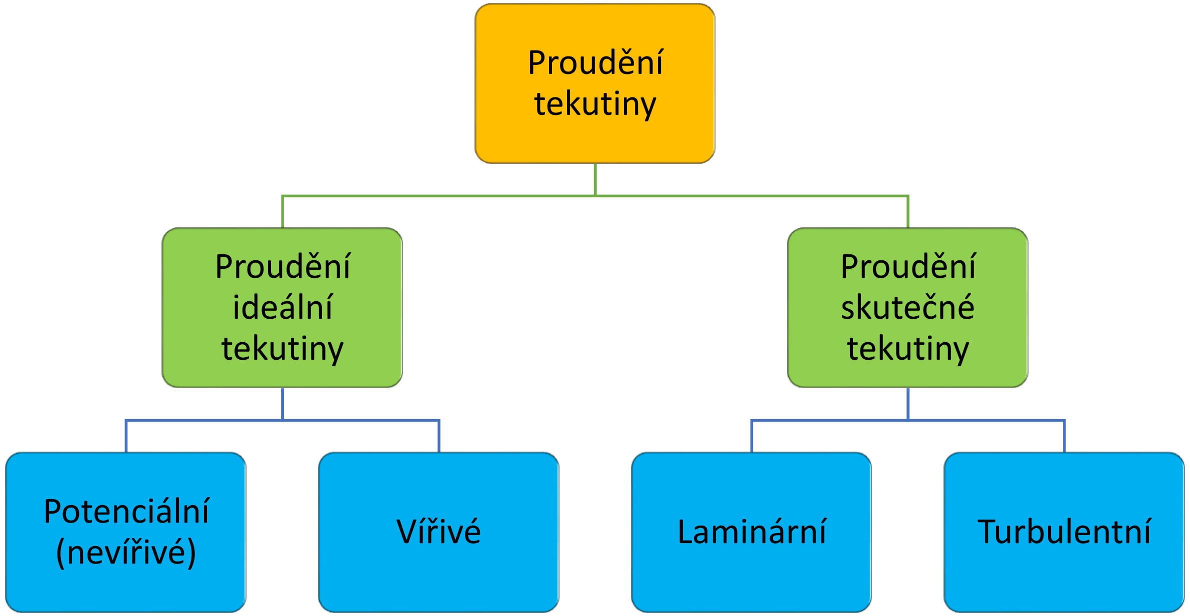
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Hydromechanika

„Proudění tekutin a základy hydrodynamiky“

Ing. Kamil Fojtášek, Ph.D.

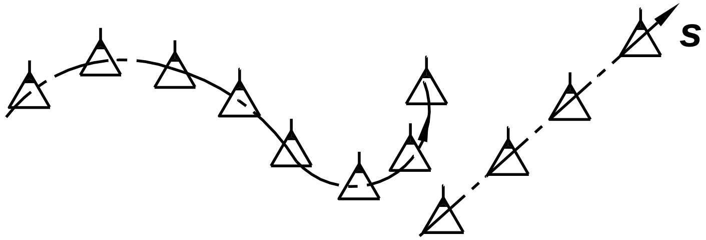
Rozdělení proudění a základní pojmy



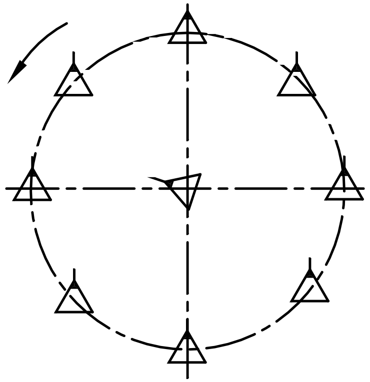
Rozdělení podle fyzikálních vlastností tekutin

1) Proudění ideální (dokonalé, nevazké) kapaliny

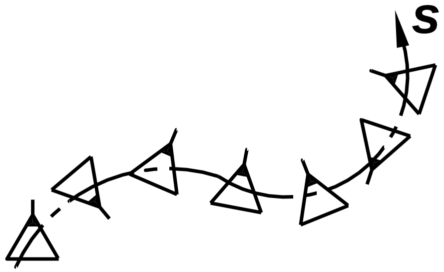
a) Potenciální proudění (nevířivé) - částice se pohybují přímočaře nebo křivočaře po dráhách tak, že vůči pozorovateli se neotáčejí kolem vlastní osy (pozice trojúhelníků na obrázku).



Mezi potenciální proudění patří rovněž potenciální vír, u něhož částice krouží kolem vírového vlákna potenciálně s výjimkou částice, která tvoří vlákno.



b) Vířivé proudění – částice se vůči pozorovateli natáčejí kolem vlastních os.

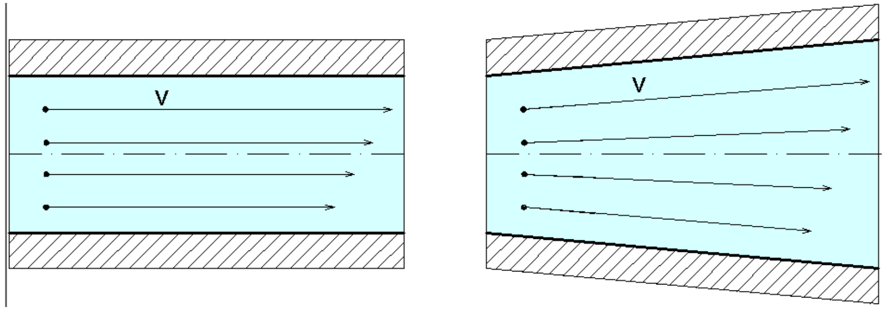


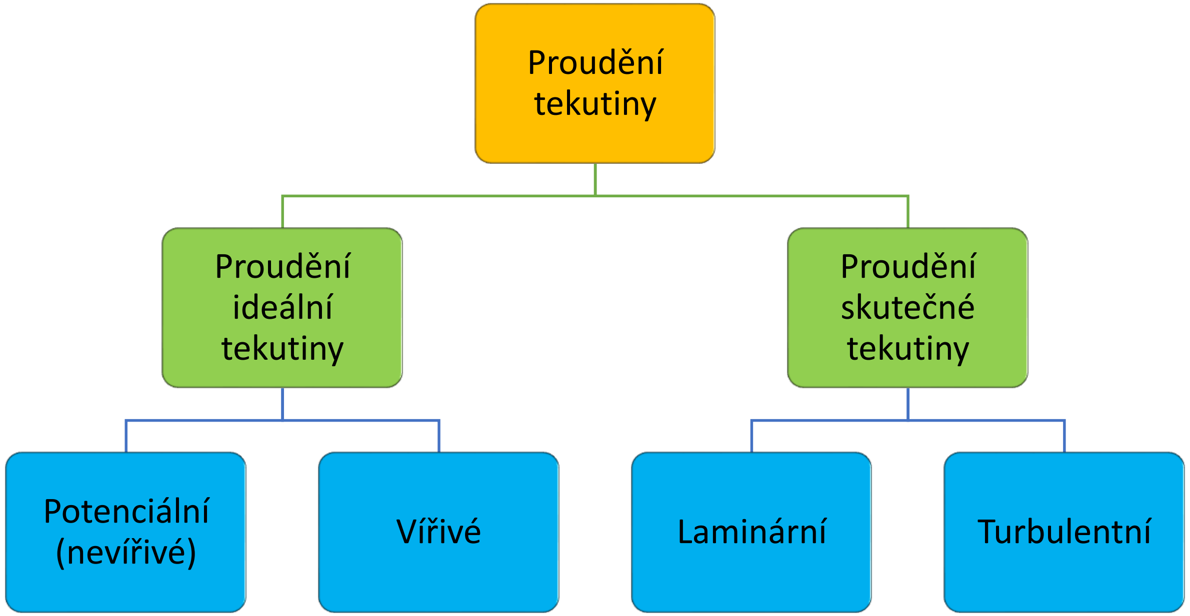
Rozdělení proudění a základní pojmy

Rozdělení podle fyzikálních vlastností tekutin

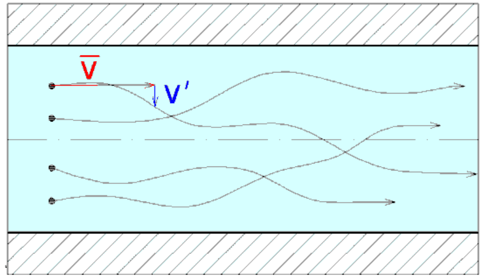
2) Proudění skutečné tekutiny (s vnitřním třením)

a) Laminární proudění - částice se pohybují ve vrstvách (deskách), aniž se přemísťují po průřezu.





b) Turbulentní proudění – částice mají kromě postupné rychlosti turbulentní (fluktuační) rychlost, jíž se přemísťují po průřezu.



Prouděním skutečných tekutin se budeme podrobněji zabývat později.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Rozdělení proudění a základní pojmy

Rozdělení podle kinematických hledisek

- Proudění tekutiny
  - Uspořádání proudění v „PROSTORU“
    - 1D proudění jednorozměrné, po křivce $v = v(s)$; $v = v(x)$
    - 2D proudění dvourozměrné, rovinné $v = v(x, y)$
    - 3D proudění trojrozměrné, prostorové $v = v(x, y, z)$
  - Rozložení rychlosti v prostoru
    - Rovnoměrné (vyvinuté při proudění potrubím) proudění $v \neq v(x, y, z)$
    - Nerovnoměrné proudění, rychlosti se v prostoru mění.
  - Závislost proudění na „ČASE“
    - Ustálené (stacionární) proudění, je nezávislé na čase $v \neq v(t); \frac{\partial}{\partial t} = 0$
    - Neustálené (nestacionární) proudění, všechny jeho veličiny (rychlost, tak, teplota atd.) jsou závislé na čase.

Ve skutečnosti je proudění vždy prostorové (trojrozměrné), ale v některých případech pro usnadnění řešení je považujeme za rovinné (dvourozměrné). Například při obtékání křídla letadla se stejným profilem po celém rozpětí a s konstantním úhlem náběhu. V blízkosti osy křídla je ve všech rovinách x, y kolmých na křídlo obraz obtékání stejný a složka rychlosti ve směru osy z blízká, nebo rovna nule. Tento předpoklad neplatí u konců křídla, kde vznikají koncové víry.
Při proudění potrubím se uvažuje jeden rozměr proudění a je jednorozměrné (osa potrubí může být křivkou a průřez potrubí se může měnit).

Pohyb tekutin

Při vyšetřování pohybu tekutiny můžeme postupovat dvěma různými metodami.

Lagrangeova metoda

Můžeme sledovat pohyb určité částice tekutiny, což je analogické vyšetřování hmotného bodu v mechanice tuhých těles. Tato metoda je nazývána Lagrangeova metoda (ne zcela přesně, neboť jí už dříve popsal Euler). Spočívá v určení polohy každé částice v prostoru jako funkce času t a počáteční polohy a, b, c:

$$x = f_x(a, b, c, t)$$
$$y = f_y(a, b, c, t)$$
$$z = f_z(a, b, c, t)$$

Pro stlačitelnou tekutinu je třeba doplnit vztah pro hustotu

$$\rho = f_\rho(a, b, c, t)$$

Tato metoda naráží zpravidla na nepřekonatelné matematické potíže. Proto se v mechanice tekutin častěji používá druhá metoda.

Eulerova metoda

Sleduje proudění tekutiny v určitém místě (např. změnu rychlosti a tlaku). Rychlostní pole, které je v obecném případě s časem proměnné, je pak určeno funkcemi:

$$v_x = F_x(x, y, z, t)$$
$$v_y = F_y(x, y, z, t)$$
$$v_z = F_z(x, y, z, t)$$

A rovněž je nutné připojit stavovou rovnici tekutiny

$$\rho = F_\rho(x, y, z, t)$$

Je třeba si uvědomit, že daným místem protékají různé částice tekutiny, což vede k složitějšímu vyjádření zrychlení částice tekutiny ve sledovaném místě.

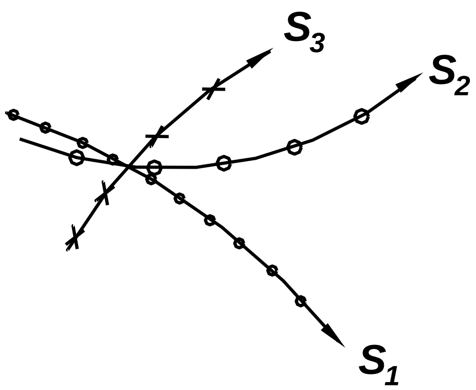
Pohyb tekutin

Rozdíl mezi oběma metodami záleží vlastně na ve volbě souřadného systému, k němuž proudění vztahujeme. Rychlost proudění měříme vždy k zvolenému souřadnému systému (pohyblivému nebo pevnému) a rychlost je tedy relativní veličina.

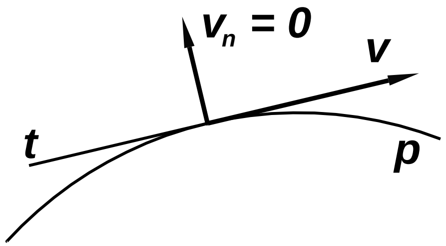
U **Lagrangeovy metody** je souřadný systém vázán na tekutinu. Spojíme-li souřadný systém s některou pohybující se částicí tekutiny, odpovídá to případu kdy pozorovatel – plavec se nechá unášet proudem.

U **Eulerovy metody** protéká tekutina pevným souřadným systémem. To odpovídá případu kdy pozorovatel sedí na břehu řeky.

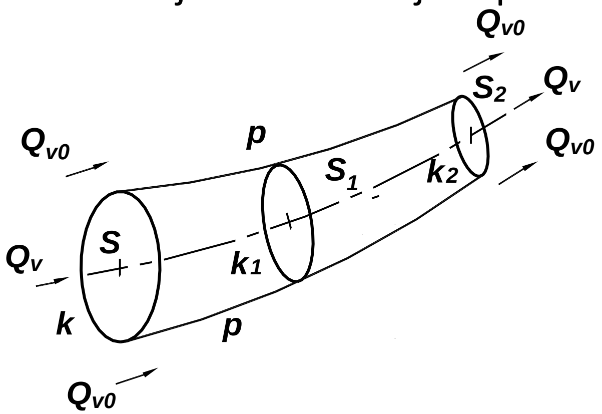
Dráha, neboli **trajektorie** je obecně čarou, kterou probíhá částice tekutiny. Za ustáleného proudění se dráhy částic nemění s časem, zatím co u neustáleného proudění mohou být v každém časovém okamžiku odlišné



Proudnice jsou obálkou vektorů rychlostí a jejich tečny udávají směr vektoru rychlosti



Proudová trubice je tvořena svazkem proudnic, které procházejí zvolenou uzavřenou křivkou k. V každém bodě pláště proudové trubice normálová složka rychlosti nulová $v_n = 0$. Nemůže tedy žádná částice projít proudovou trubici. Plášť proudové trubice má stejné vlastnosti jako proudnice



Rovnice kontinuity

Při proudění tekutin musí být splněn obecně platný fyzikální **zákon o zachování hmotnosti**.

Pro kontrolní objem, kterým proudí tekutina, musí být hmotnost tekutiny konstantní, a tedy její **celková změna nulová**.

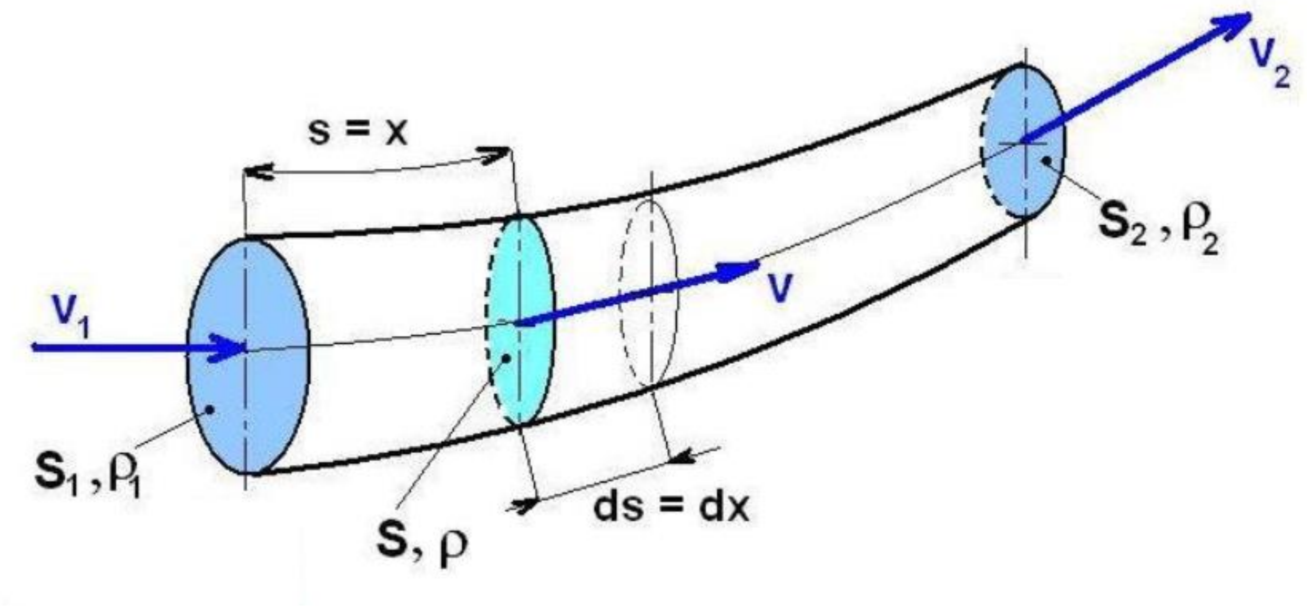
U kontrolního objemu mohou vzniknout dvě změny hmotnosti. Lokální změna hmotnosti (tekutina se stlačuje, nebo rozpíná) a konvektivní změna hmotnosti, která je způsobena rozdílem v přitečené a odtečené hmotnosti z konstantního objemu.

Obě změny musí **dávat nulovou** změnu hmotnosti, což je možné jen tehdy, když jsou obě dílčí změny stejně velké, ale opačného znaménka (tedy jedna znamená zvětšení a druhá zmenšení hmotnosti).

V technické praxi jsou běžné případy jednorozměrného proudění, při němž se průřez a tedy i rychlost mění. Pro tento případ si odvodíme příslušnou rovnici kontinuity.

Rovnice kontinuity pro jednorozměrné proudění

Uvažujeme jednorozměrné neustálené proudění stlačitelné tekutiny proudovou trubicí s proměnným průřezem.



Z ní se vytkne elementární část ohraničená vstupním průřezem S a elementární délkou ds.

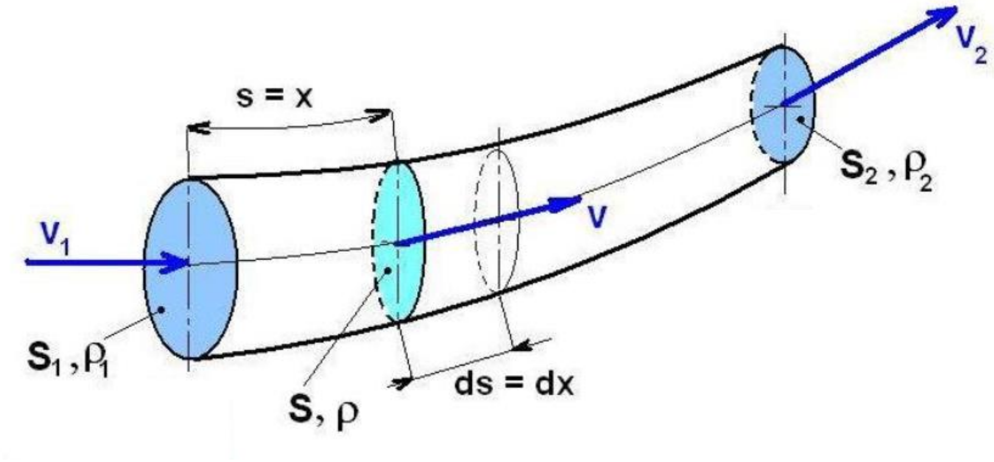
Elementární kontrolní objem tvoří váleček, jehož základnami protéká tekutina.

Plášť kontrolního objemu je tvořen proudnicemi, z toho důvodu je tok touto částí kontrolní plochy nulový, neboť platí $v_n = 0$ na celém plášti.

Rozložení rychlosti po průřezu proudové trubice uvažujeme rovnoměrné. Při nerovnoměrném rozložení rychlosti po průřezu uvažujeme její střední rychlost.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Rovnice kontinuity pro jednorozměrné proudění



Konvektivní změna hmotnosti

Hmotnost kapaliny, která přiteče do kontrolního objemu za čas dt je určena vztahem:

$$dm_{k1} = \rho S v\, dt$$

Hmotnost kapaliny, která vyteče z kontrolního objemu za čas dt druhou základnouválečku, tj. ve vzdálenosti ds, je určena vztahem:

$$dm_{k2} = dm_{k1} + \frac{\partial}{\partial s}(dm_{k1})\, ds$$

$$dm_{k2} = \rho S v\, dt + \frac{\partial}{\partial s}(\rho S v\, dt)\, ds$$

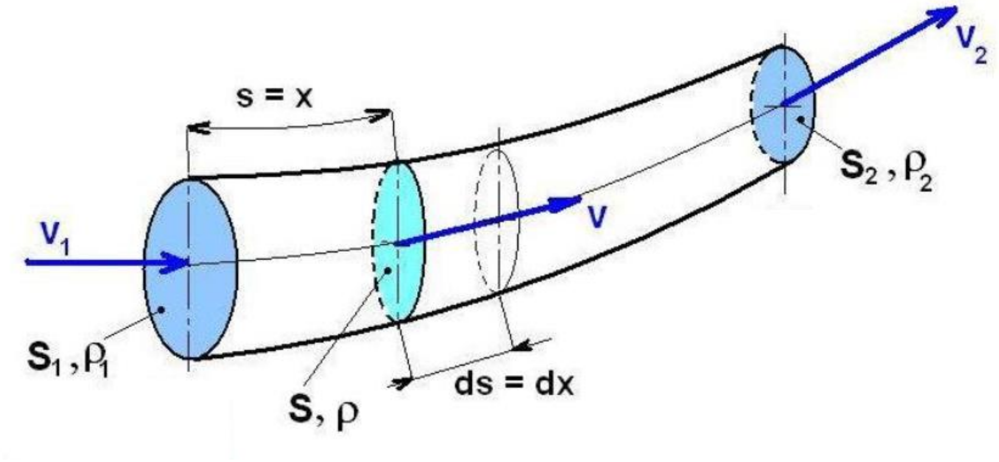
Rozdíl přitečené a odtečené hmotnosti z elementárního objemu je konvektivní změna hmotnosti v čase dt a je určena vztahem:

$$dm_k = dm_{k2} - dm_{k1} = \frac{\partial}{\partial s}(\rho S v\, dt)\, ds$$

Pozn:

$\rho = \frac{m}{V}\ [kg \cdot m^{-3}] \rightarrow m = \rho \cdot V \rightarrow hmotnost\ za\ čas \rightarrow m = \rho[kg \cdot \cancel{m}^{-3}] \cdot S[\cancel{m}^2] \cdot v[\cancel{m} \cdot s^{-1}] \rightarrow hmotnostní\ průtok$

Rovnice kontinuity pro jednorozměrné proudění



Lokální změna hmotnosti

Na počátku sledovaných změn hmotnosti je v kontrolním válečku hmotnost tekutiny:

$$dm_{l1} = \rho S\, ds$$

Za čas dt se změní hmotnost tekutiny v kontrolním válečku na hodnotu:

$$dm_{l2} = dm_{l1} + \frac{\partial}{\partial t}(dm_{l1})\, dt$$

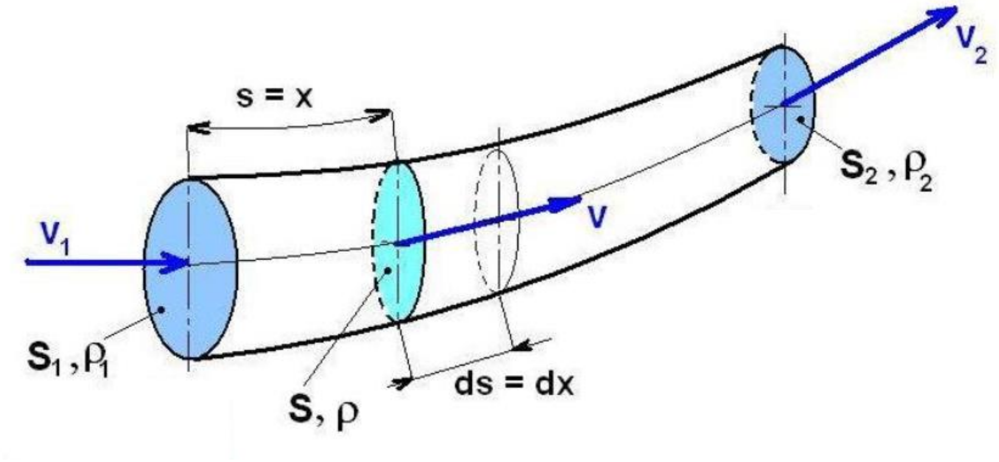
$$dm_{l2} = \rho S\, ds + \frac{\partial}{\partial t}(\rho S\, ds)\, dt$$

Změna hmotnosti tekutiny v kontrolním objemu za čas dt je lokální změna hmotnosti:

$$dm_l = dm_{l2} - dm_{l1} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho S\, ds)\, dt$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Rovnice kontinuity pro jednorozměrné proudění



Pro splnění zákona o zachování hmotnosti ($m = konst$) musí být celková změna hmotnosti dm nulová, platí tedy:

$$dm = dm_k + dm_l = \frac{\partial}{\partial s}(\rho S v\, dt)\, ds + \frac{\partial}{\partial t}(\rho S\, ds)\, dt = 0$$

V obecném případě jednorozměrného proudění tekutiny se předpokládá stlačitelná tekutina $\rho = \rho(s,t)$, proměnný průřez proudové trubice $S = S(s,t)$ (např. pružná hadice, proudění v kanálech apod.) a neustálené proudění $v = v(s,t)$.

Vzhledem k tomu, že časová změna dt a posunutí ds nejsou na sobě závislé (s a t jsou nezávisle proměnné), upraví se rovnice takto:

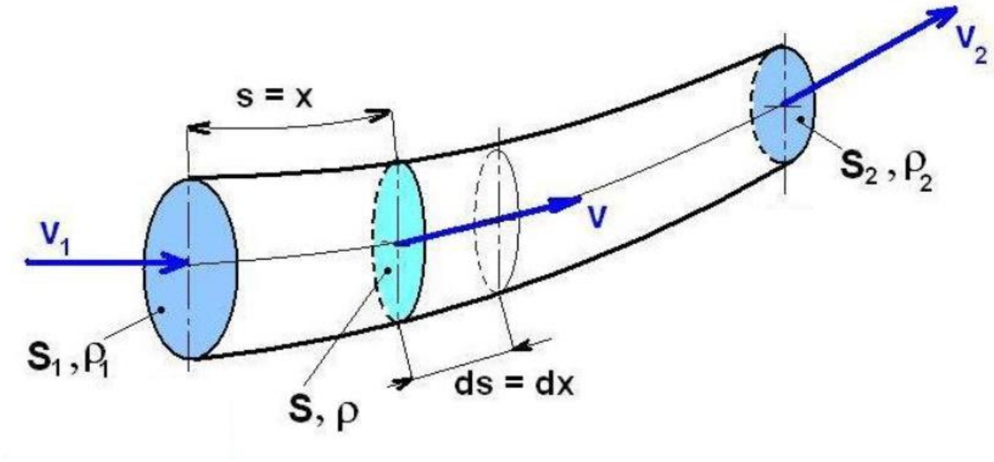
$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho S v) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho S) = 0$$

Hustota ρ, plocha (průřez) potrubí S a rychlost proudění kapaliny v jsou proměnné na délce zvoleného objemu ds.

Hustota ρ a plocha (průřez) potrubí S jsou proměnné v čase dt (rychlost proměnná v čase není, předpokládali jsme neustálené proudění)

Tohle je obecná rovnice kontinuity pro jednorozměrné proudění.

Rovnice kontinuity pro jednorozměrné proudění



Zjednodušení rovnice kontinuity:

Pro tuhé potrubí platí $S = S(s)$ a rovnice se dále upraví:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho S v) + S\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Další zjednodušení rovnice je pro ustálené proudění, kdy platí $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. V tomto případě jsou hustota, průřez a rychlost jen funkcí polohy (souřadnice s), $\rho = \rho(s)$; $S = S(s)$; $v = v(s)$ a rovnice kontinuity se dále zjednoduší:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho S v) = \frac{d}{ds}(\rho S v) = 0$$

Po integraci platí pro jednu proudovou trubici:

$$Q_m = \rho \cdot S \cdot v = konst$$

Veličina Q_m je hmotnostní průtok. Udává hmotnost proteklé tekutiny za jednotku času, tedy:

$$Q_m = \frac{m}{t}\ [kg \cdot s^{-1}]$$

V každém průřezu jedné proudové trubice musí být splněna rovnice $\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2 = \rho \cdot S \cdot v = konst.$

Pro nestlačitelné kapaliny je hustota konstantní $\rho = konst$, takže rovnice se zjednoduší na známý tvar

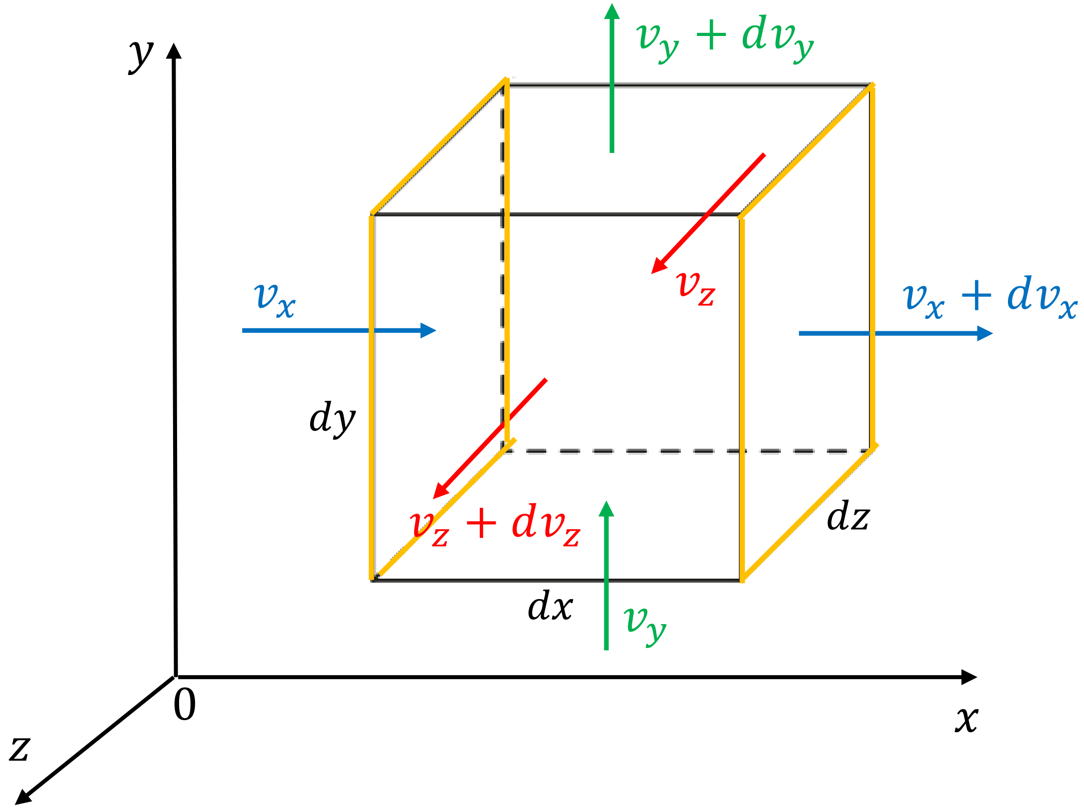
$$Q_v = S \cdot v = konst$$

Veličina Q_v je objemový průtok a udává objem kapaliny za jednotku času, tedy:

$$Q_v = \frac{V}{t}\ [m^3 \cdot s^{-1}]$$

Rovnice kontinuity pro prostorové proudění

Prostorové proudění je obecnější případ než jednorozměrné proudění.



Tekutina vtéká do hranolu z levé strany rychlostí v_x.

Vytéká z něj na pravé straně rychlostí

$$v_x + dv_x = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dx$$

V proudovém poli tekutiny se vytkne kontrolní oblast ve tvaru hranolu o stranách dx, dy a dz, jehož objem dV je:

$$dV = dx\, dy\, dz$$

Tímto hranolem protéká tekutina rychlostí, jež má složky ve směru tří souřadných os x, y, z, které jsou kolmé na elementární plošky zvoleného hranolu.

Kontrolní objem se zvolil velmi malý – diferenciálních rozměrů, aby se rychlosti průtoku elementárními ploškami mohly uvažovat konstantní.

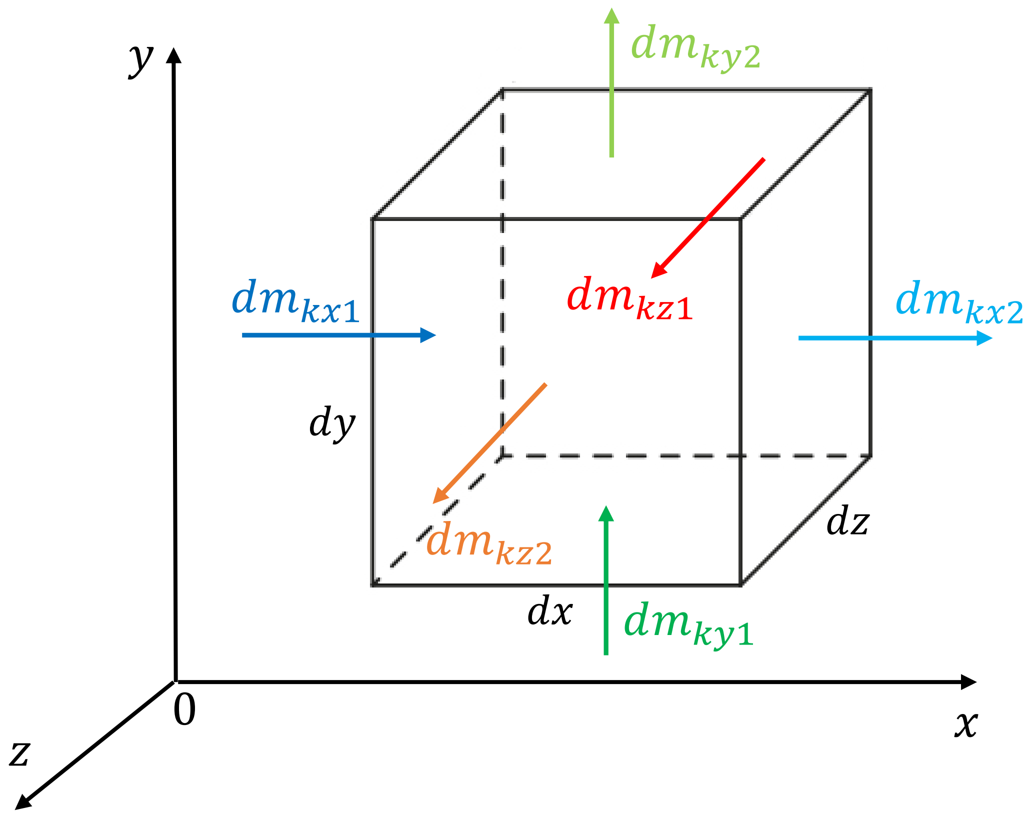
Změny hmotnosti při průtoku elementárním kontrolním objemem se vyřeší postupně ve směrech os x, y, a z. Plochy hranolu, jimiž protéká kapalina ve směru osy x, jsou dS_x a jsou stejné z obou stran.

Obdobně tomu bude také ve směrech os y a z – přitéká v_y a v_z.

$$v_y + dy = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}\, dy$$

$$v_z + dv_z = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z}\, dz$$

Rovnice kontinuity pro prostorové proudění (konvektivní změna hmotnosti)



Do hranolu tedy přiteče ve směru osy x za čas dt hmotnost tekutiny dm_{kx1}:

$$dm_{kx1} = \rho v_x dS_x\, dt$$

A vyteče hmotnost tekutiny dm_{kx2}:

$$dm_{kx2} = dm_{kx1} + \frac{\partial}{\partial x}(dm_{kx1})dx = \rho v_x dS_x dt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x dS_x dt)dx$$

Rozdíl přitečené a vytečené hmotnosti tekutiny z hranolu ve směru osy x je:

$$dm_{kx} = dm_{kx2} - dm_{kx1} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x dS_x dt)dx = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV dt$$

což platí za předpokladu, že průřez dS_x nezávisí na souřadnici x. Analogicky získáme obdobné výrazy pro průtok tekutiny ve směru osy y a z.

$$dm_{ky} = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dV dt \qquad dm_{kz} = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dV dt$$

Takže rozdíl přitečené a odtečené hmotnosti tekutiny plochami hranolu je dán součtem:

$$dm_k = dm_{kx} + dm_{ky} + dm_{kz}$$

$$dm_k = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV dt + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dV dt + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dV dt$$

Rovnice kontinuity pro prostorové proudění (lokální změna hmotnosti)

Původní hmotnost tekutiny dm_{l1} v elementárním kontrolním objemu dV, je:

$$dm_{l1} = \rho \, dV$$

Za časový okamžik dt se hmotnost tekutiny změní na dm_{l2}:

$$dm_{l2} = dm_{l1} + \frac{\partial}{\partial t}(dm_{l1})dt$$

Lokální změna je dána rozdílem:

$$dm_l = dm_{l2} - dm_{l1} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dVdt$$

Vzhledem k tomu, že hmotnost tekutiny je konstantní ($m = konst$), musí celková změna hmotnosti být nulová:

$$dm = dm_k + dm_l = 0$$

Dosadíme-li do předchozí rovnice:

$$dm = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dVdt + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dVdt + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dVdt + \frac{\partial \rho}{\partial t} dVdt = 0$$

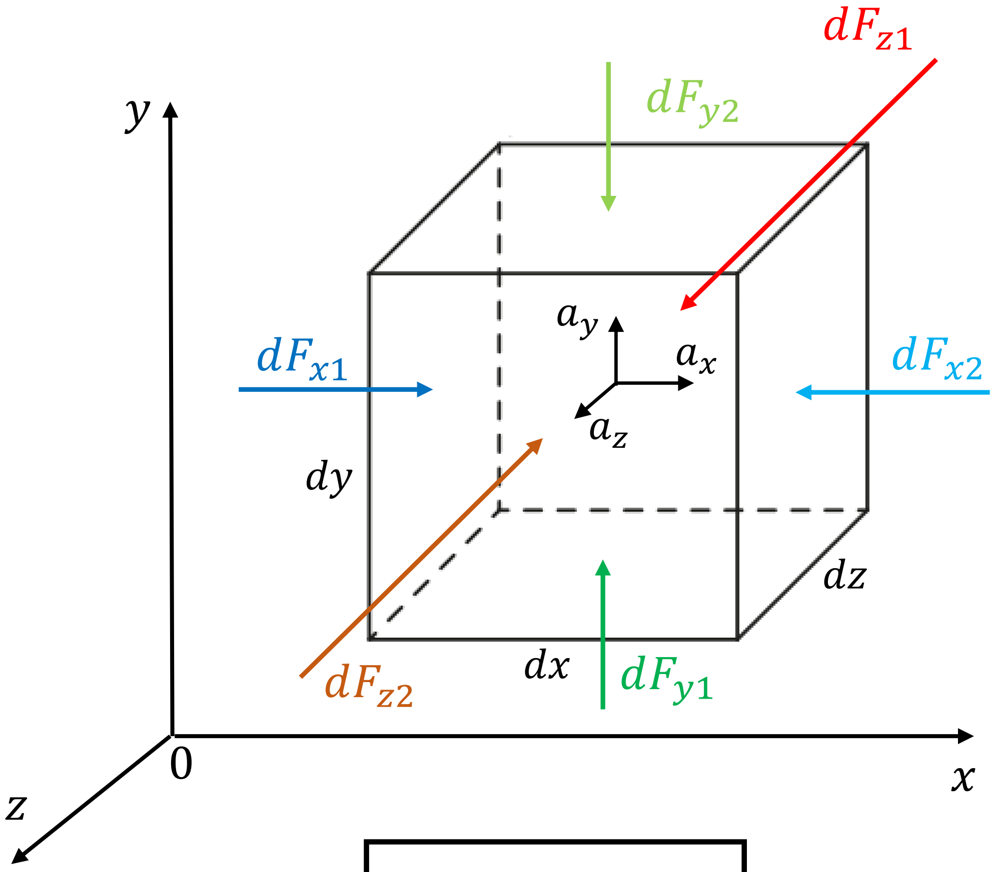
V každém členu předešlé rovnice se objevuje $dVdt$, tedy po vykrácení tímto výrazem dostaneme:

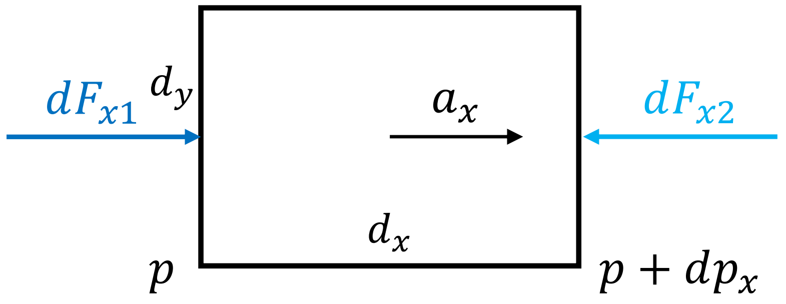
$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Tohle je obecná rovnice kontinuity pro neustálené prostorové proudění stlačitelné tekutiny.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Eulerova rovnice hydrostatiky





Už jsme si řekli, že Eulerova rovnice **hydrostatiky** je obecná **rovnováha sil** působících na kapalinu **za klidu**.

Jen pro zopakování, obecný zápis byl:

$$F_p + F_o = 0$$

kde F_p jsou síly plošné (tlakové) – např. $F_p = p \cdot S$
a F_o jsou síly objemové (hmotnostní) – např. $F_o = m \cdot g$

Celé odvození těchto rovnic jsme si definovali na elementárním objemu kapaliny dV ve tvaru hranolu o stranách dx, dy a dz, rovnoběžných se zvolenými osami x, y, z.

$$dF_{px} = dF_{x1} - dF_{x2} = p\,dy\,dz - (p + dp_x)dy\,dz$$

$$dF_{ox} = a_x dm = a_x \rho\,dV = a_x \rho\,dx\,dy\,dz$$

$$dF_{px} + dF_{ox} = 0$$

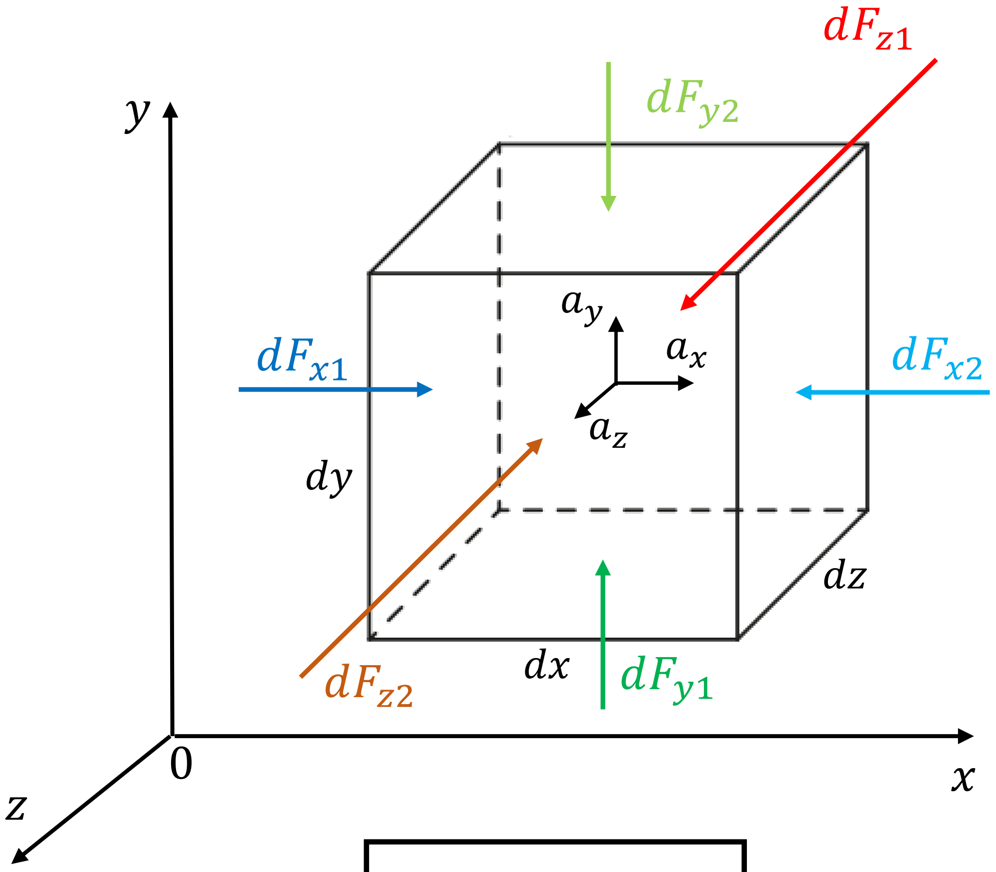
$$\rho a_x dx - dp_x = 0 \qquad\qquad dp_x = \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

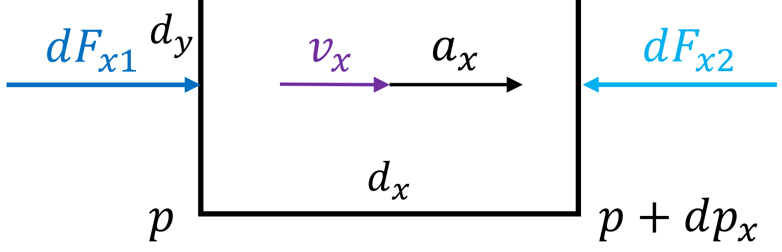
$$a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad a_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad a_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Konečný tvar ve vektorovém zápisu byl:

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho} grad\vec{p} = 0$$

Eulerova rovnice hydrodynamiky





Eulerova rovnice hydrodynamiky vyjadřuje rovnováhu sil hmotnostních (objemových), tlakových (plošných) a setrvačných od vlastního pohybu částic **dokonalé** tekutiny.

$$F_p + F_o = F_s$$

Z proudu dokonalé tekutiny se vybere elementární objem dV ve tvaru hranolu o stranách dx, dy a dz, rovnoběžných se zvolenými osami x, y, z. Na tento objem působí stejně jako v hydrostatice tlakové dF_p a hmotnostní síly dF_m. Výslednice těchto sil se rovná setrvačné síle dF_s

$$dF_p + dF_m = dF_s$$

Rovnováhu uvedených sil je možno rozepsat pro všechny tři zvolené směry kolmých os. Ve směru osy x působí elementární tlaková síla

$$dF_{px} = dF_{x1} - dF_{x2} = p\,dy\,dz - (p + dp_x)dy\,dz = -dp_x\,dy\,dz$$

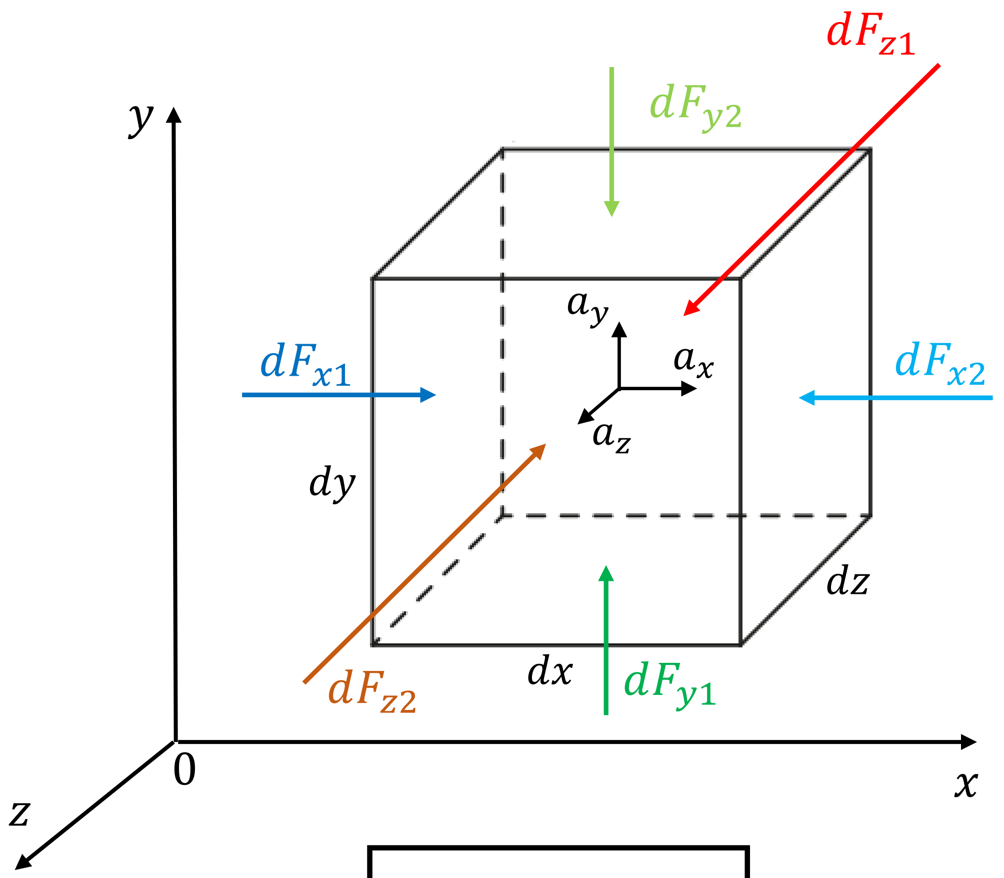
a vnější hmotnostní síla:

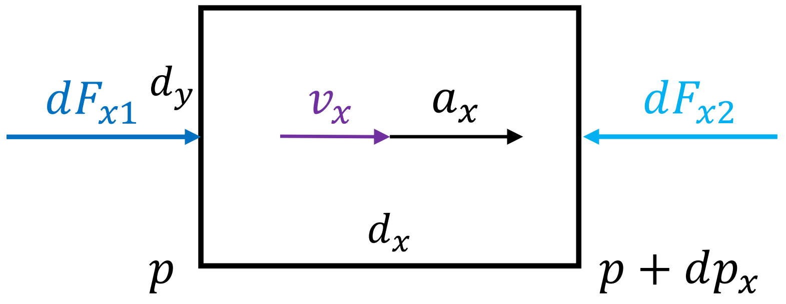
$$dF_{ox} = a_x dm = a_x \rho dV = a_x \rho\,dx\,dy\,dz$$

Setrvačná síla pohybující se částice tekutiny je

$$dF_{sx} = dm\,a = dm\frac{dv_x}{dt} = \rho\,dx\,dy\,dz\frac{dv_x}{dt}$$

Eulerova rovnice hydrodynamiky





Pro uvedené síly musí být splněna podmínka rovnováhy ve směru osy x

$$dF_{px} + dF_{ox} = dF_{sx}$$

Po dosazení odvozených výrazů

$$-dp_x\, dy\, dz + a_x \rho\, dx\, dy\, dz = \rho\, dx\, dy\, dz \frac{dv_x}{dt}$$

Po matematických úpravách (vykrácení celé rovnice výrazem $\rho\, dx\, dy\, dz$ a vzhledem k tomu, že $dp_x = \frac{\partial p}{\partial x} dx$ je po úpravě rovnováha sil při proudění tekutiny vyjádřena (pro ostatní složky y a z je odvození analogické)

$$a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt}$$

Toto jsou základní pohybové rovnice dokonalé tekutiny. Síly jsou vyjádřeny pro jednotku hmotnosti, takže představují zrychlení. Vektorovým sečtením těchto rovnic se vyjádří rovnováha sil v proudící dokonalé tekutině

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho} grad\, p = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Eulerova rovnice hydrodynamiky

Výsledné vnější zrychlení (hmotnostní síla na jednotku hmotnosti) je

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$$

Celkové zrychlení částice tekutiny je dáno derivací rychlosti podle času. Rychlost $\vec{v}$ je obecně funkcí polohy částice a času , tedy $v = v(x, y, z, t)$. Její diferenciál je

$$d\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial t}dt$$

Zrychlení částice tekutiny (zrychlení je rychlost za čas, předchozí rovnici podělíme dt)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

Následně po úpravě (dráha za čas je rychlost)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}v_x + \frac{\partial v}{\partial y}v_y + \frac{\partial v}{\partial z}v_z + \frac{\partial v}{\partial t}$$

Konvektivní zrychlení

Lokální (místní) zrychlení

První tři členy předchozí rovnice představují konvektivní zrychlení a je možno je vyjádřit pomocí gradientu jako skalární součin rychlosti $\vec{v}$ a jejího gradientu

$$\vec{v} \cdot grad\,\vec{v} = (\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z) \cdot \left(\vec{i}\frac{\partial v}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial v}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

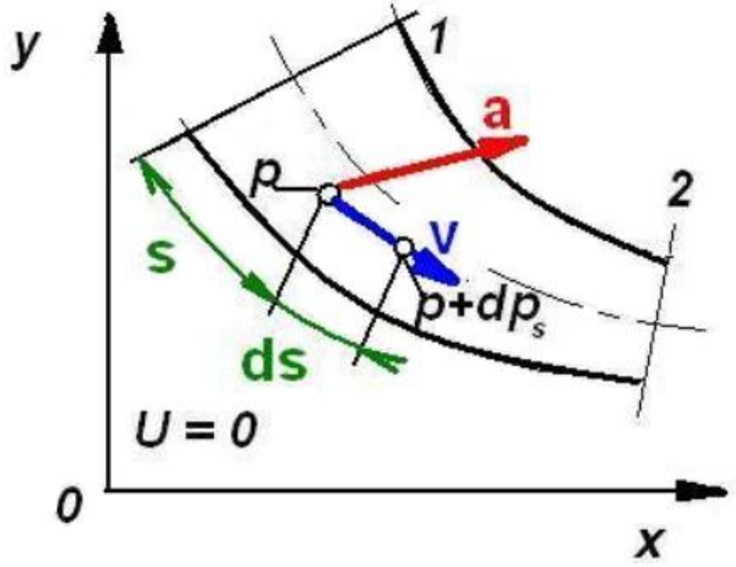
Člen $\frac{\partial v}{\partial t}$ představuje lokální (místní) zrychlení.

Eulerova rovnice ve vektorovém zápisu má tvar:

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho}grad\,p = \vec{v} \cdot grad\,\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Tuto pohybovou rovnici pro dokonalou tekutinu odvodil poprvé Leonard Euler v roce 1755 v Petrohradě.

Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu



Při proudění **dokonalé tekutiny** působí na její částečky síly, které při posunutí po elementární dráze ds konají elementární práci.
Sečtením těchto elementárních prací na konečné délce po proudnici, tj. **integrací**, získá se vztah prací neboli **energií** proudící tekutiny.
Aby bylo možno provést integraci, předpokládá se, že vnější hmotnostní síla na jednotku hmotnosti (neboli vnější zrychlení), které působí na proudící tekutinu, je potenciální. Pak se dá vyjádřit potenciálem U a platí:

$$\vec{a} = gradU = \vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}$$

Vzhledem k tomu že

$$\vec{a} = \left(\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z\right)$$

Pak složky vnějšího zrychlení jsou určeny vztahy

$$a_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$a_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$a_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Kde potenciál vnějších sil (na jednotku hmotnosti) neboli zrychlení $U = U(x, y, z)$ je funkcí polohy.

Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

Dosadí-li se tento výraz do Eulerovy rovnice hydrodynamiky a určí se elementární **práce** skalárním **součinem sil** a **posunutí** $d\vec{s}$, dostane se
(dosadíme za $\vec{a} = grad\ U$, celou rovnici roznásobíme $d\vec{s}$)

$$grad\ U \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\rho} grad\ p \cdot d\vec{s} = \vec{v} \cdot grad\ \vec{v} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

elementární posunutí je

$$d\vec{s} = \left(\vec{i} d_x + \vec{j} d_y + \vec{k} d_z\right)$$

První člen rovnice, skalární součin gradientu a posunutí je roven diferenciálu

$$grad\ U \cdot d\vec{s} = \left(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{i} d_x + \vec{j} d_y + \vec{k} d_z\right)$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} d_x + \frac{\partial U}{\partial y} d_y + \frac{\partial U}{\partial z} d_z = dU$$

Práce A je síla na dráze (typický příklad je např. píst motoru)

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} \to A = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Eulerova rovnice hydrodynamiky vyjadřuje rovnováhu sil

$$\vec{F_p} + \vec{F_o} = \vec{F_s}$$

Eulerova rovnice ve vektorovém zápisu má tvar:

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho} grad\ p = \vec{v} \cdot grad\ \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

Dosadí-li se tento výraz do Eulerovy rovnice hydrodynamiky a určí se elementární **práce** skalárním **součinem sil** a **posunutí** $d\vec{s}$, dostane se
(dosadíme za $\vec{a} = grad\ U$, celou rovnici roznásobíme $d\vec{s}$)

$$grad\ U \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\rho} grad\ p \cdot d\vec{s} = \vec{v} \cdot grad\ \vec{v} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

elementární posunutí je

$$d\vec{s} = \left(\vec{i} d_x + \vec{j} d_y + \vec{k} d_z\right)$$

Druhý člen rovnice

$$\frac{1}{\rho} grad\ p \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{i} d_x + \vec{j} d_y + \vec{k} d_z\right)$$
$$= \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} d_x + \frac{\partial p}{\partial y} d_y + \frac{\partial p}{\partial z} d_z\right) = \frac{dp}{\rho}$$

Práce A je síla na dráze (typický příklad je např. píst motoru)

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow A = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Eulerova rovnice hydrodynamiky vyjadřuje rovnováhu sil

$$\overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{F_o} = \overrightarrow{F_s}$$

Eulerova rovnice ve vektorovém zápisu má tvar:

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho} grad\ p = \vec{v} \cdot grad\ \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

Dosadí-li se tento výraz do Eulerovy rovnice hydrodynamiky a určí se elementární **práce** skalárním **součinem sil** a **posunutí** $d\vec{s}$, dostane se
(dosadíme za $\vec{a} = grad\ U$, celou rovnici roznásobíme $d\vec{s}$)

$$grad\ U \cdot d\vec{s} - \frac{1}{\rho} grad\ p \cdot d\vec{s} = \vec{v} \cdot grad\ \vec{v} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

elementární posunutí je

$$d\vec{s} = \left(\vec{\imath} d_x + \vec{\jmath} d_y + \vec{k} d_z\right)$$

Třetí člen rovnice

$$\vec{v} \cdot grad\ \vec{v} \cdot d\vec{s} = \left(\vec{\imath} v_x + \vec{\jmath} v_y + \vec{k} v_z\right) \cdot \left(\vec{\imath} \frac{\partial v}{\partial x} + \vec{\jmath} \frac{\partial v}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{\imath} d_x + \vec{\jmath} d_y + \vec{k} d_z\right) =$$

$$= \left(\vec{\imath} v_x + \vec{\jmath} v_y + \vec{k} v_z\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} d_x + \frac{\partial v}{\partial y} d_y + \frac{\partial v}{\partial z} d_z\right) = v \cdot dv$$

Poslední člen rovnice necháme ve tvaru

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

$$dU - \frac{dp}{\rho} = v \cdot dv + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Integrál upravené rovnice se vypočítá na dráze mezi průřezy 1 a 2

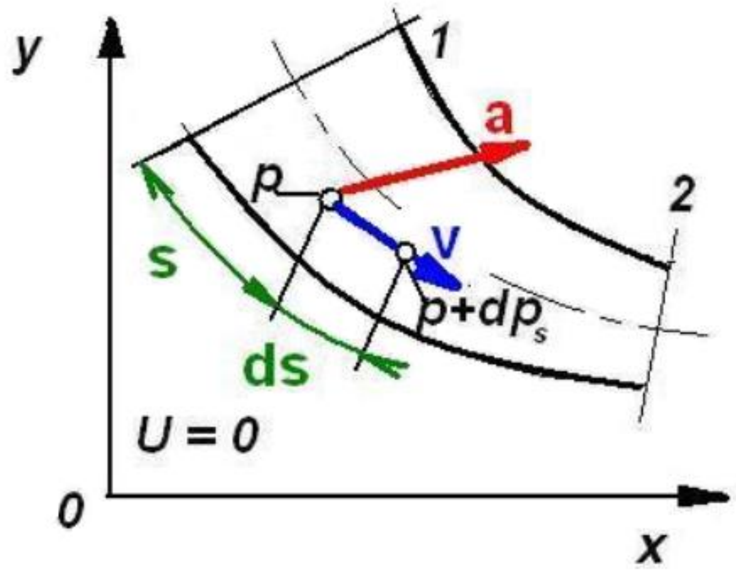
$$\int_1^2 dU - \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \int_1^2 v \cdot dv + \int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$U_2 - U_1 - (P_2 - P_1) = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Pro libovolný průřez proudové trubice platí rovnice

$$\frac{v^2}{2} + P - U + \int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \text{konst}$$

Tato rovnice platí pro **neustálené proudění**, a pro určitý časový okamžik. Konstanta má obecně v každém čase jinou hodnotu.



Pro **ustálené proudění** se poslední rovnice zjednoduší, protože integrál na levé straně , který vyjadřuje závislost rychlosti na čase je nulový.

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + P - U = \text{konst}}$$

Což je základní Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

Veličina P je tlaková funkce, již určíme integrací výrazu $\int \frac{dp}{\rho}$, když známe stavovou změnu a její rovnici $\rho = f(p)$. Pro nestlačitelnou kapalinu je $\rho = konst$ a tlaková funkce $P = \frac{p}{\rho} + konst$. Působí-li na tekutinu jen tíhové zrychlení, je vnější zrychlení $a_y = -g$. Záporné znaménko je uvedeno proto, že kladný smysl zvolené osy je opačný než smysl působení tíhového zrychlení. Příslušný potenciál silového pole (pro tíhové zrychlení) je tedy $a_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -g$. Potenciál tíhové síly je funkcí jen jedné proměnné $U = U(y)$, pak platí $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dU}{dy}$, neboli $dU = -g\ dy$. Integrací se určí potenciální funkce $U = -\ g \cdot y + konst = -g \cdot h + konst$.

Pro nestlačitelnou kapalinu za působení tíhového zrychlení a pro ustálené proudění je Bernoulliho rovnice vyjádřena vztahem

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot h = \text{konst}}$$

Tato rovnice představuje zákon zachování energie první člen $\frac{v^2}{2}$ je kinetická energie, druhý člen $\frac{p}{\rho}$ odpovídá tlakové energii a třetí člen $g \cdot h$ je roven polohové (potenciální) energii hmotnosti jednotky kapaliny.

Součet kinetické, tlakové, a polohové energie přestavuje celkovou mechanickou energii kapaliny. Energie vztažené na jednotku hmotnosti se nazývají měrné energie $e = \frac{E}{m}$

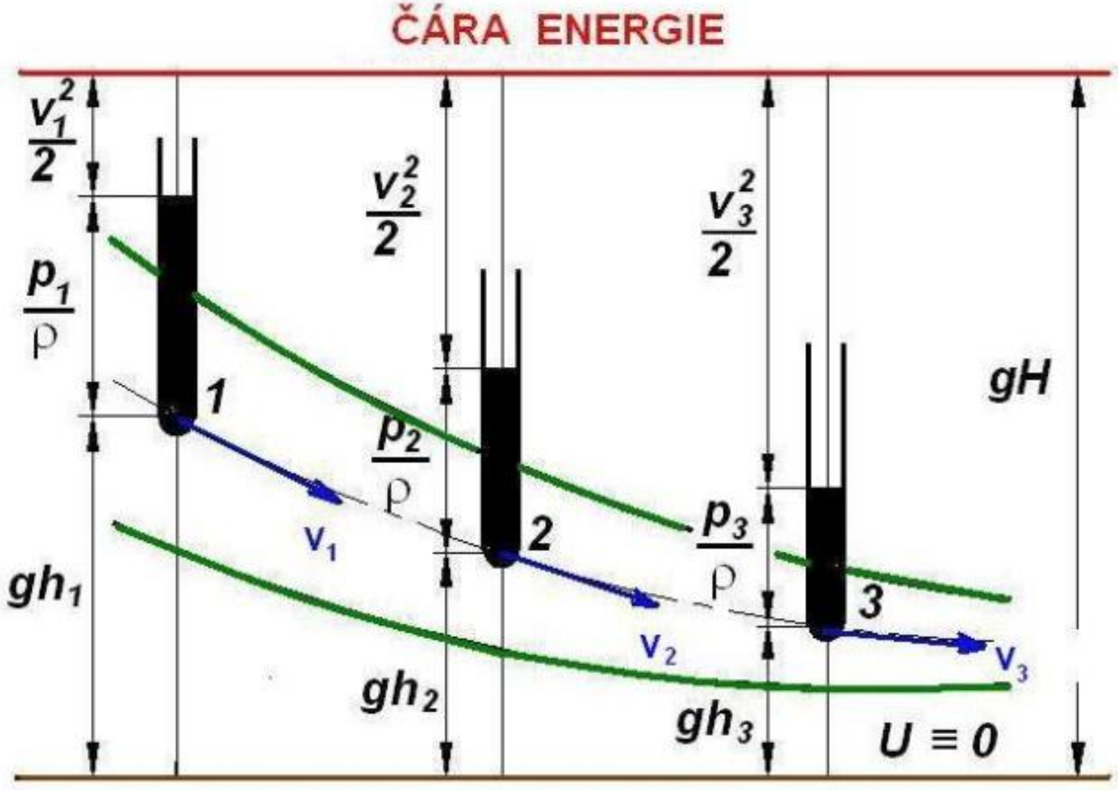
Tuto rovnici uvedl poprvé v roce 1738 Daniel Bernoulli.

Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

Součet všech energií, tj. kinetické, tlakové a polohové je celková mechanická energie kapaliny, která podle Bernoulliho rovnice je v každém průřezu jedné a téže trubice konstantní. Bernoulliho rovnice vyjadřuje zákon o zachování energie při proudění dokonalé tekutiny za působení tíhového zrychlení.

Jednotlivé členy rovnice je možno znázornit jako úsečky. Součet výšek od libovolně zvolené vodorovné roviny určuje v diagramu čáru mechanické energie a je roven konstantě v Bernoulliho rovnici

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+g\cdot h_1=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+g\cdot h_2=\cdots=\mathrm{g}\cdot H=\mathrm{konst}$$



Bernoulliho rovnice platí pro proudovou trubici, v jejíchž průřezech je rychlost rovnoměrně rozložena. Při nerovnoměrném rozložení rychlosti je nutno volit proudovou trubici velmi malých průřezů, aby rozdíl rychlostí po průřezu proudové trubice byl zanedbatelný. Jinak je nutno přihlížet k nerovnoměrnému průběhu rychlosti, což vyjadřuje střední rychlost podle kinetické energie.

Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

Do Bernoulliho rovnic je možno dosadit **absolutní** tlaky nebo **relativní** tlaky, avšak na obě strany rovnice **shodně**. Budiž znovu zdůrazněno, že rovnice platí pro dokonalou kapalinu, tedy bez vnitřního tření a nestlačitelnou. Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu psaná pro dva průřezy jedné a téže proudové trubice obsahuje **šest** veličin: $p_1, v_1, h_1, p_2, v_2, h_2$. Hustota kapaliny se považuje za známou. Aby se pomocí Bernoulliho rovnice určily parametry proudění, musí být **počet neznámých** a **počet rovnic stejný**. Při řešení nejjednoduššího případu lze tedy z Bernoulliho rovnice vypočíst jednu neznámou. Ostatní veličiny musí být známé. To je důleţité pro praktické použití Bernoulliho rovnice, neboť v proudové trubici se musí nalézt jeden průřez, v němž jsou všechny veličiny (p1, v1, h1) známé. Druhý průřez je nutno volit v téže proudové trubici tam, kde je hledaná veličina (např. rychlost v2) a ostatní veličiny (p2, h2) jsou známé. Při této volbě průřezů proudové trubice lze vypočíst neznámou veličinu. Bude-li více neznámých veličin, je nutno použít **rovnici kontinuity**, popřípadě **další Bernoulliho rovnici** pro jiný úsek proudové trubice.

Polohová (potenciální) energie proudu kapaliny se určuje k libovolně zvolené vodorovné rovině. Zpravidla se **volí** ekvipotenciální **plocha nulového potenciálu** (U = 0) tak, aby procházela **níže položeným průřezem**. Jeho výška je pak nulová. Pro body nad rovinou U = 0 je polohová výška kladná (pro body pod rovinou U = 0 je záporná).

Pro praktické použití Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu je možno shrnout postup do těchto **pravide**l:

1. V proudové trubici se zvolí dva průřezy. V jednom průřezu je nutno znát všechny veličiny (p1, v1, h1). Druhý průřez se volí v proudové trubici v místě, kde je hledaná veličina, přičemž ostatní dvě veličiny jsou známé.
2. Rozhodne se o způsobu dosazování tlaků, a to jejich absolutní nebo relativní hodnoty, avšak do jedné a téže rovnice se dosazují oba tlaky shodně.
3. Zvolí se libovolná vodorovná rovina, která se považuje za ekvipotenciální plochu nulového potenciálu. Zpravidla se volí tak, aby procházela jedním z vybraných průřezů, a to nejčastěji níže položeným. Polohové výšky se určí ke zvolené vodorovné rovině.

Bernoulliho rovnice

Předpokládejme jednorozměrné proudění dokonalé tekutiny v proudové trubici. Na její částečky působí síly, které při posunutí o *dl* konají elementární práci. Sečtením elementárních prací na konečné délce *l* po proudnici, tj. integrací, se získá vztah prací neboli energií proudící tekutiny.

$$dA = \vec{F}\,\vec{dl} \Rightarrow A = \int_l \vec{F}\,\vec{dl}$$

Podmínka rovnováhy sil je dána Eulerovou rovnicí hydrodynamiky.

Celkovou mechanickou energii tekutiny určíme integrací Eulerovy rovnice hydrodynamiky po dráze.

Eulerova rov. HD $\vec{a} - \frac{1}{\rho}\,grad\,p = \frac{D\vec{v}}{Dt}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} - \frac{1}{\rho}\,grad p = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.grad).\vec{v}$

Pro proudovou trubici (potrubí) platí: $v = v(t, l)$ $p = p(t, l)$

$$\vec{a} = gradU \Rightarrow \vec{a} = \frac{\partial U}{\partial l}$$

$$gradp = \frac{\partial p}{\partial l}$$

$$(\vec{v}\, grad)\vec{v} = \vec{v}\frac{\partial \vec{v}}{\partial l}$$

Po těchto úpravách dostaneme pro 1D proudění

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho} gradp = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.grad).\vec{v}$$

$$\frac{\partial U}{\partial l} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial l}$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Eulerova rovnice pro proudovou trubici má tvar:

$$\frac{\partial U}{\partial l} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial l}$$

Elementární práce se určí skalárním součinem sil a posunutí *dl*

$$\frac{\partial U}{\partial l}dl - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl = \frac{\partial v}{\partial t}dl + v\frac{\partial v}{\partial l}dl$$

Celkovou mechanickou energii tekutiny určíme integrací Eulerovy rovnice hydrodynamiky po dráze.

$$\int_l \frac{\partial U}{\partial l}dl - \int_l \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl = \int_l \frac{\partial v}{\partial t}dl + \int_l v\frac{\partial v}{\partial l}dl$$

Pro integraci dostaneme pro ustálené proudění:

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} + konst = 0$$

$$\int_l \frac{\partial v}{\partial t}dl = 0$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U = konst$$

[J.kg -1]

Působí-li na tekutinu jen tíhové zrychlení:

$$U = -gh + konst$$

a Bernoulliho rovnice vyjádřena vztahem

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = konst$$

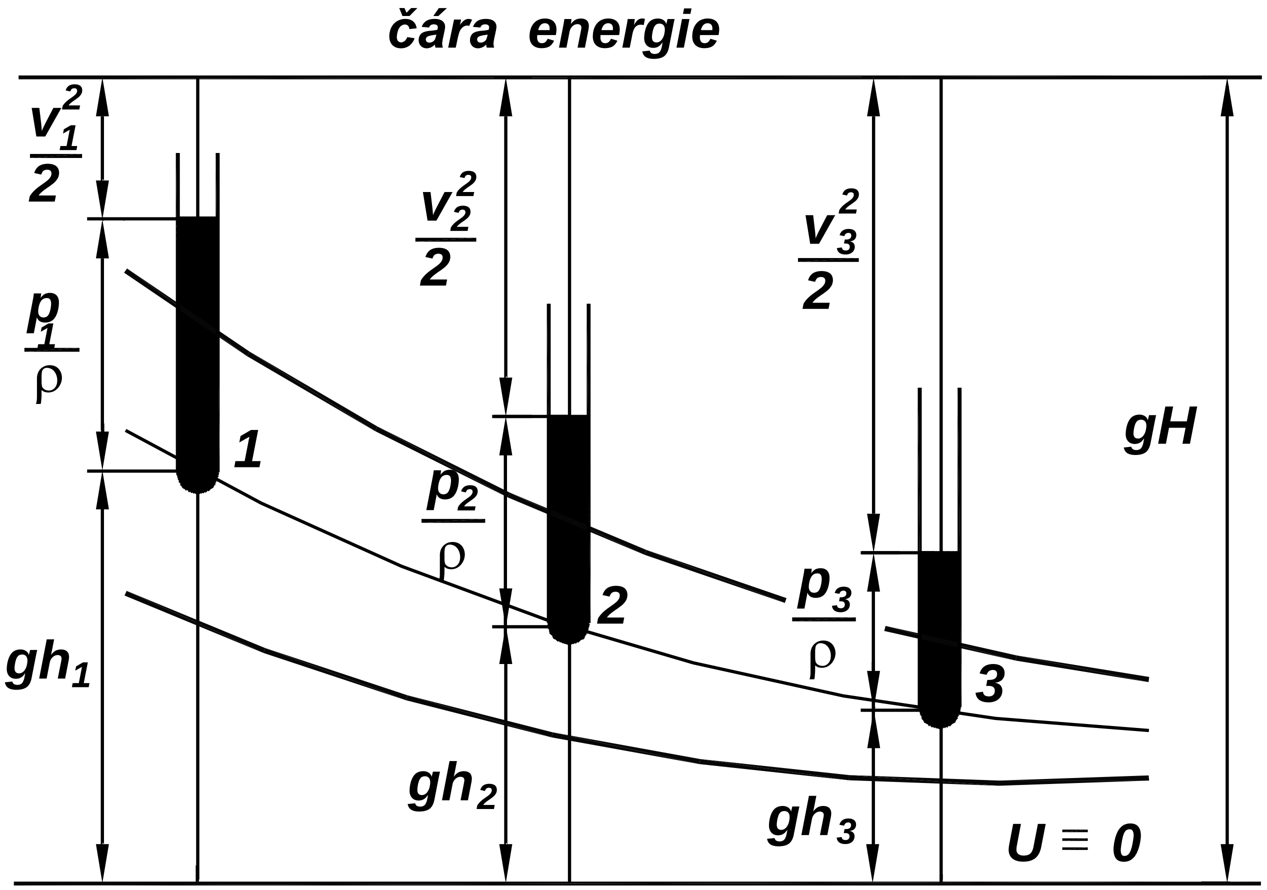
Součet kinetické, tlakové, a polohové energie přestavuje celkovou mechanickou energii kapaliny.

Jestliže se rovnice dělí tíhovým zrychlením , dostane se

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = konst$$ [m].

Tuto rovnici uvedl poprvé v roce 1738 Daniel Bernoulli. Každý člen rovnice představuje energii vztaženou na tíhovou jednotku tekutiny a formálně má rozměr výšky. První člen je znám jako rychlostní výška, druhý člen je tlaková výška a třetí určuje polohovou (potenciální) výšku.

Grafické znázornění Bernoulliho rovnice



$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gh_1=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gh_2=\ldots=\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gh=konst$$

Zásady pro praktické použití Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

- V proudové trubici se zvolí dva průřezy. V jednom průřezu je nutno znát všechny veličiny (*p1, v1, h1*). Druhý průřez se volí v proudové trubici v místě, kde je hledaná veličina, přičemž ostatní dvě veličiny jsou známé.
- Rozhodne se o způsobu dosazování tlaků, a to jejich absolutní nebo relativní hodnoty, avšak do jedné a téže rovnice se dosazují oba tlaky shodně.
- Zvolí se libovolná vodorovná rovina, která se považuje za ekvipotenciální plochu nulového potenciálu. Zpravidla se volí tak, aby procházela jedním z vybraných průřezů, a to nejčastěji níže položeným. Polohové výšky se určí ke zvolené vodorovné rovině.
- Nyní se napíše Bernoulliho rovnice a vypočte neznámá veličina.

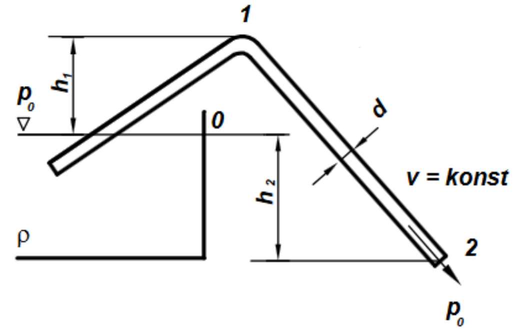
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Příklad 7.2.2

Z nádoby vytéká násoskovým potrubím o průměru d dokonalá kapalina o hustotě ρ do tlaku ovzduší p_0. Nádoba je otevřená a na hladině je rovněž atmosférický tlak. Jsou dány výšky h_1 a h_2. Vypočítejte objemový průtok Q_v a tlak p_1 v nejvyšším průřezu násosky.

Zadáno:

d =	12 cm	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
h_1 =	1 m	
h_2 =	1 m	
p_0 =	100000 Pa	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.05010
p_1 = ?	Pa (abs. tl.)	80 380.00



Výpočet objemového průtoku z rovnice kontinuity

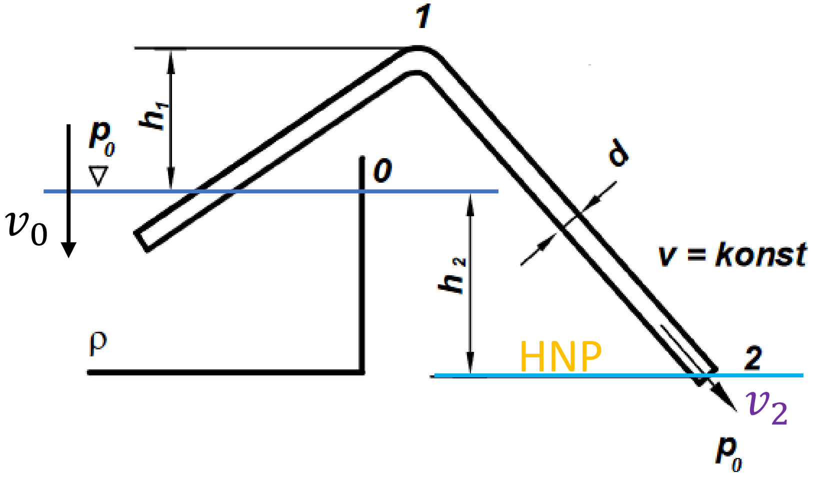
$$Q_v = S \cdot v = S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

Neznáme rychlost proudění kapaliny v trubici, použijeme Bernoulliho rovnici pro ideální (dokonalou) kapalinu.

Bernoulliho rovnice $0 - 2$ (hladina – výtok z trubice)

Hladinu nulového potenciálu HNP volím v níže položeném průřezu

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g \cdot h_2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot h_0$$



Na hladině a výtoku z trubice jsou stejné tlaky p_0. Rychlost poklesu hladiny zanedbáváme $v_0 = 0$. Výšková vzdálenost hladiny 0 po HNP je h_2. Výšková vzdálenost hladiny 2 po HNP je nulová $h_0 = 0$.

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot h_2 = \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \frac{v_2^2}{2} + \cancel{g \cdot h_0}$$

$$g \cdot h_2 = \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

To odpovídá vztahu pro výpočet Torriceliho teoretické výtokové rychlosti. Následně je možné dopočítat objemový průtok

$$Q_v = S_2 \cdot v_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_2$$

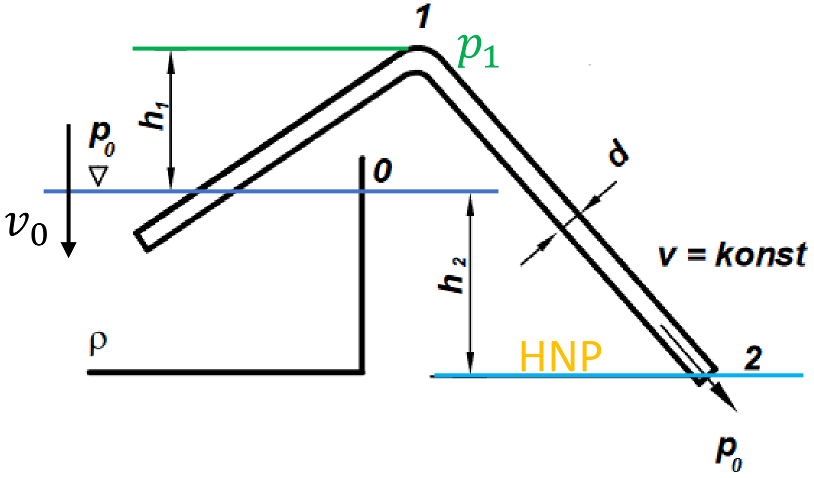
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Pro výpočet tlaku p_1 v nejvyšším místě trubice, použijeme opět Bernoulliho rovnici (musím zvolit průřez 1, druhý průřez je libovolný).

Já volím hladinu 0, hladinu nulového potenciálu HNP nechávám stejnou jako v předchozím výpočtu. Průměr potrubí je neměnný, tedy i rychlost proudění můžeme uvažovat jako konstantní $v_1 = v_2$.

Bernoulliho rovnice pro hladiny (průřezy) 0 - 1

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g \cdot h_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot (h_1 + h_2)$$

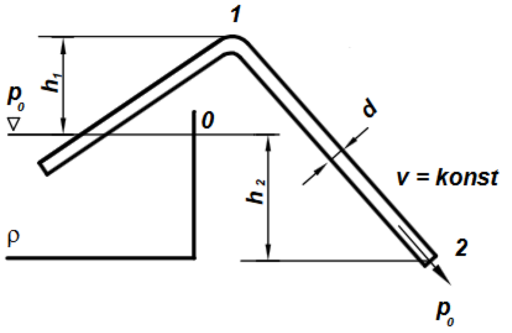


Rychlost poklesu hladiny zanedbáváme $v_0 = 0$. Výšková vzdálenost hladiny 0 po HNP je h_2. Výšková vzdálenost hladiny 1 po HNP je $h_1 + h_2$.

Příklad 7.2.2

Z nádoby vytéká násoskovým potrubím o průměru d dokonalá kapalina o hustotě ρ do tlaku ovzduší p_0. Nádoba je otevřená a na hladině je rovněž atmosférický tlak. Jsou dány výšky h_1 a h_2. Vypočítejte objemový průtok Q_v a tlak p_1 v nejvyšším průřezu násosky.

Zadáno:		
d =	12 cm	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
h_1 =	1 m	
h_2 =	1 m	
p_0 =	100000 Pa	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.05010
p_1 = ?	Pa (abs. tl.)	80 380.00



$$\frac{p_0}{\rho} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot h_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot (h_1 + h_2)$$

Vyjádříme tlak p_1 (vynásobíme celou rovnici ρ a převedeme všechny ostatní členy na druhou stranu)

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} - \rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2)$$

p_1 je absolutní tlak (v daném příkladu podtlak)

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

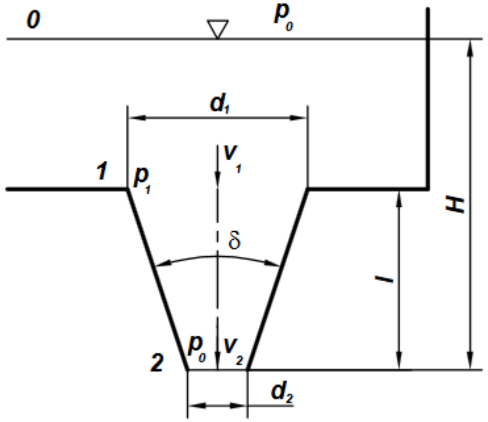
Příklad 7.2.1

Z nádoby vytéká voda průtokem Q_v svislým kuželovým potrubím o délce l, které se k výstupnímu průměru d_2 zužuje pod úhlem δ. Vypočtěte odpovídající výšku hladiny H a tlak p_1 v místě 1. Atmosférický tlak p_0 je 101325 Pa.

Zadáno:

Q_v	=	200 $m^3.h^{-1}$
l	=	1 m
d_2	=	75 mm
δ	=	10 °
ρ	=	1000 $kg.m^{-3}$

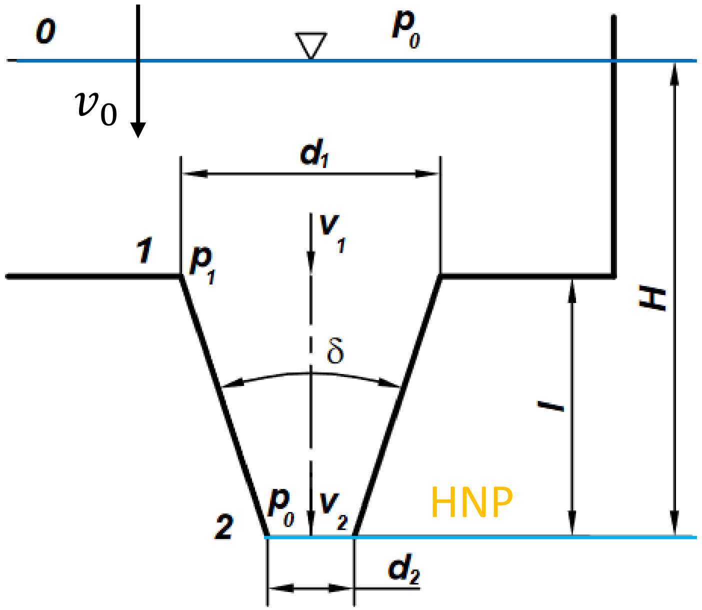
Vypočtěte:		Výsledky:
v_2 = ?	$m.s^{-1}$	12.575
H = ?	m	8.060
d_1 = ?	m	0.250
p_1 = ?	Pa (abs.tl.)	169 943.16



Vzhledem k tomu, že známe objemový průtok Q_v, rychlost v_2 na výstupu z potrubí můžeme vypočítat za užití rovnice kontinuity

$$Q_v = S_2 \cdot v_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot v_2 \rightarrow v_2 = \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot d_2^2}$$

Pro výpočet výšky hladiny H použijeme Bernoulliho rovnici, např. průřezy 0 – 2.



Bernoulliho rovnice pro průřezy 0 – 2

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot H = \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \frac{v_2^2}{2} + \cancel{g \cdot h_2}$$

$$g \cdot H = \frac{v_2^2}{2}$$

$$H = \frac{v_2^2}{2g}$$

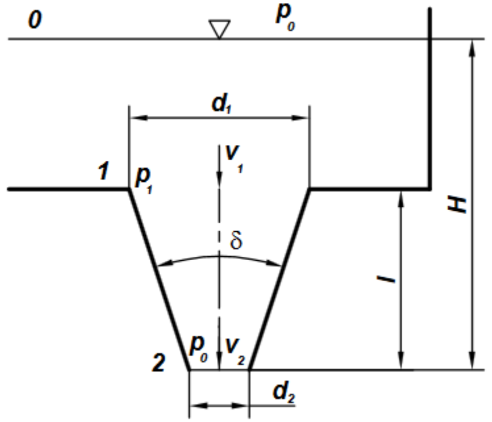
Příklad 7.2.1

Z nádoby vytéká voda průtokem Q_v svislým kuželovým potrubím o délce l, které se k výstupnímu průměru d_2 zužuje pod úhlem δ. Vypočtěte odpovídající výšku hladiny H a tlak p_1 v místě 1. Atmosférický tlak p_0 je 101325 Pa.

Zadáno:

Q_v	=	200 m^3.h^{-1}
l	=	1 m
d_2	=	75 mm
δ	=	10 °
ρ	=	1000 kg.m^{-3}

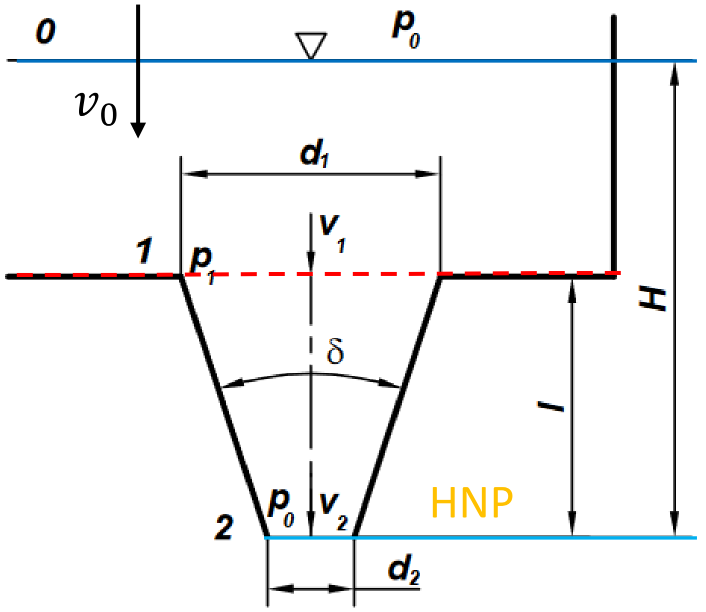
Vypočtěte:		Výsledky:
v_2 = ?	m.s^{-1}	12.575
H = ?	m	8.060
d_1 = ?	m	0.250
p_1 = ?	Pa (abs.tl.)	169 943.16

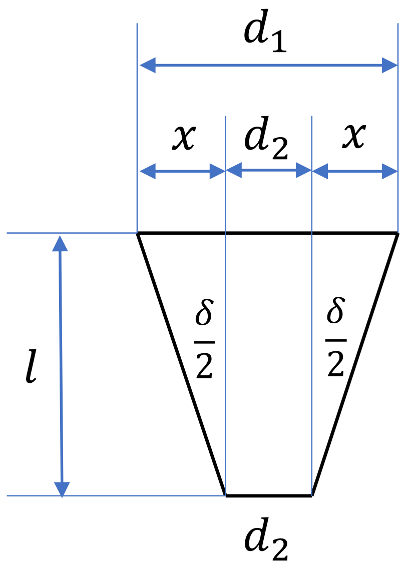


Pro výpočet tlaku p_1 sestavíme Bernoulliho rovnici pro průřezy 0 - 1

$$\frac{p_0}{\rho} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot H = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot l$$

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot H - \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} - \rho \cdot g \cdot l$$





Pro výpočet průměru d_1 platí

$$tg\frac{\delta}{2} = \frac{x}{l} \rightarrow x = l \cdot tg\frac{\delta}{2}$$

$$d_1 = d_2 + 2 \cdot x$$

Z rovnice kontinuity můžeme vypočítat rychlost v_1

$$Q_v = S_1 \cdot v_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot v_1 \rightarrow v_1 = \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot d_1^2}$$

Bernoulliho rovnice pro plyny

Pro plyny, které mají v porovnání s kapalinami malou hustotu, převládá tlaková a kinetická energie, polohová energie se dá vůči nim zanedbat. U plynů je nutno určit tlakovou energii s přihlédnutím ke stlačitelnosti tekutiny.

Integrál Eulerovy rovnice pro proudění ideální tekutiny po dráze má v tomto případě tvar

$$\frac{v^2}{2} + P = konst,$$

kde P je tlaková funkce, jež se určí integrací výrazu $\int_l \frac{1}{\rho} grad p \, \vec{dl}$

když je známa stavová změna hustoty $\rho = \rho(p)$

Pro rychlé děje je nejbližší adiabatická změna, při níž nedochází k výměně tepla tekutiny s okolím.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Stavová rovnice adiabatické změny $\frac{p}{\rho^{\kappa}} = konst$

Bernoulliho rovnice pro adiabatické proudění dokonalého plynu:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_2}{\rho_2} = konst$$

Pomocí stavové rovnice se Bernoulliho rovnice na tvar

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} rT_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} rT_2 = konst.$$

Zavede-li se dále rychlost zvuku $a^2 = \kappa r T$, dostaneme

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{\kappa-1} = konst.$$

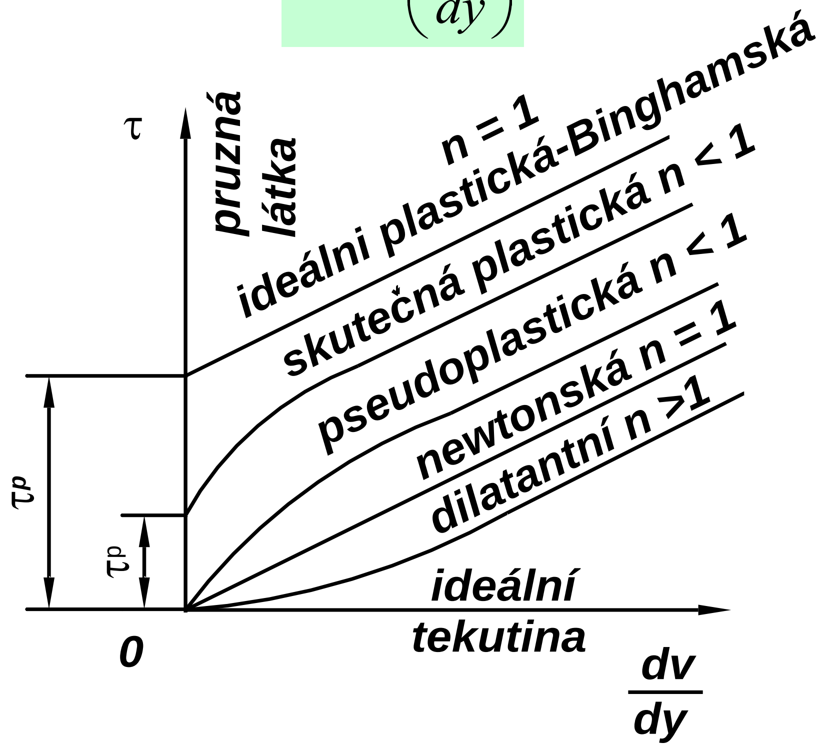
Při proudění **skutečné kapaliny** se projeví vliv viskozity odporem proti pohybu. Smykové napětí od viskozity je podle Newtona vyjádřeno vztahem :

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

, kde η je dynamická viskozita $[Pa \cdot s]$

Závislost smykového napětí τ gradientu rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu je vyjádřena v grafu

$$\tau = f\left(\frac{dv}{dy}\right)$$



Newtonská kapalina

$$\boxed{\tau = \eta \frac{dv}{dy}}$$

Ideálně plastická (Binghamská) látka

$$\tau = \tau_p + \mu_B \frac{dv}{dy}$$

Pro průběhy nelineární se používají mocninové vztahy

$$\boxed{\tau = \tau_p + K\left(\frac{dv}{dy}\right)^n}$$

kde *K* je součinitel konzistence

***n* je index toku**

Třecí síla F_t , kterou působí vazká kapalina na plochu S a kterou je nutno při pohybu kapaliny překonat, je určena vztahem:

$$F_t = \tau S = \eta \frac{dv}{dy} S = \rho \nu \frac{dv}{dy} S$$

Na překonání tohoto hydraulického odporu se spotřebuje část mechanické energie kapaliny, což se projeví poklesem rychlosti, tlaku nebo polohové výšky.

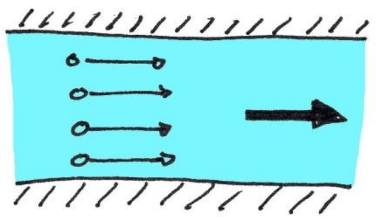
Velikost hydraulických odporů závisí na režimu proudění v potrubí, který může být **laminární** nebo **turbulentní**. Kritériem je Reynoldsovo číslo

$$\mathrm{Re} = \frac{v_s\, d}{\nu} \qquad \mathrm{Re}_{krit} = 2320$$

kde v je střední rychlost v potrubí, d je průměr potrubí, ν je kinematická viskozita.

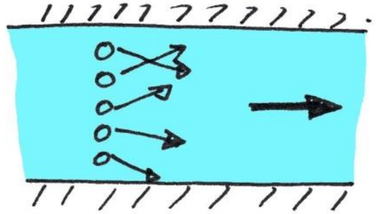
Laminární proudění

$$\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}_{kr} = 2320$$



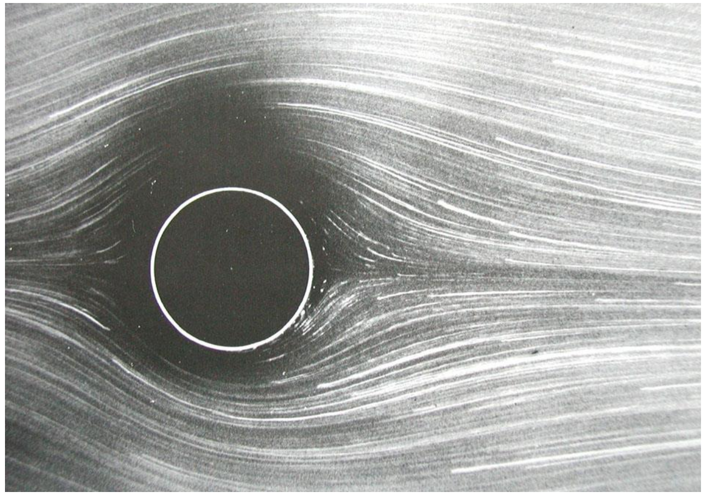
Turbulentní proudění

$$\mathrm{Re}_{kr} > \mathrm{Re} = 2320$$

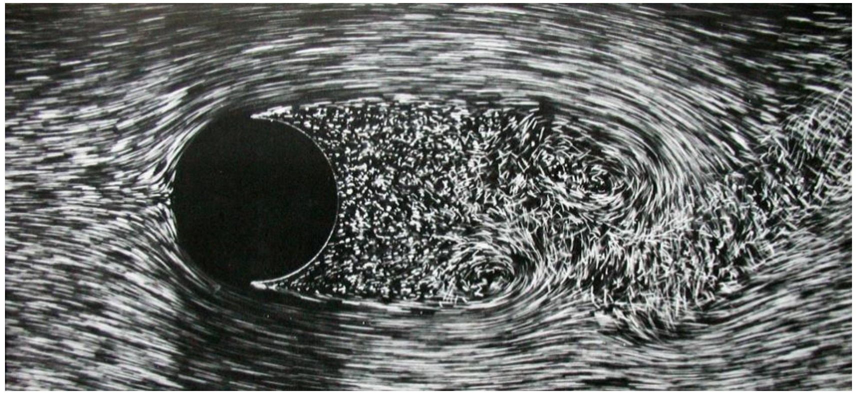


Laminární a turbulentní proudění lze rovněž pozorovat při obtékání těles:

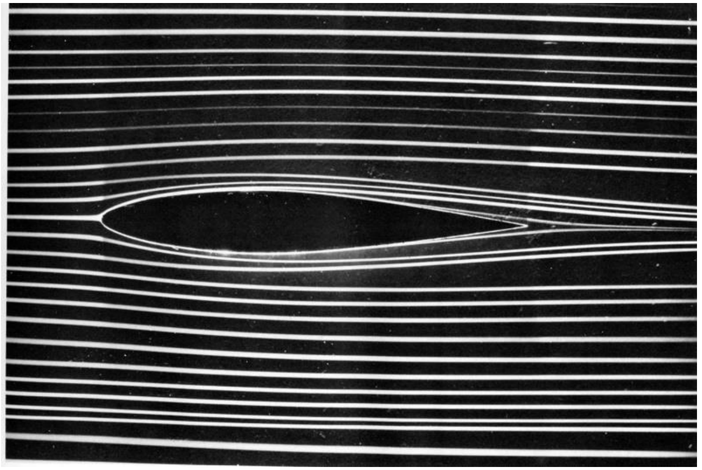
Laminární obtékání válce



Turbulentní obtékání válce



Laminární obtékání leteckého profilu

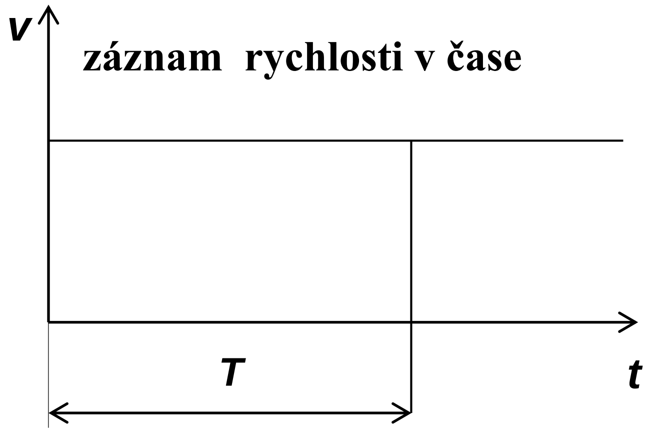


Obtékání tělesa ponorky

Turbulentní proudění v přírodě

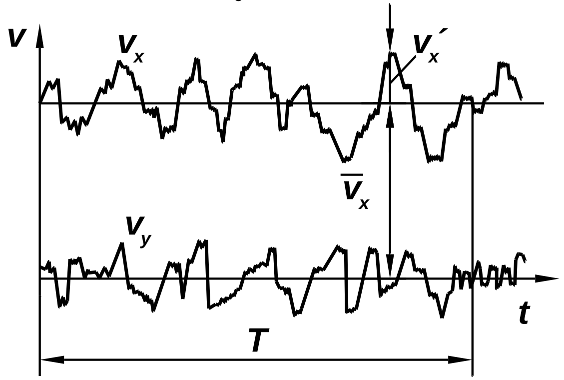
Oba druhy proudění se liší průběhem rychlosti v čase, rychlostním profilem i velikostí hydraulických ztrát (odporů) v potrubí.

Laminární proudění

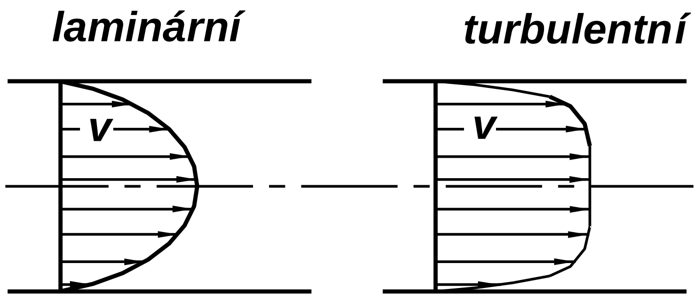


Turbulentní proudění

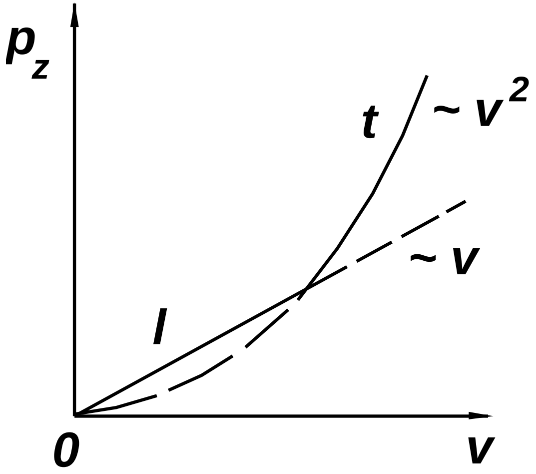
záznam rychlosti v čase



Rychlostní profil v potrubí

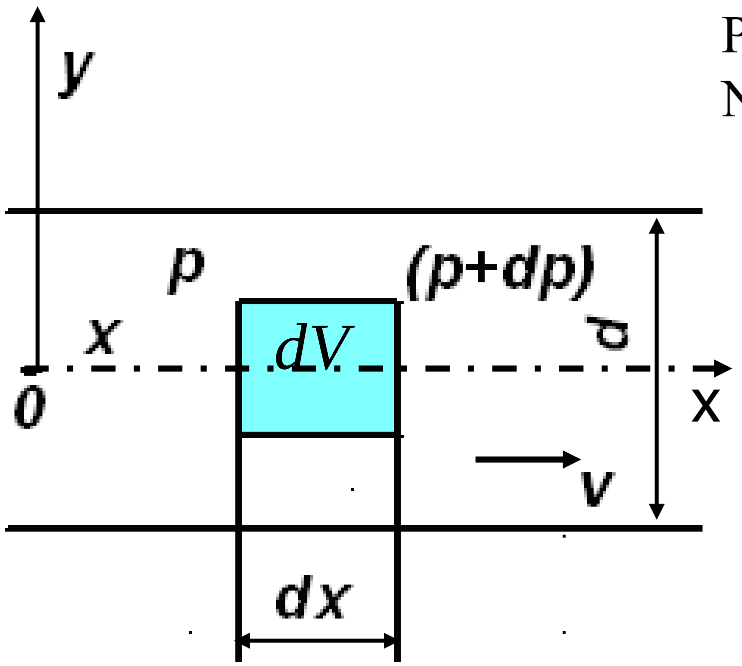


Závislost $p_z = f(v)$



Laminární proudění v potrubí kruhového průřezu

Laminární proudění v trubici kruhového průřezu nastane při $Re \leq 2320$



$$dV = \pi y^2 dx$$

Při řešení laminárního proudění se uplatňuje Newtonův vztah pro smykové napětí:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

Lze odvodit:

$$\boxed{\tau = f(y),} \quad \boxed{v = f(y)}$$

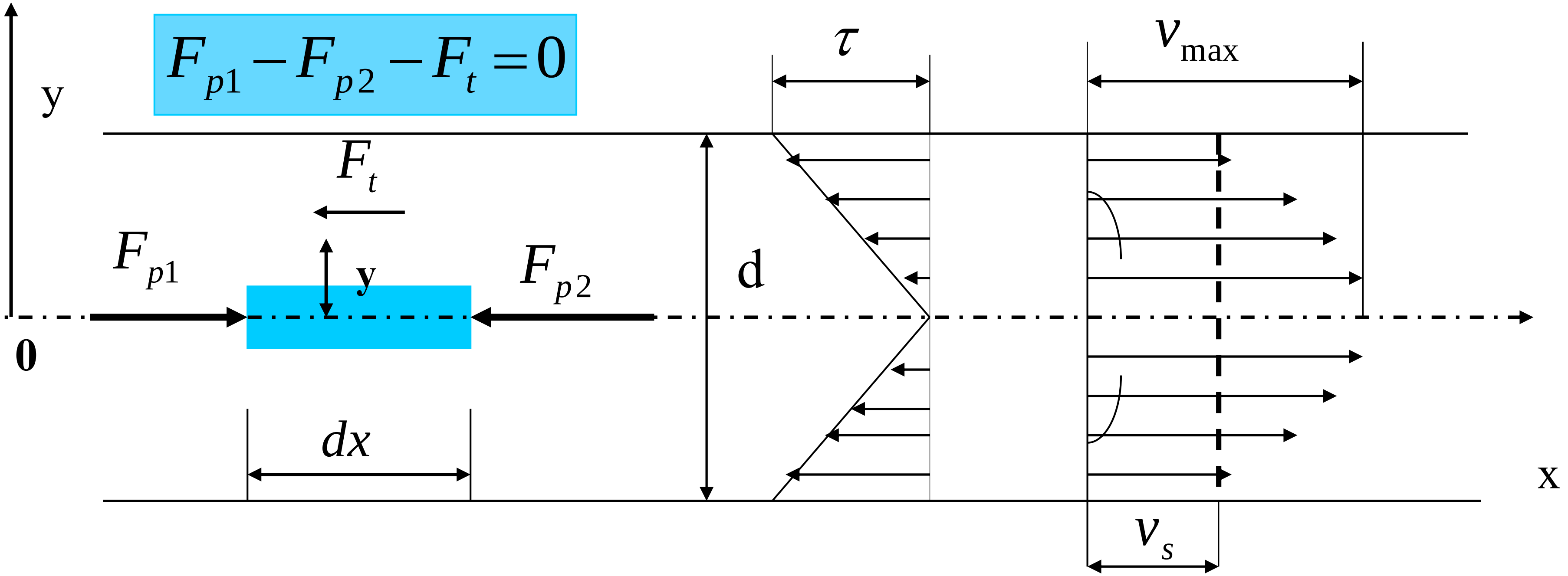
Předpoklady:

1. potrubí je vodorovné - objemové síly se neuplatní
2. proudění je ustálené - setrvačné síly se neuplatní
3. proudění je izotermní t = konst, υ = konst
4. laminární proudění ve vodorovném směru je vyvoláno tlakovým spádem p_z

Na zvolený objem kapaliny dV působí tedy síly plošné a to třecí a tlakové.

Podmínka rovnováhy sil třecích a tlakových

$$F_{p1}-F_{p2}-F_t=0$$



Na čelní plochu zvoleného válečku působí tlak p, který se na délce dx změní na (p+dp). Tlakové síly jsou pak dány:

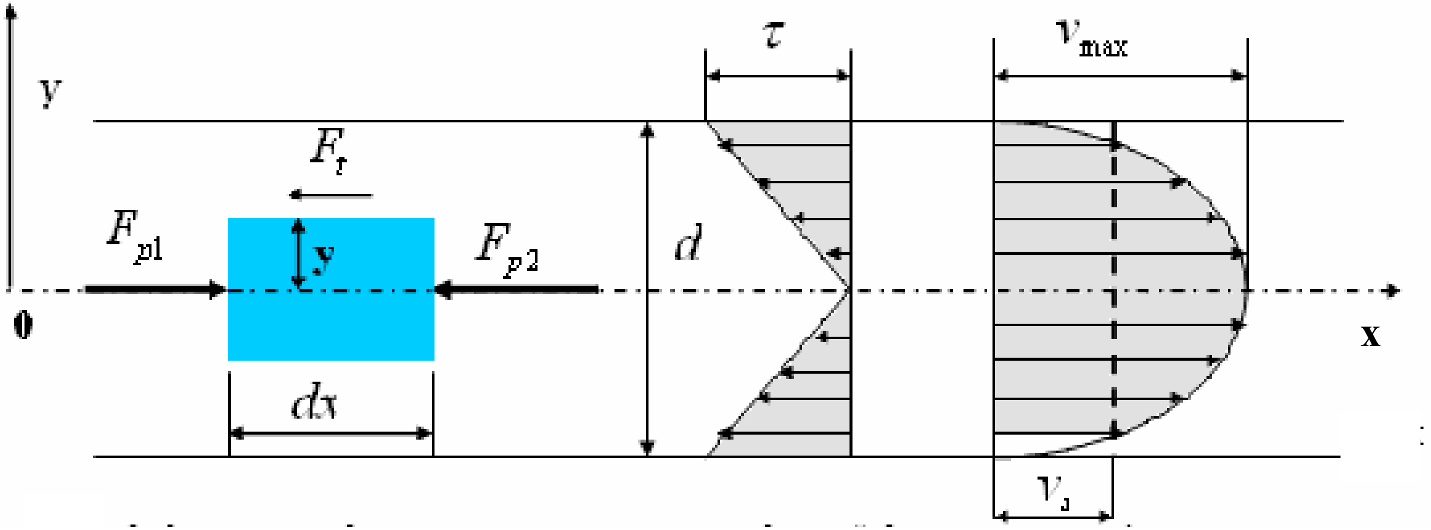
$$F_{p1}=p\pi y^2, \quad F_{p2}=(p+dp)\pi y^2$$

Na plášti válečku působí třecí síla $F_t=\tau\, 2\pi y\, dx$

Po dosazení:

$$p\pi y^2-(p+dp)\pi y^2-2\pi\tau y\, dx=0 \Rightarrow \quad \tau=-\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}y=-\frac{1}{2}\frac{p_z}{l}y$$

Diferenciální rovnice rychlostního profilu



Porovnání odvozeného vztahu pro smykové napětí s Newtonovým vztahem:

$$\tau = -\frac{1}{2}\frac{p_z}{l}y = \eta\frac{dv}{dy} \Rightarrow dv = -\frac{1}{2\eta}\frac{p_z}{l}ydy$$

Po integrací obdržíme rovnici

$v = -\frac{1}{4\eta}\frac{p_z}{l}y^2 + K,$ **kde pro** $y = \frac{d}{2}$ **je** $v = 0$ **a tedy** $K = \frac{1}{4\eta}\frac{p_z}{l}\left(\frac{d}{2}\right)^2$

$$v = -\frac{1}{4\eta}\frac{p_z}{l}y^2 + \frac{1}{4\eta}\frac{p_z}{l}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4\eta}\frac{p_z}{l}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

Rovnice paraboly

Maximální rychlost je v ose potrubí (y = 0), a to: $$v_{\max} = \frac{1}{16\eta}\frac{p_z}{l}d^2$$

Střední rychlost v potrubí: $$v_s = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{1}{32\eta}\frac{p_z}{l}d^2$$

Objemový průtok z rovnice kontinuity:

$$Q_v = \int_S v.dS = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r.v.dr = \frac{\pi}{2\eta}\frac{p_z}{l}\int_0^{\frac{d}{2}}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2\right] r.dr = \frac{\pi}{128}\frac{p_z d^4}{\eta l}$$

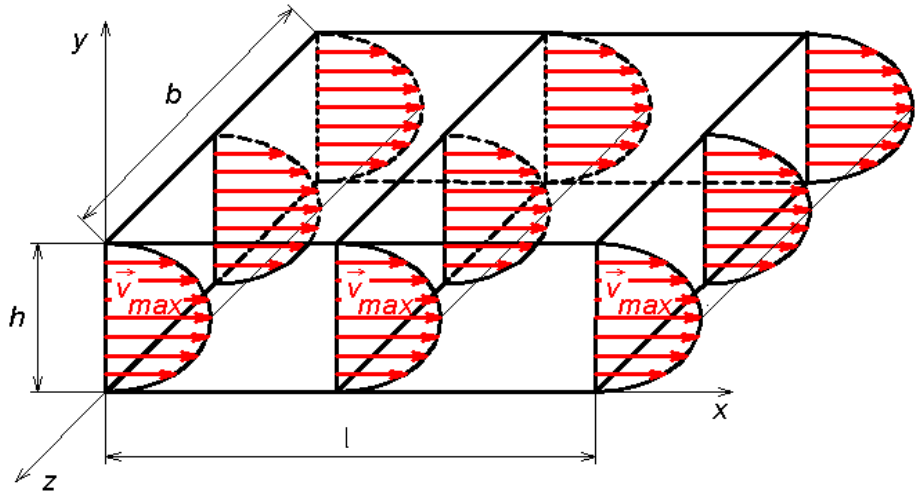
Rovnice se často označuje jako Hagen-Poiseuilleova. Platí, pokud se v potrubí vyvine parabolický rychlostní profil. V krátkých trubkách se laminární rychlostní profil nevyvine, a proto u nich zákon Hagen-Poiseuilleův neplatí.

Pro rozběhovou dráhu uvádí Boussinesq výraz $\frac{x_r}{d} \geq 0{,}065\,\mathrm{Re}$

Dalšími případy laminárního proudění je:

proudění mezi rovnoběžnými deskami, proudění ve válcové mezeře-mezikruží, stékání po svislé stěně

Laminární proudění v úzké mezeře mezi rovnoběžnými deskami



Předpoklady:

1. mezera je vodorovná – vliv objemové síly se neuplatní
2. proudění je ustálené - setrvačné síly jsou nulové
3. proudění je izotermní t = konst, υ = konst
4. proudění ve vodorovném směru je vyvoláno tlakovým spádem Δp

☞**rychlostní profil** $$v = \frac{1}{2\eta}\frac{\Delta p}{l}y(h-y)$$ → **Rovnice paraboly**

Maximální rychlost je uprostřed vzdálenosti desek h, čili

$$v_{\max} = \frac{1}{2\eta}\frac{\Delta p}{l}y(h-y) = \frac{1}{2\eta}\frac{\Delta p}{l}\frac{h}{2}\left(h-\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{8\eta}\frac{\Delta p}{l}h^2$$

☞**průtok** $$Q = \frac{b}{12\eta}\frac{\Delta p}{l}h^3$$

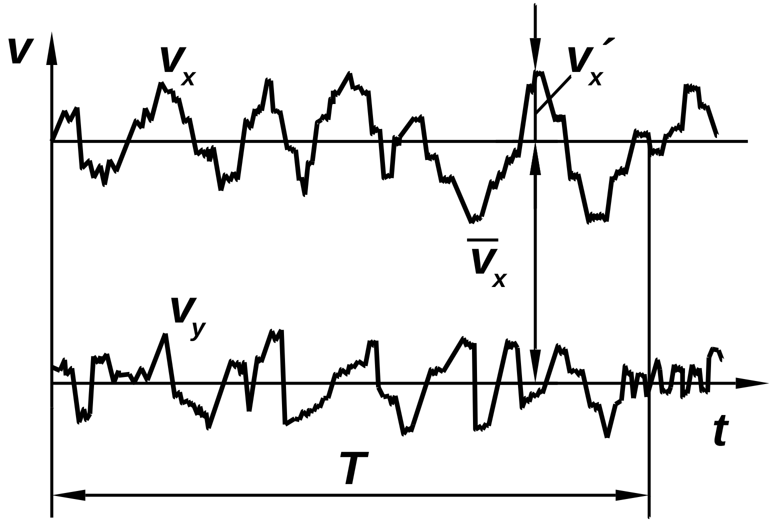
☞**střední rychlost** $$v_s = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{bh} = \frac{1}{12\eta}\frac{\Delta p}{l}h^2$$ → $$\frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{2}{3}$$

Turbulentní proudění v potrubí kruhového průřezu.

Turbulentní proudění v trubici kruhového průřezu nastane při $Re \rangle 2320$

Turbulentní proudění je trojrozměrný, časově proměnný pohyb tekutiny, při němž veličiny charakterizující proudění (rychlost, tlak, hustota, teplota) se mění nahodile v čase. Okamžité hodnoty veličin neustále kolísají kolem střední hodnoty. V každém okamžiku je například rychlost dána součtem střední rychlosti a fluktuační složky.

Pro složku rychlosti ve směru x bude platit: $\mathbf{v}_x = \overline{\mathbf{v}}_x + \mathbf{v}'_x$



záznam rychlosti v čase

Střední hodnota v_x resp. v_y za čas T

$$\overline{v}_x = \frac{1}{T}\int_0^T v_x dt$$

Střední hodnota fluktuační složky nulová

$$\overline{\mathbf{v}'}_x = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{v}'_x dt = 0$$

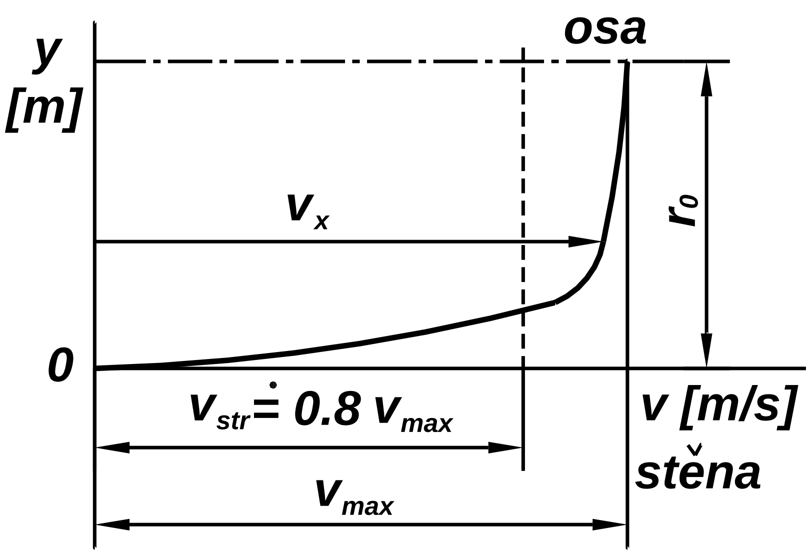
Smykové napětí a rychlostní profil při turbulentním proudění

Boussinesq (1877) zavedl zdánlivou (vírovou) viskozitu μ_t, jež je analogií dynamické viskozity tekutiny η. Na rozdíl od ní není zdánlivá viskozita látkovou vlastností, nýbrž je funkcí souřadnic a je závislá na geometrii a dalších charakteristikách proudového pole a může být v každém místě proudu odlišná.

Výsledné tečné napěti v turbulentním proudu je rovno součtu: $\tau = (\eta + \mu_t)\dfrac{dv}{dy}$

Na stěně je definována třecí rychlost $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$

Rychlostní profil



Logaritmická funkce $v = \dfrac{v_*}{\kappa} \ln y + K_1$

Mocninná funkce $v = v_{max} \left(\dfrac{y}{R} \right)^n$

κ je tzv. Kármánova konstanta, jejíž hodnota se pohybuje kolem 0,4 a K_1 je integrační konstanta

n=f(Re)

Exponent „*n*“ a poměr rychlostí „*m*“

- Exponent „*n*“ a poměr rychlostí „*m*“ můžeme určit z podmínky rovnováhy sil třecích a tlakových. Jejich hodnoty platí pro určitý rozsah *Re* čísla:
- pro hydraulicky hladké potrubí $2320 \leq \mathrm{Re} \langle 10^5 \Rightarrow n = 1/7 = 0.143,\ m = 0.817$
- pro $8 \cdot 10^4 \langle \mathrm{Re} \langle 5 \cdot 10^6 \Rightarrow n = 1/8 = 0.125,\ m = 0.837$
- pro větší rychlost v rozsahu $\mathrm{Re} \rangle 5 \cdot 10^6 \Rightarrow n = 1/10 = 0.1,\ m = 0.866$
- Rychlostní profil v potrubí můžeme měřit (například Pitotovou trubicí) a tedy mocnitel „*n*“ určit experimentálně. V literatuře lze nalézt empirické vztahy podle různých autorů, například podle Troskolanského

$$\frac{1}{n} = 1.03 \ln \mathrm{Re} - 3.6 \Rightarrow n = \frac{1}{1.03 \ln \mathrm{Re} - 3.6}$$

Poměr střední a maximální rychlosti v potrubí lze určit ze vztahu:

$$m = \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

Hydraulické odpory (ztráty)

- Při proudění skutečných tekutin vznikají následkem viskozity hydraulické odpory, tj. síly, které působí proti pohybu částic tekutiny. Mechanismus hydraulických odporů je složitý jev, který se dosud nepodařilo exaktně vyřešit až na jednodušší případy laminárního proudění. Proto se v hydraulických výpočtech uplatňuje řada poloempirických metod.
- Pod pojem hydraulické odpory zahrnujeme při proudění skutečné tekutiny všechny účinky, které způsobují rozptyl energie. Rozptýlená (ztrátová) energie na hydraulických odporech se projeví buď jako tlakový úbytek (vynucené proudění v potrubí apod.), nebo úbytkem kinetické energie (výtok z nádob otvory apod., anebo snížením polohové energie (proudění v korytech, gravitační potrubí apod.)

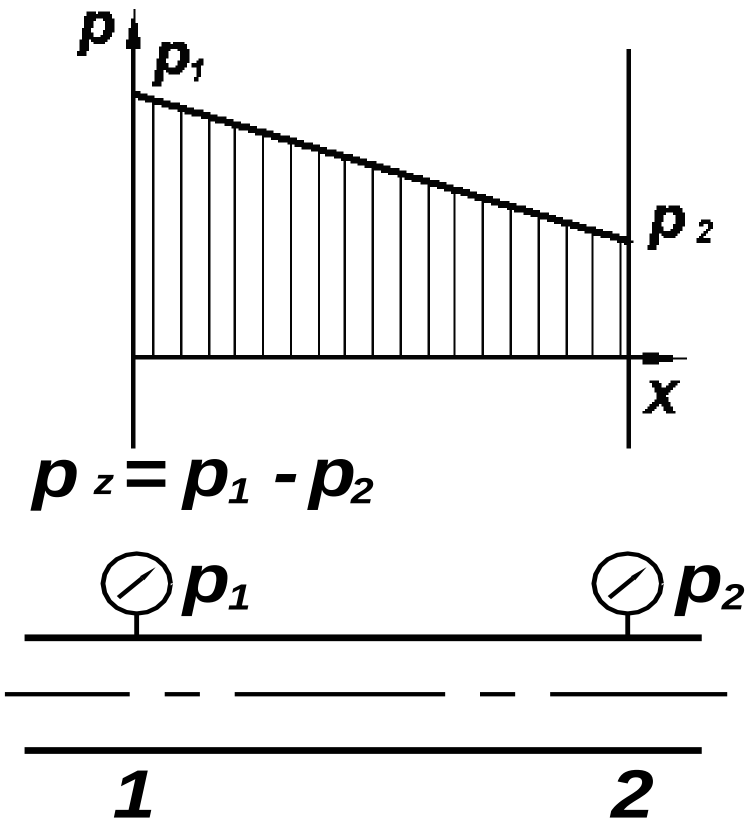
$$e_z = Y_z = \frac{p_z}{\rho} = g h_z = \zeta \frac{v^2}{2} \qquad \text{odtud} \qquad p_z = \rho g h_z = \rho \zeta \frac{v^2}{2} = \rho e_z$$

$$\left[Jkg^{-1}\right] \qquad\qquad \left[Pa\right]$$

Z fyzikálního hlediska lze hydraulické odpory (ztráty) rozdělit na **ztráty třením** a **ztráty místní**.

Hydraulické odpory (ztráty) třením po délce

- Ztráty třením vznikají vzájemným třením částic proudící tekutiny při rozdílných rychlostech a třením tekutiny o stěny potrubí (kanálu, a pod.). Při proudění skutečné tekutiny je rozložení rychlostí pro průtočném průřezu nerovnoměrné a v jednotlivých vrstvách a na stěnách vznikají tečné síly a napětí od viskozity. Ztráty třením lze definovat stejným způsobem pro laminární i turbulentní proudění pomocí ztrátové výšky podle Darcy-Weisbacha:



$$h_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = \frac{p_z}{\rho g} = \zeta_t \frac{v^2}{2g}$$

kde λ je třecí součinitel, l je délka potrubí, d jeho průměr a v je střední rychlost v potrubí.

Ztráty třením závisí na režimu proudění v potrubí, který se určí na základě hodnoty Reynoldsova čísla.

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}$$

Ztráty) třením po délce při laminárním proudění

U laminárního proudění pro $Re \geq 2320$ **se velikost tlakové ztráty či ztrátové výšky dá odvodit analyticky. Při řešení vyjdeme z rovnice pro střední rychlost:**

$$v_s = \frac{p_z d^2}{32.\eta L} \Rightarrow p_z = \frac{32\eta l v_s}{d^2} = \frac{32\eta l v_s}{d^2} \cdot \frac{2v_s}{2v_s} = \frac{64\nu}{v_s d} \cdot \rho \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_s^2}{2}$$

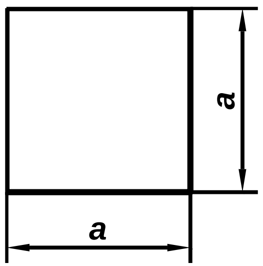
zavedeme-li $Re = \frac{v_s d}{\nu}$ a $\eta = \rho\nu$ dostaneme

$$p_z = \rho \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_s^2}{2} = \rho\lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_s^2}{2}$$

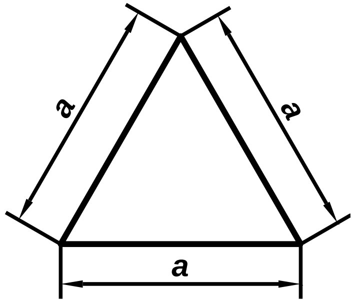
kde třecí součinitel $\lambda = \frac{64}{Re}$

Pro potrubí nekruhového průřezu platí analogická rovnice $\lambda = \frac{A}{Re}$

kde A je funkcí tvaru průřezu, např.



$$\lambda = \frac{57}{Re}$$

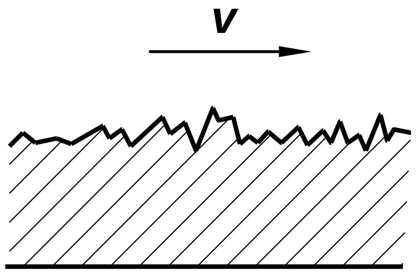


$$\lambda = \frac{92.4}{Re}$$

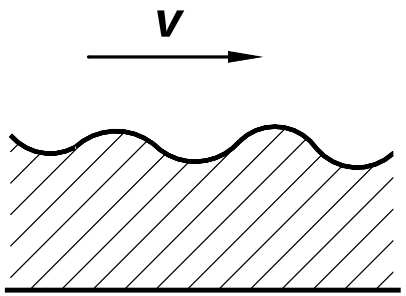
Ztráty) třením po délce při turbulentním proudění

Součinitel tření λ je závislý na velikosti Reynoldsova čísla a poměrné drsnosti $\varepsilon = \frac{d}{k}$, případně převrácené hodnotě $k_r = \frac{k}{d}$, kde k je absolutní drsnost stěny

potrubí v mm.



ostrá drsnost



vlnitá drsnost

Absolutní drsnost potrubí		
Materiál potrubí	Původní stav (mm)	Korodovaný stav (mm)
Tažené trubky mosazné, měděné, hliníkové	0,0015 až 0,003	0,003 až 0,1
Bezešvé trubky ocelové	0,04 až 0,1	0,1 až 0,9
Tažené trubky ocelové	0,03 až 0,12	0,12 až 0,9
Svařované trubky ocelové	0,05 až 0,1	0,1 až 0,9
Pozinkované trubky ocelové	0,15 až 0,5	0,5 až 3,5
Vodovodní potrubí po 20-ti a více letech v provozu		0,6 až 3,0
Skleněné trubky, trubky z plastů	0,001 5 až 0,01	
Pryžové hadice	0,01 až 0,03	
Betonové potrubí	0,3 až 6,0	

Z hlediska vlivu drsnosti na součinitel tření λ se rozděluje turbulentní proudění na tři oblasti:

• hydraulicky hladké potrubí $k = 0$ $\lambda = f(\mathrm{Re})$

Blasius: $\lambda = \dfrac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$ $\mathrm{Re}_k \leq \mathrm{Re} \leq 8.10^4$

• přechodová oblast turbulentního proudění $\lambda = f(\mathrm{Re}, \varepsilon)$

Altšul: $\lambda = 0.1\left[\dfrac{100}{\mathrm{Re}} + \dfrac{k}{d}\right]^{0.25}$

Colebrook: $\lambda = \dfrac{1}{\left[2\log\left(\dfrac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) + 0{,}27\dfrac{k}{d}\right]^2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left[2\log\left(\dfrac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) + 0{,}27\dfrac{k}{d}\right]^2$

• vyvinuté turbulentní proudění (drsná potrubí) $\lambda = f(\varepsilon)$

Nikuradse: $\lambda = \dfrac{1}{\left(2\log\dfrac{d}{k} + 1{,}138\right)^2}$ $\left(\dfrac{k}{d}\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} \rangle 191{,}2\right)$

Empirické rovnice pro výpočet součinitele tření

- **hydraulicky hladké potrubí**

autor	rovnice	platnost
Blasius	$\lambda = \dfrac{0.3164}{Re^{0.25}}$	$4 \cdot 10^3 < Re < 10^5$
Prandtl-Kármán	$\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log\left(Re \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0.8$	$4 \cdot 10^3 < Re < 10^8$
Altšul	$\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.82 \cdot \log \dfrac{Re}{100} + 2$	$2.5 \cdot 10^3 < Re < 10^{12}$
Konakov	$\lambda = \dfrac{1}{(1.8 \cdot Re - 1.5)^2}$	$4 \cdot 10^3 < Re < 10^5$

Empirické rovnice pro výpočet součinitele tření

- předchodná oblast turbul. proudění

autor	rovnice	platnost
Colebrook-White	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left[\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{3.71 \cdot D}\right]$	$Re > 4 \cdot 10^3$
El-Abdala	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left[\frac{6.524}{Re^{0.908}} + \frac{\Delta}{3.71 \cdot D}\right]$	$10^4 < Re < 10^8$ $10^{-5} < \Delta/d < 10^{-1}$
Haaland	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \cdot \log\left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{\Delta}{3.71 \cdot D}\right)^{1.11}\right]$	$4 \cdot 10^4 < Re < 10^8$ $\Delta/d < 10^{-2}$
Altšul	$\lambda = 0.11 \cdot \left[\frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{D}\right]^{0.25}$	$Re > 4 \cdot 10^3$
Moody	$\lambda = 0.0053 \cdot \left[1 + \left(20000 \cdot \frac{\Delta}{D} + \frac{10^6}{Re}\right)^{1/3}\right]$	$4 \cdot 10^3 < Re < 10^7$ $\Delta/d < 10^{-1}$

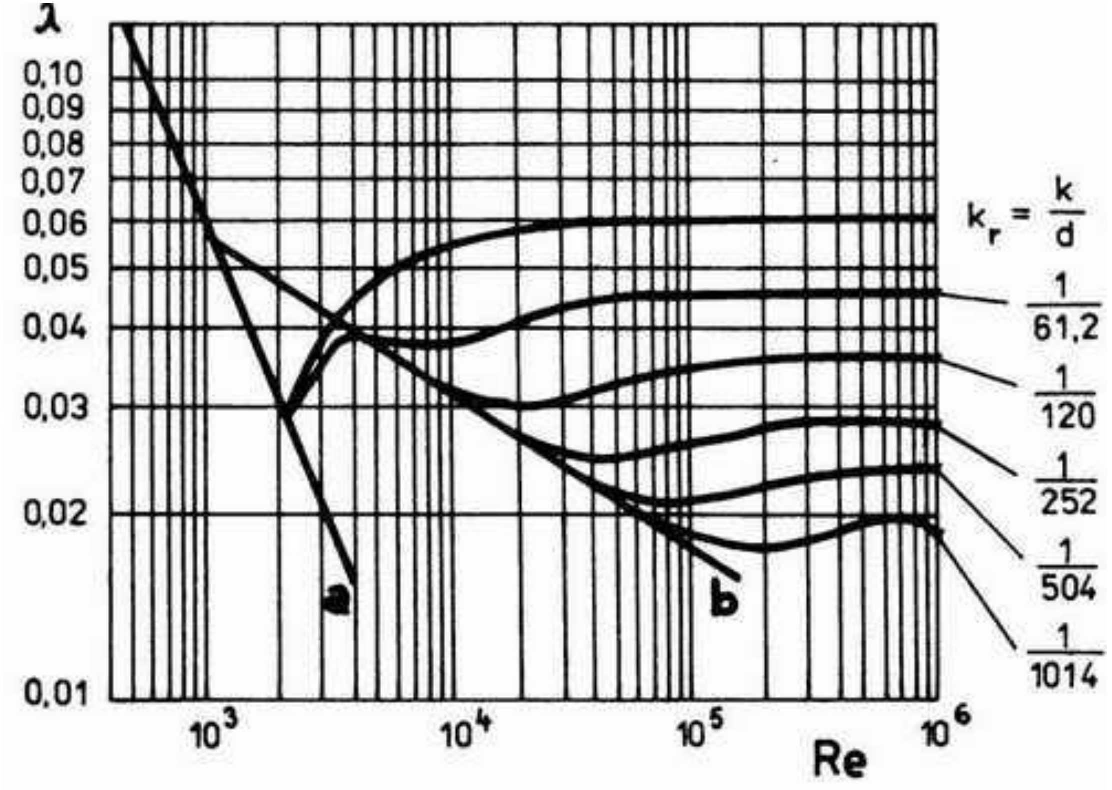
Empirické rovnice pro výpočet součinitele tření

- **hydraulicky drsné potrubí (kvadratická oblast)**

autor	rovnice	platnost
Nikuradse	$\lambda = \left(2 \cdot \log \frac{r_0}{\Delta} + 1.74\right)^{-2}$	$Re > 4 \cdot 10^3$
Šifrinson	$\lambda = 0.11 \cdot \left(\frac{\Delta}{D}\right)^{0.25}$	$10^4 < Re < 10^8$ $10^{-5} < \Delta/d < 10^{-1}$

Nikuradseho diagram

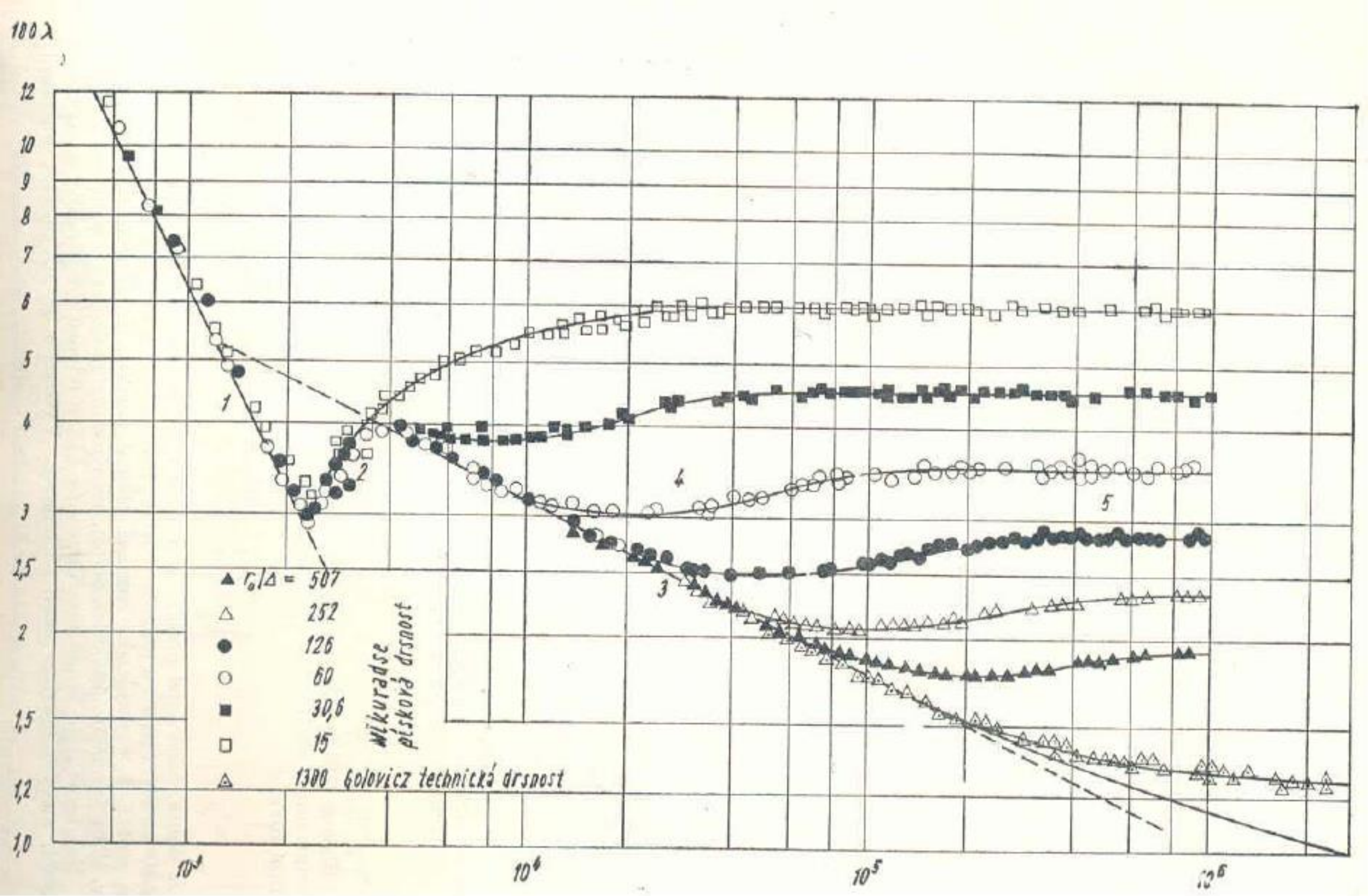
$$\lambda = f\left(\mathrm{Re}, \frac{k}{d}\right)$$



Vliv drsnosti potrubí vyšetřoval Nikuradse v letech 1930 až 1933. V experimentech použil bronzové potrubí kruhového průřezu o různých průměrech. Nejprve provedl měření v hladkém potrubí. Potom měnil drsnost potrubí nalepením tříděných pískových zrn.

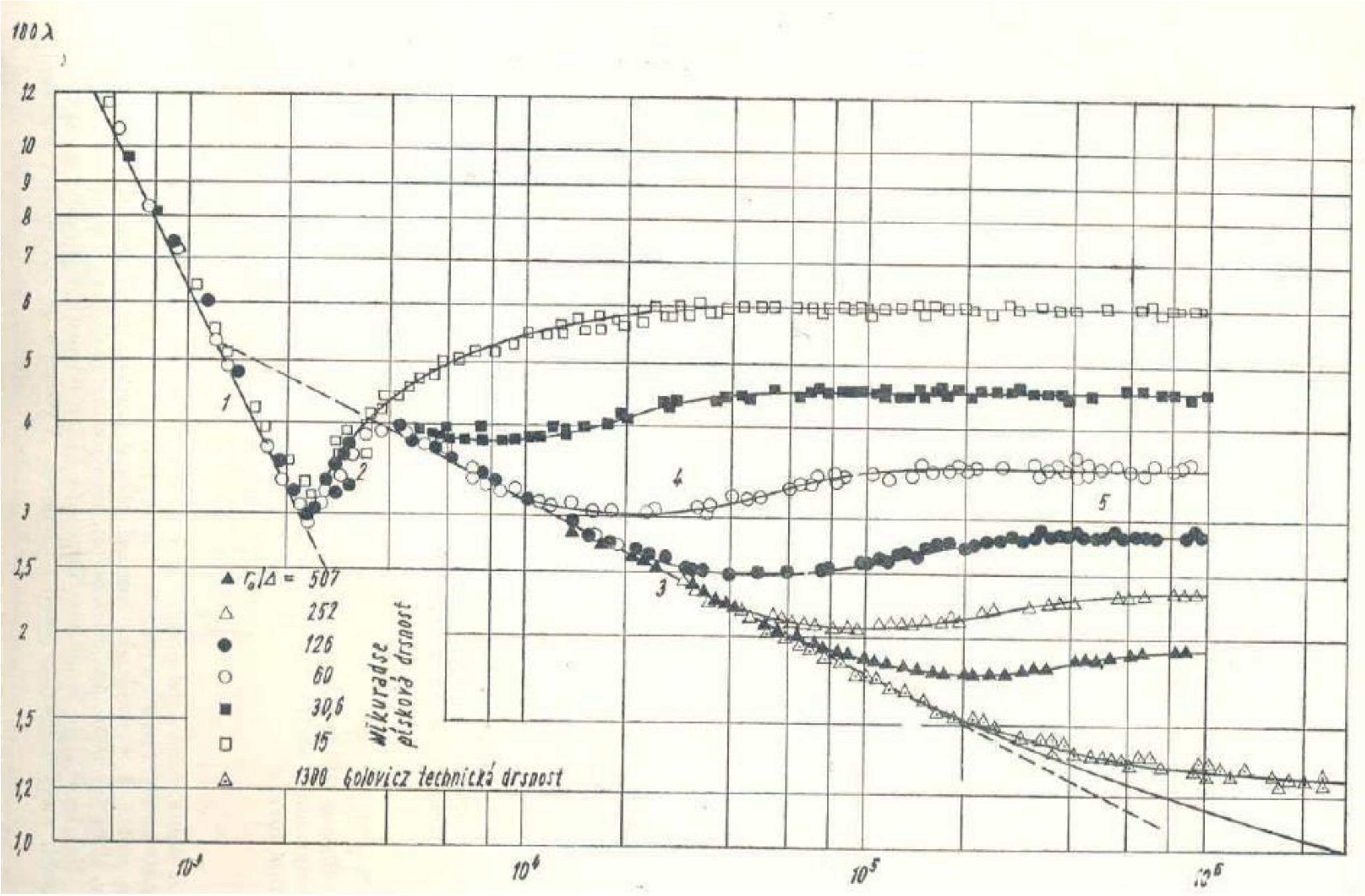
Křivky pro různé poměrné drsnosti k_r se odpoutávají od přímky Blasiovy, která představuje průběh součinitele tření pro hladké potrubí. S rostoucím Re číslem přecházejí v soustavu čar rovnoběžných s vodorovnou osou.

Nikuradseho diagram pro potrubí s umělou drsností



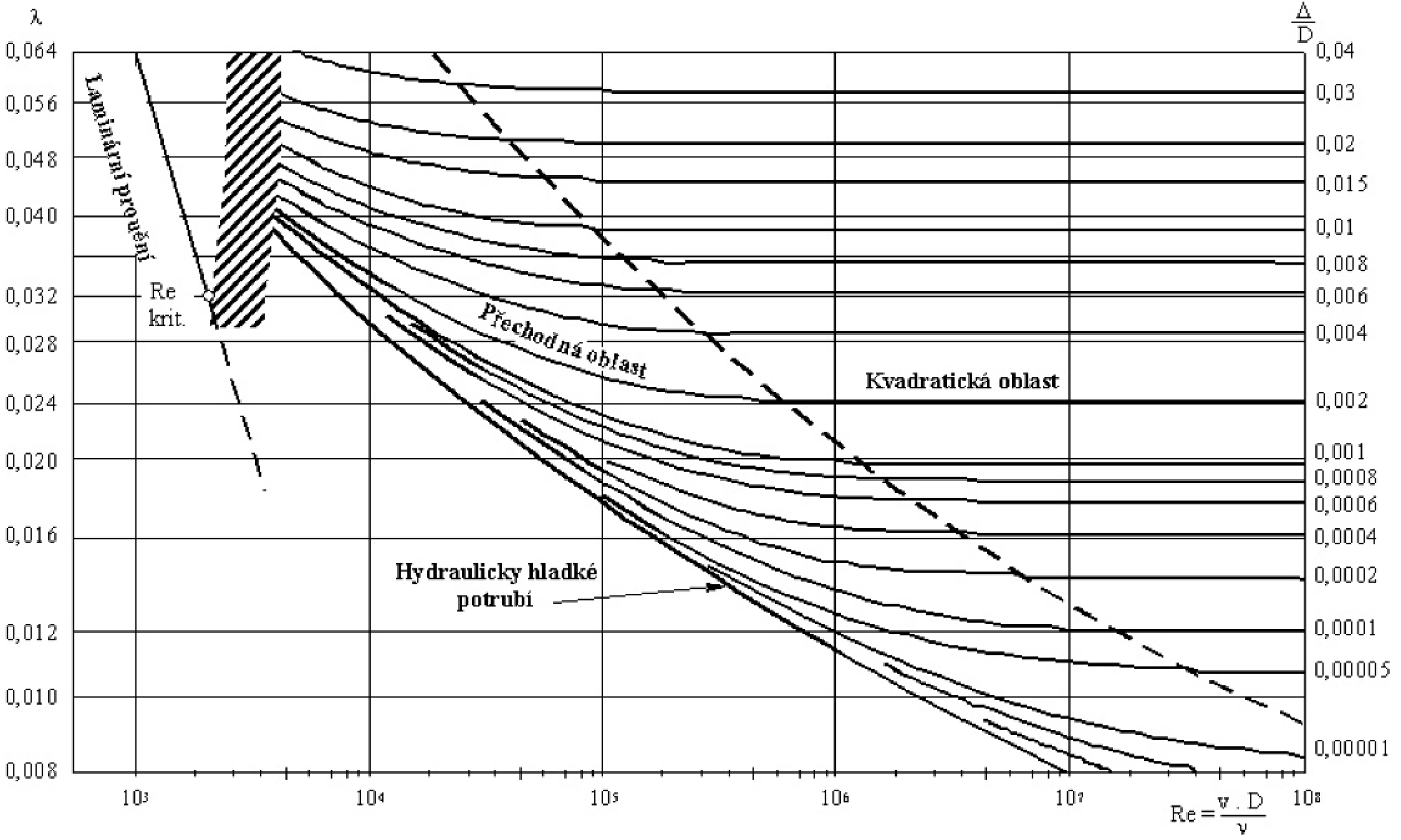
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Nikuradseho diagram pro potrubí s umělou drsností



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Moodyho diagram



Ztráty třením turbulentního proudění v potrubí nekruhového průřezu

Jsou určeny stejnými vzorci jako pro kruhové potrubí. Místo průměru kruhového potrubí *d* je však třeba dosadit ekvivalent pro nekruhové průřezy, pomocí něhož se vypočte Re-číslo, součinitel tření a ztrátová výška. Tento ekvivalent se nazývá hydraulický průměr d_h a je určen vztahem

$$d_h = 4\frac{S}{o}$$

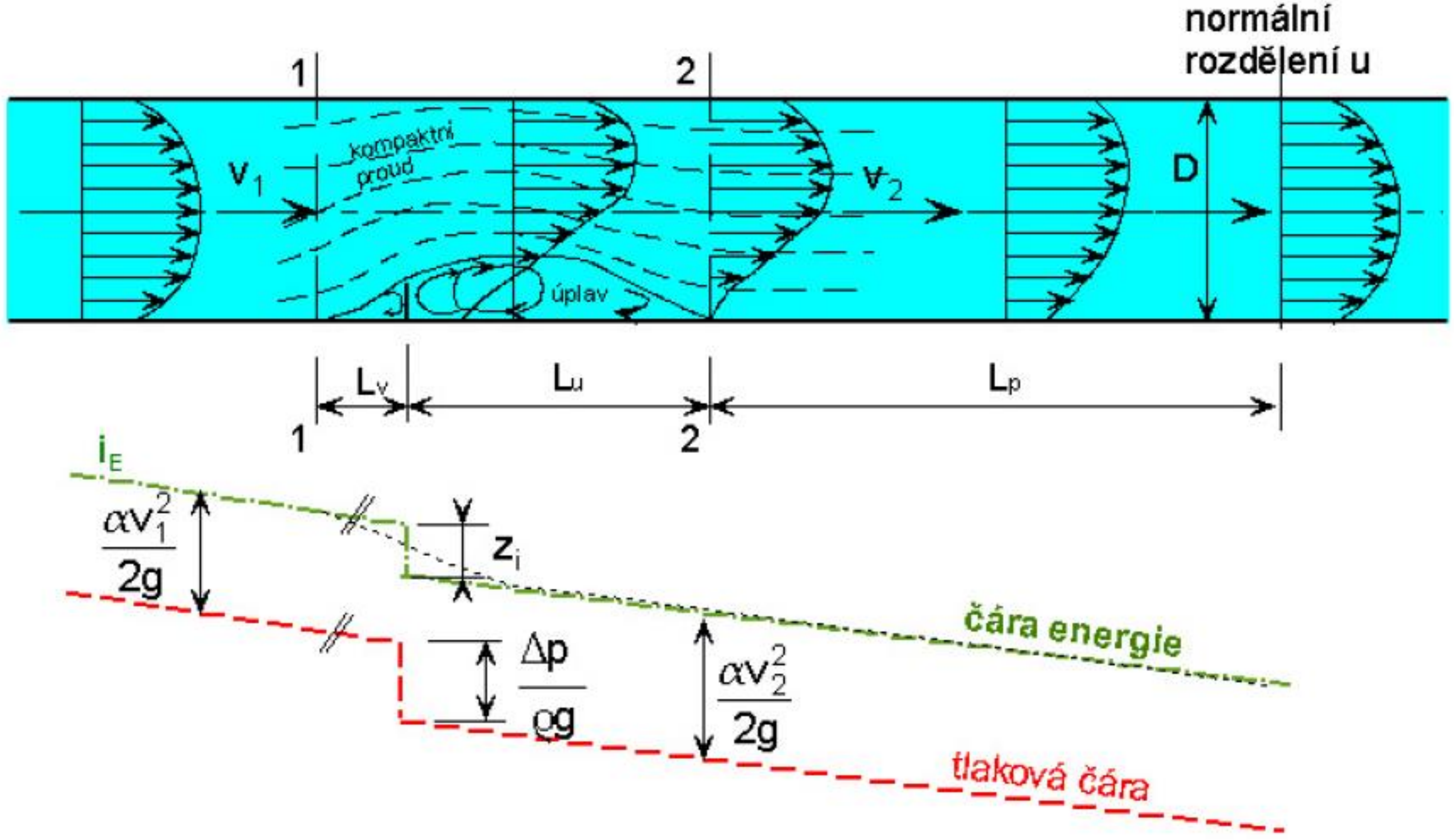
kde **S** je průtočná plocha a **o** je omočený obvod průřezu. Hydraulický průměr se může dosadit do výrazu pro

$$k_r = \frac{k}{d_h}, \quad \mathrm{Re} = \frac{v d_h}{\nu}, \quad h_z = \lambda \frac{1}{d_h}\frac{v^2}{2g}, \quad \lambda = f\left(\mathrm{Re}, k_r\right)$$

Pro přechod laminárního proudění v turbulentní v nekruhových průřezech se uvažuje kritická hodnota Reynoldsova čísla stejná jako u kruhového potrubí.

Hydraulické odpory (ztráty) místní

Místní odpory (místní ztráty) vznikají v krátkých úsecích potrubí, kde dochází ke změně charakteru proudu, tj. velikosti rychlosti a směru proudu, případně k obojímu. Často dochází k odtržení proudu od stěny a ke vzniku víření, které je příčinou místní ztráty.



Hydraulické odpory (ztráty) místní

Velikost místní ztráty závisí na typu, tvaru a konstrukci daného úseku potrubí nebo elementu a na materiálovém provedení, drsnosti, atd. Je zřejmé, že k místním ztrátám bude docházet ve všech tvarovkách (kolena, odbočky, spojky, difuzory), armaturách (ventily, šoupátka, kohouty, klapky), měřících zařízeních (clony, dýzy, vodoměry) a dalších zařízeních (chladiče, čističe, filtry). Velikost místních ztrát lze vyjádřit obdobně jako ztrátu třením pomocí ztrátové výšky h_z, tlakové ztráty p_z, nebo součinitele místní ztráty .

$$e_z = gh_z = \frac{p_z}{\rho} = \zeta_m \frac{v^2}{2} \Rightarrow h_z = \zeta_m \frac{v^2}{2g}$$

Hodnota ztrátového součinitele ζ_m se určuje ve většině případů experimentálně, zpravidla při vyšších Re číslech. Pro některé jednodušší případy lze součinitel místní ztráty odvodit (náhlé rozšíření a zúžení průřezu, kuželová potrubí).

Místní odpory v potrubí se mohou vyjádřit ekvivalentní délkou potrubí, v němž je ztráta třením stejná jako místní ztráta.

$$\zeta_m \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l_e}{d} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow l_e = \frac{\zeta_m}{\lambda} d$$

Při změnách průřezu se mění průtočná rychlost a místní ztráty se mohou vyjádřit v závislosti na přítokové rychlosti nebo odtokové rychlosti , přitom pro přepočet ztrátových součinitelů lze odvodit vztah:

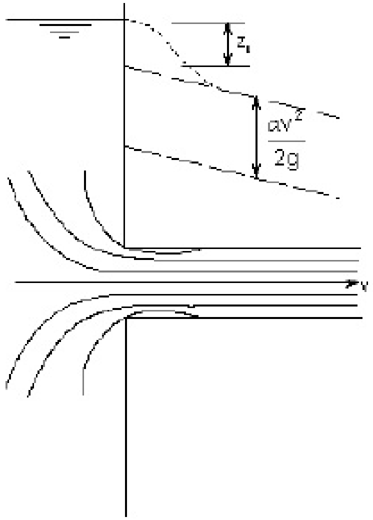
$$h_{zm} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \zeta_2 = \zeta_1 \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

Pro kruhové průřezy platí:

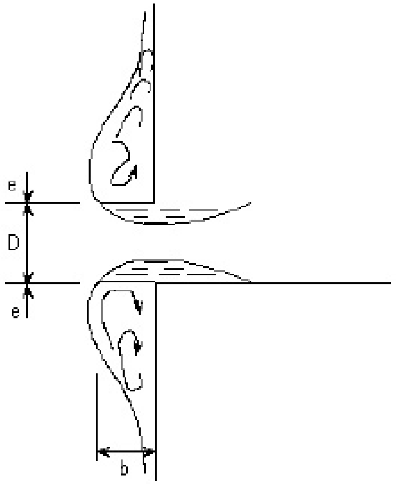
$$\zeta_1 = \zeta_2 \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \zeta_2 \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \zeta_2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \qquad \zeta_2 = \zeta_1 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4$$

Pro praktické výpočty lze hodnoty součinitelů místní ztráty odečíst z grafů a nomogramů, které jsou součástí literatury zabývající se návrhem potrubního vedení.

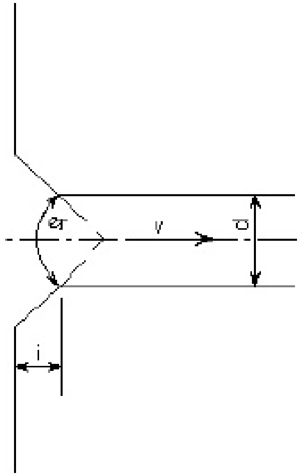
Místní ztráta na vtoku do potrubí

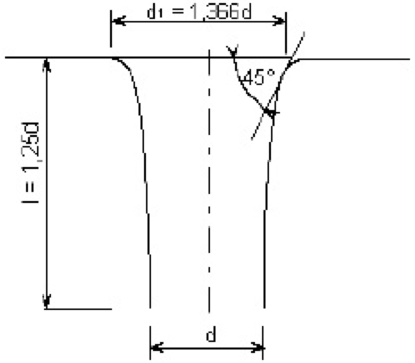


ostrá vstupní hrana



vysunutý vtok do nádrže



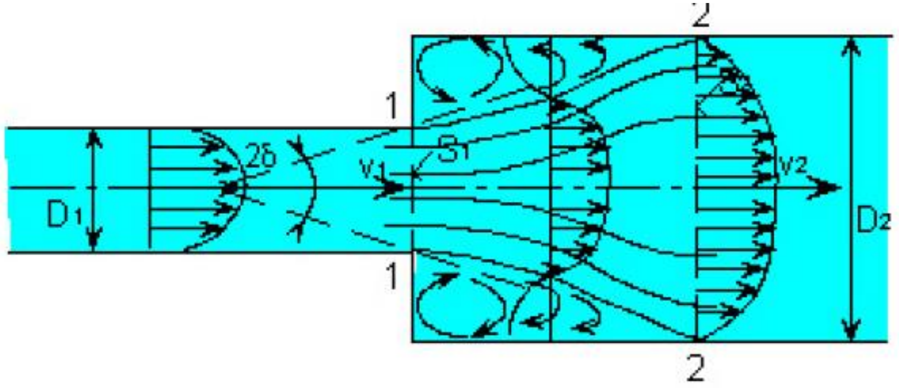


řešení hydraulicky vhodných vtoků do potrubí

Tabulka – hodnoty součinitele místní ztráty na vtoku pro různá konstrukční provedení vtoku

typ vtoku	platnost	ζ
potrubí zasahuje do nádrže		$0.8 \div 1.0$
ostrá vstupní hrana		0.5
seříznutá vstupní hrana	$L/D \approx 0.1$	0.25
zaoblená vstupní hrana		0.20
kónicky rozšířený vtok	$2\sigma = (40 \div 80)°$ $L/D = (0.2 \div 0.3)$	0.13
kruhově zaoblený vtok	$r = 0.2 \cdot D$	0.11
vtok dle Lískovce (strofoida)		0.04

Ztráta náhlým rozšířením průřezu.



Při náhlém rozšíření průřezu se odtrhne proud kapaliny od stěn a vytvoří se víry. Ve směru proudění klesá střední rychlost a stoupá statický tlak. Zvýšení tlaku bude nižší o ztrátu spojenou s rozšířením průřezu. Pomocí rovnice Bernoulliho a věty o změně hybnosti odvodil Borda vztah pro ztrátovou výšku:

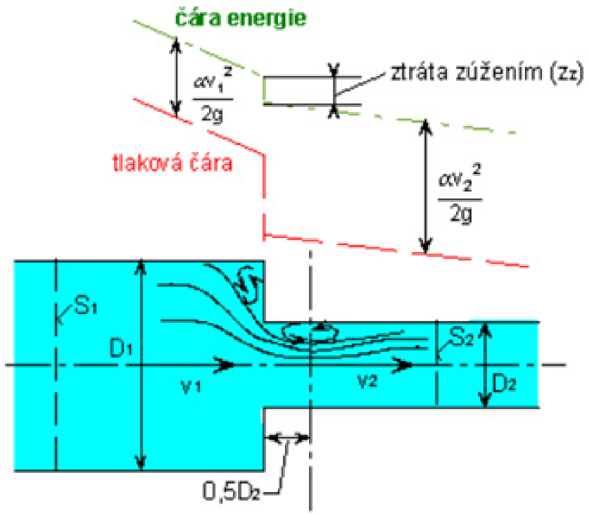
$$h_z = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2, \qquad \zeta_2 = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 = \left[\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 - 1\right]^2$$

$$h_z = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}$$

d_1/d_2	1	0,8	0,6	0,4	0,2
S_1/S_2	1	0,64	0,36	0,16	0,04
ζ_1	0	0,13	0,41	0,706	0,922

Místní ztráta náhlým zúžením potrubí



$$h_z = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\zeta_1 = \left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)\frac{S_1}{S_2}, \quad \zeta_2 = \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)$$

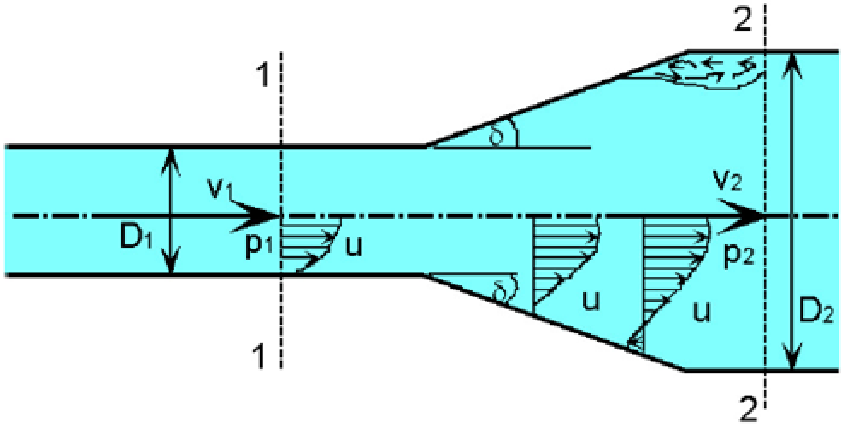
Tabulka – hodnoty součinitele místní ztráty náhlého zúžení

$$\boxed{h_z = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}}$$

D_2/D_1	0.95	0.89	0.83	0.775	0.71	0.63	0.55	0.45	0.32
S_2/S_1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
ξ_{nz}	0.075	0.16	0.23	0.275	0.31	0.34	0.36	0.38	0.40
Tullis	0.01	0.062	0.10	0.164	0.22	0.27	0.31	0.34	0.36
Douglas			0.14		0.24		0.34		0.41

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Místní ztráta kónickým rozšířením potrubí



$$h_{zd} = \zeta_{d1} \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{d2} \frac{v_2^2}{2g}$$

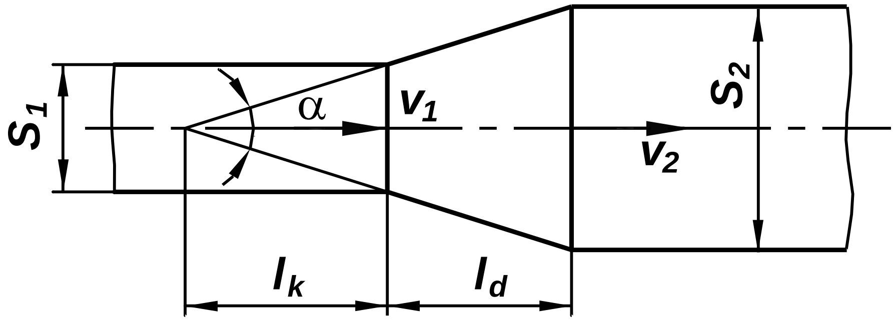
Tabulka – hodnoty součinitele místní ztráty kónického rozšíření

$$\boxed{h_z = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}}$$

S_2/S_1	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0
2·δ=5°	0.03	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
2·δ=10°	0.02	0.05	0.06	0.07	0.08	0.10	0.12
2·δ=15°		0.06	0.08	0.10	0.13	0.17	0.20
2·δ=20°					0.17	0.20	0.23

Ztráty v difuzorech

Difuzor se používá hlavně tam, kde je třeba přeměnit kinetickou energii proudu na tlakovou (u podzvukových rychlostí) s nejmenšími ztrátami.



Celkové ztráty v difuzoru je možno rozepsat na ztrátu třením a ztrátu spojenou se změnou průřezu, takže

$$h_{zd} = h_{zt} + h_{zr}$$

☞Do úhlu rozšíření α až 8° zůstává protažený rychlostní profil symetrický k ose difuzoru. Při dalším zvětšení úhlu se proud účinkem tlakového gradientu odtrhne od stěny a symetrie proudu se poruší.

☞Při úhlech rozšíření α = 10° až 50° nastává odtržení proudu zpravidla od jedné stěny, na níž je rychlost menší.

☞V difuzorech s většími úhly rozšíření než 50° až 60° nemůže proud sledovat stěny difuzoru a odtrhává se po celém průřezu.

$$h_{zd} = \zeta_{d1}\frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{d2}\frac{v_2^2}{2g}$$

Ztráta v difuzoru

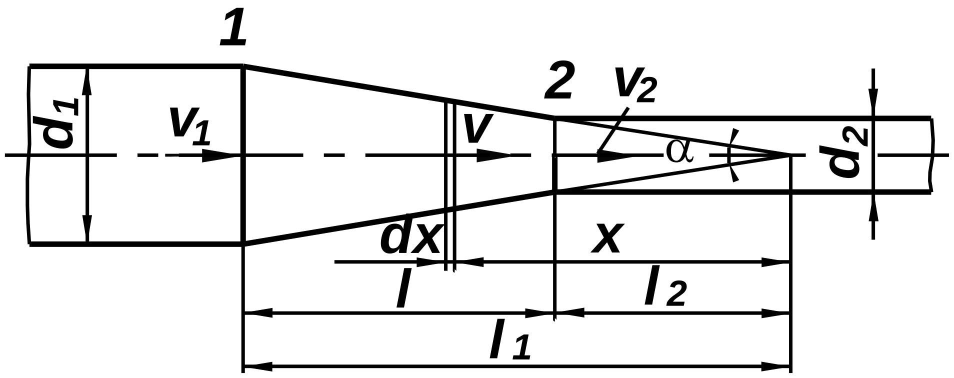
$$h_{zd} = \zeta_{d1}\frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{d2}\frac{v_2^2}{2g} = \zeta_r\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g},$$

kde ζ_r je stupeň rázu, určí se měřením

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Kuželové potrubí

Při zužování průřezu je hydraulická ztráta způsobena rovněž třením a lze ji určit integrací na elementární délce kuželového potrubí.



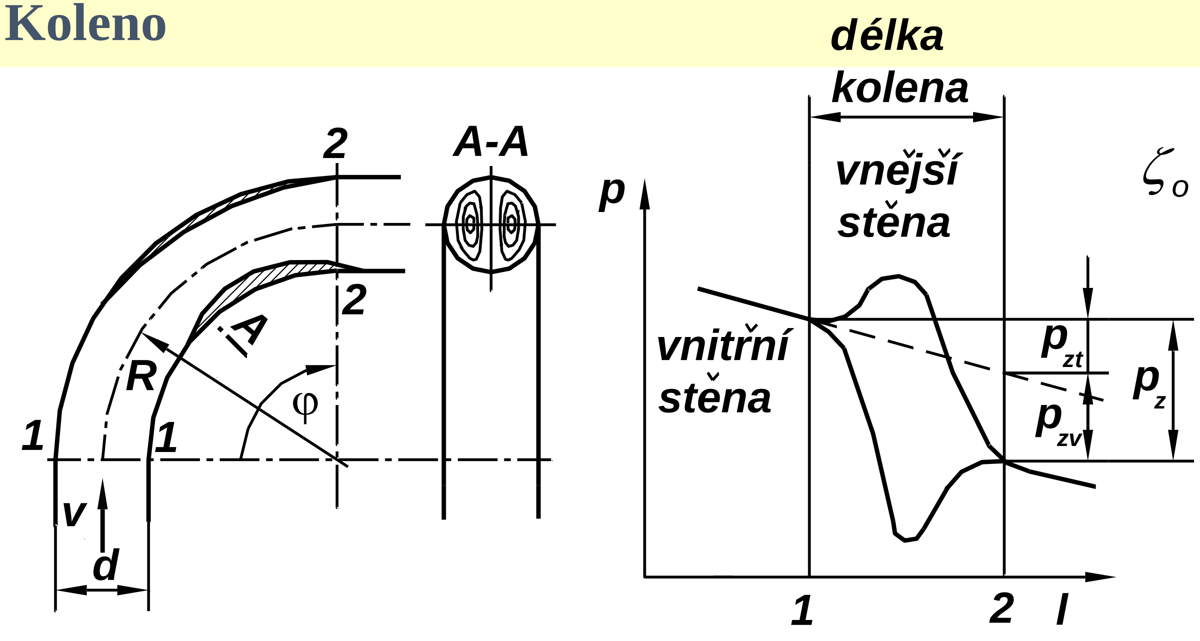
$$h_z = \frac{1}{4}\lambda_s \frac{l_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}\left(1-\frac{l_2^4}{l_1^4}\right)$$

$$h_z = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

Tabulka – hodnoty součinitele místní ztráty kónického zúžení

$2\cdot\delta$	5°	7°	10°	20°	30°	60°
ξ_{kz}	0.06	0.12	0.16	0.20	0.24	0.32

Koleno



$$\zeta_o = f\left(\frac{R}{d}, \varphi, \mathrm{Re}, \mathrm{geom.\,tvar}\right)$$

největší rychlosti u vnitřní stěny, největší tlaky u vnější stěny

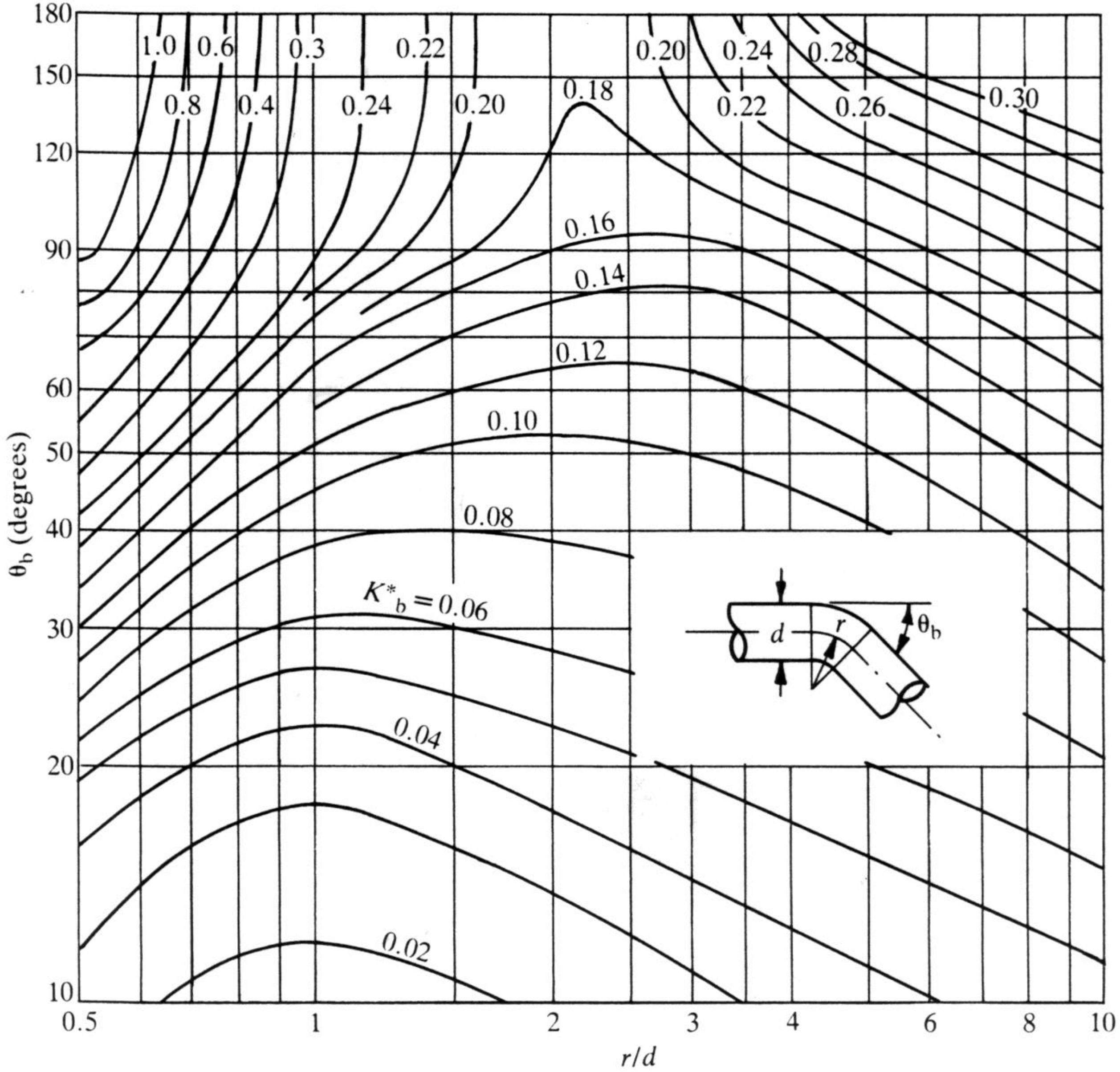
úplavy - vnější u vrcholu oblouku, vnitřní na konci oblouku

dvojitě spirálovité proudění

Tabulka – hodnoty součinitele místní ztráty čtvrtkruhového oblouku

R/D	1.0	1.5	2.0	4.0	6.0	10.0	20.0
hladká potrubí	0.21	0.17	0.15	0.11	0.09	0.07	0.05
drsná potrubí	0.42	0.34	0.30	0.22	0.18	0.14	0.10

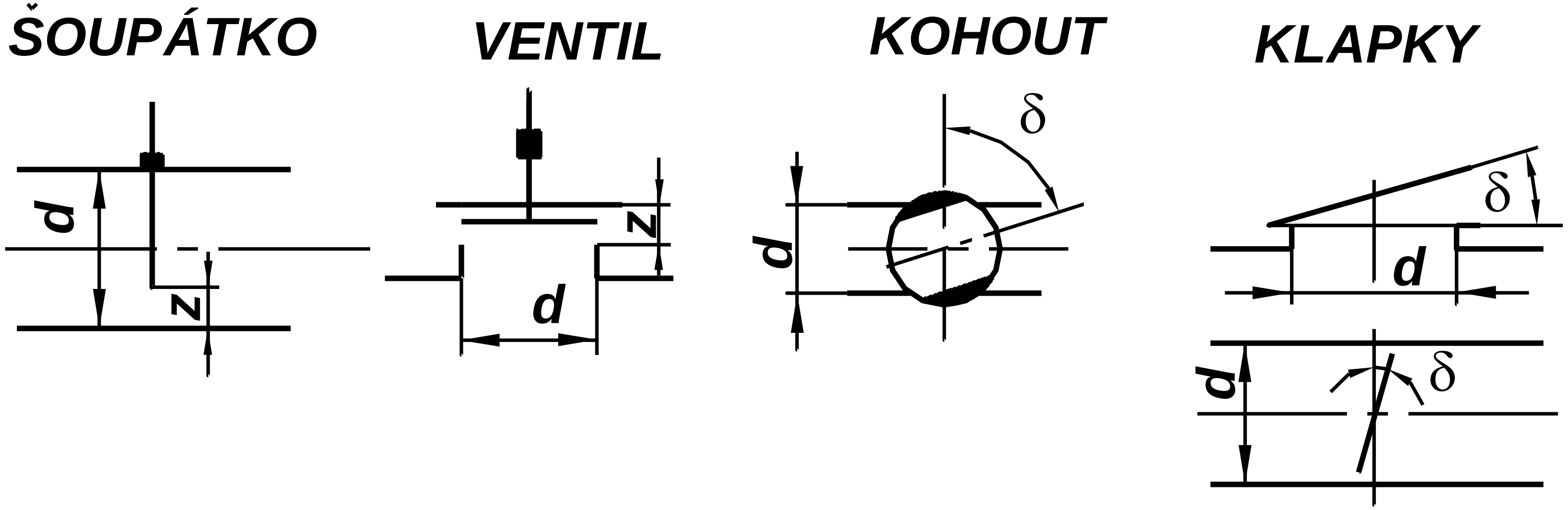
Ztrátový součinitel při proudění v koleni



Odpory v armaturách

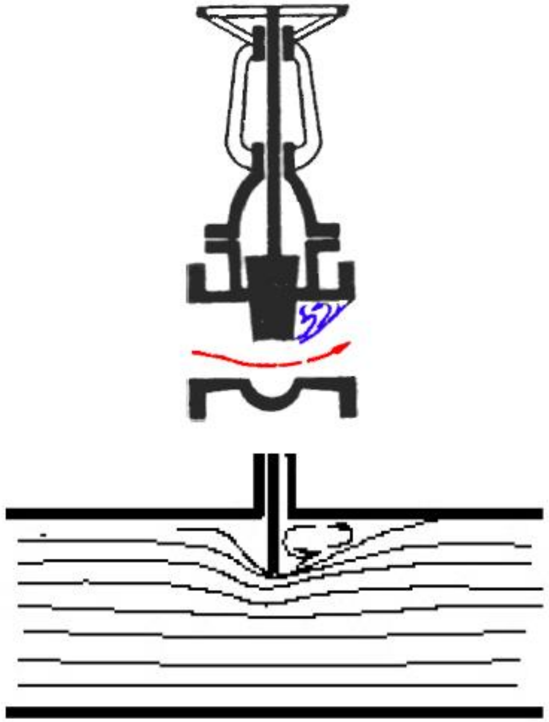
Armatury (ventily, šoupátka, kohouty a klapky) slouží k uzavření potrubí nebo k regulaci průtoku či tlaku. Hydraulický odpor je způsoben jednak třením, ale hlavně vířením. Deskou šoupátka, ventilu, klapky nebo tělesem kohoutu se zužuje průtočný průřez. Proud kapaliny nesleduje okrajovými proudnicemi přesně změny průřezu a dochází k odtržení proudnic a vniku vířivých oblastí.

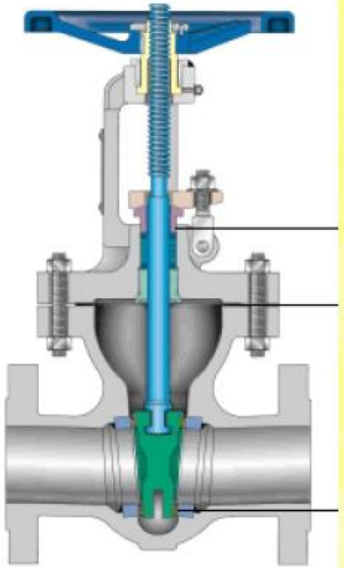
Při zcela otevřených uzávěrkách mají být ztráty co nejmenší. Při plném otevření mají nejmenší odpor šoupátka a kohouty.



Obecně závisí ζ na konstrukčním provedení armatury, na jejím poměrném otevření a na Re-čísle. Určuje se měřením.

Šoupata

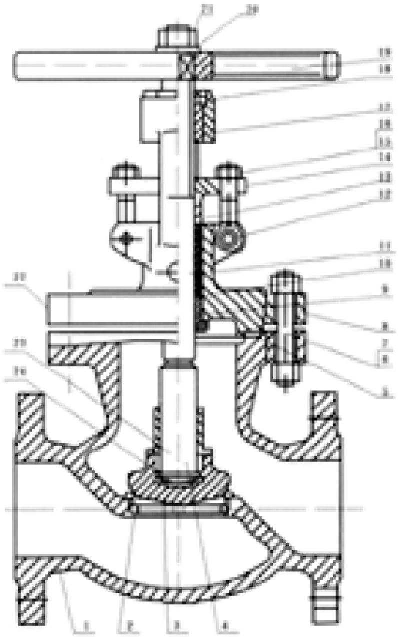


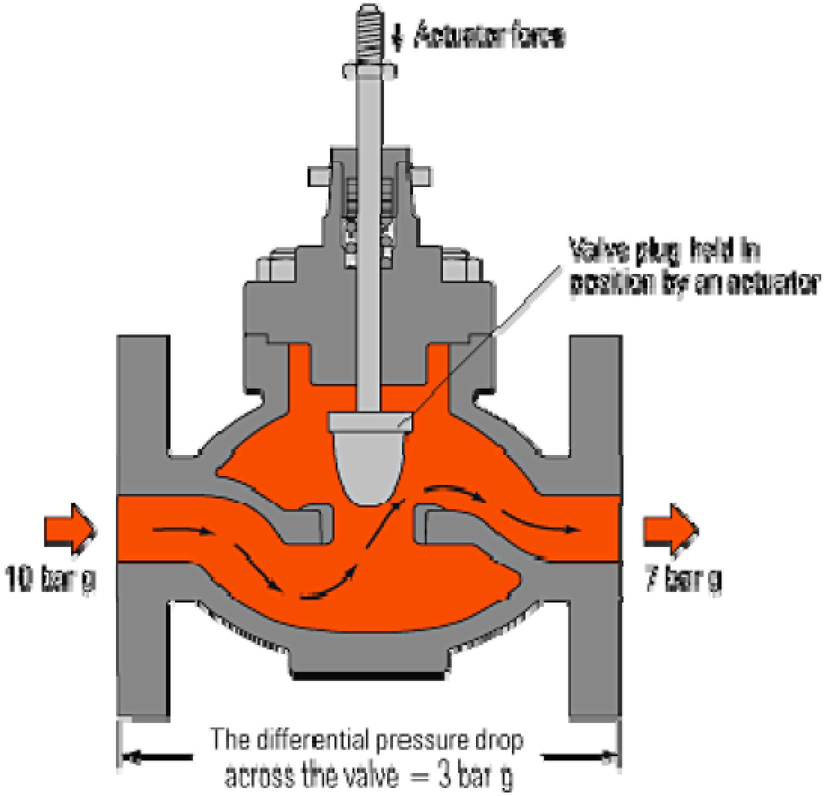


princip funkce – plochý prvek zajíždí do drážky v potrubí kolmé na směr potrubí

– prvek spojen s osičkou zakončenou šroubovým závitem ⇒ změna polohy

Ventily



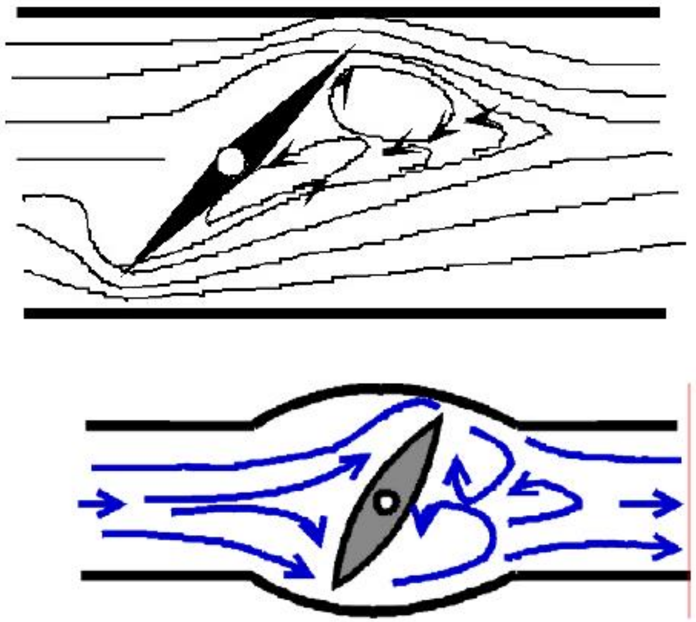


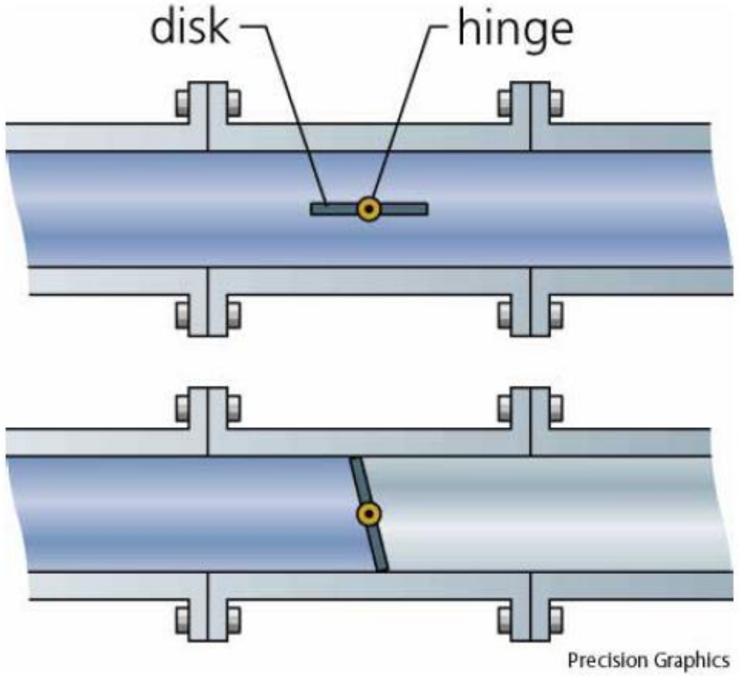
princip funkce – lokální změna směru proudění v komoře ventilu z podélného na svislý

– osově souměrný prvek dosedá na vodorovný kruhový otvor v komoře

– součinitel místní ztráty $\xi_{uz} \neq 0$ i při plném otevření

Klapky





princip funkce:

– kruhový plochý (čočkový) prvek s osou otáčení kolmou na směr proudění

– uzávěr plně otevřený v případě rovnoběžné polohy čočky se směrem proudění

Reynoldsovo číslo

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

$$Re_{krit} = 2320$$

$$Re \leq Re_{krit} \rightarrow laminární\ proudění$$

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

$$Re > Re_{krit} \rightarrow turbulentní\ proudění$$

Hladké potrubí:

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}}$$

Drsné potrubí:

$$\lambda = 0{,}1 \cdot \left(\frac{100}{Re} + \frac{k}{d}\right)^{0{,}25}$$

Hydraulický průměr

$$d_h = 4 \cdot \frac{plocha}{obvod} = 4 \cdot \frac{S}{o}$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

$$e_z = g \cdot h_z = g \cdot \Delta h = g \cdot (h_1 - h_2)$$

$$e_z = \frac{p_z}{\rho} \rightarrow p_z = e_z \cdot \rho$$

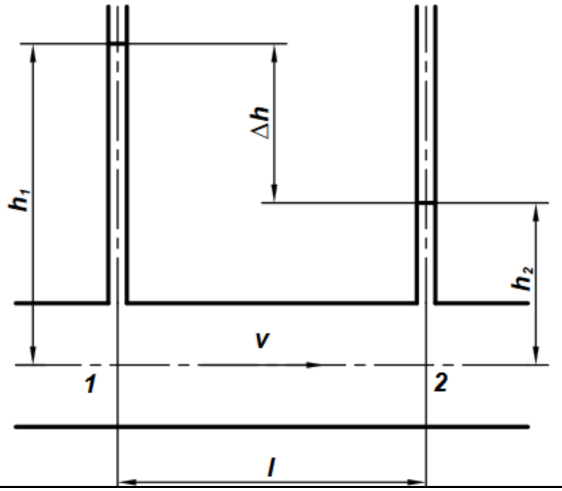
Příklad 8.2.1

Ve vodorovném potrubí stálého průřezu d byla ve dvou průřezech vzdálených o délku l změřena pomocí piezometrických trubic diference tlakové energie, tj. výšky h_1, h_2, a dále byla změřena rychlost v proudícího oleje o kinematické viskozitě ν a hustotě ρ. Určete měrnou ztrátovou energii e_z, tlakovou ztrátu p_z a Reynoldsovo číslo Re.

Zadáno:

l =	5 m
d =	0.1 m
v =	2 m.s^{-1}
h_1 =	0.45 m
h_2 =	0.2 m
ν =	0.00017 m^{2}s^{-1}
ρ =	890 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
e_z = ?	J.kg^{-1}	2.4525
p_z = ?	Pa	2 182.73
Re = ?		1 176.471



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \leq 2320 \rightarrow \text{laminární proudění}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

$$e_z = g \cdot h_z = \boxed{\frac{p_z}{\rho} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_s^2}{2}}$$

$$l = \frac{p_z}{\rho} \cdot \frac{2 \cdot d}{\lambda \cdot v_s^2}$$

$$p_z = p_1 - p_2 = p_1 - 0$$

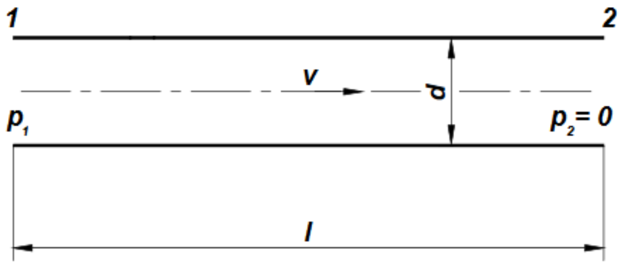
Příklad 11.1.2

Do jaké vzdálenosti l se dopraví nafta vodorovným kruhovým potrubím o průměru d, máme-li k dispozici na pokrytí zrát třením po délce tlak p_1 a střední rychlost proudění nafty je v_s. Je dána kinematická viskozita ropy ν a její hustota ρ.

Zadáno:

d =	250 mm	
p_1 =	600000 Pa rel.tl	
v_s =	3 m.s^{-1}	
ρ =	890 kg.m^{-3}	
ν =	0.0005 m^{2}s^{-1}	

Vypočtěte:		Výsledky:
Re = ?		1 500.000
λ = ?		0.042667
l = ?	m	877.802



Řešení:

$$\mathrm{Re} = \frac{v_s d}{\nu}, \quad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

$$p_1 = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_s^2}{2} \rho \Rightarrow l = \frac{2 p_1 d}{\lambda v_s^2 \rho}$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \leq 2320 \rightarrow \text{turbulentní proudění}$$

Hladké potrubí:

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}}$$

$$p_z = p_1 - p_2 = p_1 - 0$$

$$\frac{p_z}{\rho} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \rightarrow p_z = p_1 = \rho \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2}$$

(relativní tlak)

Drsné potrubí:

$$\lambda = 0{,}1 \cdot \left(\frac{100}{Re} + \frac{k}{d}\right)^{0{,}25}$$

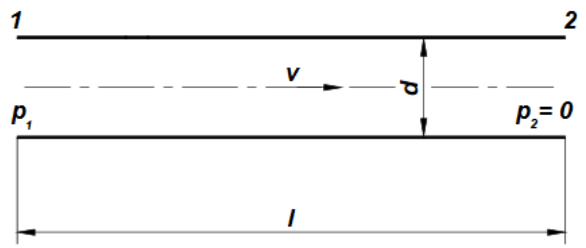
$$p_z = p_1 - p_2 = p_1 - 0$$

$$\frac{p_z}{\rho} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \rightarrow p_z = p_1 = \rho \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2}$$

(relativní tlak)

Příklad 11.1.5

Ve vodorovném potrubí délky l a průměru d proudí voda střední rychlostí v. Stanovte tlak na počátku potrubí p_1, jestliže jeho konec ústí do ovzduší. Výpočet proveďte pro potrubí hydraulicky hladké a pro drsné potrubí, je-li hodnota absolutní drsnosti k.



Zadáno:

v =	0.6 m.s^{-1}
d =	0.10 m
l =	150 m
ν =	10^{-6} m^{2}s^{-1}
k =	0.1 mm
ρ =	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
Re = ?		60 000.000
Hladké potrubí		
λ = ?		0.020
p_1 = ?	Pa rel.tl.	5 400.0
Drsné potrubí		
λ = ?		0.023
p_1 = ?	Pa rel.tl.	6 210.0

Řešení:

Hodnota Re čísla odpovídá turbulentnímu proudění. Neuvažujeme-li drsnost, můžeme pro výpočet λ použít vztah podle Blásia, určený pro hydraulicky hladká potrubí. Drsnost potrubí zvyšuje tlakové ztráty. Pro výpočet λ lze použít vztah např. dle Altšula.

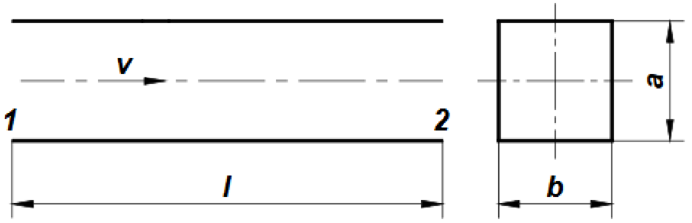
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Příklad 11.1.9

Jaké proudění nastane v potrubí obdélníkového průřezu při střední rychlosti vzduchu v ? Vypočtěte hydraulický průměr d_h , Reynoldsovo číslo Re a objemový průtok Q_v. Určete součinitel tření λ a ztrátovou výšku h_z pro jednotkovou délku kanálu.

Zadáno:

a =	0.05 m
b =	0.2 m
l =	2 m
v =	14 m.s^{-1}
ν =	2E-05 m^2.s^{-1}



Vypočtěte:		Výsledky:
d_h = ?	m	0.080
Re = ?		56 000.00
λ = ?		0.021
h_z = ?	m	2.622
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.140

Hydraulický průměr

$$d_h = 4 \cdot \frac{plocha}{obvod} = 4 \cdot \frac{S}{o} = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2 \cdot (a+b)}$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \leq 2320 \rightarrow \text{turbulentní proudění}$$

Hladké potrubí:

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}}$$

$$e_z = \frac{p_z}{\rho} = g \cdot h_z = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \rightarrow h_z = \frac{\lambda}{g} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2}$$

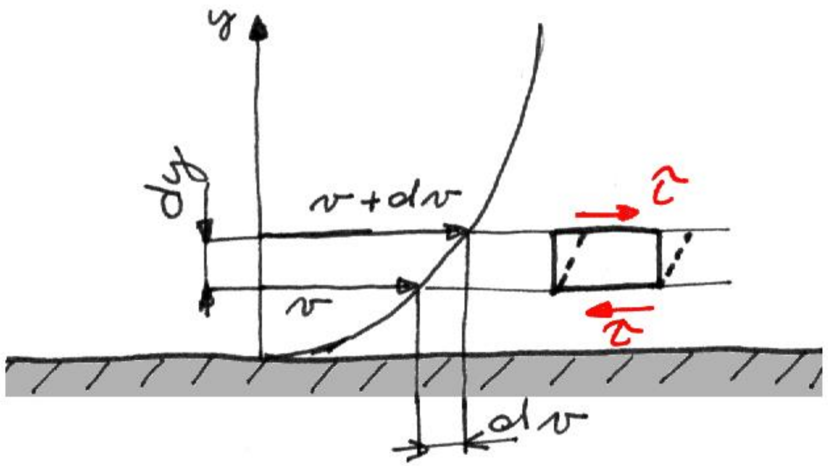
$$Q_v = S \cdot v = a \cdot b \cdot v$$

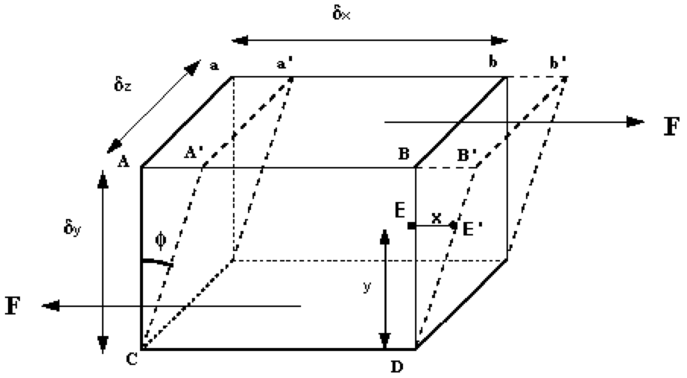
Navier Stokesova rovnice - podmínka rovnováhy sil při proudění skutečné kapaliny

Vyjadřuje vztah, kdy **setrvačná síla je rovna součtu hmotnostní, tlakové a třecí síly**:

$$\mathbf{F}_o + \mathbf{F}_p + \boxed{\mathbf{F}_t} = \mathbf{F}_s$$

$$\mathbf{F}_t = \tau S = \eta \frac{dv}{dy} S$$





Tečné napětí je příčinou úhlové deformace elementárního objemu.

Navier Stokesova rovnice

V podmínce rovnováhy sil se musí objevit nový člen, vyjadřující třecí sílu.
Pro nestlačitelnou kapalinu dostaneme:

Zapsáno vektorově:

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \boxed{\nu \Delta \vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\,.grad\right)\vec{v}$$

Tato rovnice se od Eulerovy rovnice pro ideální tekutinu liší posledním členem na levé straně.

Zrychlení potřebné na překonání vazkého tření tekutiny.

kde Δ je tzv. Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Navierovy-Stokesovy rovnice patří mezi parciální diferenciální rovnice nelineární a nejsou obecně řešitelné. Analytické řešení je dostupné pro jednodušší případy laminárního proudění. V současné době i složité případy laminárního proudění jsou řešitelné numerickými metodami např. metodou konečných objemů (metoda sítí).

Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu

Všechny síly, a tedy i **třecí síla** , při posunutí po dráze konají práci. Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu musí tedy na rozdíl od rovnice pro ideální kapalinu obsahovat další člen, který představuje práci třecích sil na jednotku hmotnosti proudící tekutiny,

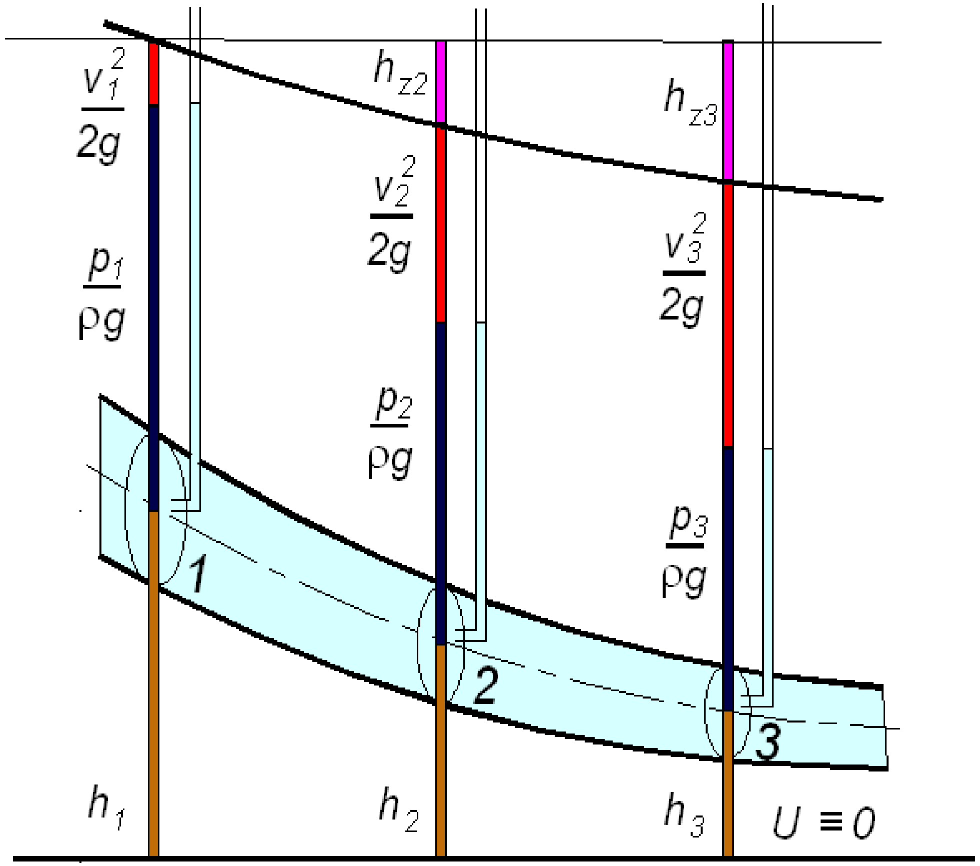
$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U + \int_l \nu \Delta \mathbf{v} \cdot dl = konst,$$

kde $\boxed{\int_l \nu . \Delta \mathbf{v} . dl = e_z}$

$\boxed{\mathbf{e_z}}$ je rozptýlená (disipovaná) měrná energie, nebo též měrná ztrátová energie spotřebovaná na překonání hydraulických odporů

$$e_z = gh_z = \varsigma \frac{v^2}{2} = \frac{p_z}{\rho}$$

Grafické znázornění BR pro skutečnou tekutinu



ztrátová výška

rychlostní výška

tlaková výška

polohová výška

Pro dva průřezy

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 + \boxed{h_z}$$

Měrná ztrátová energie zahrnuje součet všech hydraulických ztrát na úseku *l* mezi průřezy 1-2, a přičte se na té straně rovnice, která platí pro průřez proudové trubice ve směru proudění vzdálenější.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

$$v = v_2 = konst.$$

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot h = \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \frac{v^2}{2} + \cancel{g \cdot h_0} + e_z$$

$$g \cdot h = \frac{v^2}{2} + e_z$$

$$e_z = \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) = \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l_1 + l_2}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \right)$$

$$g \cdot h = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l_1 + l_2}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \right)$$

$$2 \cdot g \cdot h = v^2 \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{l_1 + l_2}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \right)$$

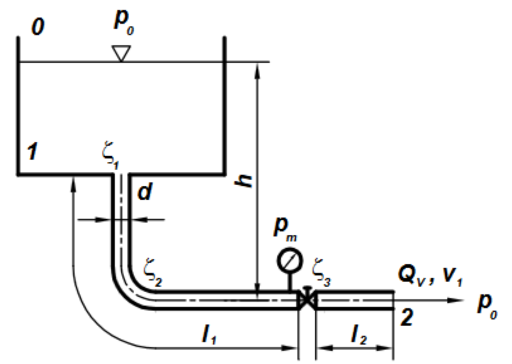
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1 + \lambda \cdot \frac{l_1 + l_2}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}}$$

Příklad 11.3.2

Stanovte rychlost vody a průtok v potrubí o délkách l_1 a l_2 a průměru d. Výška hladiny vody v nádrži je h. Spočítejte relativní tlak p_m naměřený na manometru před ventilem. Určete rychlostní součinitel φ a teoretickou výtokovou rychlost v_t. Určete ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní ztráty. Ztrátové součinitele na vtoku jsou ζ_1, v koleni ζ_2 a ve ventilu ζ_3 a součinitel tření je λ.

Zadáno:

h =	2 m
d =	0.05 m
l_1 =	1.5 m
l_2 =	0.3 m
λ =	0.0203
ζ_1 =	1
ζ_2 =	3
ζ_3 =	6
ρ =	1000 kg.m^{-3}



Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	1.829
v_t = ?	m.s^{-1}	6.264
φ = ?		0.29199
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.00359
l_e = ?	m	24.631
p_m = ?	Pa	10 238.27

Řešení:

Uvažujeme ustálené proudění potrubím se zadanými parametry. Bernoulliho rovnice pro hladinu a výtokový průřez (0-2) má po dosazení za odpory třením a místní tvar:

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot h = \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \frac{v^2}{2} + \cancel{g \cdot h_0}$$

$$g \cdot h = \frac{v^2}{2} \rightarrow v_t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$\varphi = \frac{v}{v_t}$$

$$Q_v = S \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v$$

$$l_e = \frac{\sum \zeta \cdot d}{\lambda} = \frac{(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \cdot d}{\lambda}$$

0-1

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot h = \frac{p_m}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \cancel{g \cdot h_0} + e_z$$

$$g \cdot h = \frac{p_m}{\rho} + \frac{v^2}{2} + e_z$$

$$e_z = \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l_1}{d} + \zeta_1 + \zeta_2\right)$$

$$g \cdot h = \frac{p_m}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l_1}{d} + \zeta_1 + \zeta_2\right)$$

$$p_m = \rho \cdot g \cdot h + \rho \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{l_1}{d} + \zeta_1 + \zeta_2\right)$$

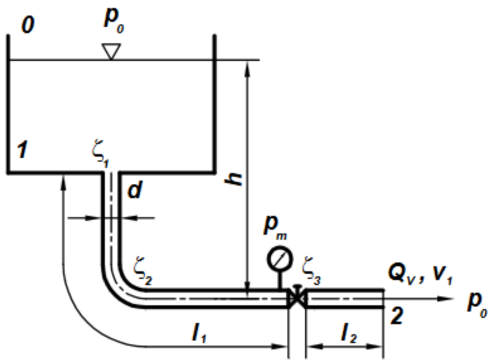
(relativní tlak)

Příklad 11.3.2

Stanovte rychlost vody a průtok v potrubí o délkách l_1 a l_2 a průměru d. Výška hladiny vody v nádrži je h. Spočítejte relativní tlak p_m naměřený na manometru před ventilem. Určete rychlostní součinitel φ a teoretickou výtokovou rychlost v_t. Určete ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní ztráty. Ztrátové součinitele na vtoku jsou ζ_1, v koleni ζ_2 a ve ventilu ζ_3 a součinitel tření je λ.

<u>Zadáno:</u>

h =	2 m
d =	0.05 m
l_1 =	1.5 m
l_2 =	0.3 m
λ =	0.0203
ζ_1 =	1
ζ_2 =	3
ζ_3 =	6
ρ =	1000 kg.m^{-3}



Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	1.829
v_t = ?	m.s^{-1}	6.264
φ = ?		0.29199
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.00359
l_e = ?	m	24.631
p_m = ?	Pa	10 238.27

<u>Řešení:</u>

Uvažujeme ustálené proudění potrubím se zadanými parametry. Bernoulliho rovnice pro hladinu a výtokový průřez (0-2) má po dosazení za odpory třením a místní tvar:

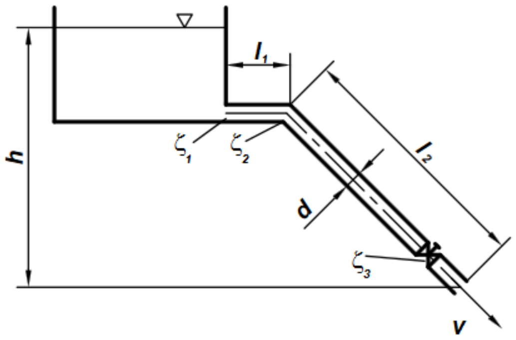
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Příklad 11.3.3

Určete ztrátový součinitel ventilu ζ_3, jestliže je znám průměr potrubí d, délky l_1 a l_2, výška hladiny h, rychlost proudění v, součinitel tření λ, ztrátový součinitel při výtoku ζ_1 a ztrátový součinitel kolena ζ_2. Vypočtěte rychlostní součinitel φ a výtok Q_v. Určete ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní ztráty.

<u>Zadáno:</u>

$d =$	100 mm
$l_1 =$	50 m
$l_2 =$	50 m
$h =$	29 m
$v =$	3.09 m.s^{-1}
$\lambda =$	0.035
$\zeta_1 =$	0.5
$\zeta_2 =$	0



Vypočtěte:		Výsledky:
$\zeta_3 = ?$		23.091
$l_e = ?$	m	67.403
$v_t = ?$	m.s^{-1}	23.853
$\varphi = ?$		0.12954
$Q_v = ?$	m^3.s^{-1}	0.02427

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot h = \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \frac{v^2}{2} + \cancel{g \cdot h_0} + e_z$$

$$g \cdot h = \frac{v^2}{2} + e_z$$

$$e_z = \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta\right) = \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l_1 + l_2}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3\right)$$

$$g \cdot h = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l_1 + l_2}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3\right)$$

$$2 \cdot g \cdot h = v^2 \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{l_1 + l_2}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3\right)$$

$$\zeta_3 = \frac{2 \cdot g \cdot h}{v^2} - 1 - \lambda \cdot \frac{l_1 + l_2}{d} - \zeta_1 - \zeta_2$$

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} + g \cdot h = \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + \frac{v^2}{2} + \cancel{g \cdot h_0}$$

$$g \cdot h = \frac{v^2}{2} \rightarrow v_t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$l_e = \frac{\sum \zeta \cdot d}{\lambda} = \frac{(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \cdot d}{\lambda} \qquad Q_v = S \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v \qquad \varphi = \frac{v}{v_t}$$

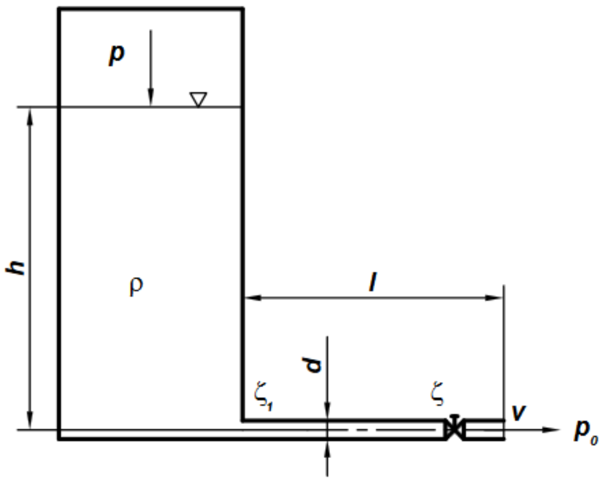
Příklad 11.3.4

K nádrži s hladinou ve výšce h a o tlaku p je připojeno potrubí o *délce* l a průměru d. Součinitel tření v potrubí je λ a ztrátový součinitel na vtoku do potrubí je ζ_1. Kapalina proudí rychlostí v. Určete velikost ztrátového součinitele ventilu ζ, teoretickou výtokovou rychlost v_t, rychlostní součinitel φ, průtok Q_v.

Zadáno:

l =	500 m
d =	0.1 m
v =	2 m.s^{-1}
h =	5 m
p =	300000 Pa
λ =	0.001
ζ_1 =	0.8
ρ =	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
v_t = ?	m.s^{-1}	26.422
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.01571
φ = ?		0.07569
ζ = ?		167.751



$$\frac{p}{\rho}+\cancel{\frac{v_0^2}{2}}+g\cdot h=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\cancel{g\cdot h_0}+e_z$$

$$\frac{p}{\rho}+g\cdot h=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+e_z$$

$$e_z=\frac{v^2}{2}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{l}{d}+\sum\zeta\right)=\frac{v^2}{2}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{l}{d}+\zeta_1+\zeta\right)$$

$$\frac{p}{\rho}+g\cdot h=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\frac{v^2}{2}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{l}{d}+\zeta_1+\zeta\right)$$

$$2\cdot\left(\frac{p-p_0}{\rho}+g\cdot h\right)=\mathrm{v}^2\cdot\left(1+\lambda\cdot\frac{l}{d}+\zeta_1+\zeta\right)$$

$$\zeta=\frac{2\cdot\left(\frac{p-p_0}{\rho}+g\cdot h\right)}{\mathrm{v}^2}-1-\lambda\cdot\frac{l}{d}+\zeta_1$$

$$\frac{p}{\rho}+\cancel{\frac{v_0^2}{2}}+g\cdot h=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\cancel{g\cdot h_0}$$

$$\frac{p}{\rho}+g\cdot h=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}\rightarrow v_t=\sqrt{2\cdot\left(\frac{p-p_0}{\rho}+g\cdot h\right)}$$

$$\varphi=\frac{v}{v_t}$$

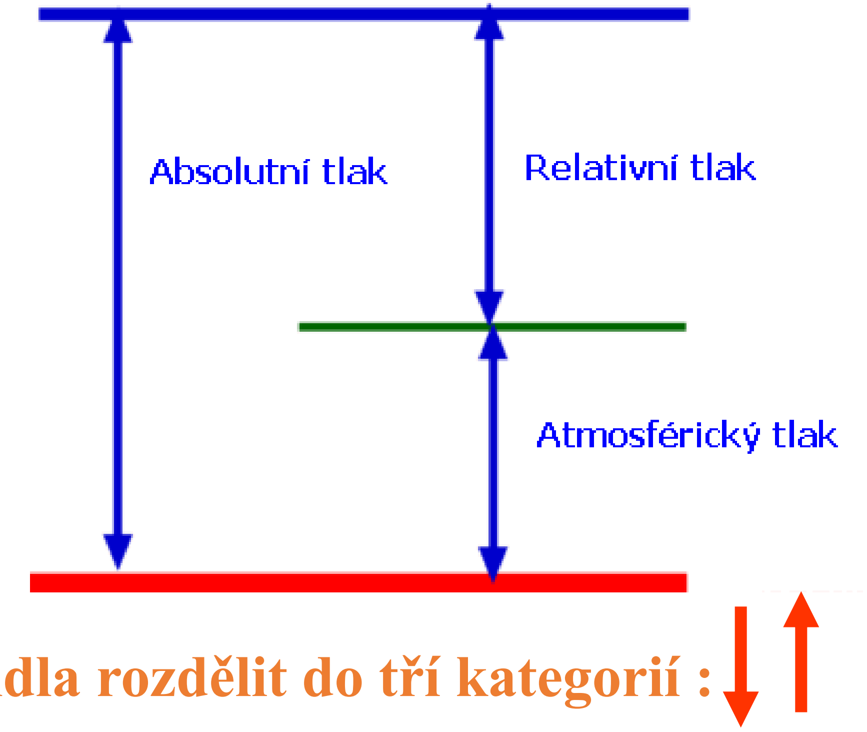
$$Q_v=S\cdot v=\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot v$$

Obsah

Měření tlaku

Podle druhu měřeného tlaku můžeme provést následující dělení :

- tlakoměry absolutního tlaku
- vakuometry (měřidlo absolutního tlaku menšího než atmosférický tlak)
- manometry (tlakoměry pro měření přetlaku, tedy relativního tlaku)
- diferenční tlakoměry (pro měření rozdílu dvou současně působících tlaků)
- barometry (měřidlo atmosférického tlaku)



Podle výstupního signálu můžeme měřidla rozdělit do tří kategorií :

- mechanické
- hydrostatické
- elektrické

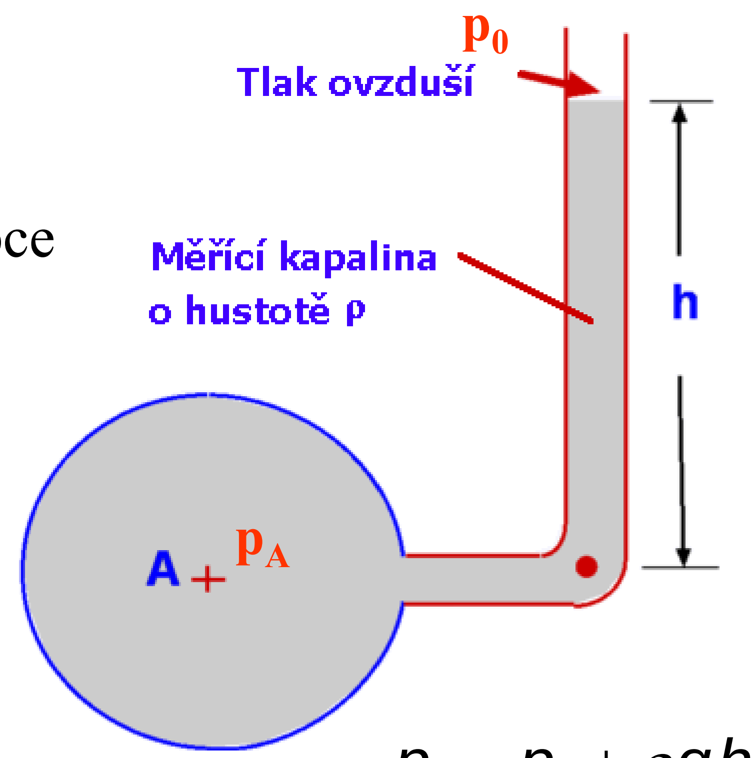
Absolutní tlak je vztažen k vakuu, zatímco tlak relativní k tlaku ovzduší.

Podle funkčního principu dělíme měřidla tlaku do následujících kategorií :

- kapalinové tlakoměry -měření tlaku se převádí na měření výšky (délky) sloupce kapaliny, tento údaj závisí na hustotě manometrické (měřicí) kapaliny. Jsou velmi přesné.
- pístové tlakoměry se silovým účinkem - měření tlaku se převádí na měření síly, jejíž účinky jsou vyvažovány např. závažím či pružinou.
- deformační tlakoměry - měřený tlak způsobuje pružnou deformaci tlakoměrného členu. Velikost deformace je úměrná hodnotě měřeného tlaku. Jsou to nejčastěji používané tlakoměry v průmyslu.
- elektrické tlakoměry - využívají principu tlakové závislosti některých elektrických veličin. Jedná se o moderní a perspektivní snímače doplněné vesměs moderními elektronickými vyhodnocovacími obvody.

Kapalinové tlakoměry

Jsou to nejjednodušší tlakoměry, které se používají především jako laboratorní pro velmi přesná měření malých a středních tlaků. Velikost tlaku je dána výškou sloupce kapaliny.



Piezometrická trubice je nejjednodušším měřícím zařízením. Tvoří ji vertikální trubice, která je připojena k nádobě (potrubí) ve které je měřen tlak, druhý konec je otevřen do tlaku ovzduší.

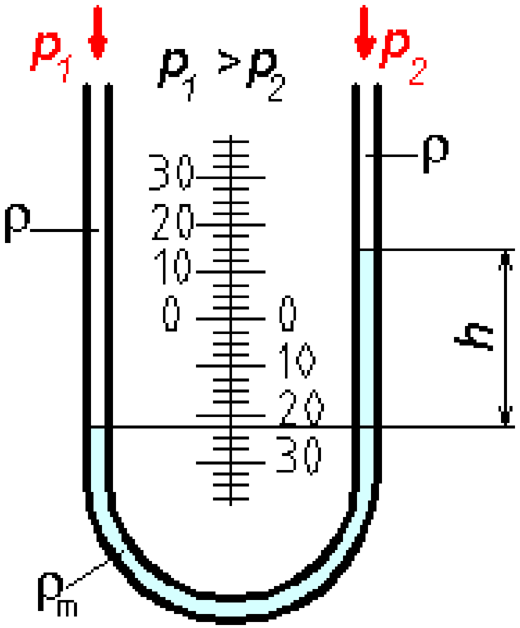
$$p_A = p_0 + \rho g h$$

Podle počtu kapalin na jednokapalinové nebo dvoukapalinové. U dvoukapalinových tlakoměrů se používají tlakové kapaliny, které se vzájemně nemísí a mají různou hustotu.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

U-trubice

Jsou to skleněné trubice tvaru *U* se dvěma svislými větvemi, které jsou naplněné tlakoměrnou kapalinou.

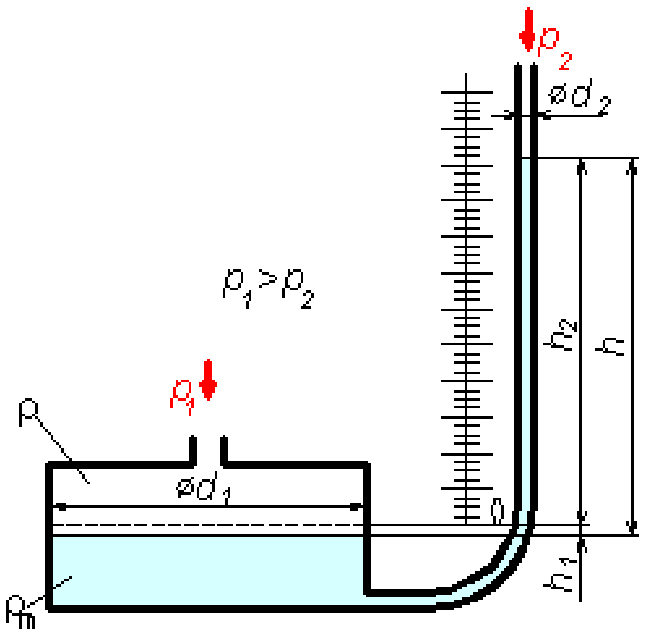


Jsou-li p_1 a p_2 dva současně působící rozdílné tlaky, pak jejich rozdíl je

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho) g h$$

Nádobkové tlakoměry

Jsou odvozeny z U-trubicových tlakoměrů. Jedno rameno tvoří nádobka, jejíž průměr je mnohem větší než průměr trubice, takže v něm hladina kolísá zcela nepatrně. Tlak se odečítá pouze na jedné stupnici.

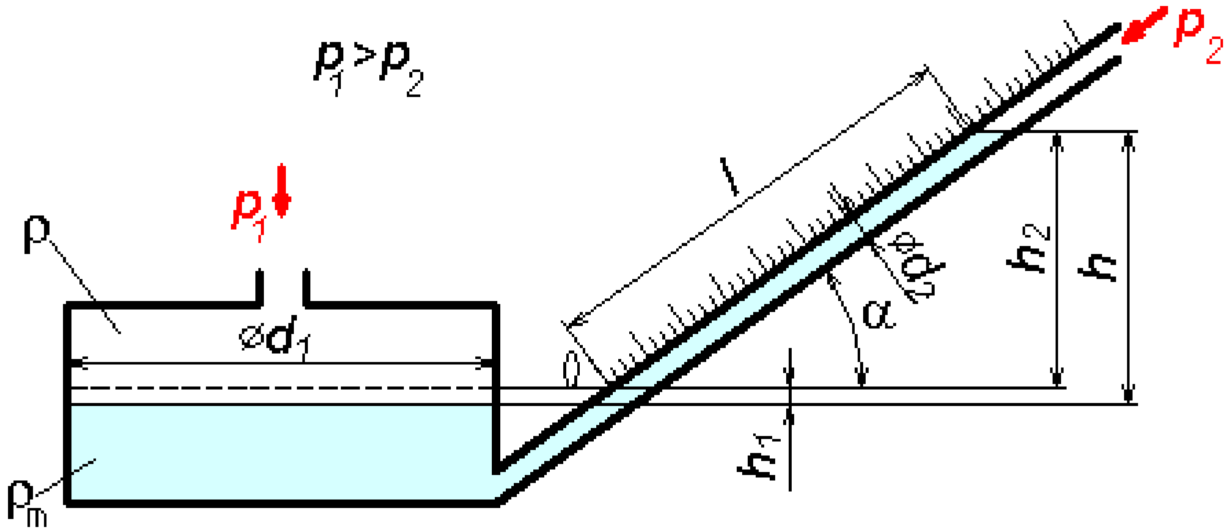


Jsou-li p_1 a p_2 dva současně působící rozdílné tlaky, pak jejich rozdíl je

$$\Delta p = p_2 - p_1 = (\rho_m - \rho) g (h_1 + h_2) = (\rho_m - \rho) g h_2 \left(\frac{S_2}{S_1} + 1 \right)$$

Kapalinové tlakoměry se sklopným ramenem

Je to v podstatě nádobkový tlakoměr, jehož trubice je skloněna pod určitým úhlem. Používají se pro měření velmi malých přetlaků nebo malé tlakové diference.



Jsou-li p_1 a p_2 dva současně působící rozdílné tlaky, pak jejich rozdíl je

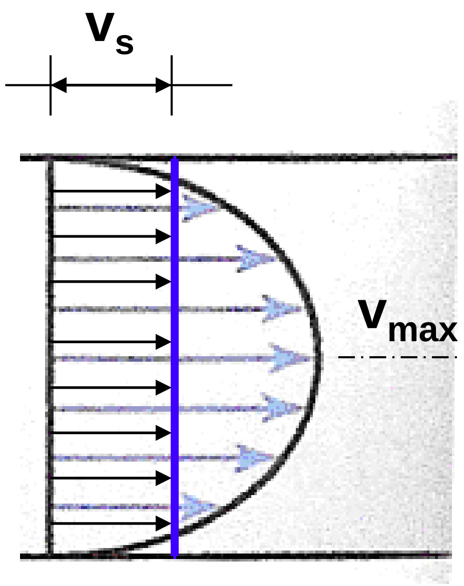
$$\Delta p = p_2 - p_1 = g(\rho_m - \rho)(h_1 + h_2) = g(\rho_m - \rho)\left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right)h_2 = g(\rho_m - \rho)\left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) l \sin\alpha$$

Měření rychlosti v potrubí

Měření rychlostí je jednou ze základních úloh experimentu v mechanice tekutin. V praxi se uplatňují metody nepřímé, kdy rychlost je měřena pomocí tlaku, jak vyplývá z Bernoulliho rovnice:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = konst$$

Protože ztráty třením jsou na malé vzdálenosti odběrových míst zanedbatelné, může se při měření tlaků a rychlosti v potrubí aplikovat Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu.



Při jednorozměrném proudění např. v uzavřených kanálech nebo potrubích skutečná tekutina na stěně lpí a rychlost na stěně nulová. V ostatním průřezu je rychlost nerovnoměrně rozložena po průtočném průřezu.

Můžeme měřit rychlost v určitém místě proudu (místní, neboli lokální rychlost, např. v_{max}) nebo střední (průměrnou) rychlost po průřezu v_s.

Měření místní rychlosti

K měření místní rychlosti se může použít Pitotova nebo Prandtlova trubice. Bernoulliho rovnici lze pro vodorovné potrubí napsat ve tvaru:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=konst \Rightarrow p+\frac{1}{2}\rho v^2=konst=p_c \qquad t.j. \quad p_s+p_d=p_c$$

Statický tlak je měřen piezometrickou trubicí připojenou k otvoru ve stěně potrubí.

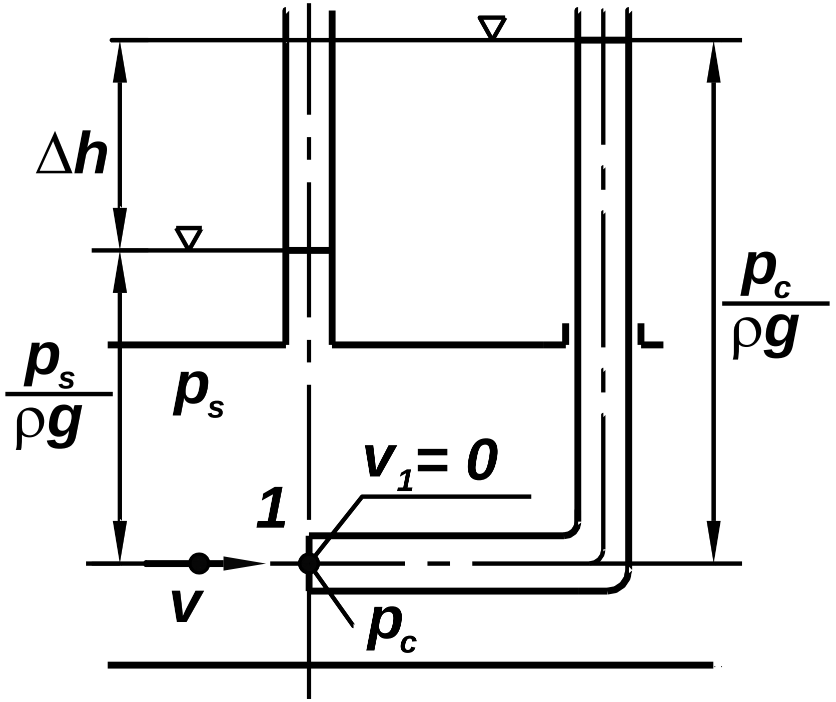
Pitotova trubice (zahnutá proti směru proudění) měří **celkový** tlak v určitém místě proudu.

$$p_s+p_d=p_c \Rightarrow p_d=p_c-p_s=\frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v=\sqrt{\frac{2(p_c-p_s)}{\rho}}=\sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}$$

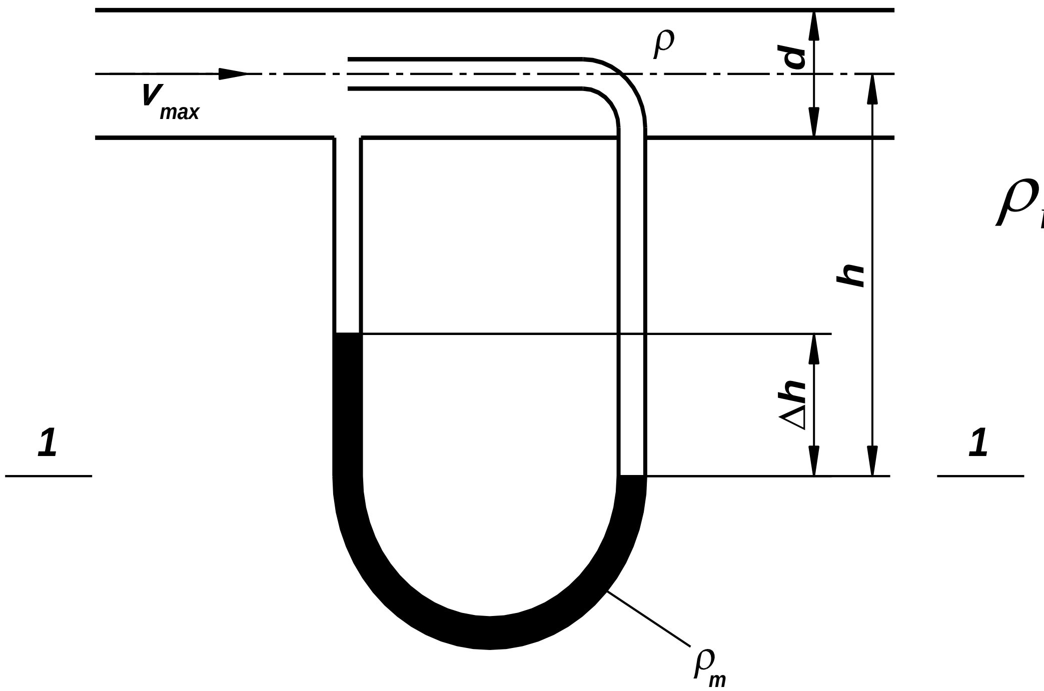
Měření místní rychlosti

Rozdíl celkového a statického je určen z rozdílu výšek hladin v připojených tlakoměrných trubicích



$$v = \sqrt{\frac{2\left(p_c - p_s\right)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 p_d}{\rho}} = \sqrt{2g\left(h_c - h_s\right)} = \sqrt{2g\Delta h}$$

V případě větších tlaků se dynamický tlak určí pomocí rozdílu hladin Δh odečteném na diferenciálním tlakoměru (U-trubice)



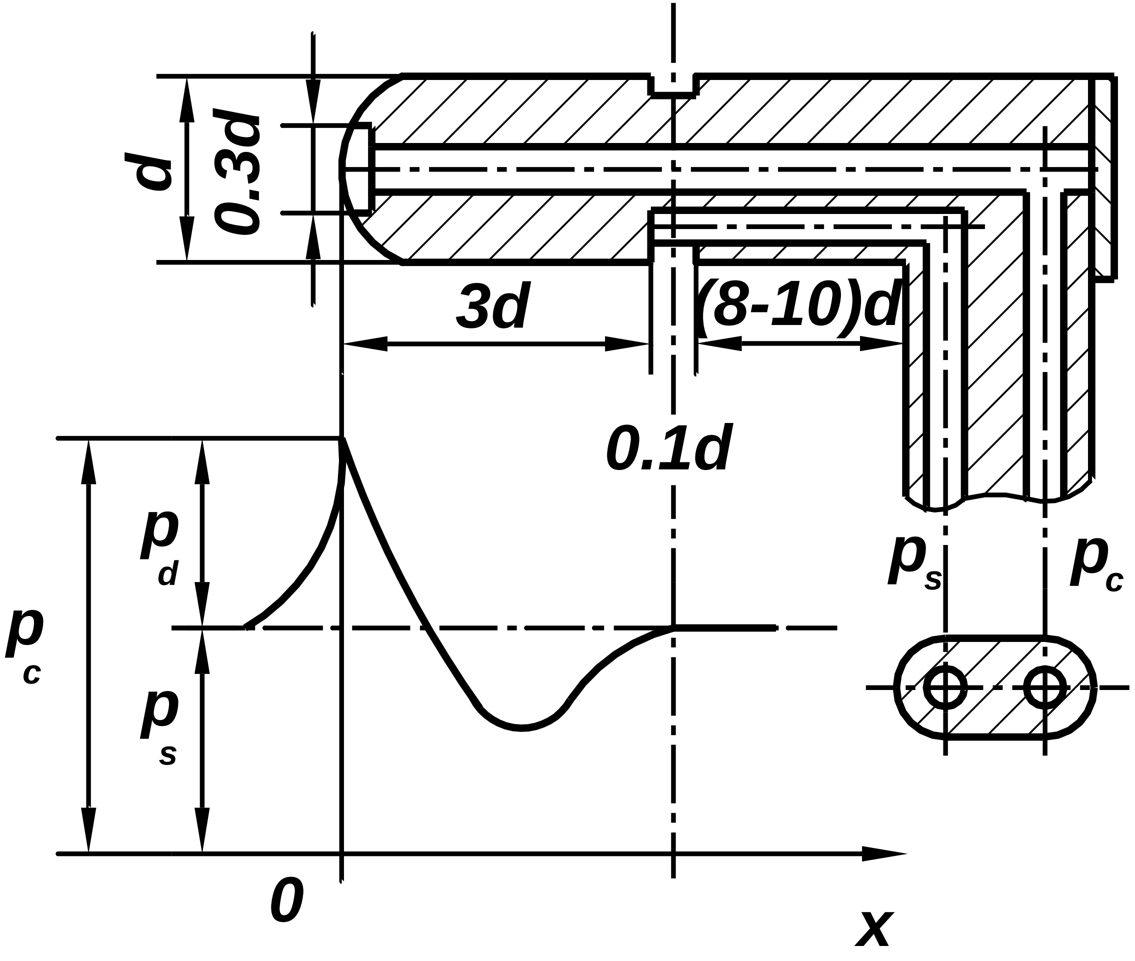
$$p_d = g\Delta h(\rho_m - \rho)$$

$\rho_m \rangle \rho$ je hustota měřící kapaliny.

$$v = \sqrt{\frac{2(p_c - p_s)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}} = \sqrt{\frac{2g\Delta h(\rho_m - \rho)}{\rho}} = K\sqrt{\Delta h}$$

Pitotova trubice- vzduchová trať

Prandtlova trubice



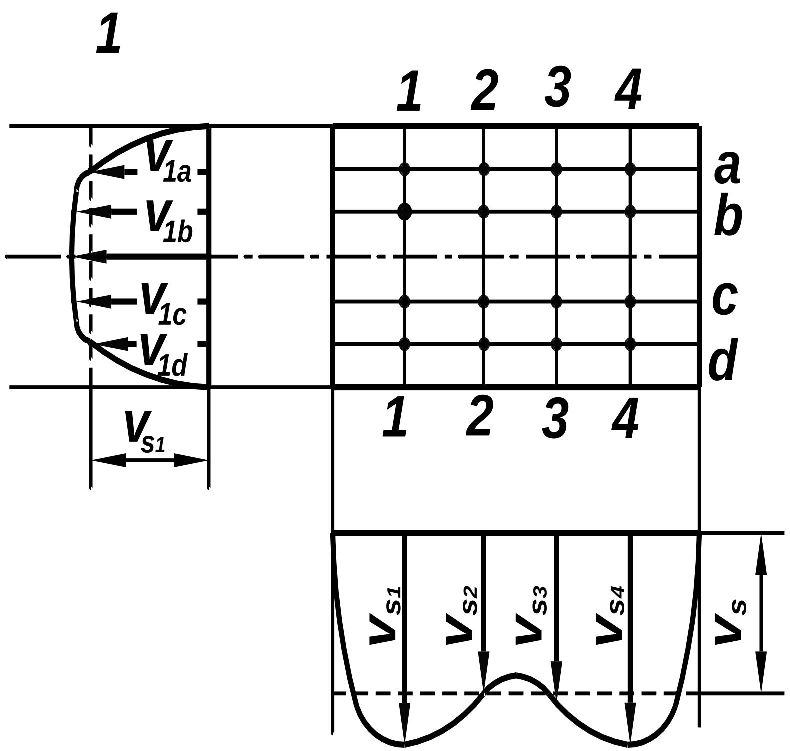
Prandtlova trubice je tvořena válcovým tělesem s půlkulovým ukončením.

V ose trubice je otvor pro odběr celkového tlaku , který je vyveden vnitřní trubicí. Statický tlak se snímá v drážce nebo otvoru na plášti vnější trubice a je vyveden druhou trubicí.

Odběr statického tlaku umístěn ve vzdálenosti rovnající se třem průměrům trubice od jejího ústí.

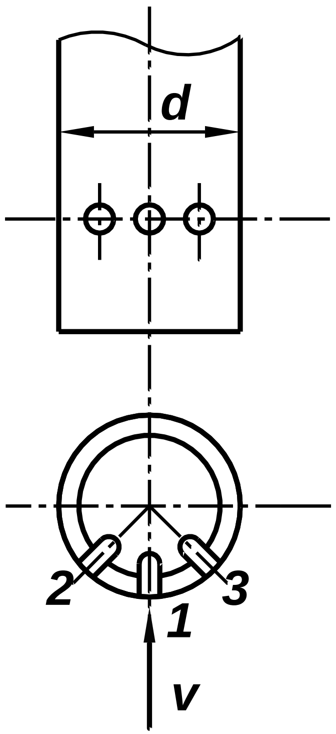
Vyšetření rychlostního profilu

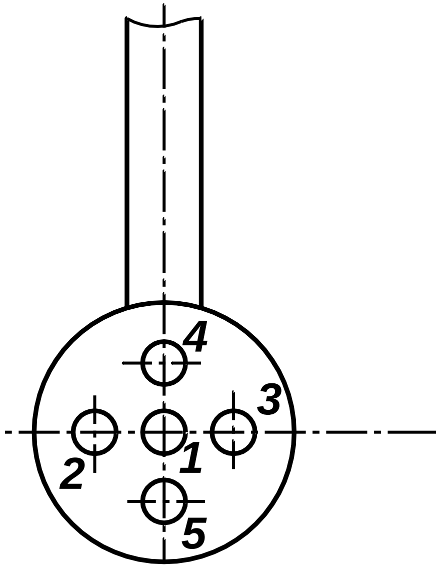
- Pitotovou, popř. Prandtlovou trubicí se určuje rychlost v místě, v němž je čelo trubice. Posouváním trubice se změří rychlosti, které jsou závislé na souřadnici.



$$v_s = \frac{1}{S}\int_S v\,ds$$

Při měření rychlosti u dvourozměrného proudění se používá válcová sonda, kulová sonda slouží k měření rychlosti prostor. proudu

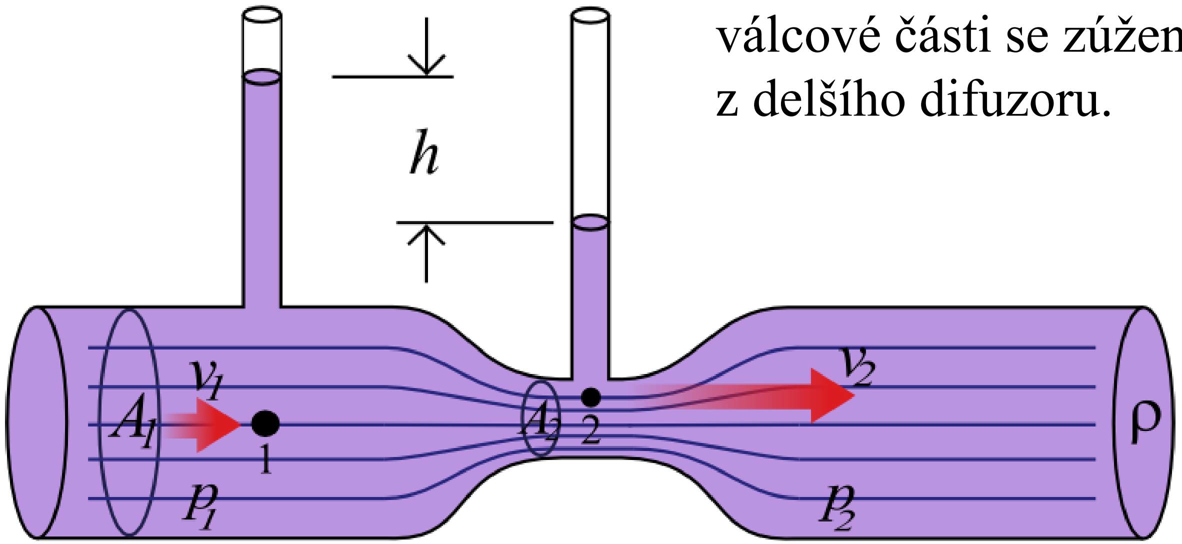




Měření střední rychlosti

Střední rychlost lze stanovit z tlakového rozdílu mezi dvěma průřezy, z nichž jeden je zúžen, jak je tomu u Venturiho trubice, clony nebo dýzy.

Venturiho trubice

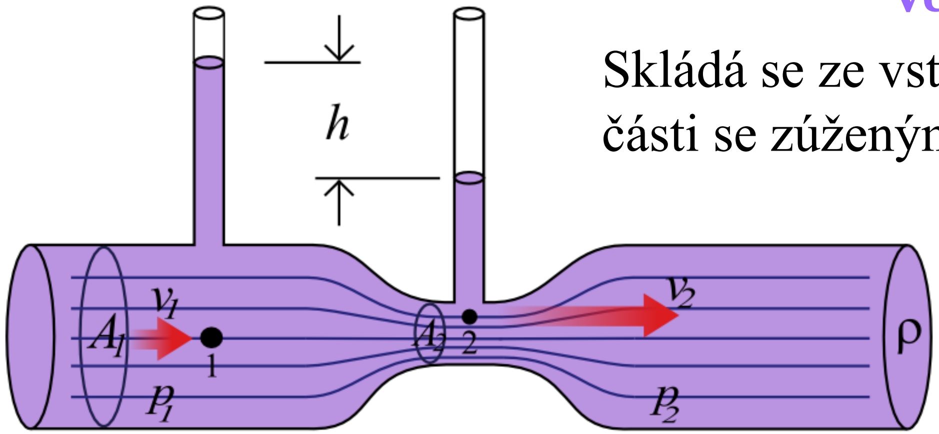


Skládá se ze vstupního konfuzoru, krátké válcové části se zúženým průřezem a z delšího difuzoru.

Oba měřené tlaky jsou statické. Zúžení průřezu způsobí zvýšení rychlosti a tím pokles statického tlaku.

Měření střední rychlosti

Střední rychlost lze stanovit z tlakového rozdílu mezi dvěma průřezy, z nichž jeden je zúžen, jak je tomu u Venturiho trubice, clony nebo dýzy.



Venturiho trubice

Skládá se ze vstupního konfuzoru, krátké válcové části se zúženým průřezem a z delšího difuzoru.

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}$$

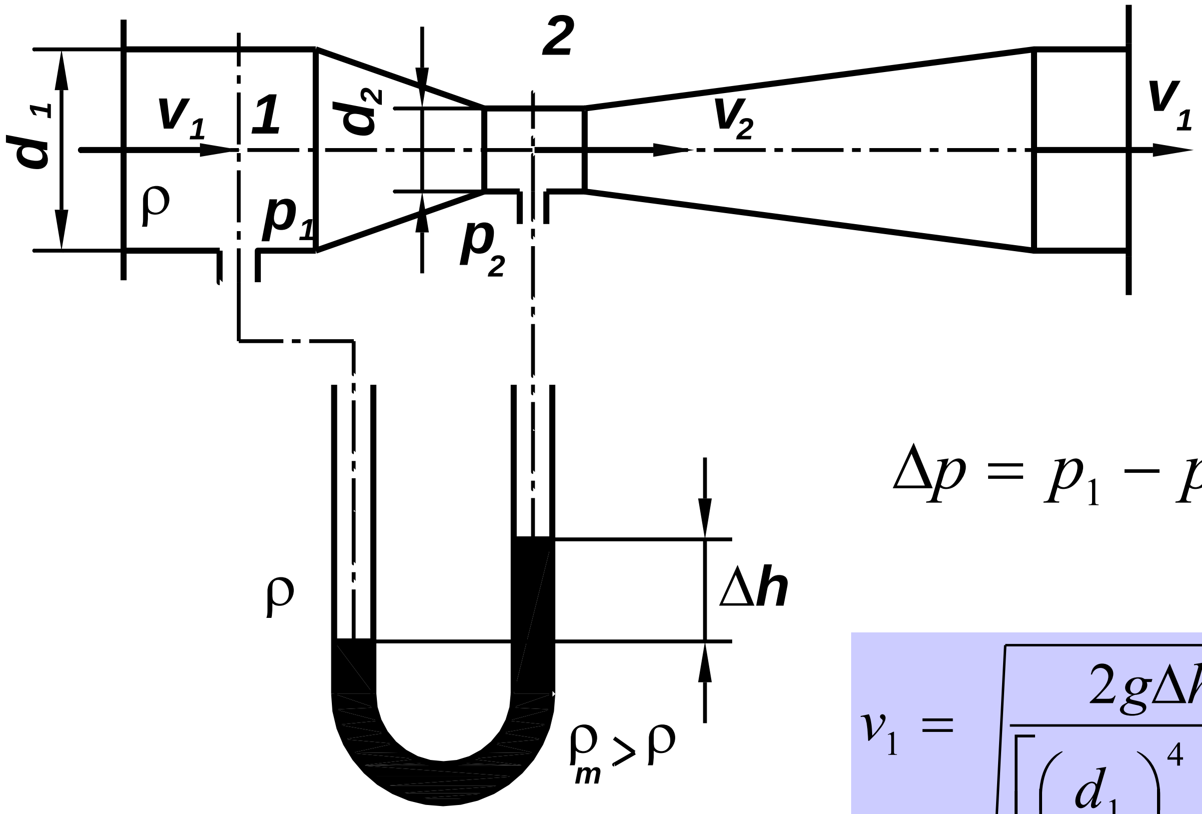
$$\frac{p_1}{\rho}-\frac{p_2}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}$$

$$v_1S_1=v_2S_2 \Rightarrow v_2=v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

Oba měřené tlaky jsou statické. Zúžení průřezu způsobí zvýšení rychlosti a tím pokles statického tlaku.

$$\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{v_1^2}{2}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-\frac{v_1^2}{2} \Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1\right]}}$$

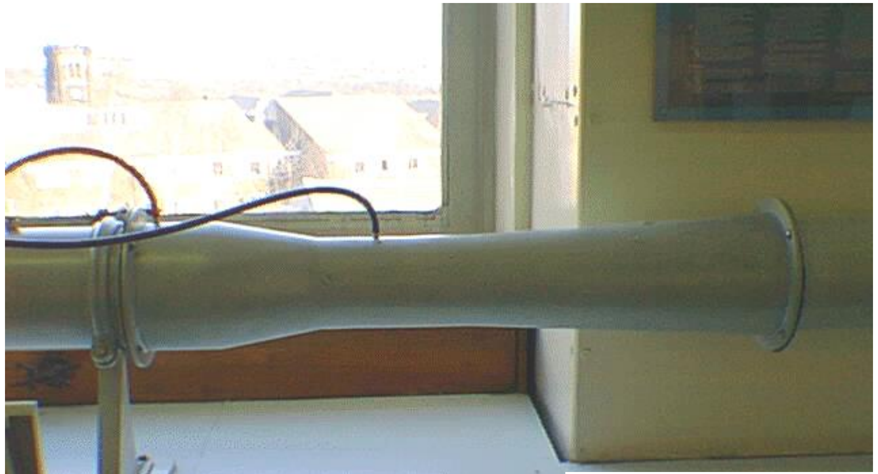
Tlakový rozdíl lze určit z rozdílu hladin v připojených tlakoměrných trubicích nebo s využitím diferenciálního manometru, takže

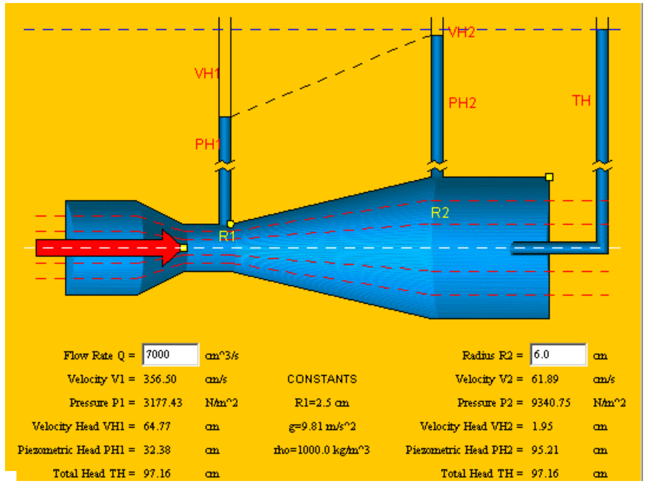


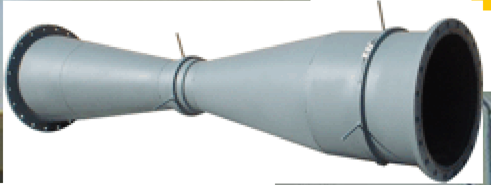
$$\Delta p = p_1 - p_2 = g\Delta h(\rho_m - \rho)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]}\frac{\rho_m - \rho}{\rho}} = K_v\sqrt{\Delta h}$$

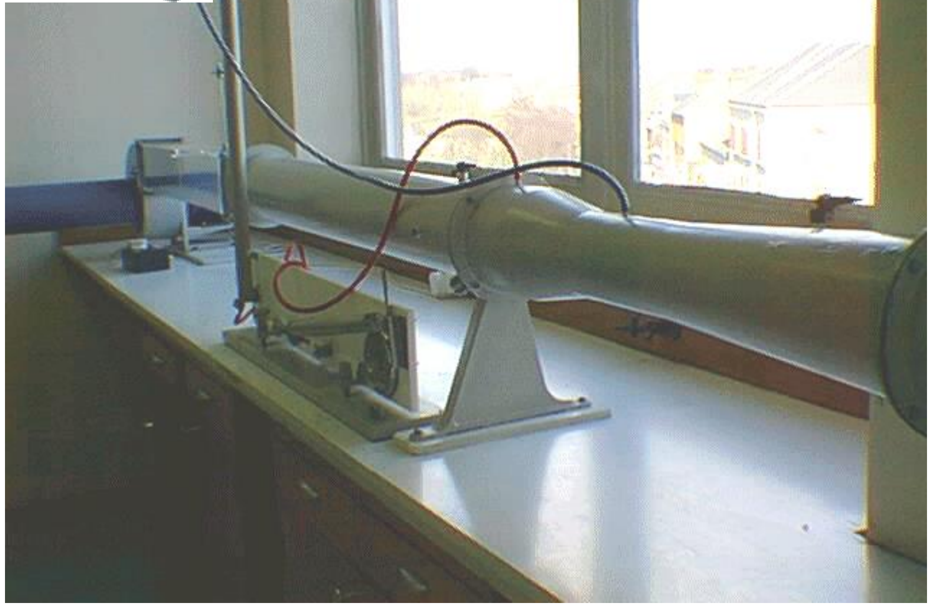
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ







Při průtoku skutečné tekutiny bude následkem hydraulických odporů skutečná rychlost menší. Tento vliv se zahrne v součinitelích . Praktické provedení Venturiho trubice se provádí podle ČSN ISO 5167-1, kde jsou uvedeny hodnoty součinitelů v závislosti na zúžení a velikosti Reynoldsova čísla Re.

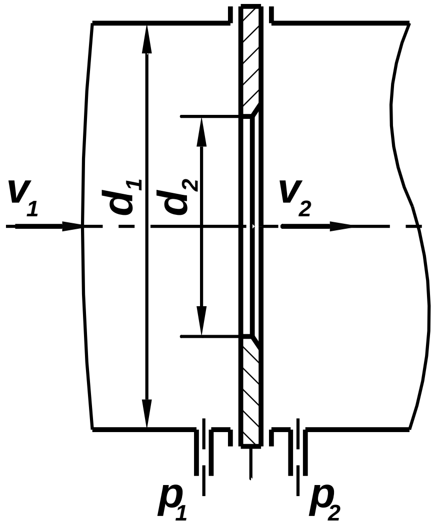


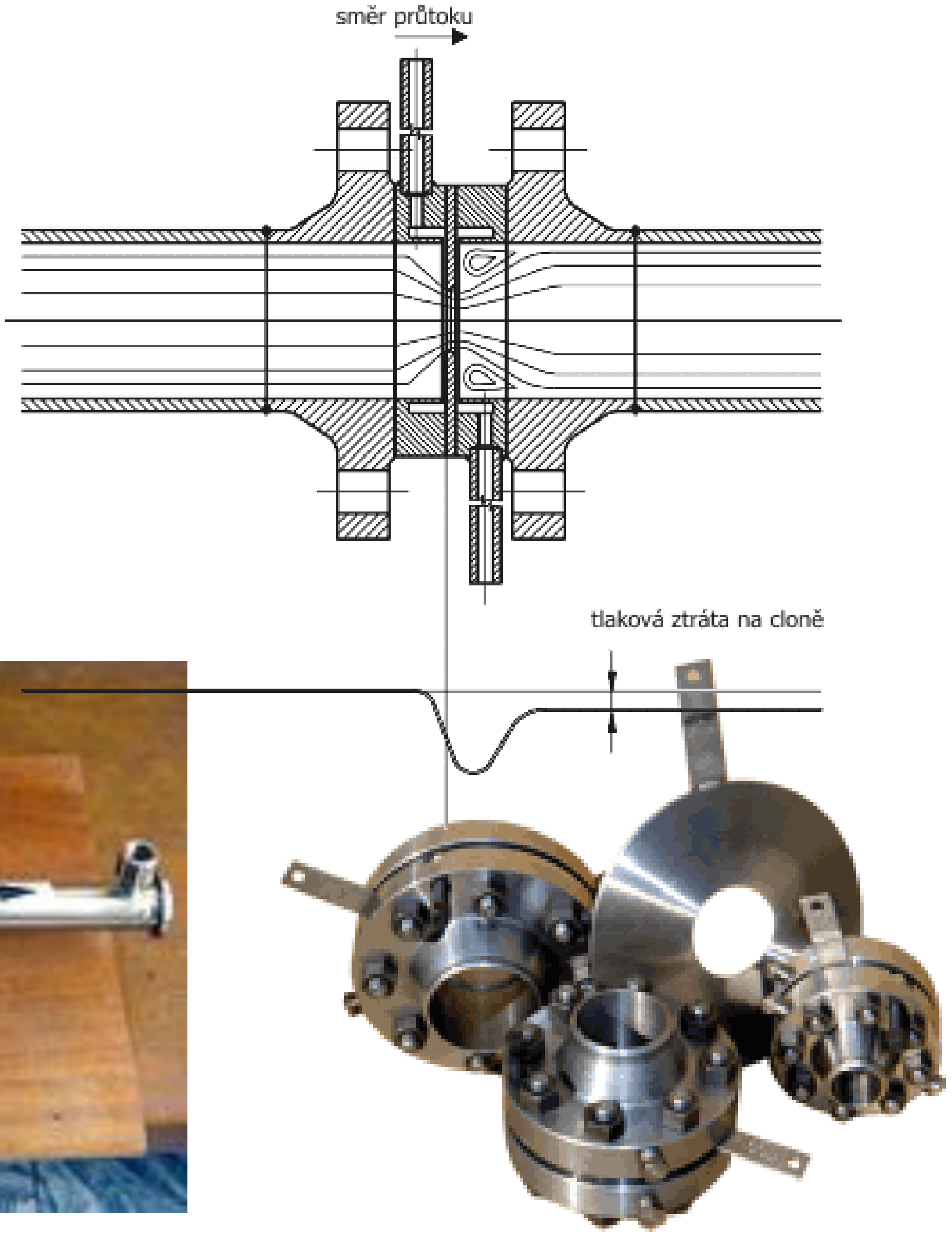
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Venturiho trubice DN 1200 mm

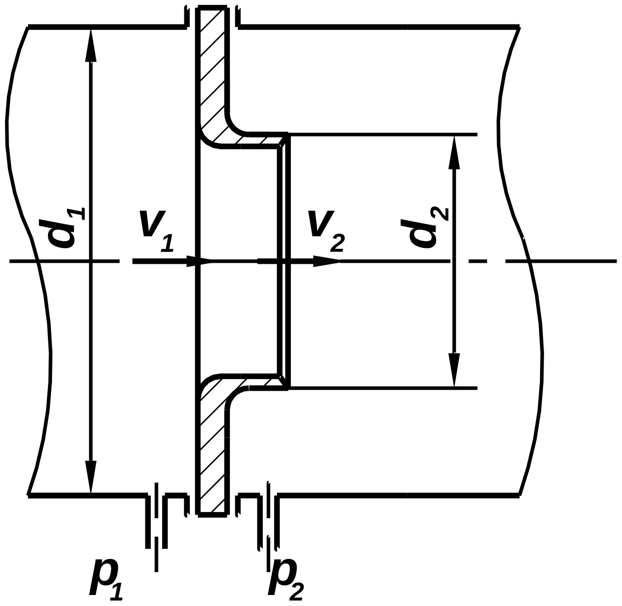
Vedle Venturiho trubice se častěji pro měření střední rychlosti nebo průtoku používá clona nebo dýza, jejichž podrobný výpočet uvádí ČSN ISO 5167-1

Clona





Dýza



Střední rychlost v otvoru clony nebo dýzy je dána obdobnou rovnicí jako u Venturiho trubice

$$\boxed{Q = \mu \cdot S_c \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}}$$

$$\mu = f(m, \mathrm{Re}), \quad kde \quad m = \frac{S_c}{S_p} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

μ je výtokový součinitel, který se stanoví měřením.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Obsah

Hydraulický výpočet potrubí

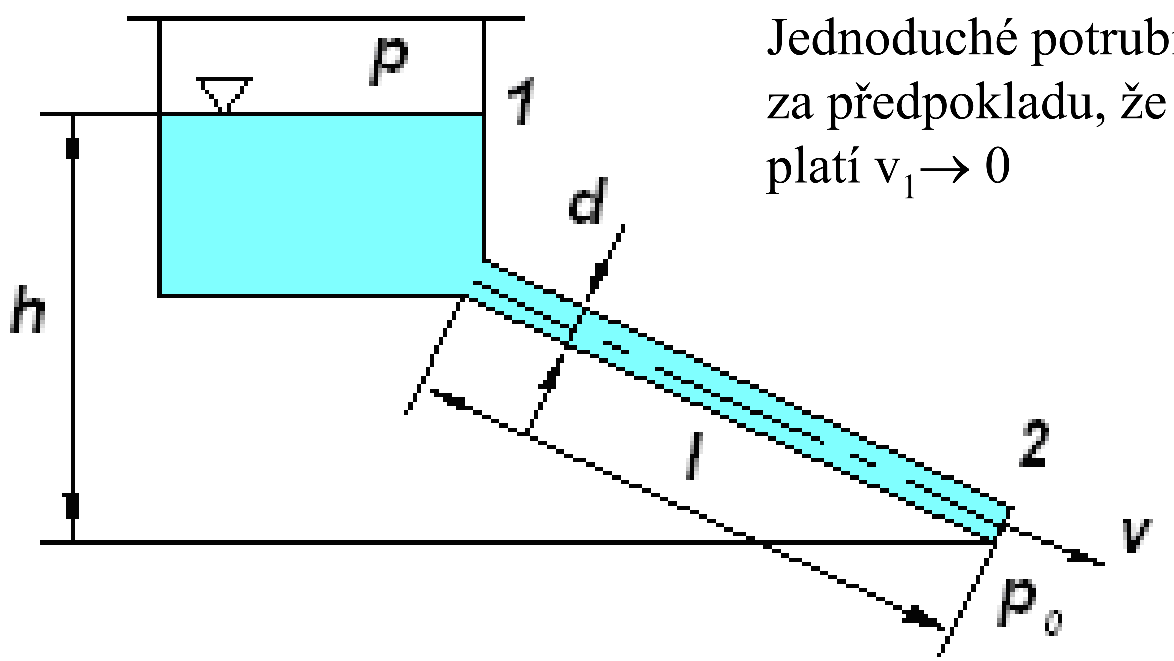
Hydraulický výpočet potrubí je založen na aplikaci Rovnice kontinuity, Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu a na určení hydraulických odporů, neboli hydraulických ztrát.

Potrubní systém :

- jednoduchý, tvořený jedním potrubím
- složený, sestávající z většího počtu potrubí, tvořících síť obsahující uzly a větve, případně okruhy

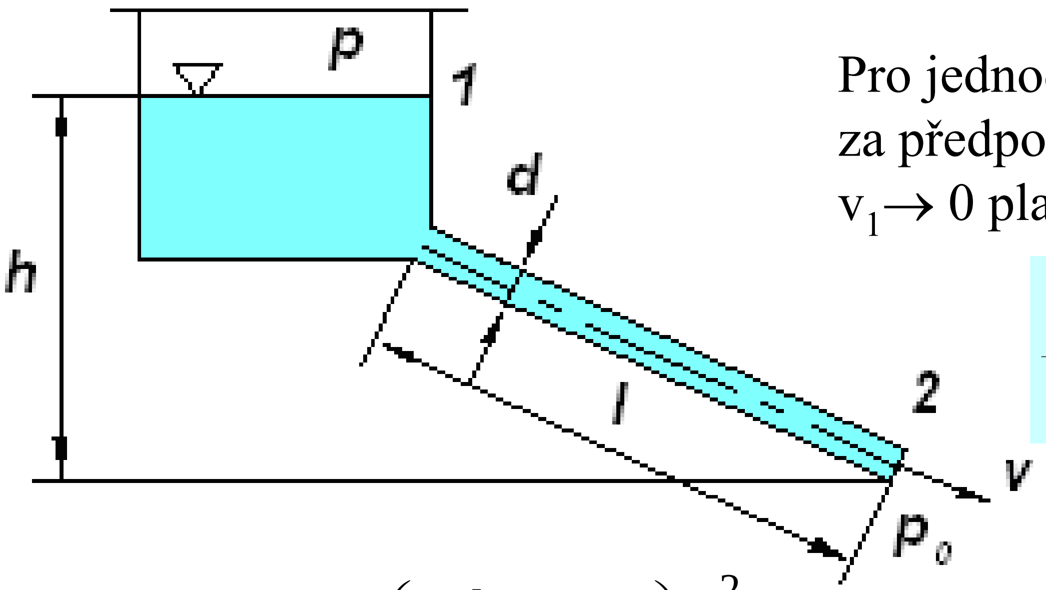
Jednoduché potrubí je po hydraulické stránce definováno průměrem d , délkou l, spádem h a rychlostí v nebo průtokem Qv . Současně jsou známy fyzikální vlastnosti tekutiny, třecí součinitel λ případně absolutní drsnost stěny potrubí k, a ztrátové součinitele všech místních ztrát ζ. Některá z daných veličin může být neznámou a určí se hydraulickým výpočtem.

Jednoduché potrubí s nádrží



Jednoduché potrubí (průřez 1 a 2), za předpokladu, že nádrž je rozměrná, tj. platí $v_1 \rightarrow 0$

Jednoduché potrubí s nádrží



Pro jednoduché potrubí (průřez 1 a 2) za předpokladu , že nádrž je rozměrná, tj. $v_1 \to 0$ platí Bernoulliho rovnice ve tvaru

$$\frac{p}{\rho} + 0 + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh_z$$

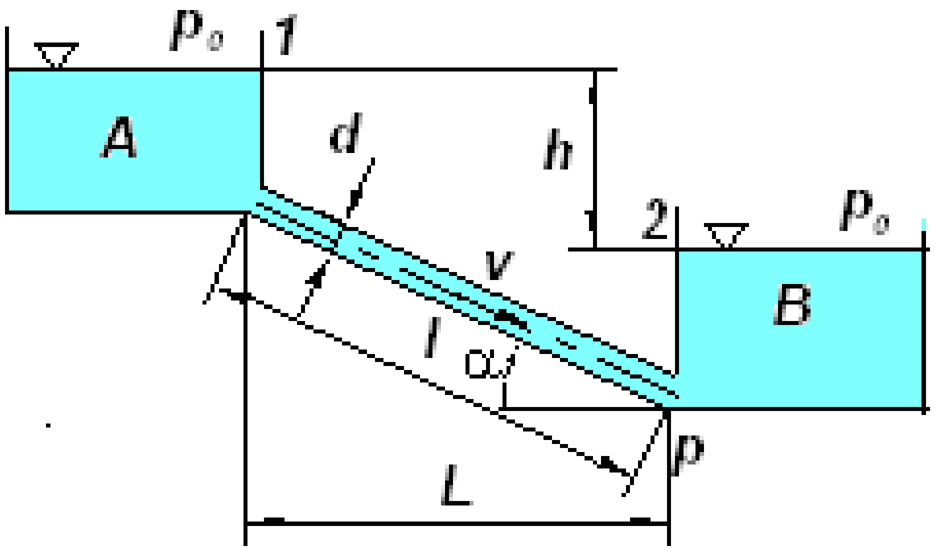
kde $$e_z = gh_z = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right)\frac{v^2}{2} = \left(\zeta_t + \sum \zeta\right)\frac{v^2}{2} = \zeta_c \frac{v^2}{2}$$

pak $$\frac{p}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right)\frac{v^2}{2}$$

a odtud $$v = \sqrt{\frac{2\left(\frac{p - p_0}{\rho} + gh\right)}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} = \sqrt{2\left(\frac{p - p_0}{\rho} + gh\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} = v_t \varphi$$

φ je rychlostní součinitel

Gravitační potrubí

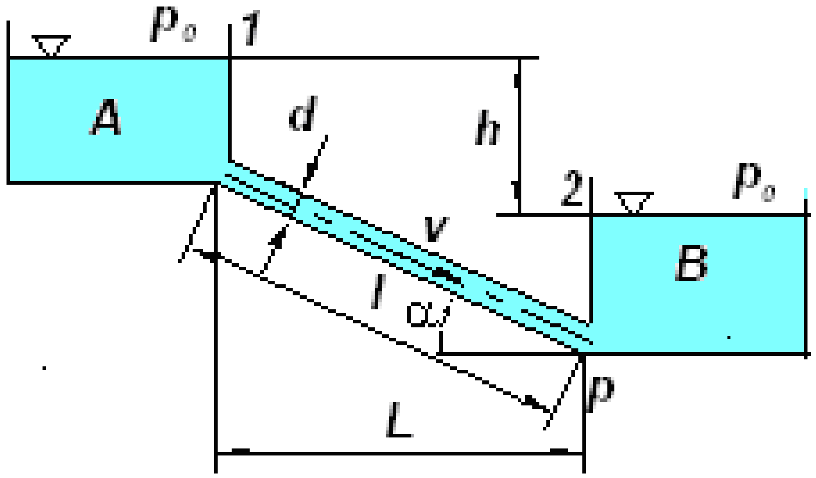


Gravitační potrubí spojuje dvě nádrže A, B se spádem h. Obě nádrže a gravitační potrubí tvoří proudovou trubici.

Potrubí se předpokládá dlouhé, a proto převládají hydraulické ztráty třením, ztráty místní, pokud jsou významné, lze nahradit ekvivalentní délkou potrubí. Rychlosti na hladinách jsou zanedbatelné, spád h se předpokládá konstantní.

Gravitační potrubí

Gravitační potrubí spojuje dvě nádrže A, B se spádem h. Potrubí se předpokládá dlouhé, a proto převládají hydraulické ztráty třením, ztráty místní, pokud jsou významné, lze nahradit ekvivalentní délkou potrubí. Rychlosti na hladinách jsou zanedbatelné, spád h se předpokládá konstantní.



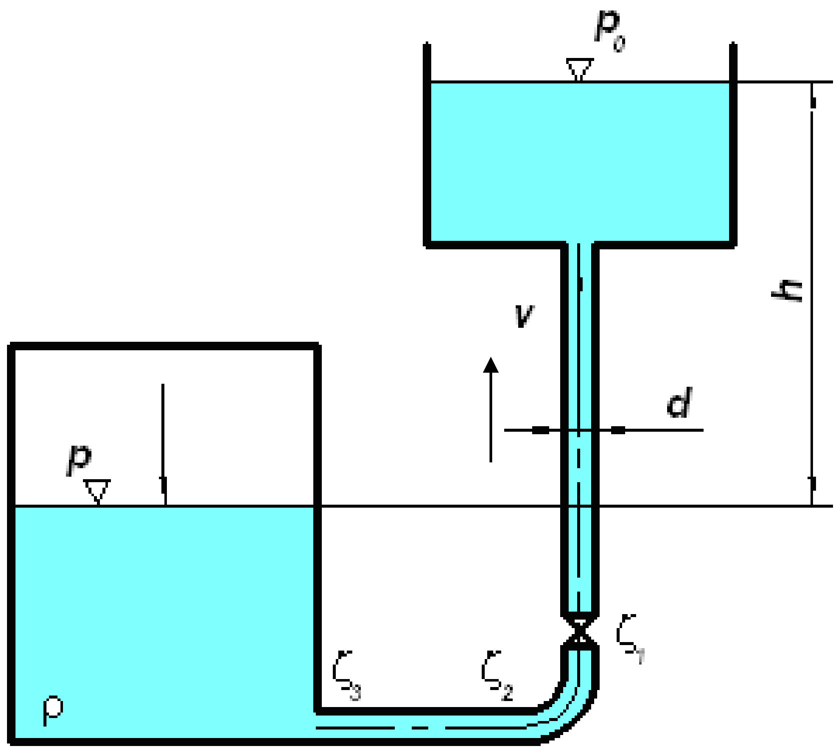
Obě nádrže a gravitační potrubí tvoří proudovou trubici, pro kterou můžeme napsat Bernoulliho rovnici definovanou pro dvě hladiny :

$$\frac{p_0}{\rho}+gh=\frac{p_0}{\rho}+gh_z \Rightarrow h=h_z=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

poměrný spád je určen poměrem $$i=\frac{h}{l}=\frac{\lambda}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{\lambda}{2gd}\left(\frac{4Q_v}{\pi d^2}\right)^2=\frac{8\lambda}{\pi^2 g}\frac{Q_v^2}{d^5}$$

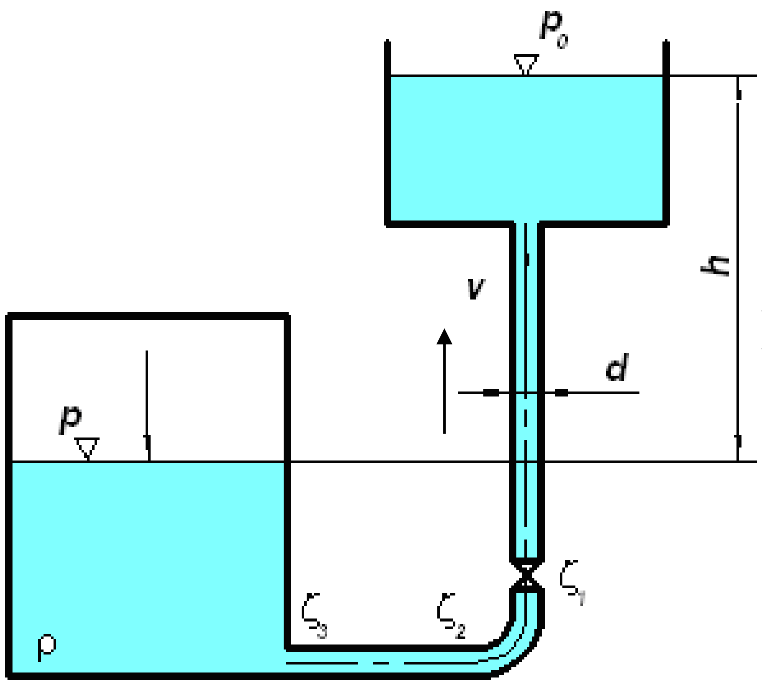
platí $i=\dfrac{h}{L}\doteq\dfrac{h}{l}$, neboť pro malé úhly α je $tg\alpha\doteq\sin\alpha\doteq\alpha$

Výtlačné potrubí



Potrubí spojuje dvě nádrže se spádem h . Tlak p na hladině ve spodní nádrži musí být tak velký, aby nastalo proudění ze spodní nádrže do horní.

Výtlačné potrubí



Potrubí spojuje dvě nádrže se spádem h . Tlak p na hladině ve spodní nádrži musí být tak velký, aby nastalo proudění ze spodní nádrže do horní.

Bernoulliho rov. definovaná pro dvě hladiny:

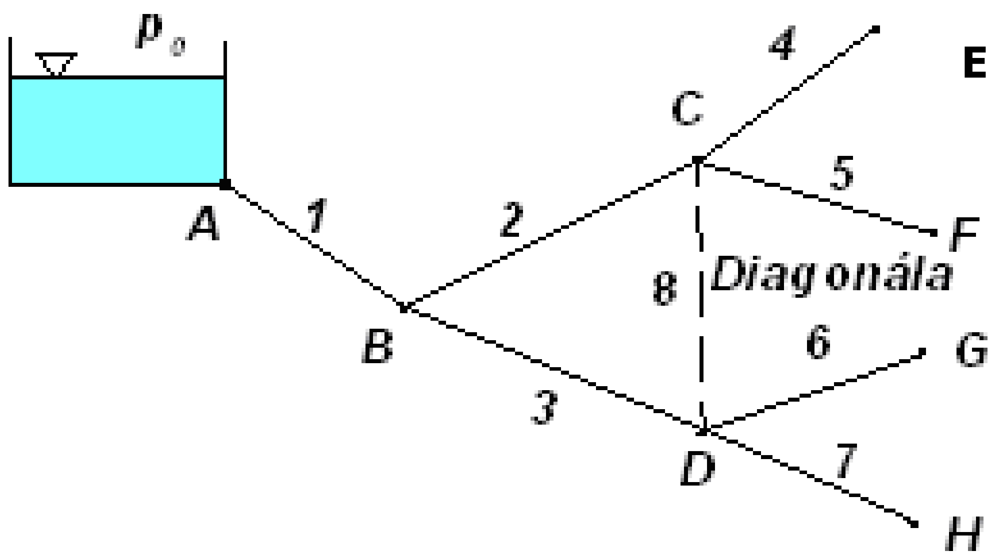
$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+gh+gh_z$$

$$p=p_0+\rho gh+\rho gh_z$$

$$kde \quad p_z=\rho gh_z=\rho\left(\lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta\right)\frac{v^2}{2}=\rho\zeta_c\frac{v^2}{2}$$

Řešení složitého potrubního systému

V technických aplikacích se užívá velmi často i potrubní složená – tzv. potrubní síť. Složená potrubí mohou být větvená nebo okružní. Okružní potrubí vznikne tak, že ve větvené síti se dva uzly spojí tzv. diagonálou. U potrubní sítě se předpokládá, že odběry budou pouze v uzlech sítě.



Pokud označíme počet větví i a počet uzlů j, pak počet okruhů k

$$k = i - j + 1$$

Je - li v síti uzavřený okruh, je nutno použít některou z metod pro řešení okruhových sítí, které jsou aplikací Kirchhoffových zákonů.

1. Pro každý uzel sítě musí platit rovnice kontinuity $\sum Q_{vi} = 0$

2. Pro každý okruh musí platit že součet tlakových diferencí v jednotlivých větvích postupně sčítaných v jednom smyslu je opět roven nule: $\sum \Delta p_i = 0$

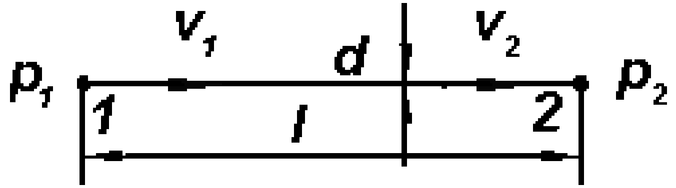
3. Vztah mezi tlakovou ztrátou Δp_i a průtokem Q_i v úseku

$$\Delta p_i = K_i |Q_{vi}| Q_{vi}$$

Charakteristika potrubí

Ztráty v potrubí závisí na rychlosti a tedy i průtoku. Vztah mezi ztrátovou výškou nebo tlakovou ztrátou a průtokem lze odvodit a také vynést graficky. Tato závislost je charakteristikou potrubí a má význam při grafickém řešení potrubí.

Uvažujeme vodorovné potrubí stálého průřezu:



Bernoulliho rovnice pro $v_1 = v_2$ má tvar

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + gh_z$$ a odtud tlaková výška $$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Po dosazení z rovnice kontinuity za rychlost pomocí průtoku $v = \dfrac{4Q_v}{\pi d^2}$

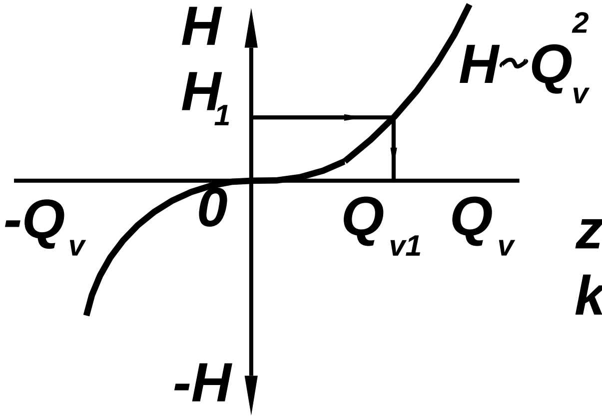
a za předpokladu vyvinutého turbulentního proudění

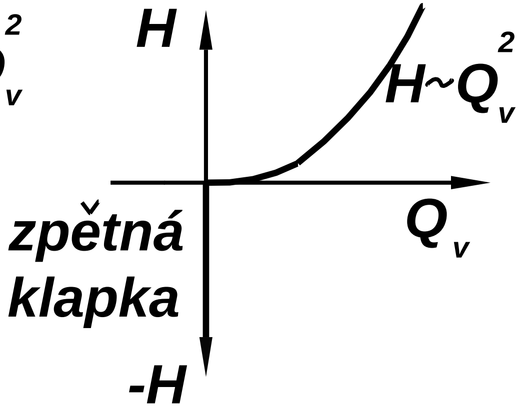
$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \zeta_c \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{2dg} \left(\frac{4}{\pi d^2} \right)^2 Q_v^2 = \frac{8\lambda l}{\pi^2 d^5 g} Q_v^2 = K_t Q_v^2$$

Závislost $H = f(Q_v)$ je pro vyvinuté turbul. proudění kvadratická parabola a její grafické znázornění je charakteristika potrubí.

Charakteristika potrubí pro vyvinuté turbul. proudění

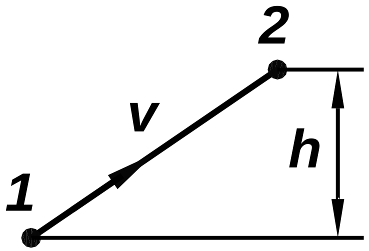
Vodorovné potrubí

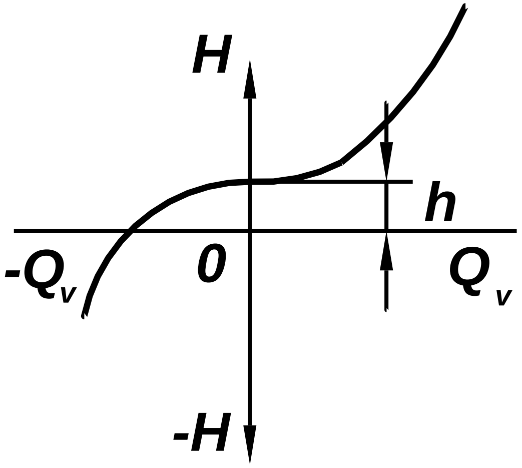


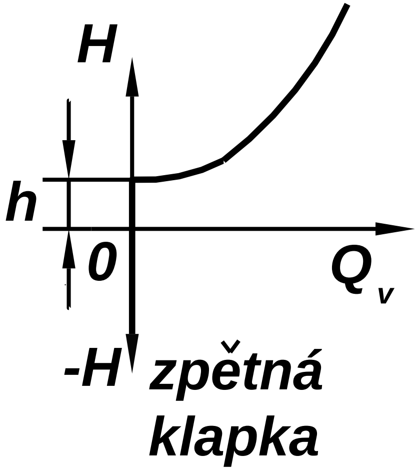


Je-li na začátku potrubí zpětná klapka, která brání průtoku v opačném smyslu, potom charakteristika potrubí ve třetím kvadrantu splyne se zápornou osou H.

Pro potrubí se stoupáním je charakteristika posunuta v kladném smyslu osy H.

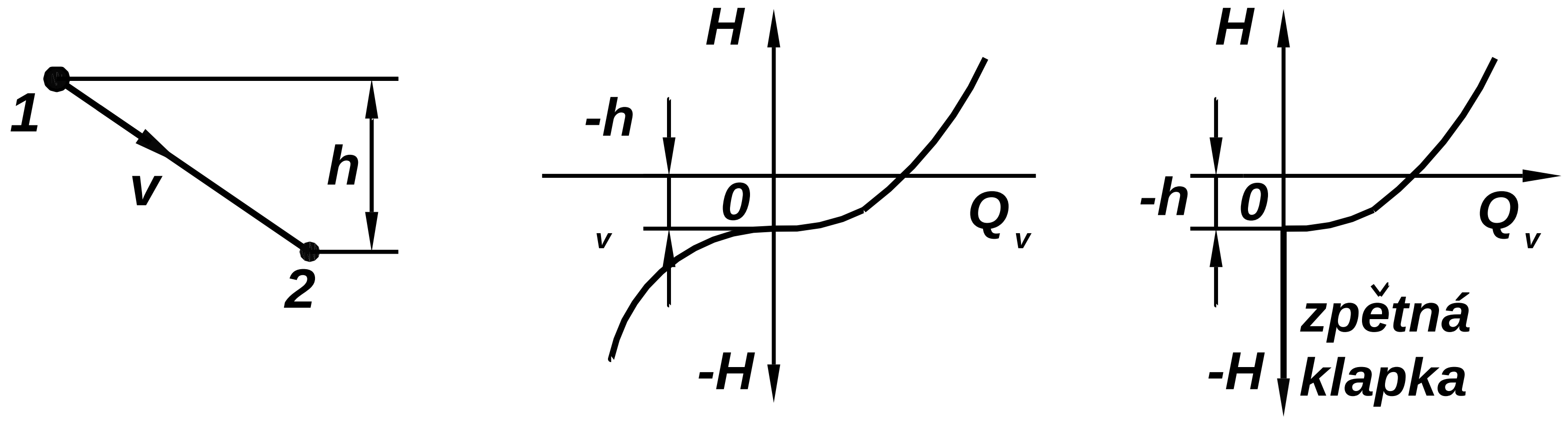






Charakteristika potrubí se spádem

Pro potrubí se spádem je charakteristika posunuta v záporném smyslu osy H.



To znamená, že na pokrytí tlakových ztrát se využije nejprve potenciální energie, kterou má kapaliny ve výše položeném průřezu.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Obsah

Bernoulliho rovnice pro rotující kanál

Hydrodynamické lopatkové čerpadlo

Kinematické poměry v oběžném kole

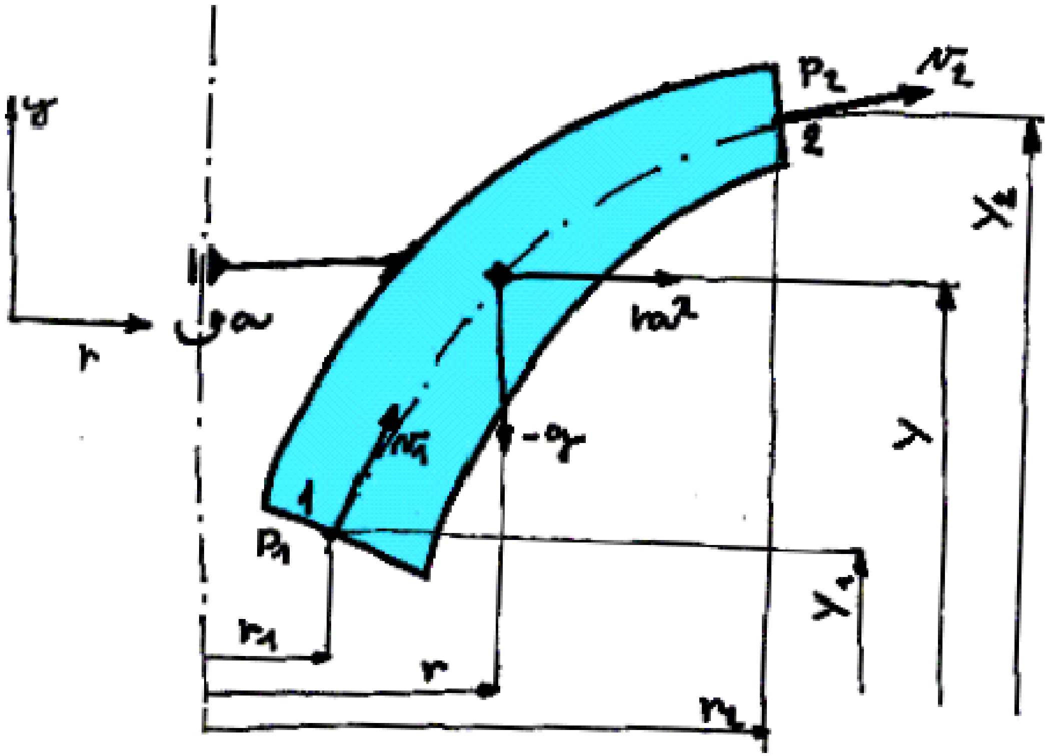
Čerpadlo a potrubí –čerpací systém

Charakteristika čerpadla

Provozní bod systému

Proudění v relativním prostoru – rotující kanál

Při průtoku kapaliny kanálem, který se otáčí konstantní úhlovou rychlostí, se změní energie kapaliny, neboť na ni působí odstředivá síla. Práce, kterou tato síla vykoná při proudění kapaliny, má vliv na její energii.



Bernoulliho rovnice

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}-U=konst$$

zahrnuje v potenciálu U práci všech objemových sil, které působí na proudící kapalinu, tedy i odstředivé síly při rotaci kanálu.

Na částici kapaliny v rotující proudové trubici působí složky zrychlení:

$$a_r=r\omega^2;\,a_y=-g;a_z=0$$

Potom pro svislou osu rotace se určí potenciál integrací:

$$U = -g\int_0^h dy + \omega^2 \int_0^r r\,dr = -gh + \frac{\omega^2 r^2}{2} + konst$$

Po dosazení do Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh - \frac{u^2}{2} = konst$$

Rychlost **v** (často se označuje **w**) je relativní rychlost kapaliny, jíž proudí v rotujícím kanále, rychlost **u** je obvodová neboli unášivá rychlost v uvažovaném místě rotujícího kanálu. Ostatní veličiny jsou stejné jako v základní Bernoulliho rovnici.

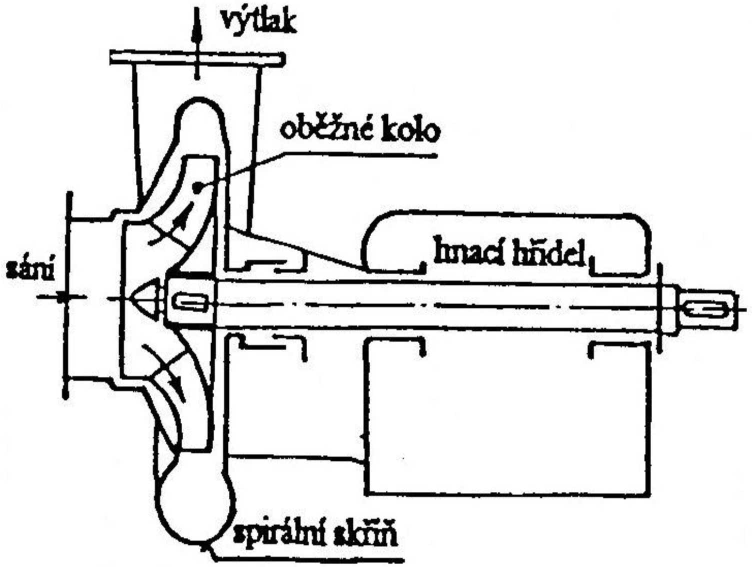
Při odstředivém průtoku rotujícím kanálem se unášivá rychlost zvětšuje a energie kapaliny se zvyšuje. Tak je tomu např. v odstředivých čerpadlech. Obdobně při dostředivém průtoku unášivá rychlost se zmenšuje a energie kapaliny se snižuje. To je případ vodních turbin (např. Francisových).

Přihlíží-li se k hydraulickým odporům při ustáleném proudění skutečné kapaliny rotujícím kanálem, platí pro dva průřezy jedné a též proudové trubice Bernoulliho rovnice:

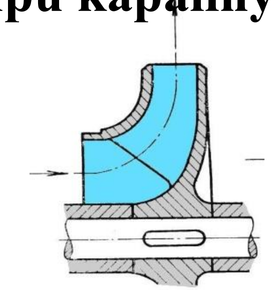
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 - \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 - \frac{u_2^2}{2} + gh_z$$

Hydrodynamické lopatkové čerpadlo

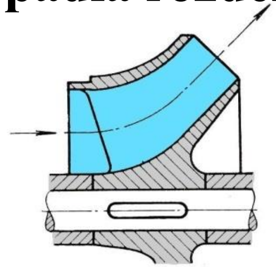
V čerpadle dochází k přeměně mechanické energie přiváděné na hřídel čerpadla na kinetickou energii v oběžném kole, která se mění dále v energii tlakovou. $W_{mech} \rightarrow \Delta W_{kin} \rightarrow \Delta W_{tl}$



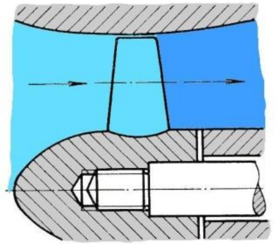
Vstup kapaliny do oběžného kola čerpadla je vždy axiální. Podle směru výstupu kapaliny je možno čerpadla rozdělit na :



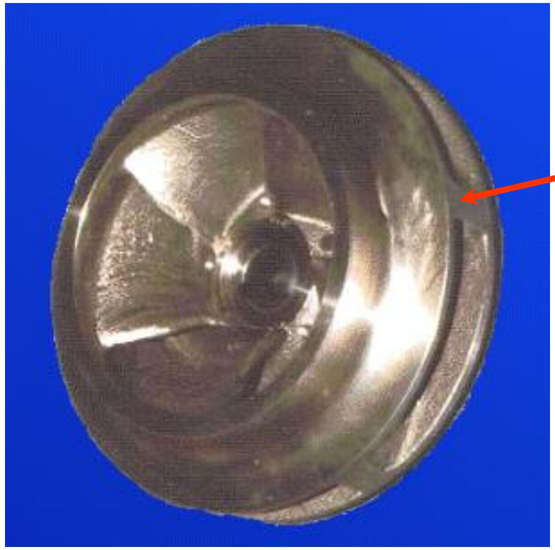
radiální



diagonální



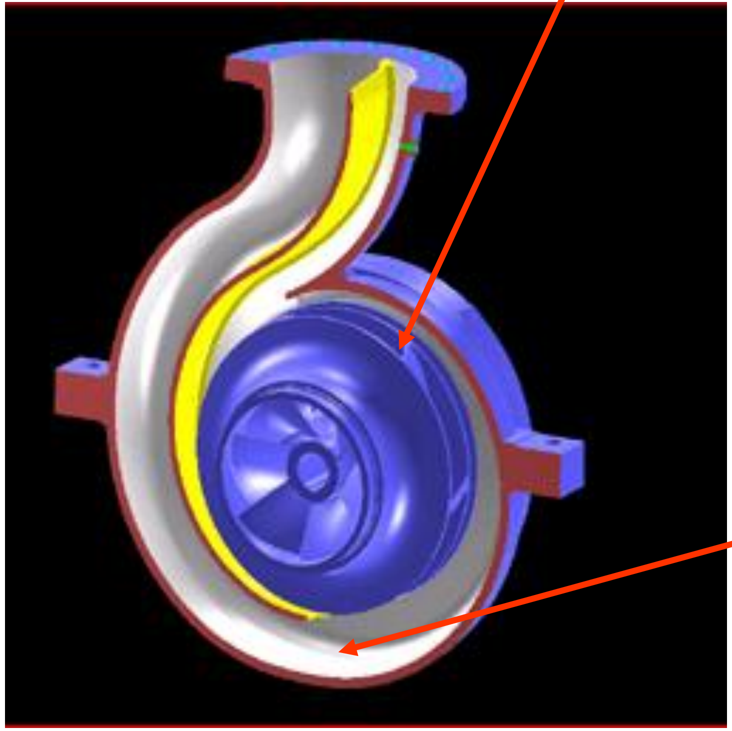
axiální



Oběžné kolo představuje soustavu rotujících kanálů, v nichž je proudění popsáno pomocí rozšířené Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh_1-\frac{u_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_2-\frac{u_2^2}{2}+gh_{zo}$$

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{w_1^2}{2}+gh_1-\frac{u_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{w_2^2}{2}+gh_2-\frac{u_2^2}{2}+gh_{zo}$$



Ztrátová výška zahrnuje ztráty spojené s průtokem kapaliny oběžným kolem (hydraulické ztráty).

Přeměna mechanické energie na hydraulickou začíná na vstupní hraně a končí na výstupní hraně lopatky oběžného kola.

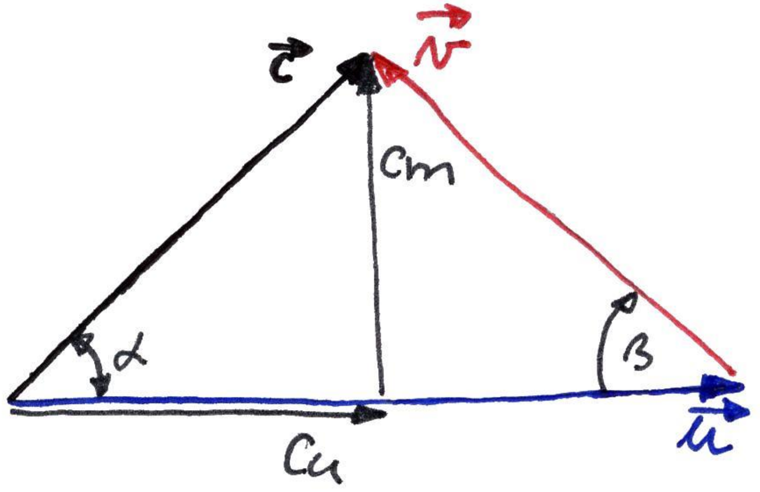
Zbytek kinetické energie se transformuje na energii tlakovou ve spirále, která představuje difuzor (dochází ke snížení rychlosti a zvýšení statického tlaku).

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Kinematické poměry v oběžném kole

Pokud máme relativní prostor který se pohybuje vůči nějakému absolutnímu musíme uvažovat rychlosti relativní **v**, absolutní **c**, unášivou **u**.

$$\vec{c} = \vec{v} + \vec{u}$$



$\vec{c}$ – absolutní rychlost

$\vec{v}$ – relativní rychlost

$\vec{u}$ – unášivá rychlost

Doplňující složky rychlosti

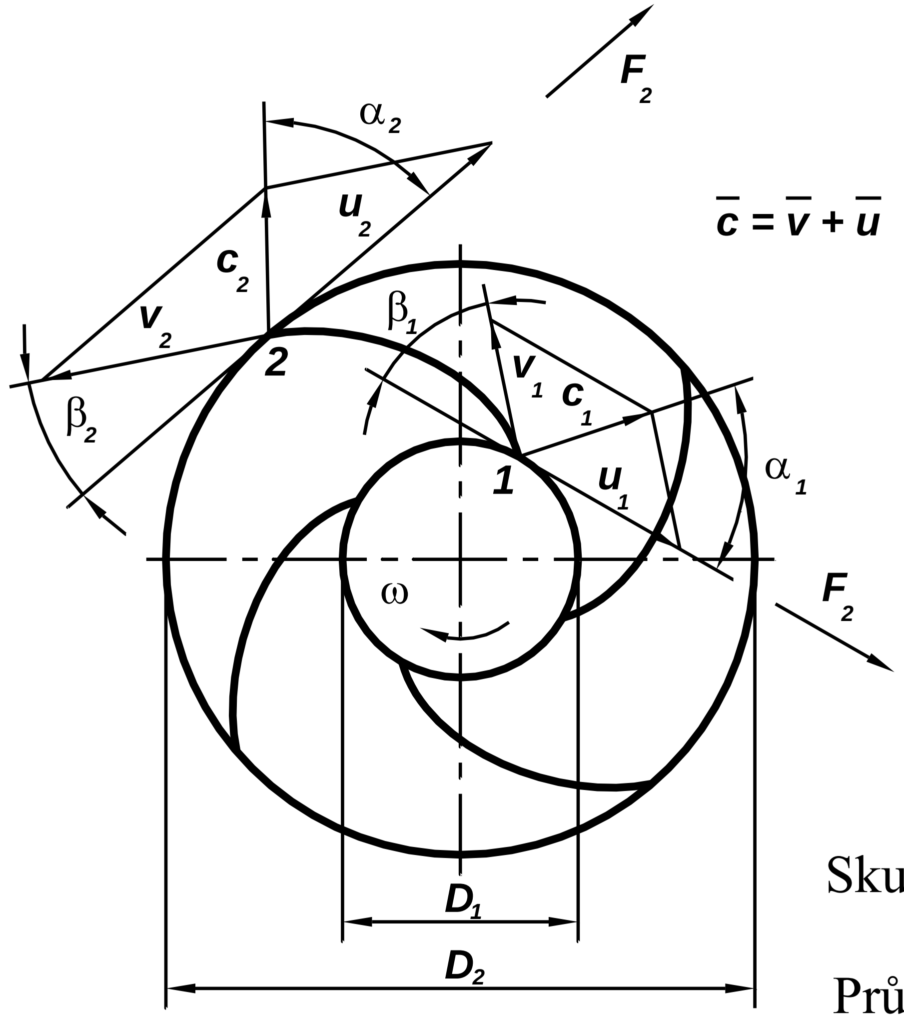
$\vec{c}_u$ – složka absolutní rychlosti do směru unášivé rychlosti

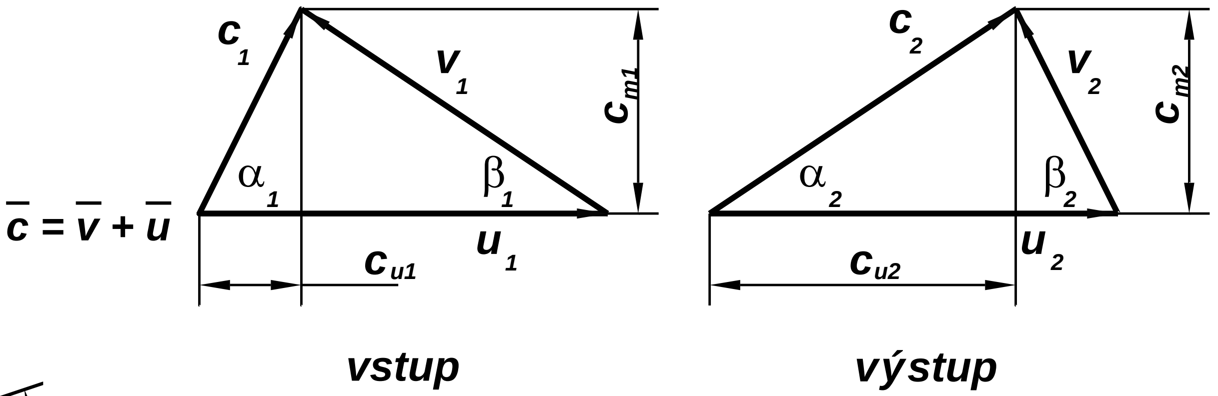
$c_u = c \cdot \cos\alpha$ (hybná složka absolutní rychlosti)

$\vec{c}_m$– složka absolutní rychlosti do směru kolmého na unášivou rychlost,

$c_m = c \cdot \sin\alpha$ (meridiální rychlost)

Kinematické poměry na vstupu a výstupu z oběžného kola jsou určeny rychlostními trojúhelníky, jejichž základny tvoří unášivá rychlost **u**, absolutní rychlost **c** s ní svírá úhel **α** a rychlost relativní úhel **β**.





Vztah pro teoretickou měrnou energii čerpadla na základě kinematických poměrů v oběžném kole určuje
Eulerova čerpadlová rovnice

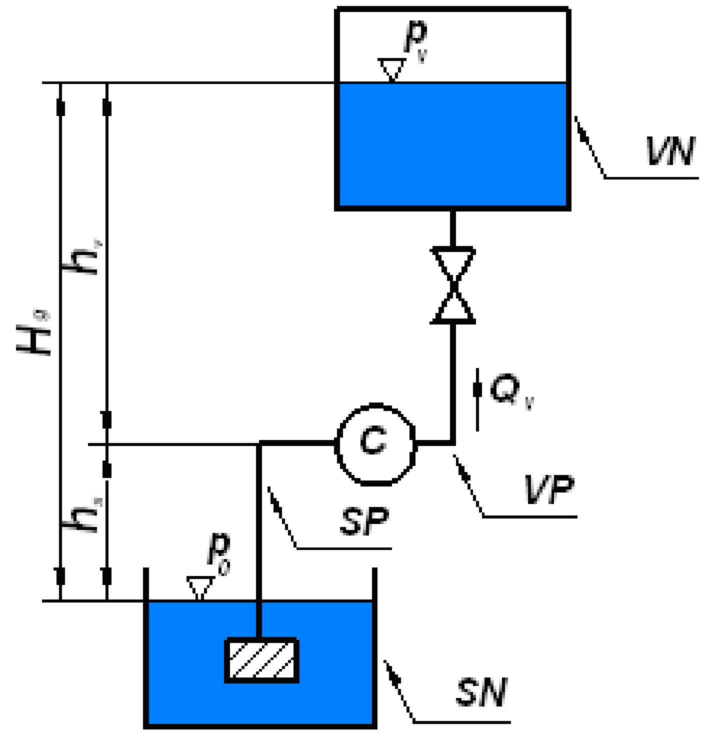
$$\Delta Y_t = \left(c_{u2}u_2 - c_{u1}u_1\right)$$

Skutečná měrná energie bude samozřejmě nižší.

Průtok běžným kolem: $Q = c_{m1}.S_1 = c_{m2}.S_2$

Hydrodynamické čerpadlo a potrubí

Čerpadlo je součástí čerpacího systému, který se skládá ze sacího potrubí SP a výtlačného potrubí VP, sací nádrže SN a výtlačné nádrže VN. Dopravovaná kapalina protéká ze sací nádrže sacím potrubím, čerpadlem, výtlačným potrubím a vtéká do výtlačné nádrže.



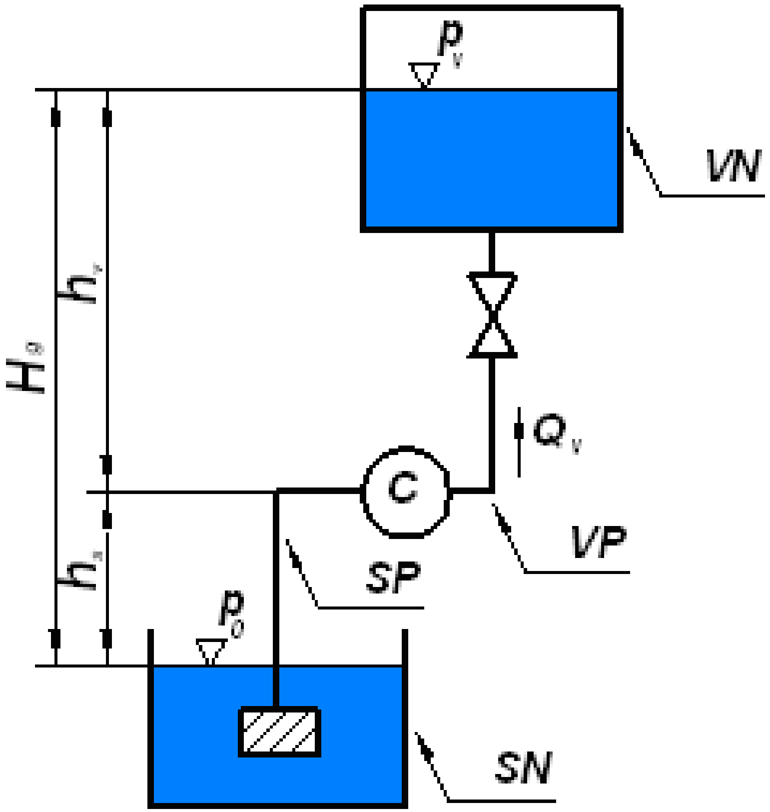
H_g - geodetická výška
h_s - sací výška
h_v - výtlačná výška

Čerpadlo dodává kapalině energii, která je obecně využívána na:

- zvedání kapaliny (zvyšování polohové energie),
- zvyšování tlakové energie (přemístění kapaliny do prostoru s vyšším tlakem)
- dopravu kapaliny (přemístění kapaliny z jednoho místa do druhého).

Skutečná měrná energie potřebná na dopravu kapaliny

Skutečnou měrnou energii Y_d, kterou čerpadlo dodá kapalině, určíme z energetické bilance systému (hladiny v SN a VN).



$$Y_{SN} + Y_d = Y_{VN}$$

$$\frac{p_0}{\rho} + Y_d = \frac{p_v}{\rho} + g\left(h_s + h_v\right) + g\left(h_{zs} + h_{zv}\right)$$

$$Y_d = \frac{p_v - p_0}{\rho} + g\left(h_s + h_v\right) + g\left(h_{zs} + h_{zv}\right)$$

Prvé dva členy na pravé straně jsou nezávislé na průtoku.

Poslední člen, představující měrnou ztrátovou energii je funkcí rychlosti a tedy průtoku.

$$Y_z = g\left(h_{zs} + h_{zv}\right) = f\left(Q_v\right)$$

Dosazením vztahů pro ztrátové výšky a úpravou odvodíme charakteristiku potrubí

$$Y_d = f\left(Q_v\right)$$

Ve většině případů čerpání méně vazkých kapalin je proudění turbulentní a charakteristika potrubí je kvadratická parabola.

Parametry čerpání

Q_v [m³ s⁻¹] **objemový průtok**

Y_d [J kg⁻¹] **skutečná měrná energie (energie dodaná čerpadlem 1 kg čerpané kapaliny)**

$\frac{Y_d}{g} = H_d$ **[m] dopravní výška**

$P = Q_m . Y_s = \rho g Q_v . H_d$ [W] užitečný výkon čerpadla

$P_p = \frac{P}{\eta_c}$ [W] příkon čerpadla

$\eta_č = \eta_h . \eta_0 . \eta_m$ [%] celková účinnost čerpadla, kde

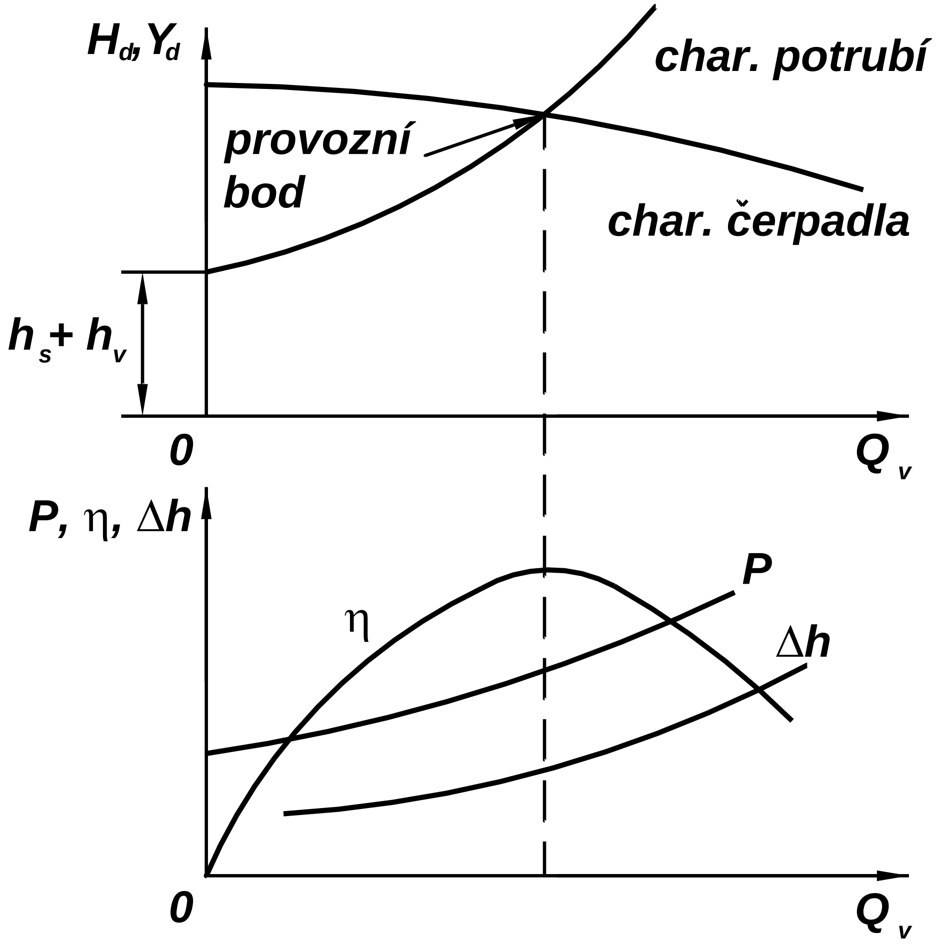
η_h je hydraulická účinnost

η_o je objemová účinnost

η_m je mechanická účinnost

Charakteristika hydrodynamického čerpadla

Skutečné poměry na čerpadle se zjišťují experimentálně na zkušebně a z výsledků se sestavuje charakteristika čerpadla, tj. závislost měrné energie na průtoku . Charakteristika čerpadla bývá doplněna též křivkami příkonu **P**, celkové účinnosti **η** , případně kavitační deprese **Δh**.



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

$$Q_v = S \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v$$

$$e_z = \frac{p_z}{\rho} = g \cdot h_z = \frac{v^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta\right)$$

$$h_{zs} = \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\lambda_s \cdot \frac{l_s}{d_s} + \sum \zeta_1\right)$$

$$h_{zv} = \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\lambda_v \cdot \frac{l_v}{d_v} + \sum \zeta_2\right)$$

$$Y_d = g \cdot (H_g + h_{zs} + h_{zv})$$

$$H_g = h_s + h_v$$

$$P = Q_m \cdot Y_d = \rho \cdot Q_v \cdot Y_d$$

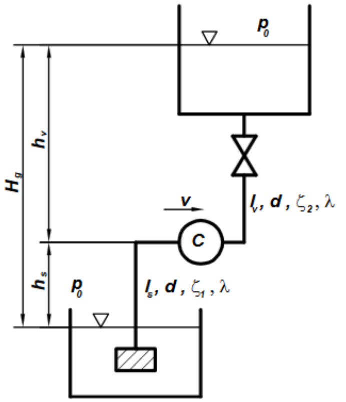
Příklad 13.3.6

Čerpadlo přečerpává vodu ze spodní nádrže do horní potrubím, jehož parametry jsou dány. Průměr sacího a výtlačného potrubí je stejný. Určete ztráty v sacím a výtlačném potrubí h_{zs} a h_{zv}, skutečnou měrnou energii odstředivého čerpadla Y_d a výkon čerpadla P.

Zadáno:

v =	4 m.s^{-1}
d =	0.5 m
l_s =	6 m
l_v =	800 m
h_s =	3 m
h_v =	300 m
ζ_1 =	5
ζ_2 =	2
λ =	0.025

Vypočtěte:		Výsledky:
h_{zs} = ?	m	4.32
h_{zv} = ?	m	34.25
Y_d = ?	J.kg^{-1}	3 350.80
P = ?	kW	2 631.7



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

$$Q_v = S \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v$$

$$\eta_č = \frac{P}{P_P} \rightarrow P = P_P \cdot \eta_č$$

$$P = Q_m \cdot Y_d = \rho \cdot Q_v \cdot Y_d \rightarrow Y_d = \frac{P}{\rho \cdot Q_v}$$

Příklad 13.3.3

Čerpadlem o příkonu P_p, účinnosti η_c, průměru sacího potrubí d_s a rychlostí proudění v_s se dopravuje voda. Vypočtěte průtok Q_v, výkon čerpadla P a skutečnou měrnou energii čerpadla Y_d.

Zadáno:		
P_p =	6 kW	
d_s =	60 mm	
v_s =	3 m.s^{-1}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
η_c =	0.75	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.0085
P = ?	kW	4.500
Y_d = ?	J.kg^{-1}	529.412