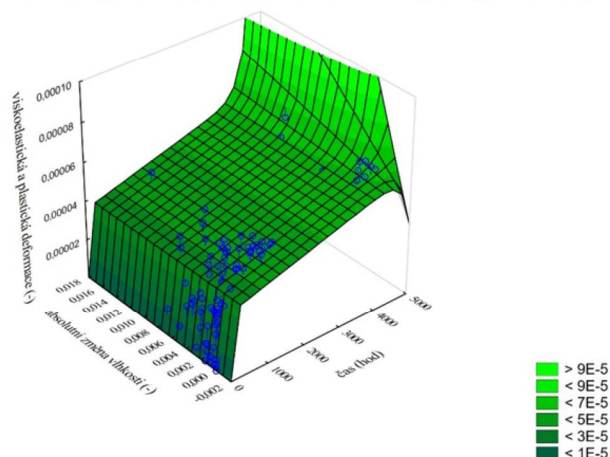


Nyní už následují praktické ukázky modelování deformace na čase při dlouhodobém zatěžování dřeva v ohybu. Na tomto snímku je výstup s použitím Burgerova modelu, který si nedokázal poradit s výkyvem deformace způsobeným změnou klimatických podmínek a tím vyvolanou změnou obsahu vlhkosti ve dřevě.

Obrázek autora.

Ukázka vyhodnocení
závislosti deformace na
čase použitím
upraveného Burgerova
modelu se zohledněním
vlivu vlhkosti (krytá vnější
expozice pro smrkové
dřevo při zátěži 25% z
krátkodobé pevnosti).

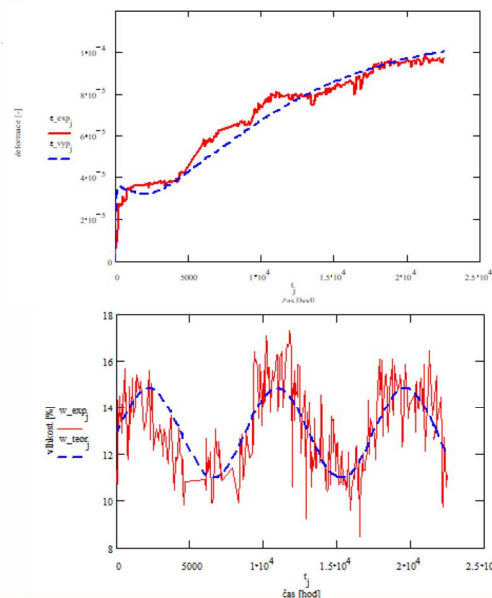
Model: $v_2 = a \cdot (1 - \exp(-b \cdot v_1)) + c \cdot v_1 + d \cdot v_3 \cdot (1 - \exp(g \cdot v_1))$
 $z = (3.57832e-005) \cdot (1 - \exp(-(0.029869) \cdot x)) + (5.64968e-009) \cdot x + (-1.78643e-012) \cdot y \cdot (1 - \exp((0.00455376) \cdot x))$



Zde už vidíte použití upraveného Burgerova modelu, který už uvažuje s třetí proměnnou, tedy i reálnou vlhkostí dřeva v čase, respektive jejími změnami.

Obrázek autora.

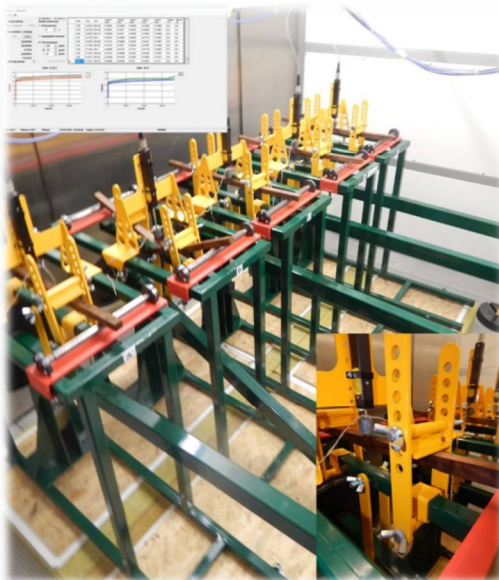
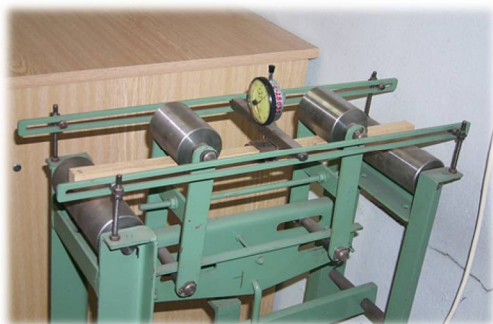
Ukázka vyhodnocení závislosti deformace na čase Burgerovým modelem s nekonstantními parametry (nahore) a průběh vlhkosti v čase (dole) v programu Mathcad.



Úplně nejvhodnější je samozřejmě řešení Burgerova modelu s nekonstantními parametry, přičemž skutečné parametry vlhkosti dřeva v čase jsou aproximovány vhodnou funkcí, v tomto případě polynomickou 3. stupně.

Obrázky autora.

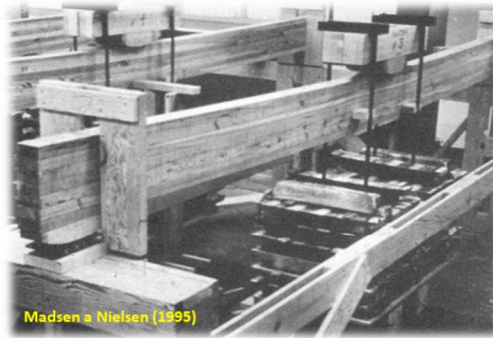
Měření reologických charakteristik



Pro zajímavost na tomto snímku vidíte ukázky dlouhodobých měření dřeva pod mechanickou zátěží, a to na malo-rozměrných vzorcích.

Fotky autora.

Měření reologických charakteristik



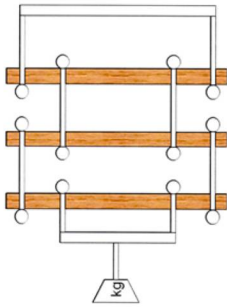
Madsen a Nielsen (1995)



Zde jsou ukázky měření reologických parametrů na velko-rozměrných (konstrukčních) vzorcích.

Madsen, B., Nielsen, L. F. Structural behaviour of timber. American Society of Civil Engineers, 1995. 405 s. ISBN: 978-0969616207.

Měření reologických charakteristik



A na tomto slajdu je ukázka zatěžování malo-rozměrných vzorků při současném mechanicko-tepelném namáhání.

Obrázek a fotka: Marian Babiak (TU Zvolen - 2017).

Co si je potřebné uvědomit?

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} \cdot t}\right) \quad \varepsilon = \varepsilon_{\text{rovň}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Relaxační čas je tedy vhodná veličina na porovnávání rychlosti různých procesů ve dřevě.

Co si je nakonec potřebné uvědomit? Co to je vlastně už několikrát výše vzpomínaný relaxační čas T ? Je to vhodná veličina na porovnávání rychlosti různých procesů ve dřevě. Podobný průběh má hraniční podmínka prvního druhu při vedení tepla a difúzi vázané vody, tak jako i řešení rovnice chemické reakce prvního řádu.

1. postulát termodynamiky →

Každý systém se při konstantních vnějších podmínkách dostane do stavu termodynamické rovnováhy.

Je potřebné mít v povědomí existenci prvního postulátu termodynamiky, který nám říká, že každý systém se při konstantních vnějších podmínkách dostane do stavu termodynamické rovnováhy. **A** právě mírou rychlosti dosáhnutí stavu termodynamické rovnováhy je relaxační čas.

Postuláty termodynamiky se obvykle uvádějí ve tvaru:

- 1. Libovolný izolovaný systém po uplynutí určité doby dospěje do rovnovážného stavu, který není nikdy spontánně narušen.*
- 2. Stav systému v rovnováze je jednoznačně určen souborem všech vnějších parametrů a jediným parametrem vnitřním.*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{RT} \\ \gamma_{LT} \\ \gamma_{LR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_L(t) & -\mu_{RL}/E_R(t) & -\mu_{TL}/E_T(t) & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{LR}/E_L(t) & 1/E_R(t) & -\mu_{TR}/E_T(t) & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{LT}/E_L(t) & -\mu_{RT}/E_R(t) & 1/E_T(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{RT}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{LT}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{LR}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \\ \tau_{RT} \\ \tau_{LT} \\ \tau_{LR} \end{bmatrix}$$

Fenomenologické modely vs. empirické modely

Limit lineární viskoelasticity

Anizotropie tečení

Malé ideální vzorky vs. konstrukční dřevo

Vliv teploty dřeva

Vliv vlhkosti dřeva

Vliv sklonu makrofibril

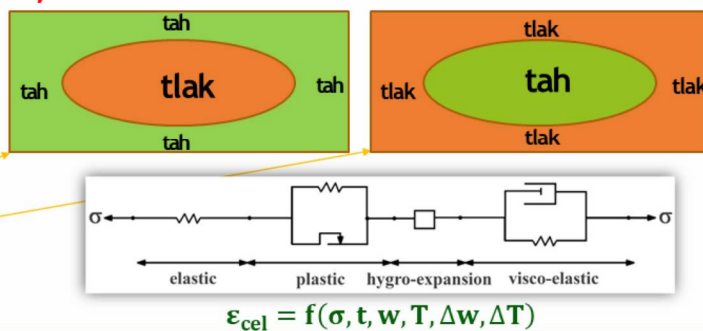
Vliv cyklické změny vlhkosti

Vliv přirozených klimatických změn

Tečení dřeva a sušení

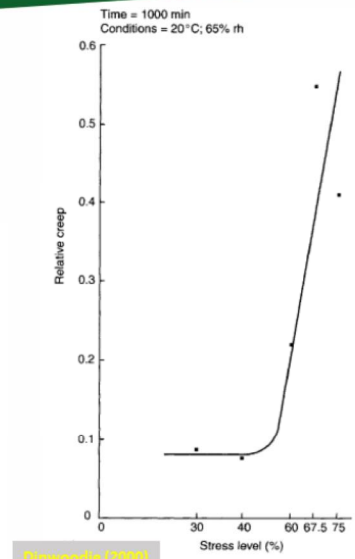
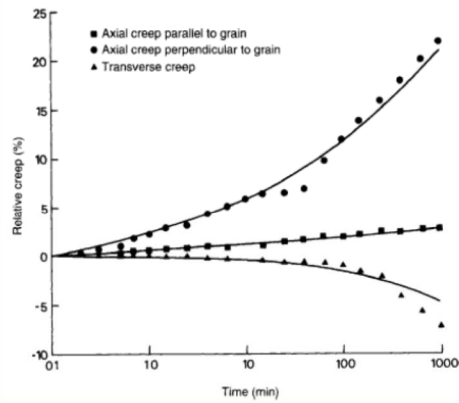
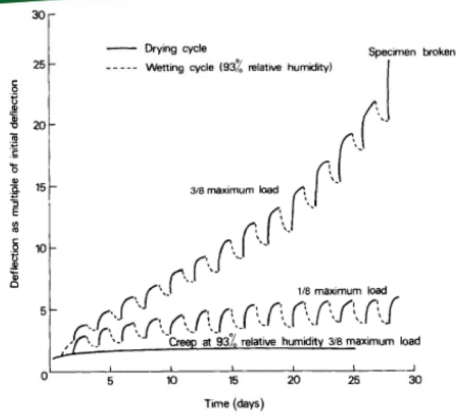
Výhody a nevýhody tečení

.....



Co by všechno mělo být bráno v potaz? Existují nejen modely fenomenologické, kterými jsem se v přednášce zabýval, ale i empirické, a například i to, že je dřevo anizotropní materiál, dále pak vliv různých vad či anomálií, geometrie a rozměry zkoumaných vzorků, a tak dále. Pro ortotropní dřevo jako viskoelastický materiál a zatížení pod cca 50% z jeho „charakteristické“ pevnosti platí při troj-osovém konstantním zatížení uvedené konstitutivní vztahy. A v každém případě jsou celkové deformace ve dřevě funkcí napětí, času, vlhkosti a teploty (a jejich změn). Jedná se tedy o součet deformací, a to elastické, viskoelastické, viskoplastické, plastické, mechano-sorpční, mechano-teplotní, sesychání / bobtnání a teplotní roztažnosti. Uvedené velice dobře zachycuje konstitutivní model na obrázku, přičemž teplotní roztažnost je opravdu možné s ohledem na velikost deformací způsobených vlhkostí zanedbat.

Obrázky autora.



Dinwoodie, J. M. *Timber Its nature and behaviour*. Taylor & Francis New York, 2000. 258 s. ISBN: 0-419-25550-8.



Fakulta lesnická
a dřevařská



Děkuji za pozornost