





# Forstliche Biometrie

von DR. MICHAEL PRODAN  
a.o. Professor an der Universität Freiburg/Br.

*Mit 203 Abbildungen*

Verlag Kessel  
[www.forstbuch.de](http://www.forstbuch.de)  
Reprint der Ausgabe von 1961 (ehem. BLV-Verlag)

# Vorwort zum Nachdruck des Buches

Michael Prodan hat die Bedeutung solider statistischer Betrachtungen forstlicher Fragestellungen als einer der ersten Forstwissenschaftler im deutschsprachigen wie auch internationalen Raum erkannt. Damals, in den 1950er Jahren, wie heute ist die Statistik nicht das Lieblingsfach in der forstwissenschaftlichen Ausbildung. Aber heute wird die quantitative Sichtweise nicht mehr als wichtiges Hilfsmittel in Frage gestellt, ganz im Gegensatz zum Zeitpunkt der Veröffentlichung von Prodans „Forstliche Biometrie“ im Jahre 1961. Aus heutiger Sicht ist die „Forstliche Biometrie“ vielleicht zu ausgreifend. Sie befasst sich (in unterschiedlicher Tiefe) mit mathematisch-statistischen Grundlagen, Baumwachstum, Wirtschaftsstatistik und sogar einfacher Optimierung. Der größte Raum (Kapitel 14, 15, 17 bis 12) wird aber dem „Ausgleichen“ (heute würden wir „Anpassen“ oder sogar eher neudeutsch „fitten“ sagen) und den statistischen Vergleichen eingeräumt. Wenngleich Signifikanztests im forstlichen Alltag kaum eine Rolle spielen, nehmen sie in „Forstliche Biometrie“ einen gebührenden Platz ein. Wir dürfen nicht vergessen, dass etwa Ronald A. Fishers Varianzanalyse (Kapitel 15) erst in den 1950er Jahren populär wurde. Diese Zeit war enorm aktiv in der Übertragung von Methoden aus der Mathematik in Medizin, Forstwissenschaften, Biologie und Ökonomie. Prodan war die Speerspitze der statistischen Umweltwissenschaften – auch über die Forstwissenschaften hinaus.

Dem Buch ist seine Entstehungszeit anzumerken, veraltet ist aber nur wenig: die Sprache wirkt durch die vorwiegend passiven Duktus distanziert und ungelentk; Lochkartensysteme sind heute den meisten Menschen nicht einmal mehr als Ausdruck bekannt; Logarithmuspapier und manuelle (grafische) Berechnungen sind passé.

In den letzten 60 Jahren gab es aber vor allem drei Entwicklungen, an denen wir diesem Text sein Alter anmerken:

1. Es hat sich inhaltlich etwas getan. Das trifft vor allem auf die Kapitel 22 (Wachstumsfunktionen) und 23 (Wirtschaftsstatistische Verfahren und Begriffe) zu, die heute in eigenen Büchern behandelt werden und mit neuen Daten und Verfahren den damaligen Wissensstand dramatisch erweitert haben.
2. Die Rechenarbeit wird uns von Computern abgenommen. Natürlich hat sich auch die Statistik entwickelt, aber es war vor allem die Verfügbarkeit von Rechnern, die seit den späten 1980er Jahren die Benutzung statistische Verfahren erlaubt, die 1960 zwar schon existierten, aber praktisch nicht lösbar waren (etwa das „Ausgleichen“ nicht-normalverteilte Daten mittels maximum likelihood). Für die Arbeit von ForstwissenschaftlerInnen hat dies einen enormen Einfluss.

men Wandel bedeutet, auch wenn Prodans Darlegungen für den Großteil der Anwendungen heute noch genauso genutzt werden können.

3. Die Funktion von Lehrbüchern hat sich verändert. Aus den kompletten Nachschlagewerken mit einer Gesamtdarstellung des Gebiets auf 450 Seiten sind didaktische Einführungswerke mit dem Fokus aufs Wesentliche geworden. Tabellen mit Zahlenwerten würden heute in online-Materialien oder nur noch als Verweis auf ein Software-Paket auftauchen; und die Herleitung von Formeln wird heute zumeist als Überlastung der LeserInnen empfunden und ist aus vielen aktuellen Büchern weitgehend verschwunden oder in Kapitelanhänge verbannt. Das kann man bedauern, denn an Stelle von einem Buch – „dem Prodan“ – brauchen wir heute derer mehrere und unverzichtbar einen Internetzugang.

Die Zeit bleibt nicht stehen, Statistik ist inzwischen häufig ein separater Teil der Ausbildung, nicht mehr allein Mittel zum forstwissenschaftlichen Zweck. Auch Prodans ehemaliger Lehrstuhl an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg ist inzwischen perspektivisch über die Forstwissenschaften hinaus aufgestellt, nicht zuletzt auch dank Prodan, dessen Buch einen großen Teil der forstlichen Biometrie erschöpfend behandelte und somit den Blick freigab auf unbearbeitete Gebiete. Es bleibt zu hoffen, dass die Wiederverfügbarkeit des Buchs „Forstliche Biometrie“ dem alten Meister neue Freunde bringt, und dass seine Form der Wissensvermittlung auch heutigen Lesern und Leserinnen mit Interesse für gründliche Darstellung entgegenkommt.

Prof. Dr. Carsten Dormann  
Biometrie und Umweltsystemanalyse  
Fakultät für Umwelt und Natürliche Ressourcen  
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg  
Tennenbacher Str. 4  
79106 Freiburg

© Copyright 2014  
Verlag Dr. Kessel  
Eifelweg 37  
53424 Remagen-Oberwinter

Tel.: 02228-493

Homepages:  
[www.forstbuch.de](http://www.forstbuch.de)  
[www.verlagkessel.de](http://www.verlagkessel.de)  
[www.forestrybooks.com](http://www.forestrybooks.com)

eMail: [nkessel@web.de](mailto:nkessel@web.de)

Druckerei H. Sieber  
[www.business-copy.com](http://www.business-copy.com)

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt, alle Rechte sind vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliches Einverständnis des Autors und des Verlages in irgendeiner Form reproduziert oder sonst weiterverarbeitet werden.

In Deutschland hergestellt.

**ISBN: 978-3-941300-89-7**

*in serviendo aliis consumeris*

*meiner Frau und Mitarbeiterin*

## Vorwort

1889 schrieb der große Forstpolitiker ENDRES im Zusammenhang mit der Aufstellung von Wachstumsgesetzen: „Es ist wohl eine interessante mathematische Übung, aber keine Bereicherung der wissenschaftlichen Forschungsergebnisse, wenn der Versuch gemacht wird, die Mathematik nach dieser Richtung hin in den Dienst der Forstwissenschaft zu ziehen.“ (281)

Dieser Auffassung lagen Verhältnisse zugrunde, die sich von den heutigen wesentlich unterscheiden. Während noch in der 2. Hälfte des vorigen Jahrhunderts das erstrebenswerte Ziel ein möglichst umfassendes Allgemeinwissen war, ist die Spezialisierung – als Folge der wissenschaftlichen und technischen Fortschritte – unvermeidlich geworden.

Durch die Entwicklung des detaillierten Wissens und die – damit meist verbundene – Ansammlung riesigen Zahlenmaterials wurde die Anwendung mathematisch-statistischer Verfahren und die Verwendung moderner Rechenhilfsmittel in allen Bereichen unerlässlich.

Im Forstwesen kehrte sich die Auffassung von ENDRES um: Die Auswertung der bisherigen Erfahrungen, des jahrzehntelang erhobenen Unterlagenmaterials und der Versuchsergebnisse und eine zuverlässige Lösung sind ohne mathematische und mathematisch-statistische Methoden nicht mehr möglich. Dabei verlangt manchmal die einfachste praktische Problemstellung die Anwendung schwierigster mathematischer Verfahren.

Wir wissen heute, daß es auch in der Forstwissenschaft noch sehr viele unbekannte Faktoren gibt, und daß uns die mathematisch-statistische Behandlung der Probleme noch manche neuen Erkenntnisse vermitteln wird.

In deutscher Sprache sind bis jetzt mehrere Bücher, die mathematisch-statistische Verfahren behandeln, erschienen. Die Arbeiten waren jedoch alle auf forstliche Teilfragen begrenzt.

So behandelten das Buch von

KRUTZSCH-LOETSCH (183) die Holzvorratsinventur, die Arbeiten von FRAUENDORFER (86) Repräsentativaufnahmen, von KRENN (182) die Bestandesmassenermittlung mit stehenden Probestämmen. Die Bücher von HOPMANN (127) und HUGERSHOFF (134) waren als Leitfaden gedacht und sind in der Darstellung und Stoffauswahl überholt.

Auch die Bücher in englischer Sprache von

SCHUMACHER and CHAPMANN (331) und von K. KINASHI (172) behandeln Stichprobenverfahren im Forstwesen und JEFFERS (143) beschreibt die mathematisch-statistischen Methoden im Versuchswesen.

Die Bücher von ANDERSON (6), LINDER (203) und WEBER (357) in deutscher von CROXTON u. COWDEN (54), KENDALL (166), SNEDECOR (334) u. a. in englischer Sprache bringen umfassende Darstellungen mathematisch-statistischer Methoden, in ihnen fehlen jedoch die – für die Forstwirtschaft wichtigen – Hinweise oder Darstellungen rein biometrischer Probleme.

In dem vorliegenden Buch wurden die für die Forstwirtschaft – und ihr verwandte



Gebiete – wesentlichsten mathematisch-statistischen und biometrischen Verfahren dargestellt und an zahlreichen praktischen Beispielen erläutert.

Da die biometrischen Problemstellungen sehr komplexer Natur sind und oft von wirtschaftsstatistischen Gedankengängen befruchtet werden (Wachstums- und Zinszahlen u. viele andere) u. v. v., habe ich auch einige wirtschaftsstatistische Verfahren kurz behandelt.

Das Buch soll für Studierende, Praktiker und Versuchsleiter geeignet sein. Dieser vielfältige Zweck konnte nur sehr schwer erfüllt werden. Die mathematischen Ableitungen wurden deshalb so eingebaut, daß sie Aussagewert haben, vom mathematisch uninteressierten Leser aber überschlagen werden können, ohne das Verständnis zu beeinträchtigen.

Die Vielgestaltigkeit der Beispiele und Problemstellungen sollen zum Lesen und Durcharbeiten anderer mathematisch-statistischer Bücher anregen.

Im Interesse einer verständlicheren Darstellung habe ich die Literaturhinweise im Text möglichst vermieden und sie durch ein umfassendes Literaturverzeichnis ersetzt. Das Vorgetragene ist – soweit es sich um allgemeine statistische Verfahren handelt – bereits Allgemeingut geworden.

In manchen Abschnitten habe ich – des besseren Verständnisses wegen – die Bezeichnungen und Ableitungen in enger Anlehnung an die klassischen Bücher von COCHRAN (52), COCHRAN u. COX (53), KENDALL (166), LINDER (203), MUDRA (258) und WEBER (357) gegeben.

Der Stoff wurde aus der Sicht des Forstmannes und Praktikers behandelt. Die Anschaulichkeit steht vor der mathematischen Strenge. Dadurch wurden auch einige allgemeine Ergebnisse erzielt, die für den Fachmann von Bedeutung sind.

Durch die geradezu stürmische Entwicklung der letzten Jahre und die lawinenartige Ausweitung der Verfahren wurde es unmöglich, diese lückenlos anzuführen und alle Abschnitte gleich ausführlich darzustellen.

Ein Buch ist die Verwirklichung der Ideen des Verfassers, nur in den seltensten Fällen wird es allein seine Arbeit sein.

Ein wissenschaftliches Buch bedarf immer der kritischen Überprüfung eines Mitarbeiters; ein auf Zahlen basierendes Buch aber erfordert zur Kontrolle eines ganzen Mitarbeiterstabes, der auch vor den ermüdendsten Kollationen nicht kapitulieren darf.

Es sei mir deshalb erlaubt, meinen aufrichtigen Dank abzustatten:

Meinem derzeitigen Mitarbeiter und früheren Schüler Herrn Forstass. Dr. W. SCHÖPFER für die unermüdliche Überprüfung der Berechnungen.

Den Herren Dipl. Forstwirten HAUSBURG, YUNG ZU KO, LEINERT, PETER und VERES und den Herrn Studenten KENK, MAURER, NAGEL, NASTASI und WEISE, sowie Herrn BRÜTSCH und Fr. PRÜFER für die zahlreichen Berechnungen, die Anfertigung von Zeichnungen und Tabellen und das Schreiben des ersten Manuskriptes. Herrn Prof. Dr. G. MITSCHERLICH, Direktor des Institutes für Forstliche Ertragskunde und Zuwachslehre an der Universität Freiburg für sein – mir stets bewiesenes – Verständnis für meine Arbeit.

Herrn Forstdirektor L. LEIBER, Herrn Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. MANTEL und dem Kuratorium der Gesellschaft zur Förderung der Forst- und holzwirtschaftlichen Forschung für die materielle Unterstützung der vorbereitenden Arbeiten.

Herrn Landforstmeister JANSON und der Landesforstverwaltung Rheinland-Pfalz für die großzügige Unterstützung des Startes.

Herrn Landesforstpräsident H. RUPF und Herrn Landforstmeister Dr. SPIECKER für die Förderung der Arbeiten im Rahmen der Abteilung Biometrie der Baden-Württ. Forstlichen Versuchs- und Forschungsanstalt.

Den vielen in- und ausländischen Mitgliedern des Arbeitskreises für Forstliche Biometrie für ihre stete Anteilnahme und ideelle Unterstützung, die mich verpflichteten, das Begonnene – trotz aller Schwierigkeiten – zu Ende zu führen.

Dem Verlag für sein – zur Herausgabe notwendiges – Vertrauen und alle Mühe um bestmögliche Wiedergabe und Ausstattung.

Außerdem möchte ich den nachstehenden Herren Kollegen und den Verlagen herzlich danken für die Erlaubnis zur Entnahme von Tabellen, Übersichten und Abbildungen aus ihren Büchern:

Prof. Dr. M. J. BECKMANN und dem Verlag für Wirtschaftstheorie und Ökonometrie, Ludwigshafen/Rhein

„Lineare Planungsrechnung – Linear Programming“, 1959, Beispiel S. 6–11 u. 13–23

Sir R. A. FISHER, F. R. S. Cambridge

Dr. FRANK YATES, F. R. S., Rothamsted. Verlag Oliver Boyd, Ltd., Edinburgh.

„Statistical Tables for Biological, agricultural and medical research“, 1949, Auszug aus den Tafeln III, S. 32. V, S. 35; VI, VII, S. 46, XXXIII, S. 104 ff.

Dr. H. GEBELEIN und H. J. HEITE und dem Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin: „Statistische Urteilsbildung“. 1951. Abb. 20 a und 20 b, S. 45.

Prof. Dr. H. H. HILF, Verlag HANSER, München

„Die Arbeitswissenschaft“ 1957, Abb. 4 und 5.

Prof. Dr. A. LINDER, Genf. Birkhäuser-Verlag, Basel.

„Planen und Auswerten von Versuchen“, 1953, 1. Aufl. S. 63, Sägewerksversuch Filisur und – der alphabetischen Reihenfolge wegen – leider zuletzt:

Frau Prof. Dr. Erna WEBER

für ihre liebenswürdige Zusage zur Übernahme eines Auszuges aus:

„Grundriß der biologischen Statistik für Naturwissenschaftler und Mediziner“ 3. Aufl. 1957, Verlag FISCHER (VEB), Jena, Tafel 6, S. 431

Die Fülle der Auswertungsverfahren ist ein Ausdruck der Vielgestaltigkeit des Wald- und Forstwesens, die so groß ist, daß wir sie nur als Ganzes bewundern können. Möge die bunte Interessantheit der Auswertungs- und Ausdrucksformen zeigen, daß die quantitative Betrachtung uns das Bewundernswerte der Natur noch deutlicher macht und uns damit zur Demut und Ehrfurcht zwingt.

Freiburg, im Herbst 1961

Der Verfasser

## Inhaltsverzeichnis

0	<b>Einführung</b>	1
0.1	Beobachtung und Messung	1
0.2	Experiment und Versuch	1
0.3	Schätzung, Mathematische Berechnungen	2
0.4	Forstliche Biometrie	2
0.5	Erhebung der Daten und ihre Auswertung	3
0.6	Grundlagen	4
0.7	Mathematische Statistik als Forschungsmethode	4
0.8	Anwendungsgebiete	5
0.9	Mechanistische und ganzheitliche Betrachtungsweise	6
0.10	Geschichtliches	7
1	<b>Mathematische Hilfsmittel</b>	10
1.1	Graphische Darstellungen, Diagramme	10
1.11	Empirische Darstellungen	10
1.2	Kurvengleichungen	13
1.21	Die Gerade	13
1.22	Die Parabel	13
1.23	Die Hyperbel	14
1.24	Die Exponentialfunktion	15
1.3	Graphische Darstellungen als Rechenhilfsmittel	16
1.31	Funktionsskala oder Funktionsleiter	16
1.32	Funktionspapiere, Anamorphose	17
1.33	Der Inhalt von Rundholzstämmen	18
1.34	Die Exponentialfunktionen auf logarithmischem Koordinatenpapier	19
1.35	Netztafel	20
1.4	Fluchtentafeln, Nomogramme	22
1.41	Die graphische Additionstafel	22
1.42	Additionsfluchttafeln mit logarithmisch geteilten Achsen	24
1.5	Andere Koordinatensysteme	25
2	<b>Statistische Erhebungen</b>	26
2.1	Messung, Zählung	26
2.2	Aktensammlung	28
2.3	Fragebogen, Karteien	28
2.4	Das Hollerith-Verfahren	29
3	<b>Häufigkeitsverteilungen, Begriffe und Beispiele</b>	34
3.1	Einführung	34
3.2	Ordnung der Merkmalswerte	36
3.3	Beispiele für verschiedene Verteilungsformen	38
3.4	Stichproben und erschöpfende Aufnahmen	43
3.5	Relative und absolute Häufigkeiten, Summenhäufigkeiten	44
3.6	Die Größe der Merkmalsklassen, Übergang von einer Merkmalsklasse zur anderen	45
3.7	Graphische Darstellungsmöglichkeiten	46

3.8	Formeln . . . . .	46
3.9	Vergleich zweier zeitlich aufeinanderfolgender Häufigkeitsverteilungen	48
3.10	Häufigkeiten zusammengesetzter Verteilungen . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Mittelwerte</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	51
4.2	Das arithmetische Mittel . . . . .	51
4.21	Die Berechnung des arithmetischen Mittelwertes aus einer Häufigkeits- liste oder aus einer Urliste . . . . .	51
4.22	Eigenschaften des arithmetischen Mittels . . . . .	53
4.23	Die Summe der Abweichungen der einzelnen Merkmalswerte vom arithmetischen Mittel ist gleich Null . . . . .	54
4.24	Die Summe der Quadrate der Abweichungen vom arithmetischen Mittel SQ bildet ein Minimum . . . . .	54
4.25	Vereinfachte Berechnung des arithmetischen Mittels . . . . .	55
4.3	Der Zentral- oder Medianwert C . . . . .	56
4.4	Das dichteste Mittel oder der dichteste Wert (D) . . . . .	57
4.5	Das harmonische Mittel . . . . .	59
4.6	Das geometrische Mittel . . . . .	60
4.7	Das quadratische Mittel . . . . .	61
4.8	Mittel höherer Ordnung . . . . .	62
4.9	Allgemeine Beziehungen zwischen Mittelwerten . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Streu- und Variationsmaße</b> . . . . .	<b>64</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	64
5.2	Die durchschnittliche Abweichung . . . . .	65
5.3	Mittlere Streuung oder Varianz. Mittlere quadratische Abweichung . . . . .	67
5.4	Die Berechnung der Streuung und der mittleren quadratischen Abweichung . . . . .	67
5.5	Der Variationskoeffizient . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Durch die Klassenzusammenfassung verursachte Fehler</b>	<b>73</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	73
6.2	Die rechteckige Verteilung . . . . .	73
6.21	Die mittlere Streuung . . . . .	74
6.22	Die zufällige Abweichung des arithmetischen Mittels von der Klassenmitte . . . . .	74
6.23	Der Fehler des Mittelwertes bei Berücksichtigung aller Merkmalsklassen	74
6.3	Die linear ansteigende oder fallende Verteilung in der Merkmalsklasse	74
6.31	Beispiel einer Normalverteilung . . . . .	75
6.32	Beispiel einer abnehmenden Verteilung . . . . .	75
6.33	Die mittlere Streuung . . . . .	76
6.4	Der Klasseneinteilungsfehler . . . . .	76
6.5	Der Abrundungsfehler . . . . .	76
6.51	Der Einfluß des Klasseneinteilungs- und Abrundungsfehlers auf die mittlere Streuung . . . . .	77
6.6	Rückschluß auf die zu wählende Klassengröße . . . . .	78
6.7	Überprüfungsbeispiele . . . . .	79

7	<b>Beziehungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	80
7.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	80
7.11	Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff	80
7.12	Der statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff	80
7.13	Der Additionssatz (Der „entweder-oder“-Satz)	80
7.14	Der Multiplikationssatz („und“-Satz)	81
7.2	Die Binomialverteilung	81
7.21	Der Fall mit „zurücklegen“	81
7.22	Der Fall ohne „zurücklegen“	81
7.23	Die Binomialformel	82
7.3	Mittelwert und Streuung einer Binomialverteilung	86
8	<b>Ableitung des Exponentialgesetzes. Berechnung der Normalverteilung</b>	90
9	<b>Die Normalkurve</b>	92
9.1	Allgemeines	92
9.2	Eigenschaften der Normalkurve	92
9.3	Die Werte der Normalkurve	93
9.4	Anpassung einer Normalkurve	95
9.5	Koordinatenpapiere nach der Normalkurve (Wahrscheinlichkeitsnetz)	98
9.6	Die Normalkurve als Prüffunktion	99
9.7	Schätzung der mittleren quadratischen Abweichung nach der Normalkurve	99
9.8	Andere Formeln zur Schätzung von $s$	101
9.9	Allgemeiner Zusammenhang zwischen Variationsbereich und Streuung	101
10	<b>Die Verteilung seltener Ereignisse (Die POISSON'sche Verteilung)</b>	103
11	<b>Allgemeine Häufigkeitsverteilungsformen</b>	107
11.1	Allgemeines	107
11.2	Eingipfelige Verteilungen	107
11.21	Verteilungsformen als Charakteristik der Entwicklung	107
11.3	Die Asymmetrie	108
11.31	Beziehungen zwischen Schiefheitsmaßen	110
11.4	Der Exzeß	111
11.5	Die Momente einer Verteilung	111
11.6	Die Momentenmethode zur Anpassung einer Verteilung	114
11.7	Die CHARLIERSchen A- und B-Funktionen	115
12	<b>Andere Verteilungsformen</b>	120
12.1	Allgemeines	120
12.2	Die geometrische Bedeutung der logarithmischen Normalverteilung	120
12.3	Negative Binomialverteilung	124
12.4	Das Polynom $r$ . Grades und die einfache Exponentialkurve	126
12.5	Die PEARSONSchen Verteilungskurven	131

13	<b>Zusammengesetzte Verteilungen</b>	137
13.1	Der Kollektivumfang und die Häufigkeiten	137
13.2	Das arithmetische Mittel bei zusammengesetzten Verteilungen	137
13.3	Die Berechnung der Gesamtstreuung und der Varianz	137
13.4	Das Mittel der Summe zweier zufälliger Merkmalswerte	138
13.5	Die Streuung	138
13.6	Fehler des arithmetischen Mittels	139
13.7	Abschätzung des Produktes zweier Merkmalswerte	139
13.8	Schätzung der Werte $1/x$	141
13.9	Allgemeine Änderungen der ursprünglichen Merkmalsskala	141
14	<b>Statistische Vergleiche. Prüfverteilungen</b>	145
14.1	Einführung	145
14.2	Sicherheitsgrenzen. Überschreitungswahrscheinlichkeit	145
14.3	Überprüfung eines Merkmalswertes	146
14.4	Überprüfung eines Merkmalswertes bei Proben kleinen Umfanges	147
14.5	Überprüfung eines Durchschnittes	148
14.51	Bei Stichproben mit großem Umfang ( $N \geq 30$ )	148
14.52	Stichproben kleinen Umfanges ( $N < 30$ )	149
14.6	Überprüfung der Differenz zweier Mittelwerte	149
14.7	Überprüfung der Differenz zweier Mittelwerte bei kleinem Umfang	152
14.8	Die Überprüfung von Streuungen	153
14.81	Die Überprüfung von Streuungen bei kleinem Kollektivumfang	154
14.9	Vergleich zwischen einer beobachteten und einer theoretischen Verteilung	156
15	<b>Die Varianzanalyse (Streuungszerlegung)</b>	158
15.1	Einführung	158
15.2	Beispiel für das Prinzip der Streuungszerlegung	158
15.21	Freiheitsgrade	160
15.3	Zusammenhang mit der t-Verteilung	162
15.4	Theoretische Ableitung der Streuungszerlegung	162
15.5	Doppelte Streuungszerlegung	163
16	<b>Stichprobenerhebung</b>	171
16.1	Einführung	171
16.2	Geschichtliches	171
16.3	Begriffe	172
16.31	Endliche und unendliche Grundgesamtheit	172
16.32	Form und Größe der Aufnahmeeinheiten	173
16.33	Umfang der Stichprobe und Aufnahmeverhältnis	173
16.34	Die verschiedenen Phasen einer Stichprobenaufnahme	173
16.4	Theoretische Bedingungen einer guten Stichprobenaufnahme	174
16.41	Beeinflusste Ergebnisse oder Schätzungen	174
16.42	Systematische Fehler und falsche Begrenzung der Einheiten	175
16.43	Stichproben mit bekannten systematischen Fehlern	176
16.44	Zufällige Meßfehler	176

16.5	Der Stichproben- oder Repräsentativfehler . . . . .	176
16.51	Möglichkeiten der Verringerung des Repräsentativfehlers . . . . .	176
16.6	Das uneingeschränkte oder einfache Zufallsauswahlverfahren . . . . .	177
16.61	Begriffe und Notationen . . . . .	177
16.62	Annähernde Schätzung der Genauigkeit . . . . .	179
16.63	Eigenschaften der Schätzung . . . . .	181
16.64	Die Bedeutung der mittleren quadratischen Abweichung der Schätzung . . . . .	182
16.65	Überschreitungswahrscheinlichkeiten . . . . .	182
16.7	Die Streuung und die mittlere Abweichung der Schätzung . . . . .	183
16.71	Die mittlere quadratische Abweichung (Der Repräsentativfehler) . . . . .	184
16.72	Die mittlere quadratische Abweichung der geschätzten Summe . . . . .	184
16.73	Die Streuung der Summe . . . . .	184
16.74	Endliche und unendliche Gesamtheit . . . . .	184
16.75	Die Vernachlässigung des Faktors $N-n : n$ . . . . .	184
16.76	Die Abschätzung des mittleren Fehlers aus der Stichprobe . . . . .	185
16.77	Anwendbarkeit der Formeln . . . . .	186
16.8	Eingeschränkte (stratifizierte) Stichprobe . . . . .	187
16.81	Stratifizierung . . . . .	187
16.82	Die Schätzung der einzelnen Strata . . . . .	189
16.83	Mathematische Behandlung des Problems . . . . .	189
16.84	Ableitung der Ergebnisse . . . . .	190
16.85	Die mittlere Streuung in einem geschichteten Verfahren . . . . .	190
16.86	Die Schätzung der Streuung . . . . .	191
16.87	Die optimale Verteilung . . . . .	193
16.9	Die systematischen Stichprobenverfahren . . . . .	197
16.91	Einführung . . . . .	197
16.92	Die Schätzung des Fehlers bei systematischen Stichproben . . . . .	199
16.93	Direkte Ermittlung des Fehlers aus einer systematischen Stichprobe . . . . .	204
16.10	Die Anwendung des Variationskoeffizienten . . . . .	206
16.11	Die Schätzung der Streuung und des Stichprobenumfanges . . . . .	206
16.12	Form und Größe der Aufnahmeeinheiten . . . . .	207
16.121	Allgemeines . . . . .	207
16.122	Die Wirksamkeit kleinerer Flächen . . . . .	209
17	<b>Versuchsplanung</b> . . . . .	214
17.1	Einführung . . . . .	214
17.2	Grundsätze der Versuchsplanung und Auswertung . . . . .	214
17.21	Die Wiederholung . . . . .	215
17.22	Zufällige Zuordnung . . . . .	215
17.23	Möglichst weitgehende Gleichartigkeit der Versuchsglieder . . . . .	216
17.3	Versuchsanordnungen . . . . .	217
17.31	Die Blockanlage mit zufälliger Anordnung . . . . .	217
17.4	Lateinische Quadrate . . . . .	221
17.5	Versuche mit unvollständigen Blöcken . . . . .	223

17.51	Die Gitteranlage . . . . .	223
17.52	Balancierte Blöcke . . . . .	224
17.6	Die Auswertung der Gitteranlage . . . . .	226
17.7	Die Auswertung nach balancierten Blöcken . . . . .	230
18	<b>Korrelations- und Ausgleichsrechnung . . . . .</b>	234
18.1	Einführung . . . . .	234
18.11	Funktioneller und stochastischer Zusammenhang . . . . .	234
18.12	Ursächliche Erklärung und formelle Beschreibung . . . . .	241
18.2	Graphische Ausgleichung . . . . .	242
18.21	Anwendungsmöglichkeit der graphischen Analyse . . . . .	243
18.3	Die Durchführung des graphischen Ausgleiches . . . . .	243
18.31	Graphische Ausgleichung über die Mittelwerte . . . . .	245
18.32	Die Form der Ausgleichskurve . . . . .	245
18.33	Eigenschaften der Ausgleichskurve . . . . .	246
18.34	Auswertung des Ausgleichs . . . . .	246
18.35	Darstellung der Freihandkurve durch eine Formel . . . . .	247
18.36	Die Straffheit des Zusammenhanges . . . . .	248
18.37	Zweideutigkeit des statistischen Ausgleichs . . . . .	251
18.4	Die rechnerische Ausgleichung . . . . .	256
18.41	Einführung . . . . .	256
18.42	Der Ausgleich durch eine Gerade . . . . .	256
18.43	Allgemeine Ableitungen . . . . .	257
18.44	Die Ableitung der Normalgleichungen für eine Parabel 2. Grades . . . . .	257
18.45	Aufstellung einer Korrelationstabelle . . . . .	258
18.46	Auswertung der linearen rechnerischen Ausgleichung . . . . .	261
18.47	Die mittlere Regressionsgerade . . . . .	264
18.48	Beurteilung des aus einer Stichprobe ermittelten Korrelationskoeffizienten	265
18.49	Scheinkorrelation und Erhöhung der Korrelation durch Transformation der Veränderlichen . . . . .	266
18.5	Die rechnerische Ausgleichung nach einer Parabel . . . . .	268
18.51	Ausgleichung durch eine Parabel 2. Grades . . . . .	270
18.52	Berechnung einer Parabel 2. Grades nach der Korrelationstabelle . . . . .	271
18.53	Gruppenausgleichung . . . . .	275
18.6	Andere Korrelationsgleichungen . . . . .	276
19	<b>Ausgleichung durch Orthogonalpolynome . . . . .</b>	279
19.1	Einführung und Beispiel . . . . .	279
19.11	Erläuterung der Orthogonalpolynome . . . . .	279
19.2	Streuung um die Ausgleichskurve . . . . .	283
19.3	Die Ausgleichung bei äquidistanten x-Werten . . . . .	284
19.31	Arbeitsgang zu den Übersichten 177, 178, 179, 180 . . . . .	289
19.4	Die Ausgleichung einer Zeitreihe und die Berechnung eines Trends . . . . .	290



20	<b>Ausgleichung eines Zusammenhanges mit periodischer Variation</b>	294
21	<b>Die mehrfache Ausgleichung und Korrelation</b>	300
21.1	Einführung	300
21.2	Rechnerisch-graphische Ausgleichung	301
21.21	Das Schichtlinienverfahren	306
21.3	Rechnerische Ausgleichung	306
21.31	Die Ableitung der „Normalgleichungen“ für zwei unabhängige Variablen	307
21.32	Die Korrelationsmaße für einen linearen Ausgleich zwischen 3 Veränderlichen	312
21.33	Teilbeziehung oder partielle Regression	313
21.34	Teilkorrelationskoeffizienten und Teilbestimmtheit	314
21.35	Die mehrfache lineare Korrelation	315
21.4	Die mehrfache (multiple) kurvilineare Korrelation im allgemeinen Fall	319
22	<b>Wachstumsfunktionen</b>	327
22.1	Einleitung	327
22.2	Begriffe	329
22.3	Verlauf der Wachstums- und Zuwachskurve	331
22.4	Wachstumzyklen und -Phasen	334
22.5	Formale Wachstumsfunktionen	334
22.6	Exponentialfunktionen	337
22.61	Das ungehemmte Wachstum	337
22.7	Formel von Hegershoff	340
22.8	Verwandte Formeln	344
22.81	Graphische Konstruktion und Berechnung der Kurven 649 und 668	345
22.9	Verallgemeinerung durch die Gleichung (678)	347
22.91	Die Maximum- und Minimpunkte	349
22.92	Bestimmung der Kurvenkonstanten aus den charakteristischen Punkten	349
22.93	Organische Zeit	250
22.94	Weitere Transformationen zur statistischen Ausgleichung	351
22.10	Das „Gesetz“ des abnehmenden Bodenertrages	355
22.101	Die Gleichung (709) in der Basis 10	359
22.11	Die allometrische Funktion und die Wachstumsfunktion von Backman	362
22.111	Die Formel von Backman	362
22.112	Die Ableitung der Wachstumsfunktion von Backman	366
22.113	Graphische Auswertung der Formel von Petterson und Backman	368
22.12	Andere Funktionstypen	371
22.13	Allgemeine Formulierung der Wachstumsfunktionen	373
22.131	Die Verallgemeinerung der Gleichung (797)	377

23	<b>Wirtschaftsstatistische Verfahren und Begriffe</b>	379
23.1	Allgemeines	379
23.2	Verteilungen	379
23.3	Mittelwerte	381
23.31	Berechnung des günstigsten Standortes	382
23.4	Beziehungszahlen	383
23.41	Gliederungszahlen	383
23.42	Verursachungs- und Entsprechungszahlen	385
23.43	Die Meßziffern oder Strukturzahlen	386
23.5	Die Indexpzahlen	387
23.51	Die einfache Indexpzahl	387
23.52	Indexpzahlen mit beweglicher Basis	388
23.53	Mathematischer Ausdruck	388
23.54	Komplexe Indexpzahlen	389
23.55	Die Berechnung der komplexen Indexpzahlen	391
24	<b>Zeitreihen</b>	395
24.1	Einführung	395
24.2	Berechnung des Trends	395
24.21	Die Methode der gleitenden Durchschnitte	397
24.3	Verfahren zur Abspaltung eines periodischen Bestandteiles	398
24.31	Das Verfahren zur Berechnung der Periodenfigur durch Mittelbildung	399
24.32	Das Periodogramm	400
24.33	Das Differenzenverfahren	401
24.34	Die PEARSON'sche Gliedziffermethode	401
25	<b>Einführung in die lineare Programmierung</b>	404
25.1	Erläuterung	404
25.2	Wirtschaftliches Beispiel. Das Problem von Thünen	404
25.3	Beispiel einer linearen Planungsrechnung	406
25.4	Graphische Lösung des Problems	411
	Literaturverzeichnis	414
	Namenverzeichnis	427
	Sachverzeichnis	428

## 0 Einführung

### 0.1 Beobachtung und Messung

Die Wald- und Forstwirtschaft ist immer auf Schätzungen und Messungen – also auf die Auswertung von Zahlenmaterial – angewiesen. Die Auswertungen von Beobachtungs-Schätzungs- und Meßergebnissen führt zu der – für den Forstmann so wichtigen – praktischen Erfahrung.

Aus der Vielzahl der heute für die Forstwirtschaft wesentlichen Daten seien nur als Beispiel herausgegriffen: Das Alter der Bäume, das Holzvolumen der Bäume im Verhältnis zum Alter, der Zuwachs an Holzinhalt und Wert, das Ausmaß eines Borkenkäferbefalles, die Abhängigkeit des Befalles von der Witterung, der Schaden einer Sturmkatastrophe, die Entwicklung der Holzpreise und die Holzeinfuhr, die Leistung eines Holzhauers pro Stunde am Vormittag oder Nachmittag, die Struktur einer Holzhauerfamilie in einem Gebirgsdorf, die psychotechnische Eignung von Anwärtern für den höheren Forstdienst usw. Diese Beispiele sind – wie alle Vorgänge im praktischen Leben – komplexer Natur. Es spielen biologische, technische, soziale, wirtschaftliche und andere Aspekte mit. Die Übergänge sind dabei so fließend, daß jeder Aspekt noch weiter untergliedert werden könnte.

### 0.2 Experiment und Versuch

Beim Experiment wird der Ablauf eines Vorganges bewußt beeinflußt und oft vereinfacht. Vor allem aber kann das Experiment unter bekannten Bedingungen wiederholt werden. Einzelne Elemente werden dabei konstant gehalten. Es können z. B. eine bestimmte Temperatur und ein bestimmter Druck eingehalten werden. Der Ablauf des Experiments ist genau berechenbar.

Beim biologischen Versuch sind die einzelnen Elemente meist komplex und nicht genau bestimmbar.

BEISPIEL: Läßt man im Laborversuch Fichtensamen keimen, so können Temperatur und Feuchtigkeit konstant gehalten werden. Der Versuch ist auch wiederholbar. Die Provenienz der Fichtensamen ist genetisch aber keineswegs eindeutig. Das Resultat ist vorher nicht berechenbar.

Noch deutlicher wird dies bei den in der Forstwirtschaft üblichen Versuchen größeren Ausmaßes im Freiland. Diese Versuche können nur bis zu einem gewissen Grad beeinflußt und nie unter absolut gleichen Bedingungen wiederholt werden. Die Resultate sind nicht – wie beim physikalischen Experiment – im voraus berechenbar. Das physikalische Experiment ist in den meisten Fällen die Bestätigung vorausgegangener Berechnungen.

Beim biologischen Versuch ist die Gewinnung der zur Auswertung notwendigen Zahlen meist erst nach langer Versuchsdauer möglich. Die Resultate sagen nichts aus über den Wert des Versuches. Sie ermöglichen aber eindeutige Schlußfolgerungen und vermitteln damit Erfahrung.

So wird beispielsweise durch die Auswertung von Messungen in den langfristigen forstlichen Versuchsflächen Erfahrung über das Waldwachstum und den Einfluß

der verschiedenen waldbaulichen Maßnahmen gesammelt. Der Wert der Erfahrungen ist allein abhängig von der Genauigkeit der Berechnungen.

### 0.3 Schätzung. Mathematische Berechnung

WAGEMANN (352) definiert in seinem sehr geistreichen Buch die Mathematik als die Wissenschaft von der „reinen“ Zahl und die mathematische Statistik als die Wissenschaft von der „praktischen“ Zahl.

Die Mathematik – die Wissenschaft, „bei der man nie weiß, wovon man spricht“ – ist das bestmögliche Rüstzeug zur Berechnung des Experimentes. So kann mit wenigen Messungen mittels der mathematischen Induktion z.B. das Fallgesetz verifiziert werden.

Der Auswertung komplexer Erscheinungen und biologischer Vorgänge dienen die Methoden der mathematischen oder theoretischen Statistik. Daß die Lösung biologischer Probleme mit rein mathematischen Methoden zu Fehlschlüssen führt, sei am Gesetz von MALTHUS dargelegt:

MALTHUS (1766–1834) leitete aus Beobachtungen über die Vermehrung der menschlichen Bevölkerung und der Entwicklung des sozialen Lebens die Behauptung ab, daß die Bevölkerung nach einer geometrischen Progression ansteige, während sich die Nahrungsmittel nach einer arithmetischen Reihe – also viel langsamer – vermehren würden.

Dieses berühmte „Gesetz“, dessen düstere Prognosen ungeahnte Folgen hatte, konnte sich nicht bewahrheiten, sondern nur eine gewisse Tendenz aufzeigen. Es konnte nicht die Allgemeingültigkeit einer mathematischen Formel beanspruchen, da die Erfahrungen die MALTHUS zugrundelegte, ihres komplexen Charakters wegen nicht durch eine mathematische Formel erfaßt werden konnten.

WEITERE BEISPIELE: Ein Bauer schätzt nach der Erfahrung einiger Jahre die voraussichtliche Ernte seiner Äcker und: ein Revierförster schätzt nach mehrjähriger Erfahrung unter Berücksichtigung der Witterungsverhältnisse den Ausfall an jungen Pflanzen in einer Kultur.

Die Schätzungen werden zweifellos richtiger sein, wenn der Revierförster und der Bauer sie auf genaue Erhebungen und Aufzeichnungen aus der ganzen Beobachtungszeit stützen. Das wichtigste ist aber, daß beide sich bewußt sein müssen, daß ihre Schätzungen keiner exakten Berechnung entsprechen. Ihre Beobachtungen reichen nicht aus, um alle Faktoren berücksichtigen zu können, die das Ergebnis zu beeinflussen vermögen. Die gegebenen Komponenten können nicht durch mathematische Formeln erfaßt werden. Zahlen, die auf Beobachtungen oder Schätzungen basieren, sind bereits statistischer Natur. Mit mathematisch-statistischen Methoden kann auch berechnet werden, mit wieviel Wahrscheinlichkeit die Schätzungen der Wirklichkeit entsprechen.

### 0.4 Forstliche Biometrie

Die Grundlagen für die mathematische Statistik liefert die reine Mathematik. Die mathematisch-statistischen Verfahren dienen der objektiven und wirksameren Auswertung von Beobachtungs- und Versuchsdaten.

Unter *Biometrie* versteht man die Zusammenfassung aller mathematisch-statistischen Methoden zur Erfassung und Beschreibung von Lebensvorgängen. Die Forstliche Biometrie umfaßt neben der Auswertung der sehr ausgeprägten naturgesetzlichen Grundlagen auch die – in der Forstwirtschaft wichtigen – übrigen mathematisch-statistischen Auswertungsmethoden.

### 0.5 Die Erhebung der Daten und ihre Auswertung

Die Erhebungsstatistik oder Technik der Statistik umfaßt die Planung aller Möglichkeiten zur Sammlung des zu erhebenden Zahlenmaterials. Ihre Mannigfaltigkeit ergibt sich aus der Vielfalt der Untersuchungen.

Zwischen der Feststellung der durchschnittlichen Länge von Tannennadeln und der Bevölkerungszählung mit Millionenzahlen, der Feststellung der durchschnittlichen Größe der Blattläuse und der Holzvorratsinventur ganzer Länder mit Hunderten von Millionen Kubikmeter Holz, liegen unzählige Beispiele für die Aufgaben und die verschiedenartige Problemstellung der Erhebungsstatistik. Die Erhebungsstatistik und die Auswertung des Zahlenmaterials beeinflussen sich gegenseitig, ihre Grenzen sind fließend. Eine gute Planung und Erhebung wird die Auswertung immer erleichtern und gute Ergebnisse garantieren. Über die Problematik der Auswertung von Zahlenergebnissen ist sehr viel geschrieben worden. Die Literatur umfaßt von der Wahrhaftigkeit von Zeugenaussagen bei der Rechtsprechung (286) bis zur Berechnung wahrscheinlicher Bahnen obskurer Sterne (90) unzählige Beispiele.

Die mathematisch-statistische Auswertung besteht – ganz allgemein – in der Kunst, Zahlen sprechen zu lassen oder aus den Zahlen die richtige Antwort zu entnehmen. Dies ist meist nur dadurch möglich, daß man die vielfältigen Aussagen eines oft sehr umfangreichen Zahlenmaterials vereinfacht. Die allgemeingültigen theoretischen Grundlagen, die eine Vereinfachung erlauben, liefert die Mathematik. Nach dem „Prinzip der großen Zahl“ kann der Aussagewert sehr vieler Zahlen in wenigen charakteristischen Zahlen verdichtet werden. Diese *Verdichtung* oder Reduktion der Zahlen ist von besonderer Bedeutung, seitdem das moderne Leben „in Zahlen zu ersticken droht“. Bei der mathematisch-statistischen Auswertung kommt es nun darauf an, die charakteristischen Zahlen zu ermitteln, die dem „wahren“ Wert am wahrscheinlichsten entsprechen. Da praktische Zahlen sehr oft mit unvermeidlichen Fehlern behaftet sind, ist es notwendig, auch mit fehlerhaften Zahlen das richtige Ergebnis zu finden. Diese Forderungen wurde meisterhaft vom „Princeps mathematicorum“ KARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) erfüllt.

BEISPIEL: Über den Planetoiden Ceres lagen (1801) äußerst wenig Angaben vor. Seine Existenz wurde sogar mehrfach bestritten. Aus den wenigen vorhandenen – fehlerhaft erhobenen – Daten berechnete GAUSS nach der von ihm entwickelten „Methode der kleinsten Quadrate“ die wahrscheinlichste Bahn des Ceres. Nachträgliche Beobachtungen fanden den Planetoiden dann tatsächlich auf dieser Bahn. GAUSS hatte mit dieser Berechnung mit den bis dort herrschenden Anschauungen gebrochen und sich auf *empirische* statt auf abstrakte Zahlen gestützt.

## 0.6 Grundlagen

„Die mathematische Statistik ist kein Automat, in den man das statistische Material nur hineinzustecken hat, um nach einigen mechanischen Manipulationen das Resultat wie an einer Rechenmaschine abzulesen. Es ist nicht immer sicher, daß man auf diese Weise die richtige Antwort auf die richtige Frage erhält.“ (50) Als wichtigste theoretische Grundlagen sind die allgemeine Mathematik und insbesondere die Wahrscheinlichkeitsrechnung anzusehen. Über den notwendigen Umfang der mathematischen Kenntnisse gehen die Ansichten der verschiedenen Autoren weit auseinander. Zum Verständnis der im ersten Kapitel erläuterten mathematischen Hilfsmittel ist nur die Kenntnis der elementaren Mathematik vorausgesetzt. Es sei an dieser Stelle aber hervorgehoben, daß zur Begründung vieler neuer statistischer Verfahren die Beherrschung der höheren Mathematik Voraussetzung ist, da nur sie eine elegantere und schärfere theoretische Begründung der Verfahren ermöglicht. Als Beispiel hierfür sei das ausgezeichnete Buch von LINDER (203) erwähnt.

Der Auswertung von allgemeinem forstlichem Zahlenmaterial und praktischen forstlichen Versuchen sei die Auffassung von R. A. FISHER (80) vorangestellt:

„Wenig Erfahrung genügt, um zu zeigen, daß das traditionelle Rüstzeug der statistischen Auswertung gänzlich ungeeignet ist für die Bedürfnisse der Forschungspraxis. Nicht nur, daß man dabei ein schweres Geschütz nimmt, um auf einen Spatz zu schießen, man verfehlt auch den Spatz.“

Wirksame Verfahren zur Auswertung forstlicher Daten konnten aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt werden, da nur die Gesetze der Wahrscheinlichkeit oder – paradox ausgedrückt – die Gesetze des Zufalls tragbare Grundlagen dafür geben. Unerläßlich ist deshalb die Beherrschung der Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der einfachsten Hilfsmittel der Mathematik.

In allen forstlichen Fachgebieten, die bislang mit komplizierten mathematischen Formeln arbeiteten oder sich ungenauer oder verschwommener Vorstellungsweisen bedienten, bedeutet die Anwendung mathematisch-statistischer Verfahren eine wesentliche Vereinfachung.

## 0.7 Mathematische Statistik als Forschungsmethode

Die mathematisch-statistischen Methoden eignen sich zur rechnerischen Auswertung von umfangreichem Zahlenmaterial und zur Erforschung von Zusammenhängen komplexer Erhebungen.

In den exakten Naturwissenschaften – z. B. in der Physik – ist in vielen Fällen das Experiment beweiskräftig. Es ist zulässig, durch Schlußfolgerungen aus dem Einzelfall allgemeine Gesetze abzuleiten (Induktionsschluß).

Wie bereits dargelegt, ist bei biologischen Vorgängen meist kein Experiment möglich. Bei den – an Stelle des Experiments stehenden – biologischen Versuchen sind viele Faktoren oft quantitativ nicht feststellbar. Dadurch ergeben sich bei Wiederholung der Versuche immer andere Resultate. Der Induktionsschluß ist in diesem Fall nicht zulässig. Dagegen kann aber eine genügende Anzahl von Versuchswiederholungen eine Aussage über die – den Versuchen zugrundeliegenden –

Gesetzmäßigkeiten erlauben. Die mathematisch-statistischen Methoden ermöglichen, solche Versuche anzuwenden und sichere Gesetzmäßigkeiten daraus abzuleiten. Sie sind immer anwendbar, wenn keine streng deterministischen Gesetze herrschen. Dies trifft nicht nur für die biologischen Vorgänge zu, sondern im gleichen Maße für die Wirtschafts- und Sozialwissenschaften.

Die Problemstellungen der Forstwirtschaft und Forstwissenschaft sind biologisch-naturwissenschaftlicher und sozialökonomischer Art. Die mathematisch-statistischen Verfahren sind daher für die forstliche Praxis und Forschung besonders geeignete Forschungsmethoden.

## 0.8 Anwendungsgebiet

Die Sozialwissenschaften arbeiten mit der *Sozialstatistik* und der Bevölkerungstheorie, die wirtschaftliche Forschung mit der *Wirtschaftsstatistik* und dem in jüngster Zeit entwickelten Zweig der *Ökonometrie*.

Die Variationsstatistik dient der Erforschung der Variabilität der Merkmale in der Biologie. Einen besonders großen Raum nehmen die statistischen Methoden in der Erblchkeitslehre ein.

In der Landwirtschaft wird u. a. auf der statistischen Versuchsplanung und statistischen Auswertung die moderne Düngungslehre aufgebaut.

Erna WEBER (35) prägte den Begriff *Biologische Statistik*, der in anderen Ländern als Biostatistik erscheint.

In der Medizin werden teilweise die gleichen Methoden verwendet wie in der Biologie. Das Grundlagenmaterial hierzu liefert die *Medizinalstatistik*.

Die *Biophysik* dient der Erforschung physikalisch-chemischer Gesetzmäßigkeiten in der Biologie.

Die Fabrikationskontrolle, die Diagnose eines Betriebsganges, die Planung von Neuanlagen, das moderne Fernmeldewesen, Verkehrswesen usw. sind heute ohne die arbeitserleichternden mathematisch-statistischen Methoden nicht mehr denkbar. Unter *Biometrie* versteht man – insbesondere seit der Gründung der berühmten Zeitschrift „*Biometrika*“ im Jahre 1901 durch die englischen Statistiker GALTON, PEARSON u. a. – im weitesten Sinne des Wortes die Zusammenfassung aller mathematischen Methoden, die zu einer quantitativen Erklärung von Lebensvorgängen führen. Die Forstwissenschaft befaßt sich u. a. mit der Erblchkeitslehre, biologischen Gesetzmäßigkeiten, Wachstumsgesetzmäßigkeiten, Wirtschaftsforschung, handelspolitischen Problemen und Betriebsforschung.

Die *Forstliche Biometrie* beinhaltet das Primat der biologischen Grundlagen in der Forstwissenschaft. Die Forstwirtschaft arbeitet mit großen Flächen und sehr langen Zeiträumen. Einem Jahr in der Landwirtschaft – von der Saat bis zum Verbrauch – entsprechen in der Forstwirtschaft 50, 80, 100 und manchmal sogar 250 Jahre Umtriebszeit. Es ist notwendig, im Verlauf der längeren Zeiträume sich wiederholende sehr umfangreiche Erhebungen zu machen. Die Großräumigkeit macht dabei die erschöpfende Erfassung aller Individuen unmöglich.

Die vielseitige Anwendung mathematisch-statistischer und allgemeiner biometrischer Methoden in der Forstwirtschaft ist bedingt:

durch den Anfall von sehr umfangreichem Zahlenmaterial in der Forsteinrichtung,

in der Holzmarktkunde, in der Holzmess- und Zuwachslehre und in der Forstpolitik und: – durch die Notwendigkeit, das umfangreiche, unübersichtliche Zahlenmaterial in leicht zu fassende charakteristische Zahlen und Zusammenhänge zu „verdichten“.

## 0.9 Mechanistische und ganzheitliche Betrachtungsweise

Im 19. Jahrhundert scheint die Überzeugung, daß durch eine ständige Weiterentwicklung der reinen Mathematik, Physik und Chemie alle Probleme des mikro- und makrophysikalischen Kosmos gelöst werden können, noch unerschütterlich. Die Arbeiten der Physiker des 20. Jahrhunderts bahnten aber bereits eine Annäherung an die statistische Denkweise an. Es zeigte sich z. B., daß sich im subatomischen Bereich mit wahrscheinlichkeitstheoretischen und statistischen Betrachtungen eher befriedigendere Lösungen finden ließen als mit der streng deterministischen. In der Physik gilt dies für unzählige Probleme. An nur einem Beispiel soll erläutert werden, daß von Fall zu Fall genaue mathematische Berechnungen durch statistische Verfahren abgelöst werden können:

Die Wetterlage eines bestimmten Ortes zu einem bestimmten Zeitpunkt wurde früher aus aero- und thermodynamischen oder sonstigen physikalischen Formeln und Differentialgleichungen hergeleitet. Heute werden mit empirischen Daten Wetterkarten gezeichnet und durch deren Vergleich die wahrscheinlichste Wetterentwicklung festgelegt. Die Ergebnisse sind nicht weniger gut, die Verfahren jedoch viel einfacher.

Eine Anschauungsweise in den Naturwissenschaften kann aber nie auf sich selbst beschränkt bleiben. Sie beeinflußt die Philosophie und die gesamte Weltanschauung. Wir können den – aus mathematisch – deterministischen Vorstellungen entstandenen LAPLACESchen Geist bewundern, haben aber inzwischen begreifen gelernt, daß das dabei vorausgesetzte Idealbild leider nicht realisierbar ist. Ein Vergleich der verschiedenen Betrachtungsweisen in dieser Hinsicht ist sehr eindrucksvoll. Durch den Wandel in den Anschauungen wird heute die Frage erhoben, ob nicht dem Zufall im Weltgeschehen eine sehr große Rolle zukomme und ob der Glaube an die uneingeschränkte Willensfreiheit noch vertretbar ist. Die Reihe der Fragen könnte noch beliebig verlängert werden. Die kurze Erwähnung soll jedoch nur ein Hinweis darauf sein, daß die Folgerungen aus der mathematisch-statistischen Denkweise eben so berechtigt sind wie die aus der mathematisch-rationalistischen im neunzehnten Jahrhundert.

Die immer wieder auftauchende Behauptung, die Anwendung mathematisch-statistischer Methoden stehe – beispielsweise im Forstwesen – im Gegensatz zur ganzheitlichen Erfassungs- und Betrachtungsweise, beruht auf nur mangelnder Beherrschung der Materie.

Die biometrischen Methoden ermöglichen erst die Auswertung und Erkennung brauchbarer Zusammenhänge aus mehr oder weniger umfangreichen Erhebungen und Beobachtungen. Der Verzicht auf die Auswertung aller Daten kann aber nur in Verschwommenheit enden. Die mathematisch-statistische Denkweise fördert zwangsläufig die Ganzheitsbetrachtung, während die deterministisch-rationalistische der mechanistischen Betrachtungsweise entspricht.



## 0.10 Geschichtliches

Da hier nur ein geschichtlicher Auszug gegeben werden kann, sei auf die ausgezeichneten geschichtlichen Darstellungen von WEBER (357) und LORENZ (219) verwiesen.

Die moderne Bedeutung der Begriffe Statistik, mathematische Statistik, Biometrie, Forstliche Biometrie, erhellte aus der geschichtlichen Entwicklung.

Der Begriff Statistik wurde von dem deutschen Gelehrten ACHENWALL (2) (1719 bis 1772) eingeführt. Man verstand darunter ein ziemlich heterogenes – für das Interesse des Staates wichtiges – Gebiet, das heute wahrscheinlich als allgemeine Staatskunde bezeichnet würde und das auch die heutige Erhebungsstatistik umfaßte.

Ein enger Teil der Statistik – die sogenannte politische Arithmetik – wurde schon von SÜSSMILCH (1707–1767) im heutigen Sinne einer mathematischen Statistik aufgefaßt. SÜSSMILCH (345) stellt als einer der ersten fest, daß durch die Beobachtung einer großen Zahl gleichartiger Fälle von Ereignissen in der menschlichen Gesellschaft gewisse Gesetzmäßigkeiten festgestellt werden können.

In der gleichen Zeit entwickelten PASCAL (1623–1662), J. BERNOULLI (1654–1705), LAPLACE (1749–1827) u. a. die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

v. SCHLÖZER (325) (Schüler von ACHENWALL) formulierte die Statistik als „stillstehende Geschichte“ und die Geschichte als „fortlaufende Statistik“. In der Mitte des 19. Jahrhunderts entwickelten sich hieraus mehrere selbständige Disziplinen wie die Finanzwissenschaft, Bevölkerungstheorie, Versicherungsstatistik, usw.

QUETELET (1796–1874) (302) schreibt der Statistik allgemein die Aufgabe zu, aus umfangreichen Messungen Gesetzmäßigkeiten und Gesetze abzuleiten.

Aus der Theorie der Beobachtungsfehler übernimmt QUETELET den Begriff „Durchschnittswert“ und aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach COURNOT (1801–1877) die „Normalverteilung“.

LEGENDRE, LAPLACE und insbesondere GAUSS, dann HELMERT, BESSEL u. a. haben die Fehlertheorie zu einem beachtlichen Zweig der angewandten Mathematik ausgebaut. Durch die Anlehnung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung und an die Fehlertheorie wurde die Statistik logisch und erkenntnistheoretisch außerordentlich vertieft.

Eines der vielen Rätsel, welches die Natur aufgibt, ist die Tatsache, daß sich die Merkmalswerte der Individuen einer biologischen Gesamtheit (z. B. die Durchmesserwerte eines gleichaltrigen Reinbestandes) nach einer Glockenkurve verteilen. Dieselbe Glockenkurve ergibt sich auch bei der Verteilung der Fehler um das „wahre Ergebnis“ einer Messung. Die Möglichkeit, die Glockenkurve über die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung rein theoretisch abzuleiten, vervollständigt das Rätselhafte.

Durch BRAVAIS (1811–1863), POISSON (1781–1849), FECHNER (1801–1897), LEXIS, BORTKIEWICZ, WESTERGAARD, GALTON, PEARSON, R. A. FISHER hat die mathematische Statistik eine Entwicklung erfahren, welche alle Zweige des menschlichen Wissens und der Technik maßgebend beeinflußt.

Das statistische Denken hat in der forstlichen Praxis früher Eingang gefunden als in anderen Zweigen der Biometrie.

Der Grund hierfür ist, daß der Wald eine Gesamtheit von Individuen darstellt,

die zahlenmäßig erfaßt werden muß. Aus den sehr umfangreichen Erfahrungszahlen und erhobenen Daten mußten außerdem – seit Beginn einer Waldwirtschaft – Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden. So entstanden schon im 18. Jahrhundert forstliche Erfahrungstabellen und Zahlen, die eine mehr oder weniger gute Auswertung von Messungen oder Erfahrungen voraussetzten. Solche Tabellen konnten nur konstruiert werden, nachdem gewisse Gesetze und Gesetzmäßigkeiten erkannt waren. Viele namhafte Forstwissenschaftler des 18. und 19. Jahrhunderts haben sich der Biometrie im heutigen Sinne bedient, wenn auch eine bewußte Anwendung der leichter zum Ziele führenden – damals noch nicht entwickelten – mathematisch-statistischen Methoden nicht möglich war.

Ein Beweis hierfür sind die Arbeiten von:

- OETTEL: Practischer Beweis, daß die Mathesis bey dem Forstwesen unentbehrliche Dienste tue. 1765
- HENNERT: Anweisung zur Taxation der Forste. 2. Teile 1791 und 1795
- HARTIG, G. L.: Anweisung zur Taxation der Forste. 1. Aufl. 1795
- PAULSEN: Kurze praktische Anweisung zum Forstwesen oder Grundsätze über die vorteilhafteste Einrichtung der Forsthaushaltungen und über Ausmittelung des Werts vom Forstgrunde. (Herausg. von FÜHRER) 1795
- COTTA, H.: Systematische Anleitung zur Taxation der Waldungen. 1804
- KÖNIG, G.: Anleitung zur Holztaxation. 1813
- HUNDESHAGEN: Die Forstabschätzung auf neuen wissenschaftlichen Grundlagen. 1826  
ohne Verf.: Massentafeln zur Bestimmung des Inhalts der vorzüglichsten deutschen Waldbäume. München 1846. (Es wurden 40 220 Baummessungen ausgewertet.)
- ZETSCHKE, K.: Kreisprobenflächen-Aufnahmeverfahren. Allg. Forst- und Jagdzeitung 1891

Auch Vorschriften zur Durchführung von Stichproben – allerdings ohne Fehlerrechnung – sind schon vor Ende des 18. Jahrhunderts bekannt. Folgende Zitate mögen dies beweisen:

„In dem dritten Abschnitte wird gezeigt, wie der gegenwärtige Holzbestand der Forsten mit der möglichsten Genauigkeit nach den unterschiedenen Holzgattungen bestimmt werden soll. Hierbey werden die herausgemessenen Holzbestände zu Grunde gelegt. Das Stamm- und Oberholz muß von dem Kondukteur sowohl im Laub- als Nadelholz genau bemerkt werden, wobey man einen Holzhauer zu Hülfe nehmen muß. Da aber die Stämme zu zählen zu kostenspillig und zu zeitverderbend ausfallen würden, so soll nur das Oberholz genau in Augenschein genommen werden, und wenn der Bezirk nicht über 100 Morgen groß ist, so müssen an vier verschiedenen Oertern 12 Viertel Morgen, also 4 in gutem, 4 in mittelmäßigem und 4 in schlechtem Bestande erwählt werden. In Revieren von 100 bis 200 Morgen werden 24 Viertel, sind sie aber noch größer 36 Probeviertelmorgen ausgehoben. Sind die Probeviertel abgestochen so zählet der Forstbediente und der Holzhauer das Stammholz auf denselben und diese geben den Maßstab zur Abschätzung.“ (C. W. HENNERT: Anweisung zur Taxation der Forsten. Erster Theil Berlin 1791. S. 56)

und:

„Verschiedene geübte und erfahrene Langholzhauer von dem Dobel, die vorher ernstlich erinnert worden waren, ‚dabey mit aller Sorgfalt und Genauigkeit zu Werke zu gehen‘, schätzten unter der Aufsicht der Herrenalber Waldknechte in jedem Bestand die vorhandenen Stämme darnach ein, welches Sortiment sie ergeben würden! Dabei wurden die Holländer Tannen, die Holländer Meß- und Dickbalken, die Klözbäume und die Gemeinen 70er und 60er in jedem Bezirk einzeln abgezählt und sortenweise vermerkt. . . .

„Was hingegen die geringeren Sorten als die Gemeinen 50er, 40er, 30er und 20er anbelangt, so ist zur Vermeidung allzugroßer Kosten und Weitläufigkeit die stammweise Abzählung

derselben in jedem Waldbezirk nur auf gewiesenen, nach dem unterschiedlichen Anstand des Waldes hin und wieder ausgewählten (und besonders vermessenen) Probestückeln zu je  $\frac{1}{4}$  Morgen (= 0,079 ha) vorgenommen. Das Ergebnis wurde dann auf die Gesamtfläche umgerechnet. Es wurden also hier bereits vor 165 Jahren Repräsentativaufnahmen durchgeführt.“

Zitat aus *Jakob-Friedr. SCHULTHEISS*: Wald-Etat-Instruktion von 1783 – gedruckt in Mosers Forstarchiv, Bd. II, S. 65–157, nach einer Diplomarbeit von H. WEISS: Vorrat und Stammzahlverteilung in den Tannenbeständen des ehemaligen Klosterforstes Herrenalb bei der Forsteinrichtung im Jahre 1790. (Fbg. 1956)

Der biometrische Charakter vieler Arbeiten des praktischen Forstmannes wurde allerdings sehr spät erkannt. Mathematische Methoden – und dazu gehören auch die biometrischen – waren unbeliebt und wurden abgelehnt. Die sehr guten Arbeiten in der deutschen Literatur von KUNZE, ZETSCHKE, SCHIFFEL u. a. gerieten in Vergessenheit.

Erst im 20. Jahrhundert wurden die großen Vorteile der biometrisch-statistischen Methoden nach und nach anerkannt. Sie wurden dann auch ohne große Änderungen übernommen. Auf diesem Weg gingen die nordeuropäischen Länder mit PRYTZ, CAJANUS, LINDBERG u. a. voraus.

Auch in den anglo-amerikanischen Ländern, insbesondere in den USA wurde seit dem ersten Weltkrieg für die Einführung statistischer Methoden in Praxis und Forschung mit Nachdruck gearbeitet. Der Niederschlag dieser Bemühungen findet sich in zahlreichen sehr guten Büchern.

KRUTZSCH-LOETSCH (183) veröffentlichten 1938 das erste forstliche Buch auf mathematisch-statistischer Grundlage in deutscher Sprache.

Die mathematische Statistik für Forstleute (an Stelle der Forstmathematik) als Lehrfach wurde von Prof. Dr. KRENN (1908–1949) – dem Gründer der „Freiburger Schule“ – eingeführt. 1953 entstand aus dem Kreis seiner Schüler in Freiburg der Arbeitskreis für Forstliche Biometrie, der heute zahlreiche Mitglieder im In- und Ausland hat.

# 1 Mathematische Hilfsmittel

## 1.1 Graphische Darstellungen. Diagramme

### 1.11 Empirische Darstellungen

In der Reklame, in Tageszeitungen und in Fachzeitschriften – überall im täglichen Leben – begegnen wir Diagrammen und graphischen Darstellungen aller Art. Die graphische Darstellung soll die raschere Erfassung eines Zahlenmaterials ermöglichen und häufig auch eine Zahlentabelle ersetzen.

Das Zahlenmaterial wird bei der graphischen Darstellung zur leichteren Veranschaulichung gewöhnlich auf einer Ebene (auf einem Blatt Papier) aufgetragen.

BEISPIEL: Darstellung des Stärkezuwachsverlaufes einer 30jährigen *Sequoia gigantea*. (Alleebaum, gefällt im Winter 1948/49 in Freiburg in der Hildastraße.) Die Stärkezuwüchse der einzelnen Jahre wurden gemessen und nacheinander notiert (Übersicht 1). In Abb. 1 sind die Zahlen der Übersicht 1 graphisch dargestellt.

ÜBERSICHT 1: *Sequoia gigantea*. Gefällt in Freiburg 1948/49 Stärkezuwachs und erreichte Stärke in 1 m Höhe über dem Boden

Jahr	Stärkezuwachs mm	Erreichte Stärke mm	Jahr	Stärkezuwachs mm	Erreichte Stärke mm
1918	8,5	8,5	1934	15,1	235,9
9	14,4	22,9	5	10,4	246,3
1920	14,4	37,3	6	10,2	256,5
1	13,3	50,6	7	14,0	270,5
2	13,7	64,3	8	14,0	284,5
3	14,7	79,0	9	15,5	300,0
4	15,3	94,3	1940	13,8	313,8
5	16,7	111,0	1	8,1	321,9
6	13,3	124,3	2	11,1	333,0
7	17,6	141,9	3	9,3	342,3
8	16,6	158,5	4	9,7	352,0
9	14,1	172,6	5	7,1	359,1
1930	8,8	181,4	6	5,8	364,9
1	12,5	193,9	7	6,4	371,3
2	11,8	205,7	1948	3,0	374,3
3	15,1	220,8			
					374,3

Zu diesem Zweck wählt man auf einem Blatt Papier ein *Bezugssystem* in Form von zwei senkrecht zueinander stehenden Koordinatenachsen: der  $x$ - oder Abszissen- und der  $y$ - oder Ordinatenachse. Auf der  $x$ -Achse werden im allgemeinen die unabhängigen Werte aufgetragen, auf der  $y$ -Achse dagegen die abhängigen, d. h. die Daten, die zu  $x$  in Beziehung gebracht werden sollen. Im Beispielsfall stehen auf der  $x$ -Achse die Jahre, auf der  $y$ -Achse der Stärkezuwachs. Die Maßstabsgröße beider Achsen ist unabhängig voneinander. Sie wird aus praktischen Gründen so gewählt, daß die Zeichnung gut übersichtlich ist und natürlich wirkt.

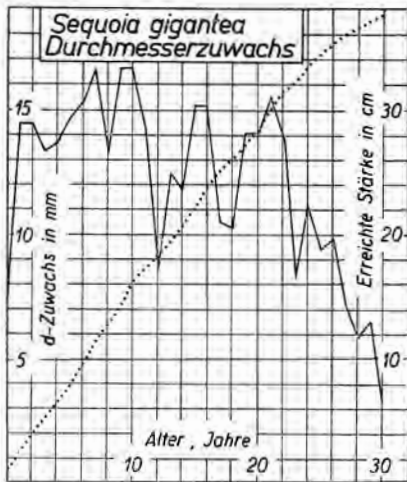


Abb. 1 Doppelte Jahringbreite = Durchmesserzuwachs (linke Skala und volle Linie) und erreichte Stärke (rechte Skala und punktierte Linie) bei *Sequoia gigantea* in Funktion vom Alter, Messungen 1 m über dem Boden (1817-0)

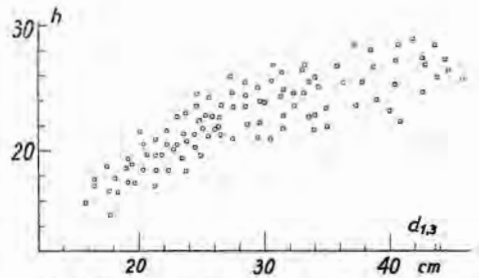


Abb. 2 Höhen und Stärken mehrerer Bäume Punktweise Darstellung

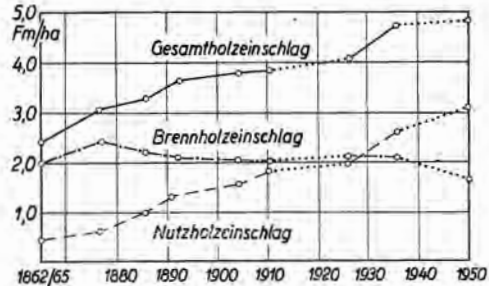


Abb. 3 Beispiel einer Zeitreihe. Daten aus MANTEL 1952. Entwicklung des Holzeinschlags je ha von 1862-1950

Auf dem Diagramm kann die doppelte Jahringbreite abgelesen werden. Es ist auch leicht zu ersehen, daß der Dickenzuwachs von Jahr zu Jahr variiert, wobei er zuerst etwas zunimmt, um dann mit fortschreitendem Alter abzunehmen.

BEISPIEL: Die Höhen und die Stärken mehrerer Bäume in einem Bestand wurden gemessen und die Ergebnisse graphisch dargestellt (Abb. 2). Jedem aufgetragenen Punkt entspricht ein Höhen- und ein Durchmesserwert.

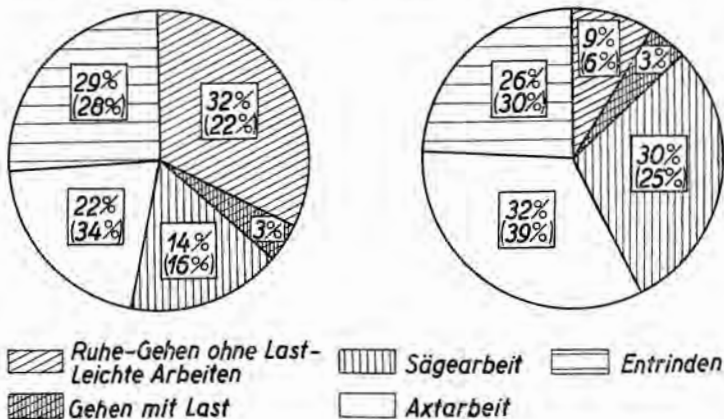


Abb. 4 Anteil der Beanspruchung an Zeit (links) und an Energie (rechts) im Laufe des Arbeitstages eines Holzhauers. Aus H. H. HILF (124)