LOS REYES DE LA PASARELA

MODELOS MATEMÁTICOS EN LAS CIENCIAS

Mónica de Torres Curth

FHN
FUNDACIÓN DE HISTORIA NATURAL
FÉLIX DE AZARA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
1972

LOS REYES DE LA PASARELA

MODELOS MATEMÁTICOS EN LAS CIENCIAS

Mónica de Torres Curth

FHN
FUNDACIÓN DE HISTORIA NATURAL
FELIX DE AZARA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
1972

Fundación de Historia Natural Félix de Azara
Departamento de Ciencias Naturales y Antropológicas
CEBBAD - Instituto Superior de Investigaciones
Universidad Maimónides
Hidalgo 775 - 7° piso (1405BDB),
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.
Teléfonos: 011-4905-1100 (int. 1228)
E-mail: secretaria@fundacionazara.org.ar
Sitio web: www.fundacionazara.org.ar

Editor responsable:
Mónica de Torres Curth

Realización, diseño y produccion gráfica:
Diluvio Comunicación | www.diluviocomunicacion.com.ar

Primera edición 2015
Impreso en la Argentina

de Torres Curth , Mónica
Los reyes de la pasarela, modelos matemáticos en las ciencias. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Fundación de Historia Natural Félix de Azara, 2015.
98 p. : il. ; 24x17 cm.

ISBN 978-987-3781-19-3

1. Ciencias Naturales. 2. Ecología. 3. Matemática. I. Título
CDD 577N

A mis hijos
María Luz
Francisco
y Martín

Otra manera de enfocar el asunto consiste en considerar la matemática aplicada como el estudio de todas aquellas estructuras que se dan en teorías científicas, mientras que la matemática pura cubre no sólo éstas, sino todas aquellas que podrían haberse dado (o podrían darse en el futuro). La matemática se convierte así en el estudio riguroso de mundos hipotéticos. Es la ciencia de lo que podría haber sido o podría ser, así como de lo que es.

Murray Gell-Mann (1929-)

Agradecimientos

Mi agradecimiento a mis primeros maestros en la ciencia: Cristina Ferraris y Betty Camuyrano que me llevaron de la mano en mis primeros pasos en matemática, y a Eddy Rapoport que me abrió las puertas al mundo de los modelos y de la matemática aplicada en el campo de la ecología. Todos ellos me inculcaron la pasión por el conocimiento y de alguna manera fueron el puntapié inicial para llegar a este punto. También a mis colegas ecólogos del Laboratorio Ecotono que generosamente comparten lo que saben y lo que aprenden en el campo. Particularmente agradezco a Cecilia Ezcurra, Jorgelina Franzese, Gabriela Pfister y Cristina Ferraris que leyeron con ojo crítico la primera versión de este material y me hicieron valiosas sugerencias. Un agradecimiento especial a mi amiga Andrea por sus comentarios tan alentadores.

LOS REYES DE LA PASARELA:
MODELOS MATEMÁTICOS EN LAS CIENCIAS

Mónica de Torres Curth

La fórmula del éxito

Si la matemática se hiciera enteramente a demanda, esclava de la ciencia, se obtendría el trabajo que se espera de un esclavo: hosco, poco generoso y lento. Si la disciplina estuviera enteramente impulsada por intereses internos, obtendríamos un niño egoísta y malcriado: mimado, egocéntrico y pagado de su propia importancia. Las mejores matemáticas equilibran sus propias necesidades con las del mundo externo. De esto es de donde deriva su irrazonable efectividad.
Ian Stewart (1938-1985)

Cuenta la leyenda que cierta vez estaba don Albert Einstein trabajando en su oficina en la Universidad de Princeton, y un estudiante (otras versiones hablan de un periodista) le preguntó: "Doctor, usted que sabe tanto, ¿podría decirnos cuál es la fórmula del éxito?" Einstein, ni corto ni perezoso escribió en su pizarrón: A = x + y + z. Atónito el autor de la pregunta pidió una explicación ante tamaña sencillez, a lo que Einstein contestó: "A es el éxito[1], que se consigue sumando constancia en el trabajo, que he representado con la variable "x", algo de suerte, la "y", y en cuanto a "z", se trata de un factor variable, de un imponderable, que es la tranquilidad y el silencio, y sobre todo la seguridad de que mientras uno se ocupa de sus asuntos no se acerca alguien a molestar con preguntas tontas".

¿Qué es esta fórmula? Un modelo, archisencillo, y lamentablemente incorrecto, del éxito. ¿Por qué es un modelo? Porque intenta representar un fenómeno (el estado de éxito) mediante una selección de las que, a criterio de Einstein (probablemente guiado por la irritación) son las variables que más contribuyen a alcanzar ese estado.

En este libro veremos qué son y para qué sirven los modelos, cómo son parte de nuestra vida cotidiana, daremos un paseo por algunos modelos que han hecho historia, por algunos modelos curiosos en algunas ciencias, y veremos, con un poco más de detalle, algunos ejemplos de modelos matemáticos en las ciencias naturales, particularmente en ecología. No hay que saber matemática para leer este libro, sólo disponer de un poco de sentido común y un poco de fe para cuando hagamos un tratamiento informal de la matemática que vamos a usar. Los lectores interesados en los detalles matemáticos de los modelos que aquí veremos

1 Cualquier ser humano hubiera llamado E al éxito, pero esta letra ya la había usado Einstein en su magistral fórmula $E = mc^2$.

pueden acercarse a los innumerables libros escritos al respecto. El mundo de los modelos en las ciencias naturales es extraordinario y complejo, así como de una enorme amplitud, y uno se pregunta cómo es que la naturaleza puede ser expresada a través de una herramienta aparentemente tan artificial, abstracta y llena de restricciones como es la matemática. Sin embargo hay buenas razones para esto, que vamos a intentar explorar en este libro. Muchas ideas de las aquí escritas naturalmente no son mías, las he tomado prestadas de varios libros apasionantes, varias páginas de internet, y las he tejido en un relato que espero, sea del gusto de los lectores y les permita entender una herramienta que es a la ciencia como una red a un pescador.

-PRIMERA PARTE-

Todos los Modelos

Hay modelos y modelos...

*"Un matemático, como un pintor o un poeta,
es un fabricante de modelos. Si sus modelos son más
duraderos que los de estos últimos, es debido a que
están hechos de ideas. Los modelos del matemático,
como los del pintor o los del poeta deben ser hermosos.
La belleza es la primera prueba; no hay lugar
permanente en el mundo para unas matemáticas feas"*
Godfrey Harold Hardy (1877-1947)

Antes de zambullirnos en el mundo de los modelos en la ciencia necesitamos ponernos de acuerdo acerca de qué queremos decir cuando hablamos de modelos. Según el ámbito y el contexto la palabra *modelo* se usa con distintos significados. En el ambiente de la moda por ejemplo, un modelo se refiere a una persona que viste una prenda o un accesorio para exhibirlo a otros (y posiblemente venderlo). En palabras del físico Manuel Tohara Cortés, director del Museo de Ciencias de Valencia, "modelos" son *esas señoritas filiformes y longilíneas que llevan trajes imposibles de adaptar al tipo de una señora normal*... En el mundo del arte, un modelo es una persona que posa para pintores, escultores o fotógrafos. En todos estos casos, el modelo es un punto de referencia, una propuesta que tiene una serie de características (por ejemplo la belleza) que se consideran dignas de imitar o reproducir. El modelo así, ilustra una situación deseable de ser analizada, imitada o puesta en práctica.

En cambio, en el ámbito de las ciencias, sobre todo en ciencias aplicadas, la idea de modelo es algo diferente. Un modelo en ciencias es el resultado del proceso de generar una representación abstracta de una porción de la realidad, sea ésta un objeto, un fenómeno, un proceso, un sistema o cualquier otra cosa de interés. En términos más generales incluso, los modelos no tienen por qué referirse a cosas del mundo real. La película Avatar, por ejemplo, está basada en un modelo de funcionamiento de un sistema biológico inexistente, aunque sin embargo perfectamente posible (que se parece mucho a otro modelo, el de la novela *El nombre del mundo es Bosque*, de Úrsula K. Le Guin... pero esa es otra historia). El modelo del mundo de Avatar tiene los elementos que tiene que tener para representar una realidad coherente aunque no exista. Otro ejemplo es el de la misma geometría, que utiliza modelos de cosas que en verdad no existen... Pero en este libro pensaremos en los modelos como referencias a objetos, fenómenos, procesos o sistemas que forman parte de la naturaleza. Acordaremos pues que un modelo científico es una *representación* que se construye contextualizando cierta porción del mundo real, y con un fin específico. El objetivo de los modelos en el caso de la ciencia es analizar, describir, explicar y simular la forma en que funcionan esos sistemas (decimos "sistemas" pero en realidad estamos hablando de cualquier porción de la realidad que nos interese). Esto puede permitir varias cosas adicionales, como por ejemplo explorar, controlar o proyectar su funcionamiento bajo diferentes condiciones. En ocasiones los modelos pueden proveer pautas para optimizar este funcionamiento, o brindar herramientas para entender sistemas complejos a partir de la comprensión del funcionamiento de sistemas más simples. El desarrollo y análisis de modelos es una parte esencial de toda actividad científica.

Vamos por partes...

“Debe haber un mundo ideal, una especie de paraíso matemático donde todo sucede como en los libros de texto”
Bertrand Russell (1872-1970)

Volvamos a analizar las partes de nuestra definición más concienzudamente. Cuando hablamos de *representaciones* podemos referirnos a diferentes cosas. Pueden ser ideas, presentadas a través de pensamientos, palabras, dibujos, o incluso ecuaciones, aunque también pueden ser objetos materiales. La realidad es extraordinariamente compleja, y en ella influyen tantas y tan diversas variables, que es imposible (aún para los más observadores) captarla por completo. Lo cierto es que decimos que los modelos son *representaciones* de alguna parte esa realidad, porque, justamente, no *son* esa parte, son aproximaciones, más o menos precisas pero nunca “la realidad”. Y un buen modelo, un modelo que funcione, deberá representar adecuadamente (dentro de su simplicidad) lo que quiere representar, pero de seguro dejará afuera un montón de detalles. Estas representaciones requieren de una serie de simplificaciones que permiten caracterizar la realidad adecuadamente. Nos referimos a que alguien (quien construye el modelo) identifica algunos rasgos que considera sobresalientes de aquello que quiere modelar y los utiliza para construir el modelo. Esta selección de estos rasgos destacados está precisamente orientada por el objetivo del modelo pero también por la cosmovisión de quien lo idea. Cada modelo remite pues, a un tiempo y un espacio específicos.

Cierta vez necesitaba comprar unos tornillos para ajustar el respaldo de una silla a su estructura. Cargando mi ignorancia en la materia, fui a la ferretería de la esquina a buscar lo que necesitaba. Cuando por fin llegó mi número, ya estaba un poco nerviosa pensando en cómo iba a explicarle a ese señor de guardapolvo azul cómo era lo que necesitaba: uno, me encontré con que *el mundo del tornillo* es (a los efectos prácticos) infinito; dos, advertí que todos los tornillos son básicamente la misma cosa en relación a mis explicaciones; y tres, me di cuenta de que esas características que yo había rescatado en mi modelo conceptual de tornillo (cabeza con una hendidura en cruz, metal, rosca, 5 cm) no eran suficientes para explicarle al ferretero cuál era el tornillo que yo quería. Por suerte el vendedor era mucho mejor modelista que yo y agregando algunos conceptos a mi idea original logró dar con la descripción del tornillo adecuado y salí feliz de la ferretería con mi bolsita. Esto viene al caso porque, como convinimos, los modelos son una representación de algo que existe en la realidad. El grado de adecuación o ajuste del modelo a la realidad tiene que ver con el objetivo, y en tanto más ajustado sea a la realidad, más complejo será, y requerirá de más elementos para su comprensión y manejo. En un extremo tendríamos “un *cosito* para ajustar una parte de mi silla a su estructura” y en el otro, tendríamos una descripción exacta y tan completa del tornillo que sólo podría ser ese y ningún otro tornillo, es decir, el objeto mismo. Como en todo, lo mejor es el equilibrio, y no necesitamos referirnos a la temperatura, imperfecciones, color, textura y peso del tornillo para conseguir lo que necesitamos.

Este ejercicio de representar simplificadamente una parte de la realidad requiere de dos procesos que ocurren simultánea y complementariamente: uno, elegir los aspectos destacados de lo que se quiere modelar para incluirlos en la representación, y otro, descartar aquellos aspectos que, a juicio de quien desarrolla el modelo, son menos relevantes de modo que es posible tener una “buena representación” de esa realidad sin incluirlos. Este conjunto de decisiones es lo que conocemos como *supuestos del modelo*, es decir, el conjunto de condiciones bajo las cuales ponemos el modelo a funcionar.

Por ejemplo, si queremos calcular el volumen de una naranja, podemos suponerla esférica y medir un diámetro para calcular el volumen como ya sabemos hacer desde la escuela primara. Pero ninguna naranja es esférica; sin embargo, esta simplificación, este supuesto de que lo es, permite que una esfera sea un modelo bastante adecuado para representar una “naranja ideal” y permitir el cálculo de su volumen, de esa y de cualquier otra naranja, con sólo conocer su diámetro (Figura 1).

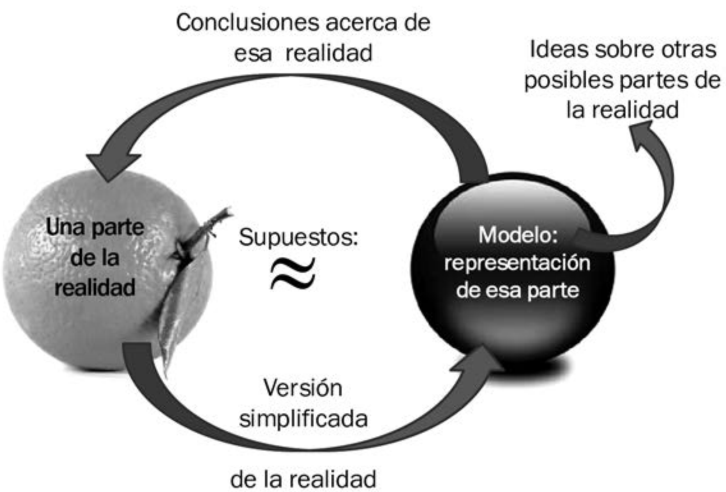

Figura 1: De la realidad al modelo. La naranja real y la naranja ideal.

Volvamos por un momento al tema del contexto. En el siglo III a.C., Arquímedes había inventado lo que en un esfuerzo de imaginación luego se llamó el *tornillo de Arquímedes* (se dice que fue él el inventor, aunque hay sospechas de que era un invento bastante más antiguo, y que ya había sido usado para mantener regados los Jardines Colgantes de Babilonia cuatro siglos antes).

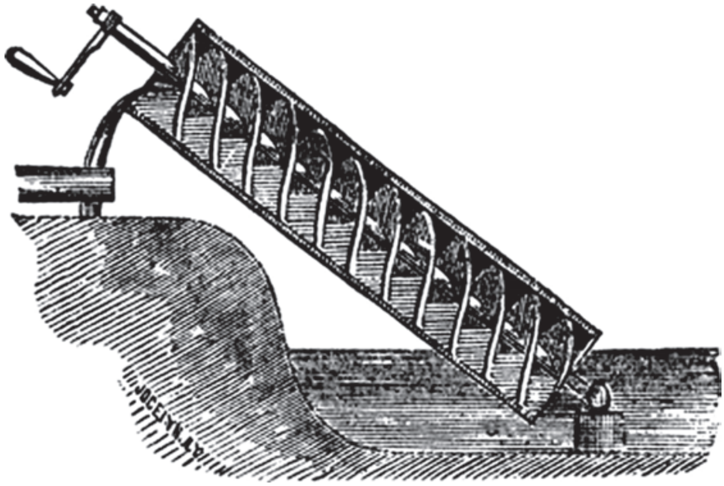

Figura 2: Tornillo de Arquímedes.

Este invento era una máquina utilizada para elevar de nivel el agua, la harina, cereales o cualquier otra cosa, sin el esfuerzo de acarrear bolsas o baldes cuesta arriba. Se trataba de un tornillo (que tenía un desarrollo helicoidal sobre un eje, como cualquier tornillo) que se hacía girar dentro de un cilindro hueco situado sobre un plano inclinado. El material a elevar se situaba debajo del eje de giro, subía por el tubo al hacer girar el tornillo por medio de una manivela, y salía por el otro extremo del tubo (Figura 2). Recién dieciocho siglos más tarde las roscas empezaron a usarse como elementos de fijación en relojes y máquinas. Por el año 1500 Leonardo da Vinci desarrolló métodos para el tallado de roscas, sin embargo, seguían fabricándose a mano y sin ninguna clase de normalización hasta bien entrada la Revolución Industrial. Si en la época de Arquímedes (o aun en la de Leonardo) hubiera intentado explicarle a alguien que lo que necesitaba era un tornillo para ajustar el respaldo de la silla a su estructura, no lo hubiera conseguido ni siquiera con mi mayor esfuerzo. El contexto, en el tiempo y en el espacio, permite que el modelo sea adecuado al objetivo.

Otro aspecto que se relaciona también con el contexto es el uso para el cual se desarrolla el modelo. Básicamente podemos hablar de dos usos de los modelos: el *didáctico*, cuando el objetivo, aun cuando provenga del conocimiento científico, es conducir la comprensión del interlocutor acerca del funcionamiento de algo, y el *científico*, cuyo objeto es la comprensión en sí misma de ese funcionamiento o el análisis de la influencia de diferentes contextos sobre ese funcionamiento.

¿De qué están hechos los modelos?

"... La prueba está en que no se llega a la matemática por experiencia. A una persona no le dicen para demostrar que cuatro y tres son siete, vamos a empezar con naranjas, después con sillas... Se sabe que una vez entendido que cuatro y tres son siete eso es aplicable a todo".
Jorge Luis Borges (1899-1986)

En los modelos, las representaciones pueden hacer uso de distintos recursos, como ideas, palabras, gráficos, elementos físicos (madera, plástico, metal, cartón,...), o incluso herramientas matemáticas, desde las más simples hasta las más sofisticadas. A los fines que nos interesan vamos a clasificar los modelos en dos grandes grupos, que discutiremos con algún detalle más adelante: uno formado por los *modelos matemáticos* y otro por el resto, es decir los *no matemáticos*, donde encontraremos modelos *conceptuales*, *materiales*, *analógicos* y cualquier otro modelo que ande dando vueltas por ahí. A vuelo de pájaro podríamos decir que los *modelos conceptuales* son representaciones, generalmente cualitativas, construidas para explicar o caracterizar una porción de la realidad haciendo uso de ideas, palabras o esquemas sencillos. Por su parte, los *modelos materiales*, también llamados físicos, son aquellos a los que tenemos acceso empírico. Los modelos materiales se parecen al objeto real pero a escala, como una maqueta o un avioncito. Los *analógicos*, como es natural, usan analogías. Por su parte, los modelos matemáticos, son modelos científicos (de cualquier ciencia), que hacen uso del lenguaje matemático para describir o explicar la porción de la realidad que interesa.

Detengámonos un momento en las analogías. Una analogía es una herramienta para expresar que dos sistemas (o situaciones o lo que sea) comparten la estructura relacional entre las partes que las componen, a pesar de las diferencias que puedan existir entre esas partes. Lo esencial en una analogía es el tipo de relaciones (que son comunes a ambos sistemas), no los objetos que los componen. Por ejemplo, se sabe que los axones (parte constitutiva de una neurona) están recubiertos de mielina, que es un tipo de proteína aislante que facilita la transmisión de impulsos eléctricos. Un cable de teléfono es un modelo analógico de esta parte del sistema neuronal, que nos puede servir para explicar la función aislante de la mielina. Un cable de teléfono estándar tiene cuatro cables (hilos) en el interior, recubiertos por un aislante plástico cuya función es evitar que los hilos se toquen entre sí, y así evitar errores en la señal eléctrica transmitida. Este concepto es bastante intuitivo para alguien que alguna vez manipuló un teléfono, como también lo es el mal funcionamiento del aparato cuando los cables están medio pelados. Podríamos decir que si hay daño en el aislante de los alambres, tendremos problemas en la transmisión de información. Esta analogía facilita la explicación (y comprensión) de cuestiones extremadamente complejas que ocurren a nivel de la transmisión neuronal, como son los síntomas de una enfermedad provocada por una deficiencia en la mielina en los axones que ocasiona una pérdida de la motricidad fina, la enfermedad de Parkinson. En esencia, no es importante cuántos son y de qué están hechos el interior de los cables de teléfono y los axones, y el material que los recubre, sí es importante que ambas cosas comparten una estructura: un objeto (cable – axón) con un recubrimiento (aislante plástico – mielina) que impide la ocurrencia de errores o interferencias en la transmisión de la información.

Un artículo aparecido en un diario Página 12[2], escrito por el matemático y divulgador de la matemática Adrián Paenza, explica cómo usar una representación analógica para comprender la magnitud de los grandes números. Dice *"En el mundo hay más de seis mil seiscientos millones de personas. Parece que somos muchos. Pero, ¿qué quiere decir "muchos"? Si pusieran fotos de todos nosotros en un libro, de manera que las hojas fueran de una décima de milímetro de espesor, colocando diez personas por página y utilizando las dos caras de la hoja... el libro tendría más de ¡treinta y tres kilómetros de alto!"* Este "superlibro" no es otra cosa que un modelo, una representación analógica que nos permite cobrar conciencia (a partir de algo conocido como un libro y una longitud que nos resulta comprensible y familiar como un kilómetro) de la magnitud de la cifra de la que estamos hablando. También podría haber servido pensar que si ponemos a todas estas personas en fila india, suponiendo que cada una en promedio ocupa unos 40 cm, la fila tendría unos 2.680.000 Km, casi unas siete veces el camino desde la tierra a la luna. Estas dos representaciones analógicas "modelan", a escala y en forma analógica, la misma situación. La estructura que ponen en evidencia es la relación entre dos magnitudes: el número y el grosor de un libro, el número y el largo de la fila; y serán más convincente para unos o para otros, pero sirven al mismo objetivo: comprender.

Cierto es que hay muchas definiciones de las distintas clases de modelos y su división es difusa. Por ejemplo, un mapa de algún lugar, dibujado en un papel, puede pensarse como un modelo conceptual en tanto describe ese lugar de manera simplificada y con más o menos detalles (por ejemplo, cómo se distribuyen en el espacio los accidentes geográficos, caminos, puentes, sitios destacados, etc.), y como un objeto material en tanto es una representación física bidimensional de ese lugar. Por eso meteremos todos estos modelos en una misma bolsa, y los distinguiremos de los modelos matemáticos que son el objeto de este libro.

También hay modelos que pueden ser combinaciones de los anteriores. Las simulaciones y las animaciones por ejemplo, son modelos materiales (ya que se ven en una computadora) que se construyen a partir de una formulación matemática. Es claro que si pretendemos entrar en el terreno de la clasificación de los modelos, vamos a meternos en un berenjenal, de manera que hablaremos de *modelos no matemáticos* cuando queramos hablar de los que no utilizan el lenguaje matemático en su formulación, entendiendo que ahí hay toda una variedad de modelos, ¡como de tornillos en la ferretería!

2 http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-95304-2007-11-27.html

Tanto los modelos científicos como los didácticos pueden adoptar cualquiera de estas formas. Algunas ciencias (por ejemplo las ciencias naturales, y más tradicionalmente la física) prefieren los modelos matemáticos. Muchas veces la geometría utiliza modelos materiales como representación de objetos geométricos y algunas ramas de la tecnología los utilizan en la elaboración de prototipos. Mientras, en otras áreas de como las ciencias humanas, los modelos conceptuales son los más usados. Esto no quita que haya algunos intentos de matematizar algunas disciplinas como la psicología, dando lugar al desarrollo de ramas como la *psicología matemática*[3] o la historia, en una disciplina bastante nuevita (y controversial) llamada *cliodinámica*, sobre la que hablaremos (un poco) más adelante.

También es cierto que una misma porción de la realidad puede tener simultáneamente diferentes representaciones para distintos objetivos. Puede desarrollarse un modelo conceptual para explicar, un modelo material para mostrar y un modelo matemático para representar a través del lenguaje matemático el funcionamiento de lo que se quiere modelar y para estudiar sus propiedades y comportamientos bajo distintas condiciones.

Imaginemos por ejemplo, que queremos hacer un modelo del aire que respiramos. El aire está compuesto básicamente por moléculas de nitrógeno (N_2) y oxígeno (O_2), además de vapor de agua (H_2O), un poco de dióxido de carbono (CO_2) y algunas otras sustancias que en conjunto se encuentran en una proporción inferior al 1%. Podemos representar a cada átomo como una esferita de color distinto (y también de distinto tamaño) y a cada molécula como algunos grupos de esferitas pegadas según la constitución de la misma, como se muestra en la Figura 3 a la izquierda. Como el aire es un gas, pondremos las moléculas bastante separadas dejando espacio entre ellas para que puedan moverse libremente (si fuera un líquido las moléculas estarían más juntas y si fuera un sólido, no sólo estarían juntas sino que también estarían fijas).

Conociendo las proporciones en que estas moléculas están representadas en el aire, podemos diseñar un modelo conceptual (en este caso gráfico) como el de la Figura 3 a la derecha. Este "modelo del aire" es un modelo didáctico. Nos permite comprender cómo es el aire que respiramos a nivel atómico o molecular, cosa que no podríamos ver de otra manera. A diferencia del modelo conceptual, el modelo matemático intentará describir la forma en que estas moléculas se mueven y rebotan unas contra otras (ya que el objetivo es otro). Para eso, se usan las leyes de movimiento descubiertas por Newton hace más de 300 años (de hecho el aire es conocido como un fluido newtoniano). Este modelo del aire expresado matemáticamente permite contestar otras preguntas diferentes, como por ejemplo, cuál es la relación entre la presión y el volumen de un gas.

3 La psicología matemática es una aproximación a la investigación psicológica que se basa en modelos matemáticos de los procesos perceptuales, cognitivos y motrices. También implica el establecimiento de reglas que relacionan las características cuantificables de un estímulo con el comportamiento cuantificable." (Wikipedia)

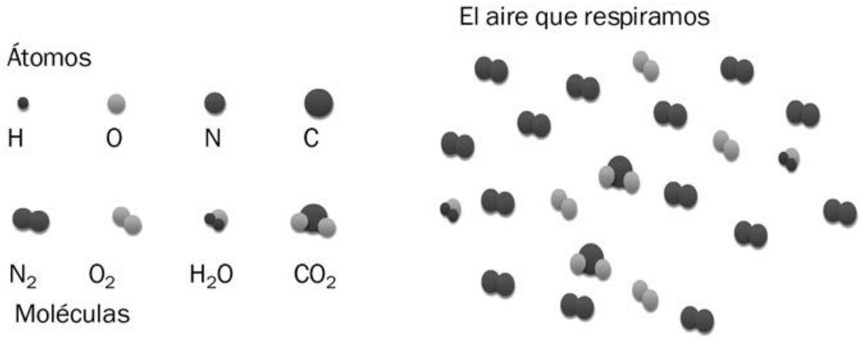

Figura 3: Modelo conceptual para el aire. A la izquierda, cada bolita es un átomo. Las bolitas juntas constituyen las distintas moléculas que conforman el aire. A la derecha, las moléculas distribuidas en el espacio, constituyen el modelo conceptual.

¿Modelos para siempre?

"La matemática es una ciencia exacta salvo cuando te equivocas."
Jaume Perich (1941-1995)

Pero..., (siempre hay un pero) todos los modelos tienen sus limitaciones, incluso los modelos científicos, por más rigurosos y precisos que sean. Son construcciones provisorias y perfectibles. La historia de la ciencia ha mostrado que los modelos pueden irse sucediendo hacia formas cada vez más poderosas, abarcativas y útiles de explicar la realidad. El arquetipo de esta idea del carácter provisorio e incompleto de los modelos en ciencias (como de todas las ciencias fácticas) es el de teoría de la gravedad[4]. La ley de la gravitación universal enunciada por Isaac Newton en su *Philosophiae naturalis principia mathematica* en 1687, se consideró la pieza clave de la física durante más de doscientos años hasta comienzos del siglo XX. Un dato interesante (aunque deprimente en algún sentido), es que Newton gestó esta idea a los veintitrés años. En 1685, a raíz de la peste, la Universidad de Cambridge debió cerrar sus puertas y Newton regresó a la casa de su familia en Woolsthorpe, Lincolnshire, en Inglaterra. Allí comenzó a desarrollar la idea de que la fuerza responsable de la caída de una manzana de un árbol era la misma fuerza que mantenía unida la Luna a la Tierra y era responsable

4 En epistemología, la noción de modelo científico ha estado desde siempre estrechamente ligada a la de teoría. Sin embargo, en los últimos años ha cambiado la visión de esta disciplina de las relaciones entre una y otra cosa. Pero para ahondar en esto deberíamos tomar el camino de la epistemología, que no es el objetivo de este libro, de modo que siguiendo las tradiciones, entenderemos a los modelos científicos como una representación teórica de la realidad cuya función es de mediación entre el sistema formal teórico (marco) y la interpretación empírica.

del movimiento de los planetas alrededor del Sol. En 1686 enunció su Ley de la Gravitación Universal (que generaliza los resultados obtenidos en el sistema solar a todos los cuerpos del Universo) que establece que *la fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos cualesquiera del Universo es directamente proporcional al producto de las masas de los dos cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.* Pero había cosas, unas pocas cosas, aparentemente insignificantes, que el modelo newtoniano no podía explicar, referentes a la órbita del planeta Mercurio y al modo como la luz se curva al pasar cerca del Sol. Newton afirmó al respecto: “los planetas ni se mueven exactamente en elipses, ni giran dos veces según la misma órbita”.

Newton era hijo de dos campesinos puritanos fervientemente religiosos. El universo de Newton era una enorme máquina que funcionaba siguiendo leyes creadas y mantenidas por Dios. Estaba convencido de que, de vez en cuando, Dios tenía que meter el dedo y reajustar las órbitas de los planetas para mantenerlas libres de las perturbaciones provocadas por cometas y otras fuerzas. El contemporáneo de Newton, Leibniz (con quien Newton se disputara largamente el descubrimiento del Cálculo), se tiraba de los pelos con estos razonamientos de Newton. Para Leibniz, esta idea de que la maquinaria del universo necesitaba algunos “retoques” de vez en cuando, ponía a Dios en un lugar de imperfección. ¿Para qué haría una máquina imperfecta? Para Leibniz la naturaleza era la mejor expresión posible de las cosas, y esta idea de que Dios tuviera que prestar atención a estos supuestos errores mellaba su poder y sabiduría infinitos. *Dios opera milagros no para mantener las necesidades de la naturaleza sino las de la Gracia*, decía Leibniz.

A pesar de los rezongos de Leibniz, el modelo de Newton fue aceptado por la comunidad científica hasta 1915, cuando finalmente se resolvieron estas pequeñas discrepancias entre la teoría y los hechos en la *Teoría de la relatividad general* de Albert Einstein. En realidad la teoría de Einstein explica más adecuadamente el funcionamiento del universo. En ese sentido, es un modelo mejor y más completo que el anterior y hace algunas predicciones acertadas donde fallaba el modelo de Newton. Pero para nuestro universo cercano, el modelo de Newton sigue siendo suficiente y mucho más sencillo de manejar.

A riesgo de irnos de tema (y no regresar jamás), vamos a hablar un poquito de lo que ocurre en la ciencia cuando una buena teoría se reemplaza por una aún mejor. El famoso filósofo contemporáneo de la ciencia Thomas Kuhn, en su libro *La estructura de las revoluciones científicas,* habla de este tema refiriéndose a lo que él llama “cambios de paradigma”, enfocando en los cambios que se producen al imponerse una teoría mejorada sobre otra. Cuando una nueva teoría mejora una preexistente, esto no implica necesariamente que la teoría anterior se olvide y se abandone, ni que sea incorrecta. De hecho ha ocurrido, como lo es en el caso de la teoría newtoniana y la einsteniana, que si bien la segunda explica algunos aspectos que la anterior no podía, la teoría newtoniana restringida al sistema solar funciona de maravilla y se sigue usando mucho más que su sucesora, más exquisita y acabada, pero innecesariamente compleja para estos problemas “locales”. No necesariamente la vieja teoría pierde valor (a veces sí lo hace), de modo que pueden ambas convivir felices y servir para distintos propósitos.

Cuando dos teorías están en pugna, quizás el triunfo de una sobre la otra sea más una cuestión de moda que de otra razón, como podría ser que la perdedora esté perimida.[5]

Uno y los modelos

"En ciencia uno intenta decir a la gente, en una manera en que todos lo puedan entender, algo que nunca nadie supo antes. Exactamente lo contrario de la poesía"
Paul Dirac (1902-1984)

¿Qué tan distante está cualquiera de nosotros de los modelos? ¿Son sólo cosas de científicos? Veremos que no, que algunos modelos son tan comunes que los tenemos incorporados a nuestro quehacer cotidiano. El primer modelo con el que nos enfrentamos en la vida es el lenguaje. La palabra "vaca" es una representación de todas las vacas reales del mundo. Incluso si decimos "vaca Milka" todos vamos a pensar en la una vaca color lila y blanco que anda por la TV (acá, en este país, ¡en Japón probablemente nos miren con cara rara!). Los lenguajes son modelos codificados, de tal manera que representan una realidad sin enseñar esa realidad tal y como es. No hace falta visualizar la vaca, basta con escribir o decir la palabra. Una de sus cualidades más maravillosas es que uno puede referirse a cosas que nunca vio ni verá, como *el universo*, o *cien millones de dólares*, incluso hasta expresar sentimientos complejos y abstractos sin necesidad de tenerlos a la mano. El problema de este modelo (el lenguaje) es su imprecisión, cosa imposible para un modelo en la ciencia. Sea cual fuera la forma de representación que utilicemos para un modelo científico, no puede dejar lugar a ambigüedades. Este es un aspecto obligatorio en los modelos científicos. Dos personas que piensan en la palabra *hogar* pueden no entender lo mismo; su comprensión o su idea de lo que esta palabra representa estarán mediadas por su experiencia, por la historia de su niñez, y por otro montón de factores, mientras que x^2 es x^2 acá y en la China. En un modelo científico cualquier persona debe entender lo mismo y no puede haber lugar para diferentes interpretaciones. Y para este fin, la reina de las herramientas es la matemática. Es el leguaje más preciso y carente de imprecisiones que la mente humana ha inventado.

Pero volvamos a los modelos en nuestra realidad cotidiana. Si pensamos en los modelos como una representación simplificada de la realidad, coincidiremos en que el autito

5 Más sobre este apasionante tema (y otras cosas maravillosas) se puede leer en el Capítulo 7 de El quark y el jaguar, Aventuras en lo simple y lo complejo (1995) de Murray Gell-Mann, Premio Nobel de Física en 1969, editado por Tusquets Editores, Barcelona. Aunque valga decir que todo el libro vale la pena, ya que investiga las conexiones entre las leyes fundamentales de la física y la asombrosa complejidad y diversidad del mundo natural.

del nene es un modelo material (a escala) del auto que pasa por la calle. En tanto más detalles tenga, más se parecerá al verdadero. Y a los fines que nos interesan, que son que el niño se mantenga ocupado por un rato y no esté revoloteando alrededor nuestro, el modelo funciona a la perfección. Este modelo rescata aspectos esenciales del sistema real (el auto verdadero) como su forma, las cuatro ruedas, sus ventanas, y deja de lado algunos aspectos que para la función que lo queremos no son relevantes (como por ejemplo un motor, el uso de combustible, el tipo de materiales con los que está hecho, etc.). Lo mismo si en vez de un autito tenemos una muñeca, una cocinita, la vajilla para el té, una pista de kartings, un parque zoológico de plástico o un tren con vía y todo. ¡El mundo de los juguetes es un mundo de modelos! Obviamente, si en vez de un niño estamos hablando de un empresario que invertirá parte de su fortuna en producir un nuevo vehículo, el modelo del auto (que ahora llamaríamos *prototipo*) deberá tener otras características como el funcionamiento y rendimiento del motor, y una larga serie de etcéteras que se requieren para mantener intactas la atención del empresario y su voluntad de invertir.

En la escuela también compartimos como cosa de todos los días modelos de funcionamiento de algunos sistemas de la naturaleza que hoy nos parecen de lo más "naturales", como un esquema del sistema solar, o de nuestro aparato circulatorio. Los modelos pueden ser más o menos complejos según la edad del auditorio. Quizás para un niño en edad de escuela primaria baste con mostrar un modelo del sistema circulatorio como el de la izquierda, y para un estudiante de escuela media, pueda complejizarse un poco más, mostrando el de la derecha (ver Figura 4).

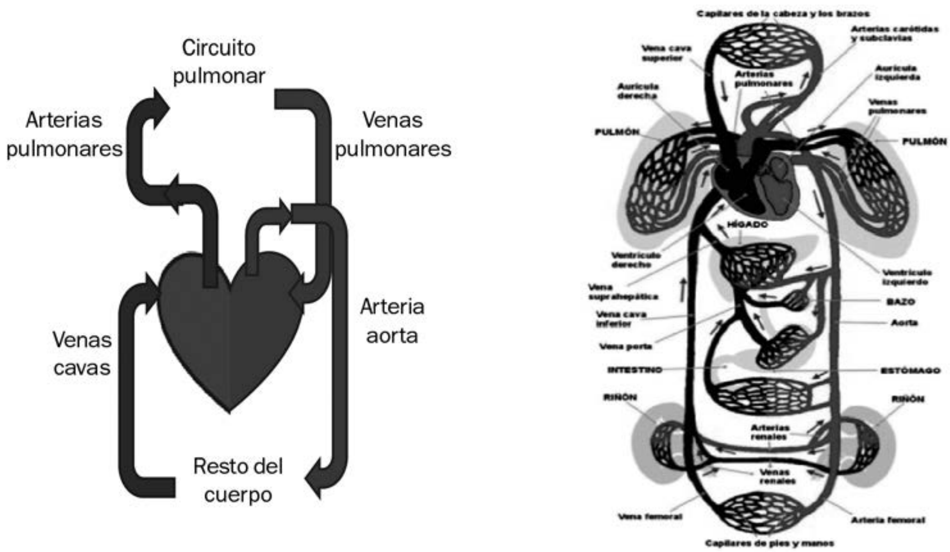

Figura 4: Modelos del aparato circulatorio con distinto nivel de detalle. a) modelo simple y b) un modelo un poco más complejo[6].

6 http://www.aula2005.com/html/cn3eso/09circulatorio/09circulatories.htm

¿Por qué la maestra usa estos modelos para acercarnos a la comprensión del funcionamiento de estos sistemas? Buscamos comprender el mundo, aunque para ello nuestros sentidos son extremadamente limitados. Pero es lo que hay. Vemos en un estrecho rango del espectro electromagnético, escuchamos sonidos entre los cien y los diez o doce mil hertzios[7] (pero sabemos que existen sonidos por debajo y por sobre esas frecuencias). Lo mismo ocurre con el sentido del tacto. Las terminales nerviosas de la piel son sensibles a estímulos mecánicos (como la presión o el rozamiento), y también a estímulos que producen calor, frío y dolor. Cuando tocamos algo, estas terminales nerviosas le cuentan a nuestro cerebro cómo es lo que estamos tocando (si es rugoso, si es frío, si pincha, etc.) Pero hagamos el siguiente experimento: pongamos una mano en un recipiente con agua fría y la otra en uno con agua caliente. Ahora abramos la canilla dejando salir agua tibia, digamos a una temperatura intermedia entre la de los dos recipientes. Cuando pongamos la mano que estaba en el agua fría bajo el chorro de la canilla, sentiremos que sale agua calentita. Pero si ponemos la otra mano bajo el mismo chorro, ¡sentiremos que está fría! Al final, el agua del chorro está a una temperatura constante, pero nuestro cerebro se confunde al interpretar esta información que viene de terminales nerviosas separadas por unos metros. Es decir, el sentido del tacto es aún menos confiable que el de la vista o el de la audición. Ni hablar del gusto o del olfato. Vale decir, vemos el mundo como podemos y con lo que tenemos. La ciencia y la tecnología han desarrollado instrumentos para mejorar eso (instrumentos de precisión como microscopios electrónicos, telescopios enormes, y otras maravillas), pero para el común de las personas muchas de esas herramientas no están tan accesibles como los ojos, los oídos, la piel, la nariz y las papilas gustativas.

Para ver cómo funciona el aparato circulatorio deberíamos despanzurrar a alguien (y mantenerlo funcionando) y, superado el shock, capaz ni comprenderíamos cómo funcionan las cosas, dado que varios de sus componentes no son transparentes y no podemos ver qué ocurre adentro. Incluso, no podríamos distinguir a simple vista entre la sangre oxigenada y la carboxigendada. Mientras que un modelo gráfico (más o menos dinámico y más o menos detallado) nos permite comprender (y creer) cómo circula la sangre por nuestro organismo y por qué procesos pasa. Muchos modelos con los que estamos acostumbrados a convivir son los modelos didácticos que esquematizan el funcionamiento o describen una parte de la realidad que nos interesa comprender.

Como hemos visto, los modelos están presentes en nuestra vida cotidiana de muchas maneras. Pero nos interesa acá hablar un poco más de los modelos en la ciencia. Su historia, su uso y sus aplicaciones. De aquí en adelante hablaremos de modelos refiriéndonos a modelos científicos más que a modelos didácticos.

7 Un herzio (o hercio, o hertz en inglés) es la unidad física usada para medir la frecuencia de ondas, cuyo símbolo es Hz.

Modelos en la ciencia

"Mi mente parece haberse vuelto una especie de máquina para fabricar leyes generales a partir de una gran colección de hechos"
Charles Darwin (1809 –1882)

Dijimos que los modelos en la ciencia sirven para analizar, describir, explicar y simular la forma en que funciona alguna porción de la realidad. Pero, ¿cómo es que un modelo permite todas estas cosas? La ciencia es el intento del ser humano por encontrar respuestas a preguntas básicas tales como *cómo* son las cosas y *por qué* son como son. Y en ese afán los modelos son su herramienta preferida. Cuando hablamos de "las cosas" estamos refiriéndonos a cuestiones de la naturaleza: el funcionamiento del universo, las leyes de la herencia genética, los vericuetos de la mente humana, la maravilla de la vida, la transmisión neuronal, o procesos como las reacciones químicas al interior de una célula. Incluso podríamos abarcar aquí, en un sentido amplio de "naturaleza" a fenómenos (por ejemplo sociales) que tienen al ser humano como protagonista. La naturaleza abarca desde lo inconmensurablemente pequeño a lo inconmensurablemente grande. Dentro de este rango, del cual ni siquiera podemos imaginarnos su verdadera dimensión, nuestra percepción (tal como acabamos de decepcionarnos) nos permite observar una pequeñísima fracción. Y ahí están los modelos, como un salvavidas.

¿Qué tipos de modelos científicos hay?

Algunas páginas atrás acordamos en que podemos hacer una primera gran clasificación en "modelos matemáticos" y los otros, que convinimos en llamar los "no matemáticos". Incluso dentro del mundo de los modelos matemáticos hay un sinnúmero de clasificaciones, y cada uno refiere a un aspecto distinto de los mismos. Por ejemplo pueden distinguirse modelos *determinísticos* y *estocásticos* según si utilizan probabilidades o no, y por ende, según si sus resultados son únicos y determinados, o si son aproximados y con cierto grado de incertidumbre. Por otra parte, si uno considera la intervención del tiempo en el modelo, pueden clasificarse en *estáticos* o *dinámicos*, siendo estos últimos normalmente referidos a aquellos modelos donde lo que interesa es la evolución en el tiempo de determinado sistema. También pueden distinguirse modelos *discretos* y *continuos* según si la variable (usualmente el tiempo) es tomada en intervalos discretos (años, meses), o en forma continua. Ya podemos intuir que será posible pensar por ejemplo en modelos que formen parte de una "doble clasificación". Podremos encontrarnos con modelos dinámicos estocásticos, como serían los modelos meteorológicos que nos son tan familiares. Son dinámicos porque se refieren a cómo evolucionará el estado del tiempo con el tiempo (que no es una redundancia), y estocásticos porque las predicciones son probabilidades, y no estamos 100% seguros de que el próximo fin de semana habrá sol si el pronóstico meteorológico de la radio así lo anuncia. En cualquier caso, compraremos el asado, pero por las dudas también una buena pasta.

Clasificadores más exquisitos distinguirán los modelos estadísticos de los modelos matemáticos, aunque un modelo estadístico en algún sentido es un modelo matemático, debido a que usa lenguaje matemático. Pero, a diferencia de lo que ocurre con un modelo matemático, un modelo estadístico obligatoriamente se basa en los datos recogidos de la realidad e incorpora en su formulación la influencia que el azar tiene en estas observaciones. La estadística es la disciplina que se encarga de la recolección, análisis, presentación e interpretación de datos de campo o experimentales. Por su naturaleza misma, la estadística se encuentra obligatoriamente ligada a la práctica empírica, y permite, bajo premisas adecuadas, hacer inferencias acerca de las variables que considera.

Los modelos en la ciencia, ¿son verdaderos?

"Aun cuando todos los expertos coincidan,
pueden muy bien estar equivocados"
Bertrand Russell (1872-1970)

Empecemos por preguntarnos acerca de la verdad. Esta pregunta es y ha sido objeto de debate entre teólogos y filósofos a lo largo de los siglos. Hay consideraciones filosóficas, religiosas y hasta morales en esta pregunta. Por eso, y dado que este libro ha de tener una cantidad finita de páginas, vamos a suponer que nuestros lectores saben a qué nos referimos cuando decimos que una afirmación es verdadera. Si hubiera necesidad, podríamos acordar en que la verdad es, en términos generales, la adecuación de la afirmación con lo que percibimos como "la realidad", es la coincidencia de lo dicho con los hechos.

¿Es ese mismo el significado de la verdad en las ciencias? Sí y no. En este punto es necesario hacer una distinción entre las ciencias formales (la matemática y la lógica) y las ciencias fácticas (las otras, como las ciencias naturales, por ejemplo)[8]. En las ciencias fácticas la verdad es, precisamente, *fáctica*, porque depende de hechos, aunque también es *provisoria* porque nuevas investigaciones pueden presentar elementos para su refutación. En estas

8 Naturalmente, hay otras clasificaciones, pero haremos uso de esta, por simplicidad.

ciencias, las teorías científicas (modelos que describen el funcionamiento de las cosas) que pueden considerarse como “verdades”, se constituyen como un conjunto de leyes y teorías que son aceptadas como tales mientras no exista una observación o experimentación que permita rechazarlas. En ellas prima un proceso inductivo, de modo que a partir de un cierto número de observaciones o experimentaciones se permite una generalización que se denomina “ley o teoría”. En las ciencias fácticas se desarrollan hipótesis que se ponen a prueba (se refutan o no), y esta verificación es *incompleta* y *temporaria*.

En cambio, en las ciencias formales la verdad se demuestra o prueba. En la matemática y en la lógica las verdades son absolutas y pueden ser axiomas o teoremas. Los axiomas son verdades aceptadas como tales y como base para la construcción de un sistema (axiomático), y los teoremas son verdades que se demuestran por procesos deductivos a partir de axiomas o de teoremas anteriores. La verdad de las *ciencias formales es por tanto necesaria y formal, y la demostración es completa* y *final*. En matemática cuando un teorema ha sido demostrado, es una verdad “para siempre”, es decir su valor de verdad podrá ser utilizado para sostener la verdad, mediante respectivas demostraciones, de nuevos teoremas.

En las otras ciencias, esto no es así. Abundan en la historia de las ciencias ejemplos de teorías que se sostuvieron como verdades hasta que se comprobó su falsedad. Por ejemplo hasta el año 1759 la *Teoría de la epigénesis* avalaba entre otras, la teoría de la preformación. Esta sostenía que las células sexuales contenían individuos diminutos preformados, que sólo necesitaban aumentar de tamaño durante el desarrollo embrionario. En 1759 Caspar Friedrich Wolff propuso el concepto de que los caracteres del nuevo individuo deben desarrollarse a partir del material indiferenciado del espermatozoide y los óvulos, contrariamente a lo sostenido hasta ese momento. De esta manera la nueva teoría, que refutaba la anterior, sentó las bases de un nuevo enfoque para el estudio del desarrollo, y permitió implicaciones en la teoría evolucionista.

Otro ejemplo archiconocido es la teoría geocéntrica del universo, antigua teoría formulada por Aristóteles, y su versión completada por Ptolomeo en el siglo II a.C., en su obra *El Almagesto* (que estuvo vigente hasta el siglo XVI), en la que se representaba al Sol y todos los astros girando alrededor de la Tierra. Esta teoría fue el resultado de observaciones (e interpretaciones) de la esfera celeste. Si bien no estaban todos de acuerdo en esto, la evidencia era contundente: el sol se movía por el cielo día a día, y aparecía y desaparecía en el horizonte, describiendo una trayectoria que podría imaginarse circular. Ya andaba Colón de vuelta de América con café, papas, maíz, tomates y otras riquezas menos culinarias, cuando Copérnico publicó su trabajo *De Revolutionibus Orbium Coelestium* cuestionando la teoría geocéntrica, y proponiendo una teoría donde la Tierra giraba sobre sí misma y alrededor del sol (Figura 5). Muchos años pasaron hasta que una idea aceptada como “verdad” fue reemplazada por la otra.

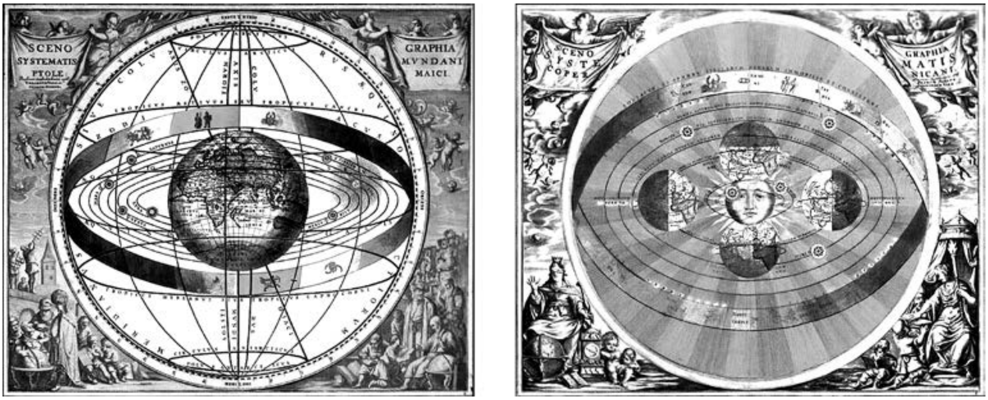

Figura5: Modelos del sistema solar: Modelo geocéntrico (izquierda) debido a Ptolomeo, y basado en las ideas de Aristóteles, y Modelo heliocéntrico (derecha) debido a Copérnico.

Estas teorías son modelos conceptuales del funcionamiento de las cosas. Y están basadas en una concienzuda observación de la naturaleza. Los modelos “incorrectos” probablemente sean producto de interpretaciones erróneas. Sin embargo dos modelos científicos alternativos de un mismo fenómeno no son necesariamente incompatibles. Esto puede ser así si no comparten sus supuestos, o si se inscriben en diferentes escuelas teóricas o paradigmas (en el Apéndice, al final de este libro hablamos brevemente de esto). Tal situación de “competencia” se ha dado muchas veces a lo largo de la historia de la ciencia, y el proceder científico generalmente elige el modelo que usará en base a su sencillez, su riqueza teórica y su poder explicativo.

¿Predecir o Proyectar?

“Si así fue, así pudo ser; si así fuera, así podría ser; pero como no es, no es. Eso es lógica”.
Lewis Carroll (1832-1898)
Alicia a través del espejo (fragmento)

Predecir es la facultad de anticipar una respuesta en el tiempo. Por ejemplo, los horóscopos son una práctica milenaria basada en la observación que los astrólogos hacían del cielo en el momento de nacer una persona, para augurar su porvenir y, basándose en el signo zodiacal, predecir su futuro. Pero esta capacidad no es dejada sólo a brujos, hechiceros o astrólogos. Las predicciones también tienen lugar en el ámbito de la ciencia. Por ejemplo, los modelos de pronóstico meteorológico logran predecir el estado del tiempo en los días sucesivos con algún margen de error, más pequeño cuanto más próxima en el tiempo es la predicción. En medicina, los modelos de predicción tienen como objetivo principal encontrar el grupo de factores de riesgo que tengan la mejor capacidad predictiva de un resultado especifico.

Sin embargo, hay otros modelos cuyo objeto no es predecir. Por ejemplo el velocímetro de un auto es, en un sentido amplio, un modelo analógico que resume el movimiento del vehículo en un camino. Su lectura en un instante y en un determinado lugar no "predice" que dentro de una hora estaremos a tantos kilómetros de ese sitio, sino que tiene por objeto dar una forma de evaluar la situación en ese mismo instante. Lo que dice el velocímetro es que si todas las condiciones se mantuvieran inalteradas (sin frenadas, sin paradas a sacar una foto, sin curvas, contracurvas, subidas y bajadas) el vehículo avanzaría esa cantidad de kilómetros en esa cantidad de tiempo. En algún sentido, podríamos decir que el objetivo de este sencillo modelo es hacer una descripción de "cómo sería si..." Otro ejemplo de esto lo dan los modelos del funcionamiento del universo, que manejan escalas de tiempo inimaginables. En escalas cósmicas, hay modelos que permiten reconstruir escenarios como el inicio del universo, tanto como de eventos que sucederán miles de millones de años en el futuro. ¿Sucedieron, sucederán? Quizás sí, quizás no. No es eso lo importante. Lo que nos permiten estos modelos es la posibilidad de estudiar fenómenos que están más allá de nuestro alcance físico y temporal, pero que pueden aportar al conocimiento de cómo funcionan las cosas hoy.

Un ejemplo de esto es un modelo que muestra cómo dentro de 4.500 millones de años, nuestra galaxia, la Vía Láctea, y su vecina Andrómeda, que se están aproximando a una velocidad de unos 300 km/s (más o menos un millón de kilómetros por hora) empezarán a colisionar. La colisión se prolongará durante varios millones de años y terminará generando una nueva galaxia espiralada que se ha bautizado con el nombre de "Lactrómeda". Como predicción (¡vamos a morir!), resulta poco interesante (recordar que los dinosaurios poblaban la tierra hace sólo 65 millones de años), pero como proyección sí lo es, porque aporta a la comprensión de cómo es el funcionamiento del vasto universo en el que vivimos.

Las proyecciones de los modelos pueden ser a escalas astronómicas como es el caso del modelo anterior, o a tiempos más modestos, como unos cuantos años, pero, en cualquier caso, suelen ser tiempos más largos que los tiempos que toman la observación y la experimentación, y su interés fundamental radica en la posibilidad de entender cómo funcionarían las cosas en distintos escenarios posibles.

Los modelos matemáticos, un asunto aparte

"No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real"
Nikolái Lobachevsky (1792-1856)

Vamos a concentrarnos ahora en algunas cuestiones relativas a los modelos matemáticos. Para precisar, diremos que un modelo matemático es la expresión formal, mediante el uso del lenguaje matemático, de las relaciones entre los componentes de un sistema. Hay fundamentalmente dos procesos en la construcción de un modelo matemático: la selección de los componentes, variables y relaciones presentes en el sistema que se desea modelar, adecuada al nivel de detalle requerido, y la cuantificación de esas relaciones. Estas relaciones pueden ser descriptas por una ecuación sencilla (como el modelo del éxito de Einstein) o por una compleja red de ecuaciones interconectadas. El lenguaje simbólico de la matemática, que permite expresar ideas de gran complejidad, es una herramienta ideal para este fin.

Antes de seguir, permítaseme una breve digresión. De todos los modelos posibles (que son infinitos), ¿cómo elegir? Un criterio a usar es la Navaja de Occam o principio de economía o de parsimonia. Este principio hace referencia a un tipo de razonamiento basado en una premisa muy simple: en igualdad de condiciones, la solución más sencilla es probablemente la correcta. Este postulado señala (en latín) *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*, cuyo significado es "no ha de presumirse la existencia de más cosas que las absolutamente necesarias". Cada elemento extra que se agrega en el modelo conceptual lleva a una componente más en la formulación matemática del mismo, y modelos más complejos son matemáticamente más difíciles de tratar. Por lo tanto es necesario siempre evaluar si la adición de un nuevo elemento mejora cualitativamente los resultados del modelo en relación al esfuerzo que representa su formulación y manejo. Estas restricciones que se imponen en la descripción del sistema constituyen el conjunto de los supuestos del modelo del que ya hemos hablado: los supuestos se refieren a todas las condiciones bajo las cuales se definen los componentes del modelo.

¿Cómo debe ser un modelo matemático? Algunas de las características deseables de los modelos matemáticos son la elegancia de su formulación, su sencillez (la mayor de la que seamos capaces), y la máxima adecuación posible al sistema que se quiere modelar, atendiendo al objetivo y nivel de detalle que el investigador desea. Los modelos reproducen el funcionamiento de un sistema y generan valores de las variables de salida, o sea, resultados obtenidos a través del modelo (lo que nos interesa saber). Esta adecuación refiere a que estos valores que genera el modelo deben ser similares (aunque siempre tendrán un margen de error) a los que se observan en la realidad. Esto se conoce como la *verificabilidad* o *validez* del modelo, es decir, la capacidad que tiene el modelo de poder ser contrastado contra datos (resultado de observaciones), lo que permite medir su grado de exactitud. Además, no sólo debe *funcionar bien,* sino que debe hacerlo por las razones correctas.

Fases de la modelización

"Se cometen muchos menos errores usando
datos incorrectos que no empleando dato alguno"
Charles Babbage (1792-1871)

La construcción de modelos matemáticos puede resumirse en algunos "pasos", que pueden tener la utilidad de ilustrar esta parte del quehacer matemático, pero obviamente no es una regla. En primer lugar, ha de existir una elección de lo que se quiere modelar (y ha de haber una buena razón para ello). Luego, se deberán identificar los componentes del modelo y sus relaciones, que luego se traducirán en ecuaciones. Una vez que el modelo está armadito, usualmente contiene lo que llamamos *parámetros*, es decir, constantes indeterminadas que deberán ser reemplazadas por valores numéricos.

La construcción del modelo, que como ya dijimos es el resultado del conocimiento del sistema, de sus componentes y relaciones, suele incluir *datos*. Estos datos generalmente provienen de experimentos de laboratorio y/o de observaciones de campo, o de resultados alcanzados con anterioridad (por ejemplo datos ya publicados por otros investigadores). Esta información permitirá dar a los parámetros los valores numéricos adecuados. Esta inclusión de la "información de la realidad" en el modelo es lo que se conoce como *calibración* del modelo.

El próximo paso es la *validación*, que refiere a la comparación de los valores de salida del modelo con valores reales (empíricos) de dichas variables (lo que llamamos *verificabilidad* en la sección anterior). El objetivo de esta comparación es evaluar el error cometido por el modelo (que proviene tanto del conjunto de supuestos como de los errores de medición y experimentación) y determinar si este es un error que estamos dispuestos a tolerar. El conocimiento previo que el investigador tiene del sistema permite contrastar los resultados teóricos (el modelo conceptual y las hipótesis de funcionamiento del sistema) con lo que se observa en la realidad, y así validar o no el modelo.

Otra parte importante en la construcción de los modelos es lo que se conoce como *análisis de sensibilidad*. La pregunta acá es qué tanto se podrían modificar los resultados del modelo si los valores de las variables de entrada o los parámetros cambiaran un poquito. La importancia de este paso es radical, ya que si el modelo se dispara a valores totalmente distintos cuando se producen pequeñas perturbaciones en los valores numéricos de entrada o en los parámetros, no será un modelo muy confiable, ya que pequeños errores de medición podrían llevar a resultados muy diferentes.

Una vez que sabemos que el modelo "funciona" en esta realidad, podemos ponerlo a funcionar en otros escenarios hipotéticos, que nos permitan contestar la pregunta "¿qué pasaría si...?". Esta fase se la conoce como *simulación*. Es el proceso de obtener resultados del modelo independizándose de la realidad que le dio origen. Uno obtiene valores de la las variables de salida en tiempos futuros a partir de series simuladas de valores de las variables de entrada. Estas últimas pueden ser series de datos que son (aunque no necesariamente reales) de interés para ver precisamente "qué pasaría si..." Obviamente el proceso de construir un modelo no es un proceso lineal, sino que tiene sus idas y vueltas, sus ajustes, interpretaciones y reinterpretaciones que conducen a redefinir algunas de sus partes o su totalidad. Lo que sí es cierto es que es un proceso rico y muy creativo.

¿Cómo empezar?: De los modelos conceptuales a los modelos matemáticos

"Los primeros peldaños son siempre los más difíciles, hasta adquirir la coordinación necesaria. La coincidencia de nombre entre pie y pie hace difícil la explicación. Cuídese especialmente de no levantar al mismo tiempo el pie y el pie".
Julio Cortázar (1914-1984)
Instrucciones para subir una escalera (fragmento).

Como dijimos, un modelo conceptual suele ser un modelo predominantemente cualitativo. Uno no está interesado en cuantificar las relaciones que existen entre las partes del modelo, sino en explicar cuáles son y cómo se relacionan los elementos relevantes en la descripción del problema. Los modelos conceptuales pueden ser formulados rigurosamente mediante ecuaciones, transformándose así en modelos matemáticos. Independientemente de la forma que puedan adquirir los modelos conceptuales de las ciencias todos ellos tienen en común que son representaciones simplificadas e idealizadas, pero son lo más precisos y completos posible (y necesario), y son consistentes con el conocimiento científicamente aceptado hasta el momento de su formulación. Existen muchas variantes, con distintos grados de sofisticación, para describir un modelo conceptual.

La matemática se ha valido de muchos modelos conceptuales para plantear algunos problemas interesantes que le han sacado canas verdes a más de uno. Uno de los clásicos es el *problema de los puentes de Königsberg*. Este problema fue creado por Leonhard Euler, un matemático brillante del siglo XVIII, quien lo enunció más o menos así "*En la ciudad de Königsberg, en Prusia* (actualmente Kalingrado, donde nació Kant)*, hay una isla llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel. El río divide el terreno en cuatro regiones distintas, que por aquel entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados Puente del Herrero, Puente Conector, Puente Verde, Puente del Mercado*, *Puente de Madera*, *Puente Alto* y *Puente de la Miel. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes una sola vez.*" Este problema, que puede representarse gráficamente mediante un sencillo modelo conceptual (Figura 6), dio origen a la teoría de grafos (también llamada teoría de la posición), una fructífera rama de la matemática que forma parte de la topología, y que ha mostrado ser muy útil en la resolución de problemas complejos, como redes de comunicación, y muchos otros en las ciencias sociales y naturales.

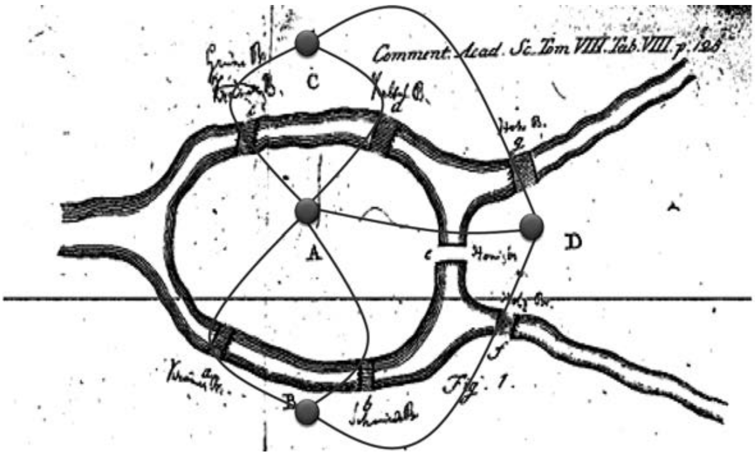

Figura 6. Mapa del río Pregel en Königsberg (por Leonhard Euler), que muestra dónde se encontraban los siete puentes. Sobre el mapa el modelo conceptual que plantea el problema.

En 1741, en su artículo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes* (*Solución de un problema relativo a la geometría de posición)*, Euler mostró que tal paseo es imposible, presentando una solución simple e ingeniosa[9]. También encontró una regla que respondía a la cuestión en general, cualquiera que fuese el número de puentes. Aquí la matemática levanta vuelo y se escapa del problema que le dio origen, llegando a un resultado que excede su necesidad, pero que aporta a la construcción del edificio matemático. Ya en el terreno de las anécdotas, podemos contar que dos de los siete puentes originales fueron destruidos por el bombardeo de Königsberg durante la Segunda Guerra Mundial. Otros dos fueron posteriormente demolidos y reemplazados por carreteras modernas. Los tres puentes restantes aún permanecen en pie,

9 Es muy sencilla, y puede leerse en http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/15-1-o-p.html

aunque sólo dos de ellos desde la época de Euler, pues uno de ellos fue reconstruido en 1935. Más adelante, mostraremos otro ejemplo de un modelo conceptual utilizado en la formulación de modelos matemáticos.

En la próxima parte del libro nos concentraremos en los modelos matemáticos en la biología, echando una mirada a los primeros modelos, a algunos otros que han hecho historia, miraremos algunas aplicaciones de modelos clásicos (una clásica y otra novedosa) y exploraremos en detalle un modelo desarrollado para responder a una pregunta específica dentro del contexto de una problemática que se presenta en la estepa norpatagónica, que tiene relaciones con aspectos productivos, ecológicos y de cambio climático.

-SEGUNDA PARTE-

Los reyes de la pasarela

Biólogos y matemáticos, una comunicación posible

"El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos"
Joseph Fourier (1768-1830)

La biología y la matemática son dos ciencias que poseen objetos de estudio y métodos bien diferentes[10]. La biología se ocupa del estudio de los organismos, desde los niveles celulares y moleculares hasta los más complejos niveles de organización en los que estos organismos se desarrollan. Esto incluye sus características y procesos, las relaciones al interior y entre esos niveles de organización, en diferentes escalas espaciales y temporales, y de la evolución de estos procesos, no sólo en la actualidad sino también en los que han ocurrido en los enormes tiempos geológicos. Las herramientas metodológicas básicas de la biología son la observación y la investigación de campo y los estudios de laboratorio, de donde surge la evidencia que dará las bases para poner a prueba las hipótesis primando un proceso inductivo, es decir, a partir del análisis de un cierto número de casos, se enuncia una generalidad. La matemática, en cambio, es una ciencia formal, que se vale del razonamiento lógico deductivo como metodología. Estudia las relaciones, formas y estructura de objetos ideales (que existen sólo en la mente de los seres humanos) dentro de un sistema formal. Especialmente, a la matemática no le interesa como objeto de estudio aquello que sus símbolos o ecuaciones representan. Los resultados de la matemática son aplicados a entes abstractos independientemente de su posible significado y de su origen.

La matemática a menudo se ha inspirado en problemas biológicos (o del mundo natural) y esto ha generado nuevos campos de estudio, mientras que la biología se ha beneficiado en muchas de sus áreas de desarrollo del uso del método y el lenguaje de la matemática. El origen de muchas ideas matemáticas es el resultado de un proceso que buscó entender y explicar hechos y fenómenos de la realidad. Sin embargo, una vez que esas ideas han tomado forma abstracta se independizan de toda necesidad de arraigo en el mundo real. El campo de estudio de la matemática es infinito, y sus únicos límites son los de la imaginación.

Otra cosa interesante es que si bien toda disciplina desarrolla una jerga que le es propia y acuña términos para referirse a cuestiones específicas de su campo, la matemática ha desarrollado además un lenguaje, un idioma que le es propio. Cuando hablamos de lenguaje, no sólo hablamos de términos, símbolos y notaciones, sino de una construcción formal y abstracta. La matemática dispone de un sistema de escritura complejo, que al estar regido por reglas y sintaxis propias, se parece a un idioma. De modo que es posible escribir cosas en "el idioma matemático", formulaciones muy concisas en cuanto a la forma y más fáciles de

10 Ver Apéndice.

manipular, en tanto uno sea un experto que conoce el idioma.

Sin embargo, aunque pudiera parecer que dos personas que estudian estas disciplinas pueden comunicarse tanto como dos seres de distintos planetas, las ciencias naturales, especialmente la física y la biología, se han valido muchísimo de los modelos matemáticos para explicar el funcionamiento de los sistemas naturales. Particularmente en la biología, hay una larga historia del uso de modelos en la descripción de procesos y en la modelización de sistemas complejos.

¿Para qué usar modelos? Hay varias buenas razones para que la biología, que es la ciencia de la variabilidad, haga uso de la matemática que es la ciencia de las formas y la abstracción. En primer lugar, un modelo logra condensar propiedades compartidas por una gran variedad de ejemplos únicos, en términos de unos cuantos (mejor si son pocos) parámetros y reglas. Esto le permite al biólogo pensar en términos de los procesos que está considerando, más que de las particularidades del sistema que está estudiando, es decir, le puede ayudar a extraer lo esencial dentro de lo complejo y, también, percibir dentro de esa complejidad, propiedades del sistema que no se sabía que éste poseía. También permite contestar preguntas relativas a las consecuencias de posibles cambios en las condiciones bajo las cuales el sistema funciona.

Así el modelo puede proveer de un lenguaje común en el cual puede ser expresado cada uno de los ejemplos únicos. Y esto es posible, pueden hacerse más evidentes sus propiedades relativas a cualquier otro ejemplo, y quizás relativas a algún ejemplo ideal (como las naranjas del principio). Quizás esta idea se haga más evidente pensando en que Newton, seguramente nunca tuvo a la mano un cuerpo perfectamente libre de rozamiento, y Boyle nunca vio un gas ideal, sin embargo la Ley del Movimiento de Newton y la Ley de Boyle para gases ideales han tenido un enorme valor para la ciencia.

En la siguiente sección veremos algunos modelos que harán evidente esto último. Mostraremos cómo dentro de su sencillez, modelos llenos de restricciones pueden echar luz sobre las consecuencias de supuestos que elegimos hacer a la hora de construir los modelos, y ser útiles en muchos aspectos.

Los primeros modelos matemáticos en biología

"Es mejor tener una respuesta aproximada
a la pregunta correcta que una respuesta exacta a la
pregunta equivocada"
John Wilder Tukey (1915 – 2000)

El modelo matemático en biología más antiguo que se conoce se atribuye a Leonardo de Pisa, que vivió en la primera mitad del siglo XIII. Leonardo, más conocido como *Fibonacci* escribió en su *Liber abacus* el siguiente enunciado: *"Un hombre ha colocado una pareja de conejos en un sitio circundado por paredes en todos sus lados. ¿Cuántas parejas de conejos generará la pareja inicial durante un año si se supone que cada mes se produce una nueva pareja, que comienza a ser reproductiva después de cumplir su segundo mes?"*

¿Por qué se entiende a este enunciado como un modelo? Estrictamente hablando se trata de una pregunta, pero desemboca rápidamente en un modelo. En este enunciado hay involucrados varios elementos que corresponden a un modelo: en primer lugar se da una expresión explícita de los supuestos: a) los conejos están aislados, es decir no se sufren procesos de migración, depredación o competencia con otras especies, y b) tienen un ritmo reproductivo parejito y constante, y lo mismo pasa con su maduración. Hay otros supuestos que no están explícitos como el hecho de que el espacio (rodeado de paredes) es de goma como para albergar miles de miles de conejos, que este ritmo reproductivo no se ve afectado por el apelotonamiento de conejos dentro del corral, que los recursos (además del espacio) son ilimitados, que el tiempo de gestación de los conejos es ligeramente menor a un mes, de modo que cuando vamos a contar conejos ya están los nuevos, que no hay mortalidad a lo largo del año,... en fin, unas cuantas cosas que hace que este modelo se parezca más a un cuento de ciencia ficción que a lo que pasa con los conejos.

Los conejos del amigo de Fibonacci

El enunciado del modelo anterior se puede escribir en forma muy sencilla usando una ecuación (denominada *por recurrencia*) que representa el número de parejas de conejos en cualquier mes t. Llamémosla F(t). La t entre paréntesis indica a qué mes corresponde el número de parejas contado, que varía con el tiempo. Si el hombre de Fibonacci partió con una parejita recién nacida, al primer mes tendrá sólo una pareja porque aún no será reproductiva, esto es, $F(1) = 1$ (el número de parejas en el mes 1 (el 1 entre paréntesis) es 1 (el 1 después del signo =). Puesto que seguirá sin ser reproductiva hasta después de haber cumplido el segundo mes, también en el segundo mes será 1, o sea, F(2) = 1. Al tercer mes tendremos a la pareja original (digamos los Adán y Eva de los conejos del amigo de Fibonacci) y su primera progenie, es decir, dos parejas: F(3) = 2. Al cuarto, deberíamos sumar la pareja original, una nueva progenie y la progenie anterior, que aún no es reproductiva, o sea tres parejas: F(4) = 3. Al quinto mes, la pareja original habrá tenido tres tandas de hijos, y la primera progenie ya habrá dado a luz a su primera parejita, es decir, la familia ya tendrá 5 parejas en casa: F(5) = 5. Una generación más y serán 8. (Figura 7)

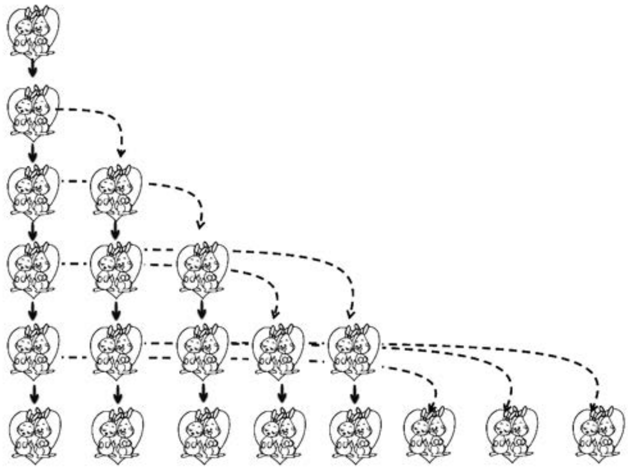

Figura 7: Los conejos de Fibonacci.
Las flechas llenas indican la misma pareja, las punteadas, la progenie.

Así, los números de conejos en el tiempo serán 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... Como el lector atento habrá podido observar, cada número se obtiene de sumar los dos anteriores. Es decir, sabiendo que en el primer mes y en el segundo mes hay una pareja, sabremos que en el tercero hay 2 = 1 + 1, en el cuarto hay 3 = 2 + 1, en el quinto 5 = 3 + 2 y así siguiendo. En términos generales, la cantidad de parejas de conejos en cualquier mes será la suma de la cantidad de parejas de los dos meses anteriores. Eso se puede escribir sencillamente como F(t) = F(t-1) + F(t-2), para cualquier t posterior a 2, sabiendo que F(1) = 1 al igual que F(2). El proceso que se desarrolló aquí es sencillo: se delimitó claramente el fenómeno que se quiere estudiar, se enunciaron los supuestos bajo los cuales se va a estudiar dicho fenómeno y por último se dedujeron las consecuencias matemáticas que se desprenden de estas condiciones. Más allá de su carácter alejado de la realidad, modelos como éste tiene la propiedad de mostrar cómo serían las cosas a la luz de los supuestos establecidos, es decir, dan una herramienta para la evaluación de estos supuestos.

Johannes Kepler mostró que si vamos dividiendo entre ellos números de Fibonacci consecutivos cada vez mayores, su cociente se acerca al valor 1.618033... Esta constante se denomina número de oro, número áureo o divina proporción, al que se le atribuyen propiedades estéticas.

Thomas Malthus y el "boom" de los modelos demográficos

Unos cuantos años después de este planteo que hiciera Leonardo de Pisa en el siglo XIII, los modelos matemáticos en dinámica de poblaciones tuvieron un enorme desarrollo a partir de la formulación del famoso *Modelo de Malthus* de crecimiento poblacional. Si bien es cierto que fue Malthus el que se hizo famoso, hay algunas dudas sobre si fue o no el primero en enunciar esta ley de crecimiento. Hay unos trabajos de unos demógrafos ingleses (JGraunt, Matthew Hale y William Petty) que habían elaborado un modelo de crecimiento poblacional aplicado a poblaciones humanas en el siglo XVII. En cualquier caso, fue Malthus quien puso en las vitrinas de la ciencia esta idea del crecimiento demográfico.

Thomas Malthus (1766-1834) era un clérigo británico, erudito en economía y demografía. Su sencillo modelo de crecimiento poblacional dice que en condiciones ideales, la variación de la cantidad de individuos de una población es proporcional a la cantidad de individuos presentes en cualquier momento (esta es una observación que se debe a Linneo a principios de los 1700). Esa proporcionalidad está dada básicamente por un balance entre la natalidad y la mortalidad. Si le damos el nombre N a la cantidad de individuos de la población en cualquier momento y N' a su variación[11], el modelo que acabamos de describir puede escribirse como la ecuación $N' = k.N$ donde k es la constante de proporcionalidad de la que hablábamos. Este modelo es conocido como modelo de *crecimiento malthusiano* o de *crecimiento exponencial*. La solución de esta ecuación (que requiere de un mínimo conocimiento de cálculo) es conocida como función exponencial y se expresa como $N(t) = N_0.e^{kt}$, donde N_0 es la cantidad inicial de individuos de la población (para $t = 0$), "e" es la constante de Euler[12], (aproximadamente 2,73) y k la constante de proporcionalidad que mencionamos recién. Un detalle a tener en cuenta es la influencia del valor de k en la solución del modelo. N es una cantidad positiva, por lo tanto el signo de N' depende del signo de k (¿se acordará el lector de la famosa regla de los signos?). Si k es una cantidad positiva (podríamos decir que ocurren más nacimientos que muertes), N', que es el resultado de multiplicar la constante por la cantidad de individuos que tiene la población en ese momento, será positiva. Una variación positiva implica que a medida que el tiempo pasa, la cantidad de individuos de la población aumentará (mostrando un crecimiento exponencial). Sin embargo, si k es una constante negativa (si ocurren más muertes que nacimientos), N' será negativa. Una variación negativa significa que a medida que el tiempo pasa, la cantidad de individuos de la población decrecerá, hasta volverse prácticamente igual a cero (formalmente nunca alcanzarán ese valor, pero como la soledad es mala consejera, en una población donde queda un solo individuo, el destino está escrito). Esta variación se conoce como decrecimiento exponencial. Si siempre se consideran las constantes positivas, esta relación puede escribirse como $N' = -k.N$, cuya solución es $N(t) = N_0.e^{-kt}$. Aquí como todo

11 El modelo de Fibonacci es un modelo de variación discreta, ya que el tiempo se considera variando en unidades de un mes. En este caso, aunque la cantidad de individuos de una población es una cantidad discreta (cada nacimiento y cada muerte agregan o quitan 1 individuo a la población), la aproximación continua (es decir, suponer que N puede tomar cualquier valor real) es lo suficientemente buena, vale decir, el error que se comete con este supuesto es despreciable en relación a la versatilidad que ofrece la expresión continua del modelo.

12 La constante de Euler es un número irracional (con infinitas cifras decimales no periódicas), base de los logaritmos neperianos.

es positivo, N_0, e, t y k, el signo menos delante del producto k.t asegura que esa cantidad es negativa). Los gráficos de la Figura 8 muestran las curvas de crecimiento y decrecimiento exponencial para el modelo malthusiano.

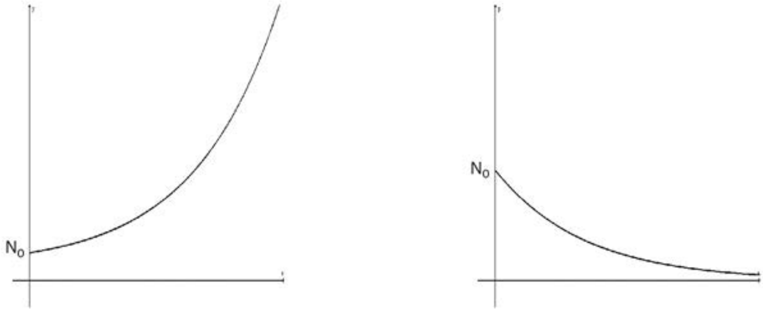

Figura 8: Curvas de crecimiento y decrecimiento exponencial para el modelo malthusiano. La de la izquierda corresponde a una constante de proporcionalidad positiva y la de la derecha, a una negativa.

¿Qué son esas “condiciones ideales” a las que hace referencia el modelo? Constituyen el conjunto de supuestos bajo los cuales este modelo lograría describir la variación de la cantidad de individuos de la población a lo largo del tiempo. En principio uno ha de suponer que todos los individuos que conforman este grupo son, en promedio, iguales (es decir, no hay diferencias debidas a la edad o el sexo u otras características individuales), que están distribuidos homogéneamente en el espacio, que las tasas de natalidad y mortalidad se mantienen inalteradas en el tiempo e independientes de las condiciones ambientales o de la densidad de individuos en la población, y que hay recursos (por ejemplo alimento y espacio) para que todos vivan felices.

Pero las cosas no son tan así…

Hay claros ejemplos de que este modelo no funciona en la realidad. El biólogo argentino Jorge Rabinovich en un librito muy ameno e interesante llamado “Ecología de las poblaciones animales” que editó la OEA allá por 1978 en una colección de ciencias sin desperdicio, muestra un ejemplo poco agradable (*biodesagradable* diría una amiga mía) pero convincente de que el crecimiento ilimitado es una imposibilidad, y que para modelar la dinámica poblacional de cualquier especie es necesario establecer condiciones más restrictivas. Parece que la mosca (la mosca común, esa que anda revoloteando por las casas en cualquier lugar del mundo) tiene una capacidad reproductiva tremenda: pone unos 500 huevos en su vida, y en un año puede alcanzar las 18 generaciones. Calcula el autor que si la mosca pudiera poner al máximo este potencial reproductivo como lo predice el modelo exponencial, en cinco meses, la superficie de la tierra estaría cubierta por una capa de moscas de 16 metros de espesor, y que en un año habría 10^{80} moscas (un 1 seguido de 80 ceros). ¡La cantidad de moscas sería unas 100 veces más que la cantidad de electrones que se ha estimado hay en el universo! Por suerte para nosotros (y para la mosca, porque no debe ser divertido vivir tan apretados), el modelo exponencial no describe adecuadamente la realidad a largo plazo.

Ciertamente Matlhus tenía en vista una catástrofe cuando publicó su "*Ensayo sobre el principio de la población*" en 1798, ya que pronosticó el mismo destino que la mosca para la población humana. No es claro el por qué, pero la primera edición (el libro se reeditaría 5 veces) fue anónima. Dicen las malas lenguas, que fue debido a que sus ideas se oponían al optimismo antropológico de la Ilustración, que anticipaba una futura edad de oro de la humanidad. Malthus veía que la gente tenía hijos a tasas que superaban en mucho la capacidad de producir alimentos. Decía *"Mas en el hombre, los efectos de este obstáculo (límites naturales de espacio y alimento) son muy complicados; guiados por el mismo instinto, le detiene la voz de la razón que le inspira el temor de ver a sus hijos con necesidades que no podrá satisfacer. Si cede a este justo temor es muchas veces por virtud. Si por el contrario le arrastra su instinto, la población crece más que los medios de subsistencia"*. La población humana tiene la capacidad de duplicar su cantidad cada 10 a 15 años. Ya somos algunos más que siete mil millones… (el 31 de octubre de 2011 nació en Filipinas la beba número siete mil millones)

Esta idea de Malthus, se conoció como "la catástrofe malthusiana", cuya ley (el modelo exponencial) predecía que los recursos alimentarios serían insuficientes para mantener a la población mundial y sobrevendrían graves guerras y hambrunas que diezmarían a la humanidad. Malthus decía en su libro *"Al final del primer siglo la población será de 176 millones y las subsistencias no llegarán para 55 millones; de modo que una población de 121 millones de habitantes tendría que morir de hambre"*. Pero Malthus no dijo que la humanidad enfrentaría una catástrofe inevitable en el futuro. Más bien ofreció una teoría social evolutiva de la dinámica de la población humana. Malthus fue reconocido por Darwin como uno de los más grandes filósofos estadistas de la historia. Se dice que la lectura del *Ensayo sobre el principio de la población* de Malthus le dio a Darwin una pista para una de sus ideas fundamentales: "*Todas las especies producen más descendencia de la que puede sobrevivir, dado que los recursos son limitados. Al regularse el tamaño de las poblaciones, se evita la superpoblación*".

El gráfico de la Figura 9 muestra los datos de la población estimada para Europa (incluyendo Rusia), América del Norte y Oceanía (puntos oscuros) y el resto de los continentes (puntos claros) desde el año 500 d.C. hasta el 1950. Las líneas son las previsiones de Malthus sobre estos datos. Es decir, el hombre no estaba tan equivocado.

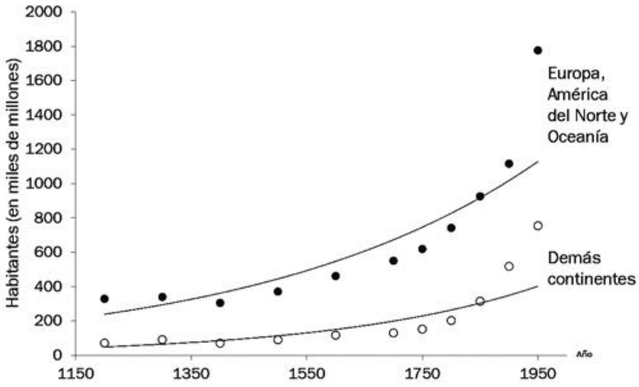

Figura 9: Crecimiento de la población mundial desde el año 450 al 1950. Los puntos oscuros corresponden a Europa, América del Norte y Oceanía y los puntos claros al resto de los continentes. Las líneas corresponden a las predicciones del modelo de Malthus.

De la teoría de Malthus hay varios puntos que establecieron reglas importantes sobre la dinámica poblacional, principalmente que los números poblacionales están regulados por el balance natalidad-mortalidad, que cuando es positivo incrementa la productividad y estimula el crecimiento futuro de la población, pero que eso tiene un límite, como veremos enseguida.

Un modelo un poco más ajustado a la realidad

Es obvio que los supuestos del modelo de crecimiento de Malthus son unos cuantos, poco realistas, pero la verdad es que en ocasiones este modelo es útil y aplica a varias poblaciones – al menos por un rato – y a otras cosas interesantes también. Por ejemplo, podría aplicarse a la circulación de información en las redes sociales. En una red social como Facebook por ejemplo, cada uno tiene un círculo de amigos o conocidos que puede ser amplio o reducido, no importa. Muchos de esos contactos son comunes con otras personas, pero con seguridad cada uno de ellos tendrá contactos que no comparte con los demás, y así siguiendo… Supongamos que ponemos una noticia súper interesante en nuestro muro. Independientemente del número de los contactos, por cada contacto nuestro que lo comparta, lo verán todos sus contactos, y por cada uno de ellos que lo haga, lo verán todos los propios. Obviamente, la difusión del chisme crecerá exponencialmente (al menos al principio) como lo prevé el modelo de Malthus. Y este ejemplo nos viene como anillo al dedo para analizar un segundo modelo, un poco (no mucho) más realista, pero que prevé la existencia de limitaciones razonables al crecimiento malthusiano. Lógicamente, los contactos nuevos que reciben la noticia tienen un tope. No pueden crecer por encima del número de cuentas existentes. Si hay 500 millones de usuarios en Facebook, el chisme, por jugoso que sea no puede llegar a más de conseguir 500 millones de usuarios enterados.

Las pautas que sugirió el trabajo de Malthus llevaron a la formulación de un modelo apenas un poco más complejo que postula que una población no puede crecer más allá de cierto límite, establecido principalmente por la disponibilidad de recursos. Después de haber leído el trabajo de Malthus, el matemático y filólogo Pierre Verhults, publicó en 1838 un modelo que tomaba en cuenta este detalle, que se conoce como *modelo logístico*. Volvamos al tema de los chismes. Consideremos una población cerrada. Aquí “cerrada” se refiere a que no hay “migración” de participantes, es decir, no se incorporan nuevos individuos ni se van, por ejemplo un colegio, un pueblo, Facebook (en períodos cortos de tiempo). En esta población habrá dos clases de personas: las que escucharon el chisme y las que no. La chance de que dos personas, una de cada clase se encuentren es el producto (la multiplicación) de esas dos cantidades de personas. Por ejemplo, supongamos que son cinco: dos que saben el chisme y tres que no. ¿Cómo se pueden encontrar estas personas? Cada una de las que sabe se puede encontrar con cada una de las que no sabe: los encuentros posibles son 6 (3 contactos por cada uno de los que sabe) (ver Figura 10).

La gente no es toda chismosa, y podemos suponer que no todo encuentro producirá la transmisión del rumor. Es decir, podemos decir que la variación del número de personas que conoce el rumor será proporcional a la cantidad de encuentros posibles entre los que lo escucharon y los que no (o, dicho de otra manera, sólo una cierta proporción de los encuentros producirá una transmisión exitosa).

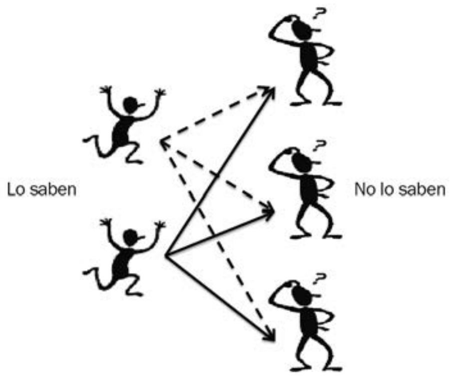

Figura 10: Los encuentros posibles entre las personas que conocen un rumor y las que no lo conocen es el producto del número de personas que lo saben por el de las personas que no lo saben.

Para no complicarnos la vida con cantidades vamos a hablar de porcentajes. Supongamos que en un determinado momento el porcentaje de personas que conocen el rumor es N. Por lo tanto el porcentaje de los que no lo escucharon es 100% – N, es decir, si el 30% lo sabe, el 70% no. De acuerdo a lo que ya hemos analizado, el número de encuentros posibles entre estos dos grupos de personas es su producto: N.(100 – N) (si 30 lo saben y 70 no, hay 30×70 = 2.100 posibilidades de que uno que sabe le cuente a uno que no sabe). Si llamamos N’ a la variación de ese porcentaje, el modelo que acabamos de describir se puede escribir como N´= k. N.(100 – N), donde k es una constante que mide la tasa con que se difunde del chisme.

Analicemos un poquito este modelo. Si el porcentaje de personas que conoce el rumor es bajo (supongamos 1 en 1000, es decir 0,1%), la diferencia 100 – N será relativamente cercana a 100% (en nuestro ejemplo 99,9%), es decir que para valores bajos de N, la variación del porcentaje de personas que conocen el rumor es casi casi proporcional a la cantidad de personas que lo conocen, es decir $N' \approx \alpha.N$, que tiene la forma del crecimiento malthusiano que acabamos de ver. Es decir, cuando los conocedores son pocos, el rumor se expande exponencialmente. A medida que la proporción de los que lo saben aumenta, las chances de encontrarse con uno que no lo sabe disminuyen, ya no quedan tantos que ignoren la noticia, y tener éxito en pasar el chisme se vuelve una tarea difícil. En el otro extremo, imaginémonos un momento en el que casi todo el mundo lo sabe, es decir, el porcentaje de personas conocedoras es casi 100%, pongamos por ejemplo 99,9% (1 en 1000 ignora la noticia, clásicamente el cónyuge engañado). En este caso, la diferencia 100% – N será casi 0%, es decir, que la variación N' será aproximadamente cero, y la proporción de personas que conoce el chisme irá acercándose al 100%, que sería el nivel de saturación del sistema.

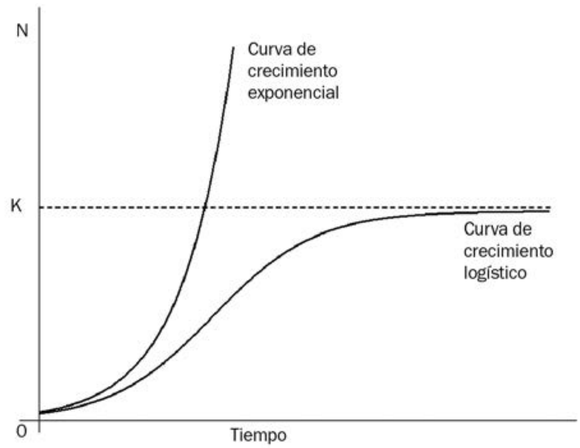

Figura 11: Curvas de crecimiento exponencial y logístico. La línea horizontal indicada con K señala la capacidad de carga del ambiente (nivel de saturación) en el modelo logístico.

La Figura 11 muestra la gráfica de una curva que responde a este modelo, conocida como *curva sigmoidea* (por su forma de S) o *curva de crecimiento logístico*, comparada con la curva de crecimiento exponencial prevista en el modelo de Malthus. Esta curva muestra un crecimiento cada vez más fuerte hasta un punto de inflexión (donde la gráfica cambia de curvatura) y luego de eso un crecimiento amortiguado hasta alcanzar un trazo casi horizontal.

Verhulst desarrolló su trabajo para describir el crecimiento limitado de una población biológica. Su formulación se refería a una población que crecía casi con las mismas reglas que en el modelo malthusiano, pero con la introducción de un nuevo concepto que llamó la *capacidad de carga del ambiente* (usualmente denotada con la letra K), es decir, una cantidad máxima de individuos que el ambiente podía soportar (lo que antes llamamos el nivel de saturación del sistema). Por lo demás estos supuestos eran los mismos que los del modelo de Malthus: que la población no sufre procesos de migración, que los individuos tienen la misma capacidad reproductiva y tasa de mortalidad independiente de la edad y el sexo, que estos valores no cambian con el tiempo, es decir que las condiciones ambientales (excepto la cantidad de individuos de la propia especie) no influyen en estos procesos, y que no influyen otros procesos como la depredación. Otro supuesto que se agrega a estos es que, además de que el ambiente posee una capacidad limitada de soportar individuos (por la disponibilidad de recursos) es que el efecto de la densidad de individuos en el ambiente se ve reflejado instantáneamente en la tasa de variación de la población.

Los modelos logísticos en la vida cotidiana

Las condiciones naturales de crecimiento de una población distan mucho de ser las ideales postuladas por el modelo, incluso considerando la capacidad de carga del ambiente, debido a muchos factores, pero baste mencionar algunos para saber de qué estamos hablando. Las variaciones climáticas, la heterogeneidad ambiental, la presencia (y variación) de otros organismos que comparten el ambiente y los recursos, la ocurrencia (eventual o sistemática) de disturbios que alteran las condiciones ambientales, son ejemplos de cosas que pueden influir en la demografía de cualquier población y que el modelo de Verhulst no considera.

Sin embargo, estos modelos sencillos y llenos de supuestos que los alejan de las condiciones reales tienen aplicaciones muy concretas y frecuentes. Por ejemplo si se considera el crecimiento, ya no de una población, sino de un organismo, las curvas de crecimiento exponencial y logístico son las que usa el médico para controlar la talla, el peso y el índice de masa corporal de los niños y adolescentes. Constituyen el indicador clínico más comúnmente usado para determinar los patrones de crecimiento.

El crecimiento individual suele expresarse como la variación de una dimensión cualquiera (generalmente el peso o la talla) en función de la edad. El gráfico resultante es generalmente una curva de tipo sigmoidea, lo que significa que un individuo promedio creciendo en condiciones normales no puede sobrepasar un peso máximo, como tampoco puede crecer indefinidamente. Estas curvas son obtenidas a partir de millones de datos de niños medidos y pesados durante su desarrollo y constituyen lo que se considera un “crecimiento normal”.

Pero como sabemos, no todos crecemos igual, ni a la misma velocidad, ni la misma medida. De modo que estas curvas “promedio” suelen venir acompañadas de otras curvas que siguen el mismo patrón de crecimiento, usualmente llamadas *cuantiles* o *percentiles*, que indican los rangos de variación de la variable considerada (por ejemplo el peso, como muestra el gráfico de la Figura 12) para un cierto porcentaje de la población estudiada.

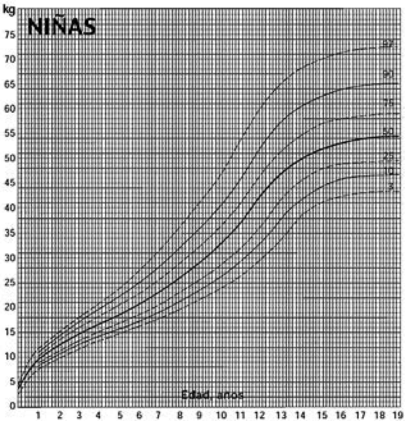

Figura 12: Variación en el peso (en kg) de niñas de 0 a 19 años[13].
La línea gruesa muestra el peso de la mitad de las niñas evaluadas.
Las demás líneas muestran las bandas de variación para distintos porcentajes de la población.

Las curvas "externas" indicadas con los números 97 y 3, indican que el 3% de las niñas evaluadas tendrán un peso inferior al previsto por la curva de acuerdo a su edad y otro 3% tendrá uno superior (el 97% de las niñas tendrán un peso inferior a la curva 97). La curva gruesa, indicada con 50, es la que corresponde a la mitad de las personas evaluadas (conocida como *mediana*). La forma plana que adoptan estas curvas al final, muestran que las personas normalmente no superarán mucho ese peso después de los 19 años. Esto, en condiciones ideales de salud, obviamente.

Dime cuántos isótopos te quedan....

Otra de las aplicaciones de este modelo sencillo de decrecimiento exponencial es la ley de decaimiento radiactivo. El decaimiento radiactivo se caracteriza por la descomposición espontánea de un núcleo, generando núcleos de menor masa, partículas pequeñas y energía. El fenómeno radiactivo no significa que todos los núcleos de un determinado elemento liberan partículas simultáneamente, sino que es un proceso paulatino, lento o muy rápido dependiendo del isótopo.

Uno de los métodos que se utilizan para datar fósiles es el *Método del Carbono 14* (C^{14}), también llamado *radiocarbono*. El C^{14} es un isótopo del carbono producido de forma continua en la atmósfera como consecuencia del bombardeo de átomos de nitrógeno por rayos cósmicos. En 1946 el químico Willard Frank Libby recibió el Premio Nobel por su descubrimiento de la existencia natural y producción del radiocarbono en la atmósfera. Este isótopo está presente en todos los materiales orgánicos. Al realizar la fotosíntesis, las plantas fijan C^{14} y la proporción de este isótopo en el organismo es similar al de la atmósfera durante la vida de la planta.

13 Lejarraga H. y J. Orfila (1987) Guías para la evaluación del crecimiento. Archivos de la Sociedad Argentina de Pediatría 85:209-222. Con autorización de la Sociedad Argentina de Pediatría.

En los animales estos niveles se adquieren por la ingesta directa o indirecta del material vegetal. Al morir el organismo, no hay forma de incorporar más C^{14}, de modo que comienza el proceso de decaimiento radiactivo en el que el carbono acumulado comienza a transformarse nuevamente en nitrógeno. El isótopo C^{14} tiene una vida media de 5730 años, lo cual significa que si hay una determinada cantidad de átomos de C^{14} al morir el organismo, transcurridos 5730 años esa cantidad se verá reducida a la mitad, y en 5730 años más, quedará la cuarta parte (la mitad de la mitad). La variación de la cantidad de isótopos de C^{14} presentes en un organismo a lo largo del tiempo (después de su muerte) puede pues expresarse como $P' = -k.P$, (donde k es una constante positiva) que, como vimos recién, representa que la variación de P como una disminución en el tiempo.

Haciendo una cuenta sencilla es posible determinar el valor de esa constante de proporcionalidad, sabiendo que transcurridos 5730 años, cualquier cantidad que tengamos de átomos de carbono se verá reducida a la mitad. Es decir, si inicialmente el organismo tiene una cantidad P_0 isótopos de C^{14}, tendremos que su cantidad al cabo de 5730 años será la mitad de P_0, o sea $P(5370) = P_0.e^{-k.5730} = P_0/2$. No es complicado determinar que k aproximadamente vale 0,00012. Si encontramos un fósil con una determinada cantidad de isótopos de C^{14} en el presente, podremos deducir a partir de esta sencilla fórmula, cuántos años hace que el organismo murió.

Pero... (como siempre y como en cualquier modelo), este método de datación de fósiles tiene sus limitaciones debido a varias cosas, algunas relacionadas con el modelo y otras con algunas restricciones propias de nuestros instrumentos de medición. Uno de los supuestos de este modelo es que la cantidad de isótopos radiactivos en la atmósfera es constante (serían nuestras “condiciones ambientales”), cuando en realidad se ha mostrado que no lo es. Hoy se conoce con un margen de error de entre 1 y 10 años la variación de la concentración de C^{14} en la atmósfera para los últimos 15.000 años, por lo que puede corregirse la estimación que proporciona el modelo. La edad fósil así hallada se denomina “edad calibrada”. La otra limitación no se debe al modelo sino a la capacidad de nuestros instrumentos para medir con precisión cantidades muy pequeñas de átomos. Debido a ello, hasta hace pocos años, el límite de la técnica de datación por radiocarbono rondaba los 35.000 años, pero a partir del uso de un espectrómetro de masas con acelerador de partículas este problema se ha resuelto en parte, lo que ha permitido extender el rango de la técnica hasta los 45.000 años. Este rango es archisuficiente para estudios antropológicos, sin embargo, la paleontología se ve en problemas con sucesos que van mucho más atrás. Actualmente se están desarrollando métodos basados en isótopos de elementos tales como el potasio y el uranio, pero el principio matemático es el mismo: el modelo de Malthus.

Los modelos de crecimiento de una población pueden seguir complejizándose al agregar otros elementos que consideren mejores adecuaciones a las condiciones “reales” en las que crece una población. Como el lector podrá imaginar este es un campo que ha alcanzado enormes grados de desarrollo.

La difícil tarea de convivir

"Cada mañana, en el África, una gacela se despierta; sabe que deberá correr más rápido que el león, o éste la matará. Cada mañana en el África, un león se despierta; sabe que deberá correr más rápido que la gacela, o morirá de hambre. Cada mañana, cuando sale el sol, no importa si eres un león o una gacela, mejor será que te pongas a correr".

Relato africano anónimo

Vamos a agregar ahora un ingrediente más a los modelos de crecimiento poblacional que vimos en la sección anterior, complejizando un poco el asunto. Uno de los supuestos que utilizamos es el de un ambiente carente de amenazas para la supervivencia de los individuos de la población excepto la limitación que imponen los recursos del ambiente. Cierto es, sin embargo, que como están organizadas las cosas nadie vive solo, ni siquiera solo con sus congéneres, y quien no sirve de comida a alguien, se come a alguien (planta o animal).

Supongamos que tenemos dos especies que conviven (no muy felizmente) en un ambiente siendo una especie presa de la otra, por ejemplo una población de conejos y una de zorros. En este modelo ideal de la convivencia entre dos especies, supondremos que los conejos, en ausencia del depredador, tendrían un desarrollo poblacional de acuerdo a las leyes del crecimiento exponencial (aunque también podríamos suponer un crecimiento logístico o cualquier otro). En cambio, supondremos que la población de zorros decrece exponencialmente en ausencia de su presa, es decir, supondremos que siendo los conejos su única fuente de alimento, en su ausencia, la población de zorros disminuirá hasta su desaparición. Por otra parte, y en forma análoga a los modelos anteriores de crecimiento poblacional asumiremos que el ambiente mantiene sus condiciones inalteradas o, en cualquier caso, sus alteraciones no afectan las tasas de mortalidad y natalidad. Para estas condiciones tendremos pues armadita la mitad del modelo: como ya hemos establecido, una ecuación para la variación de la especie presa (en ausencia del depredador) que llamaremos P' y una para la es especie depredadora (en ausencia de la presa) que llamaremos D', que escribiremos como $P' = \alpha P$ y $D' = -\beta D$. En estas ecuaciones α y β son las constantes de proporcionalidad (positivas) que describimos en las secciones anteriores.

Sobre cómo funcionan las cosas cuando conviven zorros y conejos

Ahora bien, la especie depredadora buscará presas para alimentarse, de modo que de todos los encuentros posibles entre un zorro y un conejo, una proporción resultará en una cena para el depredador y una baja para la población de presas. Como analizamos en el caso del chisme, y salvando las distancias porque acá las cosas no son tan graciosas, los encuentros posibles entre todos los depredadores y todas las presas se calculan como el producto de las cantidades poblacionales de ambas especies en cada momento, es decir P.D. Como dijimos, no todo encuentro es exitoso para el depredador, de modo que sólo una proporción de esos encuentros resultará en un beneficio para la población de zorros, mientras que resultará en un perjuicio para la población de conejos.

Así que la variación de ambas poblaciones podrá reescribirse agregando el efecto (favorable o desfavorable) de la depredación en las ecuaciones poblacionales del depredador y de la presa. El efecto de la depredación no representará la misma magnitud para la población de depredadores como para la de presas, por lo que estas dos nuevas constantes de proporcionalidad no necesitan ser las mismas (es decir, si una persona se come un pollo por ejemplo, será una baja para la población de pollos, pero, por suerte, no necesariamente a raíz de eso tendrá un hijo). Para la presa, la variación poblacional se verá disminuida en una cantidad proporcional al número de encuentros, digamos, $-\gamma.P.D$, mientras que para la población de depredadores, los encuentros exitosos con la presa representarán un beneficio y por tanto, verá aumentada su variación poblacional, también en una cantidad proporcional a ese número de encuentros, digamos $\delta.P.D$, (siendo γ y δ cantidades positivas). Nuestras ecuaciones serán entonces $P' = \alpha P - \gamma.P.D$, y $D' = -\beta D + \delta.P.D$. Esta representación se conoce como *sistema de ecuaciones diferenciales*, conocido como Modelo de Lotka-Volterra.

Este modelo no tiene solución analítica, es decir, por más que hagamos malabarismos no podremos encontrar una expresión que represente cómo varía la cantidad de individuos de cada especie con el tiempo. Sin embargo, hay varias cosas interesantes que podemos analizar sin encontrar una solución explícita[14]. En cada momento el sistema tendrá una determinada cantidad de depredadores y una determinada cantidad de presas. Usando la notación que introdujimos para los conejos del amigo de Fibonacci, podríamos decir que en cualquier tiempo t tendremos una cantidad de presas P(t) y una cantidad de depredadores D(t). Esta situación se puede representar en un gráfico bidimensional donde cada eje representa la cantidad de individuos de cada especie (Figura 13).

14 Estos sistemas tienen soluciones numéricas a partir de los cuales se puede “ver” cómo es la evolución de los números poblacionales a través del tempo.

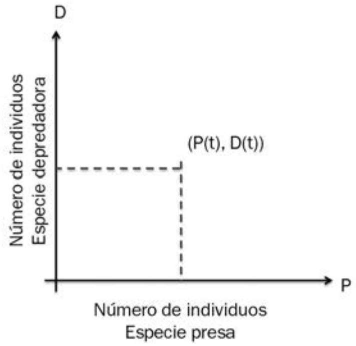

Figura 13: Representación gráfica del estado del sistema en cualquier momento t. Las coordenadas del punto respecto de cada eje representan el número de individuos en cada población en ese instante.

Variaciones de zorros y conejos

La combinación del número de depredadores y el número de presas en el momento t se puede graficar como un punto en este plano, estando el tiempo tácito en esta representación. Estrictamente, nuestros gráficos estarán restringidos al primer cuadrante de este sistema de representación, ya que sólo tienen sentido una cantidad positiva (o a lo sumo cero) de individuos de cada población. En la medida que el tiempo pasa, los números de depredadores y de presas cambiarán. Si aumenta el número de presas, el puntito se correrá hacia la derecha y si disminuye, hacia la izquierda. Análogamente, si el número de individuos depredadores aumenta, el puntito se correrá hacia arriba y si disminuye, hacia abajo. El cambio conjunto de ambas poblaciones hará que el puntito de desplace por el gráfico en cualquier dirección (Figura 14).

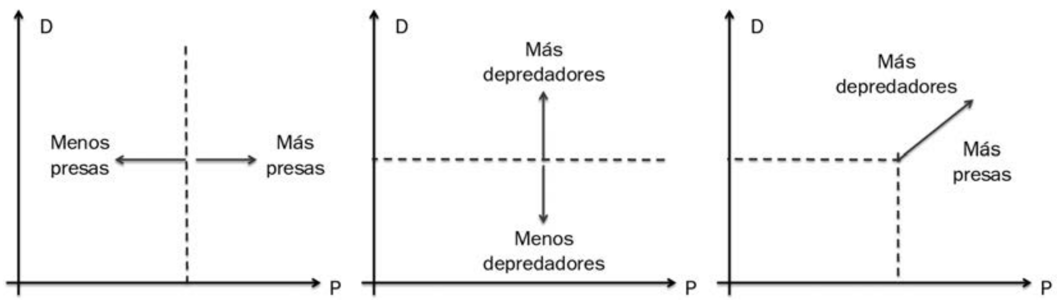

Figura 14: A la izquierda, la variación del número de presas mueve el punto horizontalmente; al medio, la variación del número de depredadores mueve el punto verticalmente; a la derecha, la variación de las cantidades de individuos de ambas poblaciones mueve el punto en cualquier dirección en el plano.

Dentro de este infinito conjunto de posibilidades para los valores de los números de depredadores y de presas, hay algunos valores particulares que uno puede considerar, aunque no son muy interesantes, que son los casos extremos en que no hay depredadores (y las presas viven felices como las moscas) o no hay presas (y los depredadores la pasan mal o aprenden a comer otra cosa). La realidad es que un sistema depredador-presa tiene sentido en tanto haya depredadores y presas. De modo que pensaremos en un sistema que tenga de las dos cosas.

En la construcción de este modelo, es posible determinar dos líneas, llamadas *isoclinas* (rectas, para el caso que estamos analizando), que representan el conjunto de puntos que hacen cero cada ecuación separadamente. Es decir, un conjunto de combinaciones del número de depredadores y de presas que mantiene en equilibrio la población de presas (y por consiguiente P' = 0) y otro conjunto que mantiene en equilibrio la población de depredadores (es decir D' = 0). Es sencillo ver[15] que la variación de la cantidad de presas será cero (P' = 0) cuando la cantidad de depredadores sea igual al cociente α/γ, y análogamente, variación de la cantidad de depredadores será cero (D' = 0) cuando la cantidad de presas sea igual a β/δ.

Esto quiere decir que hay un número umbral de conejos que permite que la población de zorros se mantenga estable, lo suficiente para comer y que nazcan tantos como mueren. Y lo mismo para las presas, hay un número de depredadores que mantiene a raya el equilibrio de la población de presas. Fuera de esos valores, las poblaciones varían, ya sea creciendo o decreciendo.

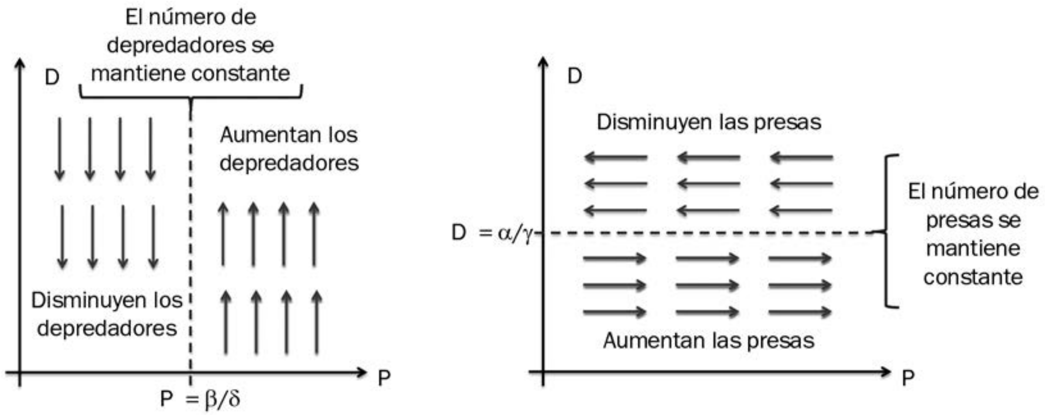

Figura 15: Cómo varían los números poblacionales de depredadores (izquierda) y presas (derecha) según su valor relativo respecto de los valores de equilibrio.

En el caso de los depredadores (Figura 15 a la izquierda), con más presas que las que mantienen la población en equilibrio (a derecha de la recta P = β/δ), debido a la abundancia de alimento, la población crecerá, mientras que si hay menos presas de las necesarias para el equilibrio, (a izquierda de la recta P = β/δ), debido a la escasez de alimento, la población decrecerá.

En el caso de las presas (Figura 15 a la derecha), con más depredadores que los que mantienen la población en equilibrio (por sobre de la recta D = α/γ), debido a que hay muchas bocas para alimentar, las presas decrecerán en número, mientras que si hay menos

15 $P' = \alpha P - \gamma.P.D = P(\alpha - \gamma D) = 0$ si $\alpha - \gamma D = 0$, o sea $D = \alpha/\gamma$
$D' = -\beta D + \delta.P.D = D(-\beta + \delta P) = 0$ si $-\beta + \delta P = 0$, o sea $P = \beta/\delta$

depredadores de los necesarios para el equilibrio, (abajo de la recta $D = \alpha/\gamma$), debido a su escasez, la población de presas crecerá.

Lo difícil es el equilibrio

Ahora si consideramos las dos cuestiones simultáneamente, vemos que, en primer lugar, hay un punto (el punto de intersección de ambas rectas) en el que se satisfacen simultáneamente las condiciones P' = 0 y D' = 0. Este punto se denomina *equilibrio del sistema*. Es decir, la teoría prevé que si las condiciones son como ya hemos mencionado, existe un número de individuos de cada población para el cual el sistema se mantendrá en esos valores indefinidamente. Fuera de este punto, al menos una de las poblaciones presentará variaciones.

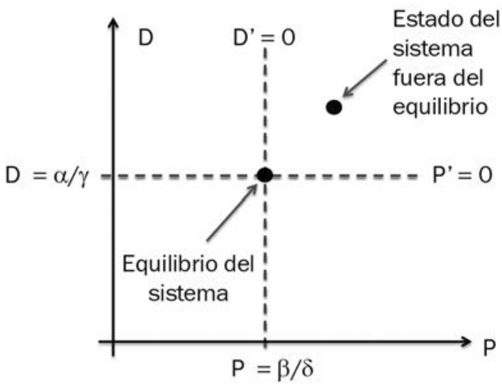

Figura 16: El punto de equilibrio del sistema: ambas poblaciones mantienen sus números inalterados. En las regiones que determinan estas dos rectas, las poblaciones presentan variaciones. El puntito arriba a la izquierda muestra un estado del sistema fuera de la condición de equilibrio.

Imaginemos una situación con una cantidad de zorros y de conejos distintas de las que prevé el equilibrio. Supongamos más depredadores de los que prevé el equilibrio, y también más presas. Es decir, el puntito que representa esta situación estará ubicado arriba a la derecha del punto de equilibrio (Figura 16). Como hay muchas presas, hay comida para todos y de sobra, los depredadores tienen las mejores condiciones para crecer y reproducirse, de modo de su población aumentará. Pero tanto comen, tanto comen, que la cantidad de presas obligatoriamente disminuirá. Tanto disminuirá que la época de vacas gordas pasará y la comida escaseará tanto que la población de depredadores disminuirá debido a la falta de alimento. Este decrecimiento, llegará un momento que será beneficioso para las presas, quienes podrán reproducirse felices y contentas porque no hay tantos depredadores como para preocuparse. Así, mientras los depredadores están decreciendo en número por la falta de alimento, las presas comenzarán un período de crecimiento. Ahora la comida abunda, de modo que los depredadores podrán alcanzar nuevamente un período de crecimiento poblacional, favorecidos por esta nueva época de vacas gordas. El sistema mostrará un comportamiento como se puede ver en el gráfico de la Figura 17 a la derecha. Este gráfico se conoce como trayectoria del sistema.

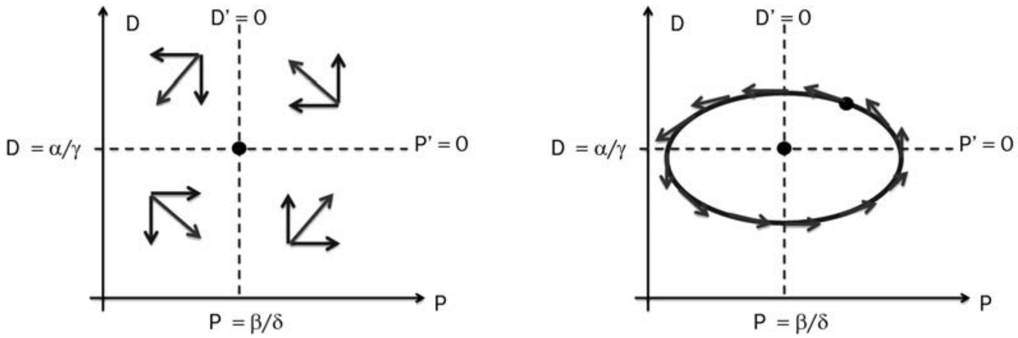

Figura 17: A la izquierda, las flechas verticales y horizontales indican la tendencia al crecimiento o decrecimiento de cada población en las regiones determinadas por las isoclinas, y las flechas oblicuas, la tendencia resultante para el sistema; a la derecha, una trayectoria partiendo de un punto fuera de las condiciones de equilibrio.

En este caso, las trayectorias son elipses y su posición depende de las condiciones iniciales, es decir, los números iniciales de depredadores y presas que dijimos hace un rato. En resumen, el sistema pasará por este ciclo una y otra vez (siempre y cuando estén dadas las condiciones) alcanzando máximos y mínimos poblacionales para ambas especies. El gráfico de la Figura 18 muestra la solución del modelo (la curva para la cantidad de individuos de la especie depredadora y de la especie presa respecto del tiempo), que muestran un comportamiento oscilatorio.

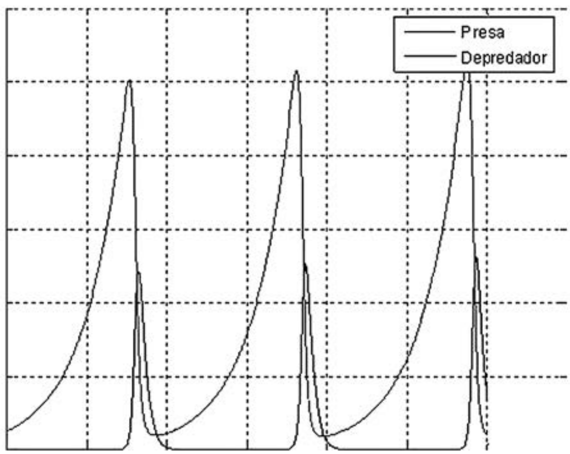

Figura 18: Curvas solución para el modelo depredador-presa.

Lo importante es la estabilidad

Obviamente esto que hemos dicho representa una simplificación del modelo. Porque hay que ver cómo aumentan y cómo disminuyen las poblaciones. Este tipo de análisis es lo que se conoce como estudio de la *estabilidad de los equilibrios*. Brevemente podemos decir que hay distintas posibilidades para lo que puede pasar en un sistema con valores cercanos al equilibrio.

Para ilustrar esto imaginemos un péndulo de vara rígida, es decir, una bolita adosada a una varilla sujeta por el otro extremo. Hay dos posiciones de equilibrio para el péndulo: una, la clásica, la varilla en reposo y la bolita abajo, y la otra, el equilibrio del malabarista, la varilla en reposo con la bolita arriba (Figura 19). Si estamos en una esquina (y no en el vacío), estas dos situaciones de equilibrio son bien distintas: una breve perturbación de la posición de equilibrio en el primer caso, llevará a que si todo sigue como estaba, el péndulo volverá a la situación de equilibrio pasado un tiempito. Pero si estamos en el segundo caso, el péndulo hará una cosa totalmente distinta, alejándose de esa posición de equilibrio que tenía originalmente. Al primer tipo de equilibrio, donde las cosas vuelven al estado en que estaban, lo llamaremos equilibrio *asintóticamente estable*, mientas que al otro, donde las cosas se disparan hacia otro estado, se llama *inestable.* Un tercer caso posible para el péndulo es aquel en el que las cosas no ocurren en cualquier esquina del planeta sino en el vacío, es decir, no hay rozamiento del aire que haga que el péndulo vaya frenando. Si esto ocurre, una pequeña separación del péndulo de su posición de equilibrio lo mantendrá oscilando alrededor de la misma, eternamente.

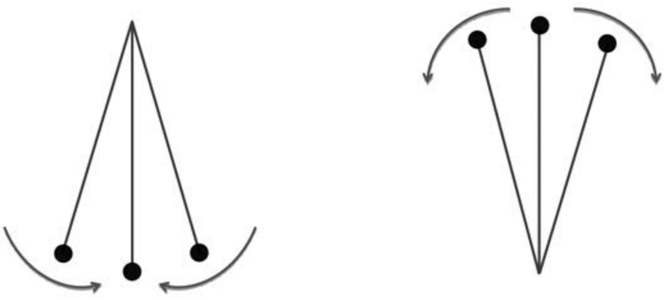

Figura 19: D Dos posiciones de equilibrio para un péndulo de vara rígida. A la izquierda, un equilibrio estable (asintóticamente estable si hay rozamiento), el péndulo se mantiene cerca o vuelve a la posición de equilibrio ante una perturbación. A la derecha, un equilibrio inestable, el péndulo se aleja del equilibrio ante la menor perturbación de la posición de equilibrio

Con los sistemas biológicos pueden pasar cosas parecidas. El sistema puede mantenerse oscilando como lo que acabamos de describir para el depredador y la presa, puede oscilar amortiguadamente para alcanzar en el límite nuevamente la situación de equilibrio, o puede dispararse alejándose de esa situación. Como los sistemas biológicos son más complejos que un péndulo, también es posible que para determinadas condiciones iniciales el sistema tenga un comportamiento y para determinadas otras, otro diferente. La Figura 20 muestra algunos ejemplos de posibles trayectorias para un sistema que relaciona dos variables, como puede ser el ejemplo de los depredadores y las presas. Hay otros sistemas que no muestran trayectorias cíclicas.

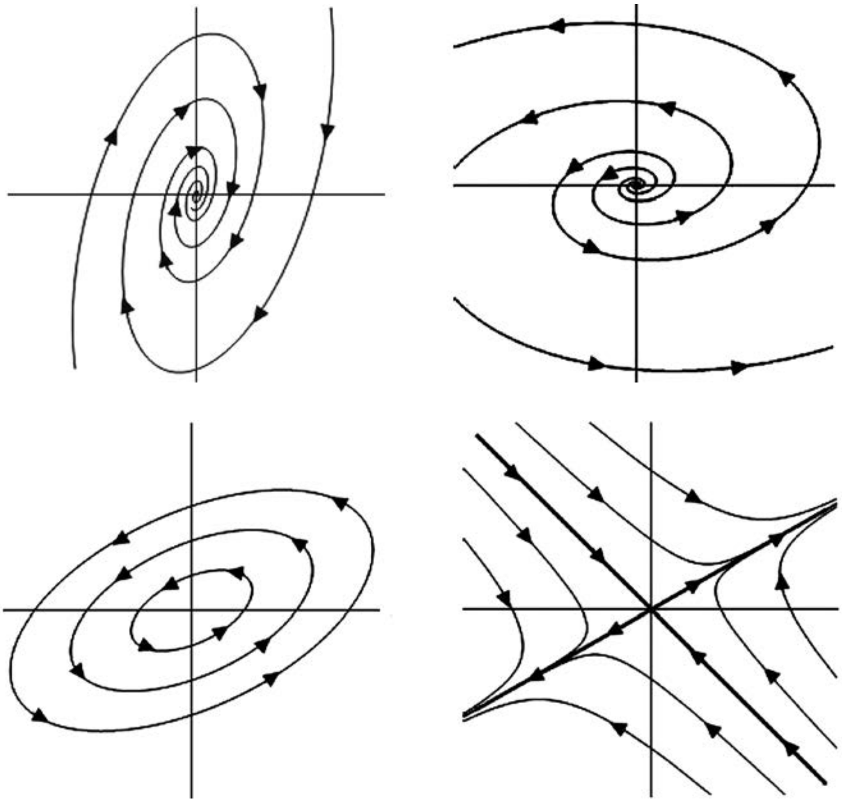

Figura 20: Algunos ejemplos del comportamiento de un sistema alrededor de un punto de equilibrio, El sistema a) recupera la posición de equilibrio con el tiempo (equilibrio asintóticamente estable), b) se aleja de la posición de equilibrio (inestable), c) se mantiene oscilando alrededor y d) el recorrido de las trayectorias depende de las condiciones iniciales.

La matemática de las enfermedades

"Tenían el aspecto de haber contraído una enfermedad monótona y tediosa, habían olvidado el idioma de los animales y el ritmo de las cosechas."
Arturo Uslar Pietri (1906-2001)
Humo en el paisaje (fragmento)

Una de las aplicaciones de estos modelos de Lotka-Volterra es a la problemática de la difusión de epidemias. Antes de entrar en el tema de los modelos para describir esta situación, hablemos un poquito de la historia y de la dinámica de las enfermedades. Hasta hace no muchas décadas, las enfermedades infecciosas tenían una fuerte presencia en la vida cotidiana, aun en las regiones más favorecidas del mundo. Las muertes por enfermedades hacen que los números de muertos debidos a las guerras parezcan triviales. Por ejemplo, en la Primera Guerra mundial murieron unos 10 millones de personas (de todos los países involucrados), mientras que las bombas de Nagasaki e Hiroshima mataron directa o indirectamente a unas 140.000 personas. ¡Pero las muertes ocasionadas por enfermedades infecciosas son muchísimo más numerosas! Por ejemplo la peste negra, en el Siglo XIV en Europa cobró 25 millones de vidas (de un total de tal vez 100 millones); la epidemia de influenza (gripe, para los amigos) de los años 1918-1919 mató 20 millones de personas en todo el mundo; entre 1918 y 1921 Rusia sufrió 25 millones de casos de tifus, y en 1520 los aztecas perdieron la mitad de su población de 3,5 millones de personas por la viruela. Se cree incluso que la caída del imperio en 1521 fue debida más a la viruela que a las capacidades conquistadoras de Cortés.

Si bien muchas enfermedades previamente muy difundidas están desapareciendo del mundo (como la tuberculosis, o la viruela que ha sido erradicada), no hay muchos motivos para el optimismo. Existen muchas enfermedades, sobre todo de naturaleza parasitosa o enfermedades de transmisión sexual (ETS), cuya presencia global continúa extendiéndose. Por ejemplo, a través de los siglos, la malaria ha sido erradicada de muchas áreas del mundo por el simple procedimiento de drenaje de pantanos y ciénagas. Pero aún hay 350 millones de personas que viven en áreas del mundo donde la malaria es endémica. La esquistosomiasis, una enfermedad parasitosa producida por gusanos platelmintos, altamente incapacitante debido a las fiebres con que se manifiesta, es relativamente común en los países en vías de desarrollo (especialmente en África). Se estima que hoy afecta hoy a 200 millones de personas. El SIDA, desde 1981 ha matado aproximadamente 25 millones de personas, un tercio de ellas sólo en África.

Los primeros registros de epidemias o de brotes epidémicos datan de los antiguos griegos. Sin embargo el desarrollo de la epidemiología como ciencia recién comenzó a mediados del siglo XIX con las investigaciones de Louis Pasteur y Robert Koch. Por otra parte, las técnicas matemáticas requeridas para cualquier aproximación estaban en desarrollo y no había hipótesis suficientemente precisas sobre la difusión de las enfermedades. El primer resultado conocido se debe al matemático suizo-holandés Daniel Bernoulli (que no sólo fue matemático sino también estadístico, físico y médico). Aunque en 1760 Bernoulli formuló un modelo para los efectos de la vacunación contra la viruela, no fue sino hasta mediados a fines del siglo XIX que el estudio de epidemias como ciencia comenzó a tomar vigor.

Sir Ronald Ross (1857-1932), quien en 1902 recibió premio Nobel de fisiología y medicina por su trabajo sobre la malaria, descubrió el agente transmisor de esta enfermedad. Ross sostenía que las bases fundamentales de la epidemiología debían ser analíticas, lo cual permitiría contestar muchas preguntas. El físico y epidemiólogo Anderson Gray McKendrick (1876-1943) y el bioquímico y epidemiólogo matemático William Ogilvy Kermack (1898-1970) dieron los fundamentos del enfoque matemático a la epidemiología y formularon un modelo simple que predijo el comportamiento de muchas epidemias. Su teoría, conocida como de Kermack–McKendrick y publicada en tres artículos en la década del ′30, es una hipótesis matemática acerca de la difusión de enfermedades infecciosas en una población, y fue la semilla del desarrollo de la epidemiología moderna.

La ayuda de la matemática

¿Cuál es el objeto de la epidemiología? Por un lado busca la comprensión de los procesos que siguen las enfermedades en el espacio y el tiempo, y por otro busca utilizar ese conocimiento en el manejo y control de las mismas. El progreso en el entendimiento de la naturaleza de los procesos epidémicos no sólo ayuda a la prevención de enfermedades infecciosas sino que permite evaluar el efecto de las políticas sanitarias, y aumentar su alcance. ¿Cómo puede ayudar la matemática en eso? Hoy en día los modelos de difusión de epidemias han alcanzado un alto grado de desarrollo y pueden ser adaptados a una variedad de diferentes circunstancias dependiendo de la enfermedad involucrada, la comunidad estudiada, y la clase de preguntas epidemiológicas o administrativas que se formulen. Estos modelos pueden ser útiles para la comprensión de la dinámica de la enfermedad, la comparación de la efectividad de procedimientos de control y el diseño de estrategias óptimas de control. Y más, también pueden permitir identificar datos cruciales que es necesario recolectar, predecir la difusión o incidencia de una enfermedad y conocer las densidades umbrales sobre las cuales es probable una “explosión”. Los modelos tienen la ventaja de que permiten analizar los efectos de estrategias de control o erradicación donde la experimentación es muy costosa o, incluso, antiética.

Como en cualquier modelo, el grado de dificultad de su tratamiento aumenta con el grado de detalle y especificidad. Por ello es necesario hacer ciertos supuestos restrictivos (al menos para empezar) en pro de la tratabilidad matemática. Modelos simples ofrecerán relaciones generales y revelarán comportamientos cualitativos o semi-cuantitativos del sistema, mientras que modelos más complejos incluirán más estructura de la situación particular, revelando relaciones cuantitativas dentro del sistema.

Un modelo sencillo de difusión de epidemias

En términos generales, y obviamente, dependiendo de la enfermedad, en una población habrá individuos que se encuentran en uno de tres estados o categorías posibles: individuos sanos susceptibles de contraer la enfermedad (S), individuos infectados, que poseen la enfermedad y tienen la capacidad de transmitirla a otros (I), e individuos recuperados (R). La recuperación, también dependiendo de la enfermedad, puede otorgar inmunidad o no. Si no la otorga, los individuos que se recuperan, vuelven a ser susceptibles, de modo que en esta categoría irán aquellos que se han recuperado con inmunidad. Los modelos más básicos de difusión de epidemias se conocen como Modelo S-I, Modelo S-I-S y Modelo S-I-R. Los modelos S-I son aplicados a aquellas enfermedades que no confieren inmunidad ni recuperación, como el SIDA; los modelos S-I-S se aplican a enfermedades que no confieren inmunidad aunque las personas se recuperan y, como dijimos, vuelven a ser susceptibles (por ejemplo varias ETS), y los modelos S-I-R, se aplican a aquellas enfermedades que confieren inmunidad vitalicia (por ejemplo las enfermedades virósicas infantiles como sarampión y varicela).

Que un individuo infectado "comunique" la enfermedad a vecinos susceptibles, es una cuestión de probabilidad. Esta probabilidad dependerá de la virulencia del organismo, de la resistencia natural de los individuos susceptibles, de la distribución espacial de los individuos infectados, y de una larga serie de etcéteras. En un modelo simple esto está incluido en el concepto de *contacto adecuado*. Se supone que en un grupo de individuos, en cualquier instante dado hay una cierta "chance" de contacto entre dos individuos, suficiente para la transmisión de la enfermedad si uno es infeccioso y el otro susceptible.

Dinámica de una enfermedad

Supongamos ahora que queremos modelar la dinámica de una enfermedad en la que los enfermos se recuperan, adquiriendo inmunidad vitalicia. Pondremos para condimentar un poco el asunto, unas tasas de natalidad y mortalidad, la primera constante y la segunda la supondremos ajena a causas relacionadas con la enfermedad, por lo que puede ser la misma para los infectados como para los susceptibles o recuperados. Supondremos además que todos los individuos nacen susceptibles, y que es una enfermedad de transmisión rápida, es decir, no consideraremos períodos de latencia o incubación. Además de estos procesos naturales de natalidad y mortalidad, acá hay dos procesos que ocurren simultáneamente. Uno que es la infección de personas sanas, que ocurre a una tasa proporcional al número de encuentros posibles entre enfermos y sanos (como en el caso depredador-presa), y otra que es una tasa de recuperación, por la cual, los individuos que están infectados se recuperan y adquieren inmunidad. Esta última está relacionada con las características de la enfermedad, y podemos suponer que la variación del número de recuperados es proporcional al número de infectados que hay cada momento en la población. Vamos a suponer también que los nacimientos y las muertes ocurren a tasas parecidas, de modo que la suma de los porcentajes de individuos susceptibles, infectados y recuperados totaliza el 100% (El lector podrá imaginar que estos supuestos pueden cambiarse y hacer modelos que incorporen tasas de natalidad y mortalidad diferentes, incluso, con la posibilidad de que los nuevos integrantes de la población nazcan sanos, enfermos o inmunes). Otro supuesto que necesitamos hacer (ya relacionado con el tratamiento matemático del problema) es que la población tiene un tamaño suficientemente grande de modo que las fracciones de cada clase pueden considerarse como variables continuas; que la población está homogénea y uniformemente mezclada, y que todos los individuos tienen la misma chance de ser infectados (no hay diferencias de edad, de género ni nada que distinga a unos de otros).

Como hicimos en el modelo de depredadores y presas, vamos a suponer que la tasa de contagio es proporcional al número de encuentros posibles entre los susceptibles y los infectados (es decir su producto) y que la probabilidad de que de un contacto adecuado resulte una infección es constante (constante de proporcionalidad) (Ver Figura 21). Vamos a llamar S a la proporción de la población susceptible, I a la de infectados, y R a la de recuperados, siendo S + I + R = 1 (el 100%). Como la proporción de individuos recuperados es complementaria de la de individuos infectados más los susceptibles, no es necesario escribir una ecuación para la proporción de recuperados, porque lo contrario de lo que le pase las primeras le pasará a la última. De modo que escribiremos la ecuación para la variación de la proporción de individuos infectados y susceptibles.

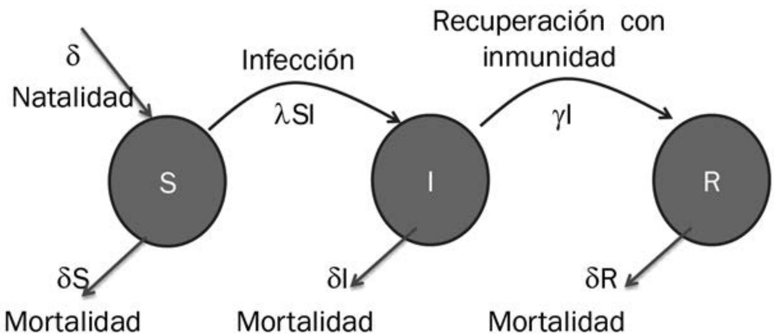

Figura 21: Modelo conceptual para el proceso epidemiológico S-I-R.

Escribamos las ecuaciones que representan este modelo. Tendremos que escribir la variación del número de susceptibles S' y de infectados I'. ¿De qué manera varían los individuos susceptibles? Esta variación es el resultado de un aumento y una disminución, que provienen de distintos procesos. El número de susceptibles crecerá sólo por nacimiento de nuevos individuos (a una tasa constante δ), y disminuirá a una tasa proporcional al número de encuentros entre susceptibles e infectados (a una tasa λ), y por la mortalidad que supusimos proporcional a la cantidad de personas susceptibles (a una tasa δ). Es decir: $S' = \delta - \lambda SI - \delta S$. Por su parte, la variación en la proporción de infectados se deberá a un aumento debido a las personas que adquieren la enfermedad (a una tasa λ) y una disminución debida a la recuperación y a la mortalidad. Así la ecuación para la variación del número de infectados será $I' = SI - \gamma I - \delta I$.

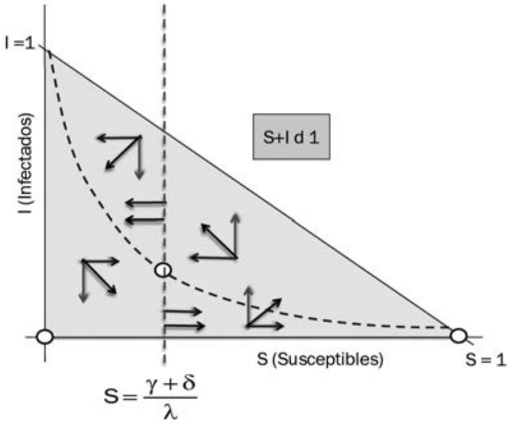

Figura 22: La proporción de individuos susceptibles e infectados puede tomar cualquier valor dentro del triángulo S+I ≤ 1. Las líneas punteadas representan las isoclinas, y los puntos blancos las condiciones de equilibro. Las flechas indican la variación en las proporciones de susceptibles e infectados fuera de las condiciones de equilibrio.

En virtud de que S + I + R = 1, la fracción de susceptibles y de infectados será como máximo 1 (si nadie es inmune aún), de modo que los únicos valores posibles para las variables de este sistema están sobre el triángulo delimitado por el segmento que va desde S = 1 (y por ende I = 0) hasta I = 1 (y S = 0), es decir, debajo de la recta S + I = 1 (Figura 22). Haciendo unas cuentitas (que no vamos a mostrar por lo que requeriremos un poco de fe), nos encontramos con que este sistema tiene tres equilibrios posibles, es decir tres conjuntos de condiciones bajo los cuales el sistema se mantendrá inalterado en el tiempo. Dos de ellos son poco interesantes. El primero corresponde a S = I = 0, es decir, ningún susceptible y ningún infectado. Y el otro, I = 0 (no hay infectados) y S = 1 (todos son susceptibles). Obviamente estos equilibrios son inestables, porque si nos separamos un poquito de la condición de equilibrio (aparecen algunos individuos susceptibles e infectados, el sistema no volverá a la situación original. El tercer equilibrio es el interesante. Hay dos líneas (las isoclinas que mencionamos en el modelo depredador y presa) que hacen cero cada una de las ecuaciones, que están dibujadas en el gráfico de la Figura 22 con líneas punteadas: una horizontal y una curva que va por el interior del triángulo. El punto de intersección de estas líneas es el tercer equilibrio: una proporción de susceptibles e infectados que mantiene el sistema sin variación. La línea vertical es el conjunto de puntos que hace I'= 0. Fuera de esa recta, a la derecha es I' > 0, y a la izquierda, I' < 0. Es decir, si la proporción de individuos susceptibles es mayor que la que indica la línea, la proporción de infectados aumentará (hay mucha gente disponible para contagiarse), y si la proporción de susceptibles es inferior a ese valor, la proporción de infectados disminuirá (ya no quedan muchos para contagiarse y los enfermos se irán recuperando. Algo análogo ocurre con la proporción de susceptibles. La curva que hace S'= 0. Fuera de ella, abajo tendremos S' > 0, y arriba, S' < 0. Es decir, si la proporción de individuos infectados es menor que la que indica la curva, la proporción de susceptibles aumentará (hay poca gente contagiosa y como todos nacen susceptibles, cada vez hay más), y si la proporción de infectados es superior a ese valor, la proporción de susceptibles disminuirá (hay muchos infectados de modo que la tasa de contagio aumentará y los susceptibles disminuirán en proporción) (Figura 22).

Esta característica del sistema, hace que las trayectorias del sistema se cierren en forma espiralada hacia el equilibrio, como muestra el gráfico de la Figura 23.

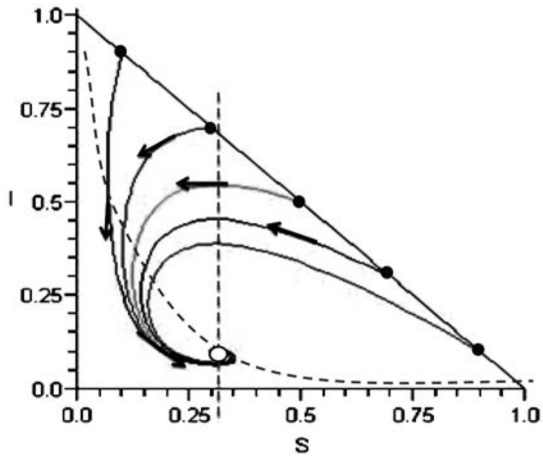

Figura 23: Trayectorias para el proceso epidemiológico S-I-R.
Los puntos sobre la hipotenusa del triángulo son distintas condiciones iniciales.
El punto en el interior del triángulo, al cual se acercan las trayectorias en forma de espiral, es el equilibrio asintóticamente estable.

Esta forma que adoptan las trayectorias, nos dice que si las condiciones se mantienen como hemos supuesto, la enfermedad evolucionará hasta alcanzar una proporción fija de individuos susceptibles e infectados. La posición de este punto de equilibrio depende de los valores de las tasas de natalidad, mortalidad, infección y recuperación. Podría ser que este punto ni siquiera está presente en el primer cuadrante, de modo que, dependiendo de la condición inicial (número de susceptibles e infectados) la dinámica del sistema sea diferente.

Cliodinámica: la historia a través de modelos

"La historia no es capaz de dar información exacta sobre el futuro, sino que más bien nos muestra que nuestra capacidad de prepararnos para los cambios es limitada"
Henning Mankell (1948, -)

Un modelo puede trascender el problema para el cual fue propuesto originalmente, y ser "recuperado" por otros dominios o disciplinas. Recientemente salió un artículo muy interesante de Laura Spinney[16] en la revista inglesa Nature acerca de los ciclos en la historia de la humanidad. Se refiere a los estudios de Peter Turchin, un biólogo ruso nacido en 1957, actualmente profesor de la Universidad de Connecticut, en el Departamento de Ecología y Biología Evolutiva, tanto como en los departamentos de Matemática y de Antropología. Turchin estudió registros históricos sobre la actividad económica, las tendencias demográficas y estallidos de violencia en los Estados Unidos. Analizando estos datos, mostró la aparición de tres picos de inestabilidad política en intervalos de aproximadamente 50 años, y concurrentemente con esto, picos de violencia (Figura 24). En su trabajo Turchin y sus colegas aplicaron el modelo de dinámica del sistema depredador-presa que analizamos recién. Esta mirada de la historia es criticada por muchos investigadores que piensan que no están en condiciones de identificar ciclos significativos en la historia de la humanidad. Sin embargo, los trabajos del grupo de Turchin sostienen que las herramientas matemáticas, permiten generar modelos a partir de la recopilación y análisis de grandes bases de datos de interés histórico. Estos datos vienen tanto de bases de datos históricas, de estudios etnográficos, como de datos recogidos de los diarios. Esta matematización de la historia se conoce como *cliodinámica* (por *Clio*, en la mitología griega una de las nueve hijas de Zeus, a quien se atribuyen las artes de la Historia y la poesía heroica). A partir de la adaptación de los modelos de depredador-presa a sus bases de datos, Turchin llegó a la conclusión de que una nueva ola de violencia ocurrirá en 2020 probablemente de la magnitud de la registrada por 1970, aunque, especula que no lo será tanto como en 1870.

16 Human cycles: History as science, Nature (2012) 488, 24–26

Figura 24. Ciclos de violencia en los últimos 200 años de la historia de los Estados Unidos.

El modelo de Turchin se sostiene básicamente en cuatro variables: los números poblacionales, las estructuras sociales, la fuerza del Estado y la inestabilidad política. Para cada variable seleccionó varios indicadores ya que muchas veces los datos son difíciles de encontrar. Luego buscó tendencias, con el objeto de identificar patrones históricos que le permitieran reconocer marcadores de eventos futuros. Este análisis también permitió a los investigadores determinar el orden en que se producen los cambios en estas variables, lo que, en teoría al menos, permitiría evaluar correlaciones útiles que podrían conducir a explicaciones causa-efecto entre los valores de las variables y los estallidos de violencia.

Manos a la obra: la confección de un modelo paso a paso

"La enorme utilidad de la matemática en las ciencias naturales es algo que bordea lo misterioso y para lo cual no hay explicación racional".
Eugene Paul Wigner (1902-1963)

Propongo en esta sección ver un ejemplo de un modelo matemático en ecología, desde la formulación conceptual hasta (casi) las cuentas, relacionado con el crecimiento poblacional de una planta que crece en la estepa norpatagónica Argentina. Este modelo es algo diferente a los que vimos hasta acá porque es un modelo discreto (como el de los conejos de Fibonacci), y lo es por dos razones. En primer lugar porque considera el tiempo en intervalos de un año, y por otra parte porque trata del crecimiento de una población a partir de considerar el ciclo de vida de un organismo dividido en etapas.

Para ello, antes hablaremos un poquito más de los modelos demográficos. La demografía es una disciplina que estudia las características de las poblaciones en cuanto a su estructura y aspectos dinámicos. Estas características se relacionan con la natalidad, la mortalidad, la distribución en el espacio, la densidad poblacional, el crecimiento, la distribución de sexos y edades, el estado sanitario, la esperanza de vida de los individuos que las componen, y las migraciones, entre otros. Un tipo particular de modelos matemáticos son los *modelos demográficos*, modelos de formulación matemática cuyo objeto es el estudio de la dinámica demográfica de poblaciones. Clásicamente los objetos de estudio de los modelos demográficos fueron las poblaciones humanas. Pero en una concepción más amplia, también se puede hablar de demografía en ecología de poblaciones no humanas, donde interesa estudiar la dinámica de un conjunto de individuos que pertenecen a la misma especie y que ocupan el mismo hábitat.

Los modelos demográficos se basan en el conocimiento del ciclo de vida de los organismos que constituyen una población. Requieren además del análisis de cómo influyen las características del ambiente en los parámetros demográficos que determinan el tamaño y la evolución de la población, como son especialmente la natalidad y la mortalidad. Estos modelos pueden ser útiles para responder a preguntas de diversa índole. Por ejemplo, el modelo que desarrollaremos a continuación se construyó para dar respuesta a una problemática que involucra una especie nativa de la estepa norpatagónica y sus implicancias tanto a escalas de población y de paisaje como a nivel productivo. Veamos de qué se trata.

Un habitante de la estepa: el palo piche

Los ambientes de estepa, como es el caso de la estepa norpatagónica, se caracterizan generalmente por el desarrollo de comunidades dominadas por pastos que cohabitan con varias especies de arbustos. En esta región (en la estepa norpatagónica) crece un arbusto con algunas particularidades muy interesantes. Se trata del *palo piche (Fabiana imbricata)* (Figura 25). Es una planta adaptada a vivir en ambientes secos y algo hostiles.

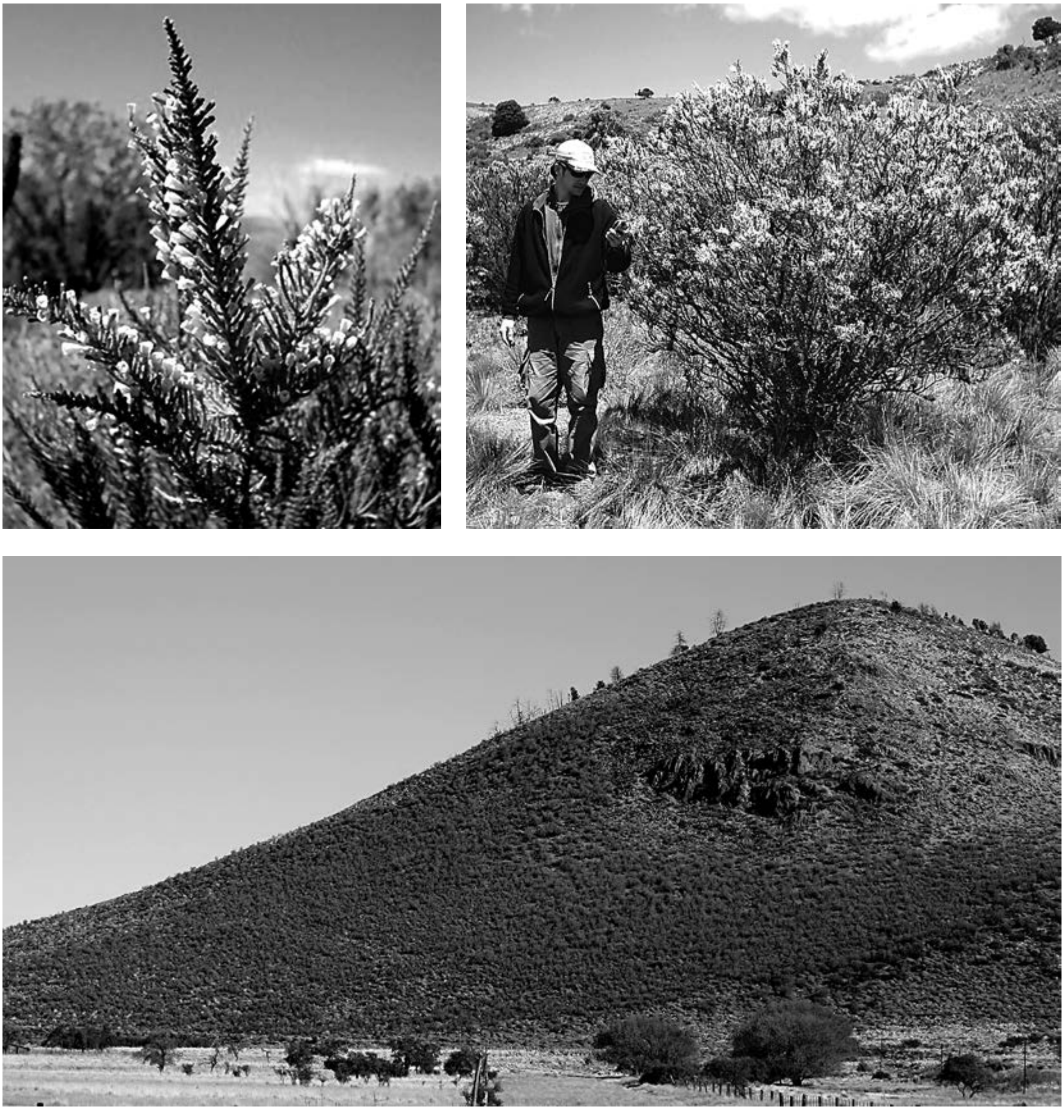

Figura 25: A la izquierda ramita en flor del palo piche. A la derecha arriba una planta adulta en flor y abajo, una vista de un matorral de palo piche sobre una ladera. (Fotos A. Ruete y M. de Torres Curth).

Esta planta, que puede alcanzar hasta 3 metros de altura, de tronco leñoso, hojitas muy pequeñas, que produce unas flores muy bonitas celeste azuladas, era aprovechada por las comunidades originarias tanto como planta medicinal (la usaban para curar infecciones urinarias), como para teñir su tejidos (sus raíces dan un color azul a las lanas).

Actualmente los pastizales donde crece este arbusto son utilizados para la cría intensiva de ganado, y ni a las vacas ni a las ovejas les gusta comérsela. El palo piche crece formando matorrales bastante densos, donde prácticamente no se encuentra otra vegetación. Según los resultados de estudios recientes, en los últimos 40 años se ha ido incrementando la superficie ocupada por estos matorrales. Es decir, que los matorrales parecen estar expandiéndose. Se estaría reduciendo la superficie destinada al pastoreo y consecuentemente el valor de la tierra como unidad de producción. A este proceso de “avance” de los matorrales sobre los pastizales se lo conoce como *arbustización,* término usado en ecología para describir los cambios en la fisonomía del paisaje en los que los arbustos muestran un aumento sustancial en la superficie que ocupan. En otras partes del mundo (y por aquí también, pero está menos estudiado), este fenómeno suele asociarse a la ocurrencia de disturbios. Otro problema que preocupa desde el punto de vista ecológico es la pérdida de biodiversidad (una característica muy valorada de los ecosistemas) ya que los matorrales suelen ser ambientes que albergan menos especies que los pastizales.

Esta planta que nos interesa tiene unas características muy particulares. En primer lugar, es muy longeva: se han encontrado ejemplares de más de 140 años. Fructifica en otoño y cada adulto produce muchísimas semillas muy pequeñas. A pesar de su tamaño y de los vientos patagónicos, no suelen volar muy lejos, porque no han desarrollado estructuras para eso. Sí viajan en pequeñas corrientes de agua que se forman cuando llueve mucho, y poco a poco se van enterrando, pero la mayoría cae y se entierra por ahí cerca del matorral.

Otra cuestión interesante en esta especie es que la aparición de nuevas plántulas (fenómeno que en la jerga se denomina *reclutamiento*) es usualmente muy baja, es decir, la germinación de las semillas es un evento bastante raro y parece requerir de algunas condiciones especiales. En enero de 1999 ocurrió en la región un incendio de grandes dimensiones que afectó severamente el ambiente. En la primavera posterior a ese incendio, que fue muy lluviosa, se vieron un montón de plantulitas nuevas en los sitios que habían sido arrasados por el fuego. A los ecólogos les llamó mucho la atención la cantidad (inusual) de plantas nuevas, de manera que las fueron siguiendo por varios años, pero se encontraron con que dos años después del fuego no aparecían más plántulas nuevas. Entonces formularon la hipótesis de que las semillas de este arbusto necesitan de algún requerimiento relacionado con el fuego combinado con abundantes precipitaciones en primavera para germinar. Obviamente la complejidad de esta hipótesis es enorme y es necesario analizar la influencia de unas cuantas variables, individualmente y combinadas, sobre este proceso.

Algunas cuestiones relacionadas con el clima

En la región que nos interesa, hay grandes variaciones climáticas interanuales. Si bien hay patrones, como las lluvias concentradas en el período mayo-septiembre, y cierto déficit de agua en el verano, época en la que se registran las temperaturas más altas, estas tendencias tienen variaciones y uno puede encontrarse con un verano o una primavera muy secos y calurosos, como con unos no tan calurosos y con algunas lluvias más abundantes que lo usual.

Estas variaciones pueden asociarse a un patrón climático recurrente que implica cambios en la temperatura de las aguas en la parte central y oriental del Pacífico tropical conocido como "El Niño". En condiciones normales las aguas del Pacífico en América del Sur, desde Chile hasta el sur de Ecuador, son frías. El frío de las aguas se debe a la corriente de Humboldt que proviene de las aguas de la Antártida, que junto con los vientos alisios genera áreas costeras desérticas, en el oeste de Sudamérica, consideradas entre las zonas más secas del mundo. El fenómeno El Niño ocurre cuando los vientos alisios se debilitan, y desde Indonesia y Australia llegan a Sudamérica las aguas cálidas del Pacífico tropical y desplazan las aguas frías de la corriente de Humboldt. En otras ocasiones ocurre el fenómeno opuesto. Los vientos alisios se intensifican frente a las costas sudamericanas y provocan una mayor presencia de aguas frías. Por sus características opuestas a El Niño, este fenómeno es conocido como "La Niña". Estos períodos de calentamiento y enfriamiento, se conocen como el *ciclo ENOS* (o ENSO por sus siglas en inglés: El Niño Southern Oscillation), afectando directamente a la distribución de las precipitaciones en las zonas tropicales y puede tener una fuerte influencia sobre el clima en otras partes del mundo. El ciclo no es una oscilación regular como el cambio de estaciones, pudiendo ser muy variable tanto en la intensidad como en su duración. Actualmente es considerado como un fenómeno ocasional, irregular y aperiódico. Durante un episodio El Niño, en ciertas regiones del mundo la precipitación puede incrementarse muchísimo, llegando a ser hasta cuatro veces más abundante que el promedio, mientras que en otras regiones se registran severas sequías, incluso en regiones alejadas del Océano Pacífico ecuatorial. La fase siguiente (La Niña) produce patrones climáticos opuestos. En el noroeste de la Patagonia durante El Niño se registran inviernos y primaveras muy lluviosos y durante la fase La Niña veranos secos y calurosos.

Uno de los principales limitantes en el crecimiento de las plantas en zonas áridas o semiráridas como la Patagonia, es el agua. Las precipitaciones abundantes de primavera favorecen la germinación de las semillas, y también permiten un mejor desarrollo de la vegetación que conlleva una mayor acumulación de biomasa, la que, a su vez, se transforma en combustible potencialmente disponible para los incendios en veranos secos y calurosos. En la región norpatagónica en los últimos 100 años el régimen de fuego ha sido afectado tanto por la variación climática (más tormentas de rayos) como por la actividad humana. En términos generales, la ocurrencia de disturbios como los incendios tanto como de variaciones climáticas interanuales, provoca cambios en las características de un ambiente, configurándose nuevos escenarios de desarrollo para las comunidades vegetales.

El clima, el fuego y las plantas

La forma en que las variaciones en el ambiente influyen en la dinámica a largo plazo de las poblaciones vegetales es difícil de evaluar experimentalmente, por una parte porque los tiempos involucrados son largos (y los subsidios para investigación usualmente duran pocos años), y por otra porque tanto la ocurrencia de incendios como los cambios en los regímenes de precipitación tienen un componente aleatorio. Sin embargo, los ecólogos realizan experimentos de laboratorio, de invernadero y de campo, evaluando el efecto que distintas variables podrían tener en los procesos involucrados en el ciclo de vida de una especie. Por ejemplo, se ponen a germinar semillas con distintos niveles de riego simulando diferentes regímenes de precipitación de primavera y evaluando así de qué manera la abundancia o el déficit de agua regula la cantidad de semillas que germinan y la cantidad de plántulas que se establecen.

Otro ejemplo es el de la influencia de factores relacionados con el fuego en la germinación. El fuego carga con el estigma del daño que ocasiona en la vegetación y en el paisaje, de ahí que las políticas de manejo de fuego usualmente promuevan su supresión y control. Sin embargo, muchas plantas han desarrollado mecanismos que les permiten aprovecharse de este fenómeno, que ha acompañado la evolución de los ecosistemas a lo largo de milenios. Por ejemplo, hay plantas (no es el caso del palo Piche) que rebrotan después de que el fuego, rejuveneciendo todas sus estructuras aéreas (las que están sobre el suelo). En otras, como es aparentemente el caso de nuestra planta, las semillas son estimuladas por algunos factores, como la presencia de humo o de calor, y germinan en mayores proporciones cuando éstos están presentes. Otra cuestión importante es que el fuego elimina grandes proporciones de vegetación en el paisaje. Esto tiene su lado negativo (se elimina la cobertura vegetal y expone el suelo a la erosión) pero también su lado positivo (se liberan nutrientes, agua y luz y se elimina la competencia por estos recursos). En el caso del palo piche, hay otra cosa adicional: los ecólogos han encontrado que, al parecer, esta planta produce una sustancia que inhibe la germinación de plantitas de la misma especie en lugares donde los matorrales ya están establecidos, y que, cuando el fuego elimina las plantas grandes, elimina también esta sustancia permitiendo así que las nuevas plantas de esta especie puedan aparecer.

Todo esto en relación a las condiciones para la aparición de nuevas plantas. En relación a la mortalidad de palo piche, en las visitas a los sitios donde la especie se desarrolla, rara vez se observan individuos juveniles y adultos muertos por razones ajenas al fuego. Esto tiene que ver con la resistencia de esta especie a las condiciones de vida difíciles de la estepa norpatagónica, y con la longevidad de la planta. En estos ambientes, los incendios suelen cubrir grandes áreas, principalmente debido a dos factores: el viento, que ayuda a la propagación del fuego, y el tipo de vegetación, generalmente pastos finos y secos, que facilitan la combustión. Es por esto que cuando ocurre un incendio en la estepa normalmente arrasa con grandes superficies eliminando prácticamente toda la cobertura vegetal (Figura 26). Después, empieza un proceso de recolonización por parte de las plantas que vivían ahí antes del fuego, a partir de principalmente dos procesos: el rebrote, y el reclutamiento de plantitas a partir de semillas, las que vienen de otro lado (volando incluso grandes distancias o traídas por animales) y las que estaban en el suelo. Esto hace que todas las plantas que nacen de semilla tengan más o menos la misma edad. Por eso, hay grandes sectores del paisaje donde los individuos de palo piche son relativamente jóvenes, y su edad ronda el tiempo transcurrido desde el último incendio, quizás unos 20, 30 o 40 años, y en ese caso, desde el punto de vista de la longevidad de la planta, es “natural” no encontrar adultos muertos.

Figura 26: Imagen donde se ve la completa desaparición de la cobertura vegetal en los sectores donde pasó el incendio. Foto: L.Ghermandi.

Todos estos resultados experimentales sugieren que la combinación de factores relacionados con la presencia o no de incendios y con la variación climática, constituyen distintos conjunto de condiciones que pueden ser más o menos favorables para el reclutamiento de nuevos individuos de palo piche. La pregunta que se hicieron los ecólogos fue entonces, ¿de qué manera las distintas frecuencias de fuego combinadas con variaciones climáticas podrían influir en el avance (o no) de los matorrales del palo piche?

A través de la construcción de un modelo demográfico que involucrara variaciones en la frecuencia de fuego (relacionadas con la política de manejo de las instituciones responsables del combate contra incendios por un lado o con el aumento de tormentas de rayos por otro), desde un incendio por año hasta la exclusión total de fuego, y variaciones en las precipitaciones de primavera, asociadas a la frecuencia actual de los eventos El Niño, se propuso contestar a la pregunta *¿qué pasaría si...*?

¿Cómo se hizo el modelo?

El modelo consta de dos partes. Una consistió en el modelado de la dinámica del ambiente, desde el punto de vista de la ocurrencia de incendios y de la variación de la abundancia de las precipitaciones de primavera; y la otra, en el estudio y análisis del ciclo de vida de la planta y su respuesta a las distintas condiciones ambientales en las que se podría encontrar. En el modelo se partió de una estructura conceptual, que fue traducida a ecuaciones. Una vez que el modelo fue construido, los parámetros fueron estimados a partir de la enorme cantidad de datos que los ecólogos habían obtenido en el campo, en el laboratorio y en los invernaderos. Una vez calibrado, se pudieron realizar simulaciones que luego se analizaron y a partir de ello, se sacaron conclusiones que nos permitieron contestar a la pregunta que formulada, analizar las implicancias de las distintas políticas de manejo de fuego en la evolución de estos ecosistemas, acompañados de los escenarios que los modelos de cambio climático global proponen.

Modelando el ambiente

"El ambiente" es un concepto muy amplio, y su descripción involucra una enorme cantidad de variables físicas como, por ejemplo, las variaciones en la temperatura, los vientos, las precipitaciones, las características del suelo (como su composición química, porosidad, tipo), la topografía y la presencia de disturbios, tanto como de factores bióticos como la presencia de ganado y otros herbívoros, o la competencia con otras especies.

Un primer supuesto muy importante de este modelo es que dos factores considerados como "descriptores" del ambiente (el fuego y las precipitaciones de primavera) son los más relevantes en la dinámica de la población que estamos estudiando y que gobiernan esta dinámica. Este supuesto tiene un soporte en el conocimiento que los ecólogos han alcanzado del funcionamiento de este sistema. Para cada caso (el fuego y la lluvia), se tomaron dos posibilidades: se produce un incendio en el verano que afecta la población, o no se produce, y la primavera posterior a ese verano es especialmente lluviosa o no lo es (en este caso se llamó "primavera normal"). Esto conduce a cuatro tipos de ambiente, que se denominaron "estados ambientales" (Figura 27): ocurre un incendio en el verano con la primavera posterior lluviosa (FL), ocurre un incendio en el verano con la primavera posterior normal (FN), no ocurre un incendio en el verano con la primavera posterior lluviosa (NL), y no ocurre un incendio en el verano con la primavera posterior normal (NN). Estos posibles estados ambientales se suceden de un año a otro. ¿De qué manera? Dependiendo de dos cosas: de la probabilidad de ocurrencia de un incendio y de la probabilidad de que una primavera sea especialmente húmeda.

Los incendios tienen un componente humano, además del natural, de manera que la probabilidad de ocurrencia de un de fuego podría variar por diversas razones. Debido a la intervención del ser humano la frecuencia de incendios en un sitio podría aumentar, incluso hasta una vez al año (una costumbre no del todo abandonada en el campo en muchos lugares del mundo es prender fuego a los potreros para tener pastos nuevos). Pero también podría adoptarse la política de exclusión de fuego desde un punto de vista, si se quiere, conservacionista. Entre quemar todos los años y promover la exclusión de fuego, hay muchas posibilidades (de hecho, infinitas). Por su parte, como ya hemos mencionado, las precipitaciones de primavera se asocian en esta región a los eventos El Niño. De acuerdo a los registros de los últimos 20 años, se estima que podría esperarse una primavera especialmente húmeda cada 4 años. Este análisis permitió imaginar varios "escenarios hipotéticos", variando la frecuencia de fuego, desde un incendio por año hasta la exclusión total. En la Figura 27 las flechas indican una probabilidad de transición de un estado ambiental a otro. Estas transiciones se calcularon luego sabiendo cuál es la probabilidad de que el año próximo tenga las siguientes características dado que este año tiene estas otras[17].

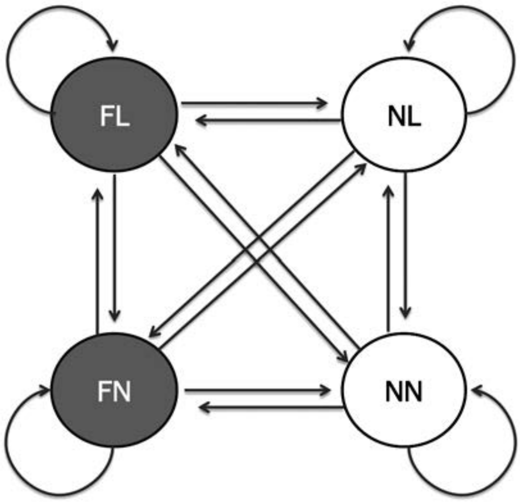

Figura 27: Modelo conceptual de la dinámica ambiental donde se consideran cuatro estados posibles: Los círculos grises representan situaciones donde en el sitio ha ocurrido un incendio en el verano, y los círculos blancos donde no ha ocurrido, mientras que los círculos de arriba corresponden a situaciones con primaveras particularmente húmedas y los de abajo, primaveras normales a secas. Las flechas representan la probabilidad de que un ambiente pase de un estado a otro. Así una flecha que se vuelve sobre el mismo estado (por ejemplo FL) indica la probabilidad de que ese estado se repita al año siguiente. Una flecha de un estado a otro indica la probabilidad de que se produzca ese cambio.

Dentro de cada escenario se simuló una secuencia de años muy larga con características propias relacionadas con estas probabilidades. Estas simulaciones "modelan" la dinámica del ambiente en diferentes situaciones posibles.

El ciclo de vida

El ciclo de vida de las plantas es un proceso complejo. La planta nace al germinar una semilla, se establece en un sitio, crece, alcanza su madurez reproductiva, produce semillas una o varias veces a lo largo de su vida, envejece y muere. Este proceso general, presenta variaciones entre las distintas especies, pero también variaciones individuales dentro de los individuos de la misma especie. Es por esto que en nuestro modelo aparece el segundo supuesto: se considerará un ciclo de vida "promedio" para todos los individuos de la población,

17 Llamadas "probabilidades condicionales"

suponiendo que todos tendrán la misma probabilidad de nacer, crecer, reproducirse y morir, bajo el mismo conjunto de condiciones ambientales.

Aunque la vida de cualquier organismo es un proceso continuo, las características de nuestro modelo (relativas al tratamiento matemático que se decidió darle) requieren considerar "etapas" en el ciclo de vida, bien diferenciadas y criteriosamente elegidas. Tenemos aquí un tercer supuesto: la división del ciclo de vida en etapas es adecuada, y la elegida es la mejor posible. En algunas especies (como los insectos) las etapas están claramente definidas por las características del ciclo de vida (por ejemplo en los insectos: huevo, larva, pupa y adulto), pero en otras, como en el caso del palo piche, se debieron tomar decisiones de "corte". El ciclo de vida fue dividido en cuatro etapas usando un criterio que combina el estatus reproductivo con la vulnerabilidad a las condiciones del ambiente.

Las semillas germinan en primavera, de modo que cuando los ecólogos van al campo, pueden encontrarse con plántulas que han germinado en esa primavera (que constituyen la primera clase que llamaremos P1 y tienen menos de un año), y plántulas que han germinado en la primavera del año anterior y ya han pasado un invierno (que constituyen la segunda clase que llamaremos P2, y tienen un poco más de un año). Lo que distingue a estas dos clases es que las plántulas pertenecientes a la segunda categoría ya han sobrevivido al estrés del verano y al rigor del invierno, mientras que las plántulas de la primera categoría son mucho más vulnerables. También se encontrarán con plantas que ya han sobrevivido a más de un invierno. Estas plantas ya han desarrollado un sistema de raíces profundo, que les permite sobrevivir al clima desfavorable. Estas fueron separadas en dos categorías según su estado reproductivo: los juveniles (no reproductivos, que llamaremos J, con más de dos años y menos de seis) y los adultos, plantas que ya han desarrollado estructuras reproductivas (que constituyen la cuarta clase que llamaremos A, y tienen más de seis años).

Como ya dijimos, este es un modelo que utiliza al tiempo como una variable discreta, esto es, supone que el tiempo se mide en unidades bien definidas que coinciden con los censos en los cuales los ecólogos que van al campo miden el estatus de la población. En este caso la unidad de tiempo elegida fue de un año. ¿En qué consisten estos censos? Se delimita un área de trabajo, todos los individuos de la especie en estudio se marcan con un número y se anotan algunas características que permitirán asignar a cada individuo a una de las clases en las que fue dividido el ciclo de vida (Figura 28).

Figura 28: En el campo las plantas identifican una por una (en un área determinada), se miden, se clasifica según las categorías preestablecidas, para lo que se establece si es una plántula de este año o del año anterior o se ve si hay evidencias estructuras reproductivas (evidencias de floración) (Fotos A. Ruete y L. Ghermandi)

Por ejemplo anotan si la planta tiene estructuras reproductivas (y por consiguiente es un adulto), si aun cuando no es reproductiva tiene el tronquito leñoso (o sea ya no es una plántula pero tampoco un adulto, o sea es un juvenil), si es una plántula buscan evidencias de que sea nueva o del año anterior (esto se relaciona con la altura y las ramificaciones que presenta), etc.

Al repetir el censo al año siguiente, se vuelve a mirar cada planta y se evalúa si aún vive, si cambió de categoría, si permanece en la que estaba o si es una nueva planta en el sitio. La Figura 29 muestra la evolución del estado fenológico de la planta a lo largo del año es decir, la época en que germinan las plátulas y se establecen, crecen, florecen y fructifican (producen semillas) las plantas grandes y se dispersan las semillas. También la época de mayor ocurrencia de incendios. Los censos se realizan en diciembre.

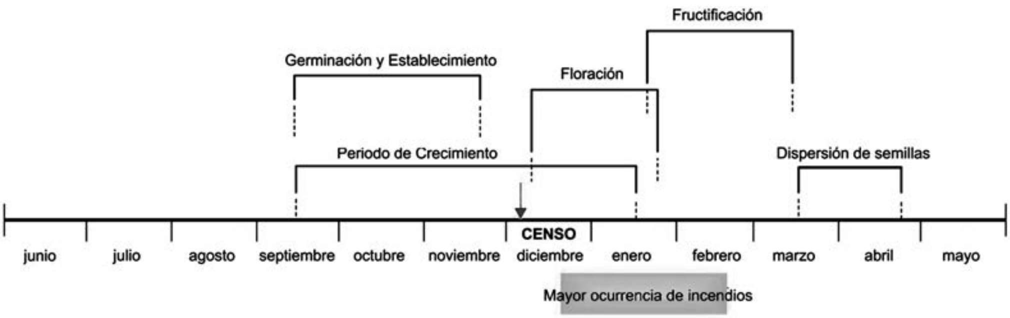

Figura 29: Esquema del proceso de desarrollo de la planta, época en que ocurren los fenómenos ambientales incluidos en el modelo y de los censos. (Diseño A. Ruete)

Una vez definidas las clases o categorías en las que se divide el ciclo de vida de esta especie, se debió recurrir a lo que se sabía sobre las características que determinan la evolución dinámica de la población: la probabilidad de nacer y establecerse de las nuevas plantas, la probabilidad que todas tienen de sobrevivir de un año al siguiente, y la tasa de producción de nuevos individuos por cada individuo adulto. Este último parámetro, la producción anual de nuevos individuos, se relaciona en primer lugar, obviamente, con la producción de semillas. A diferencia de otras (como la frutilla que se reproduce formando unos estolones que dan lugar a nuevas plantitas), esta planta no se reproduce de otra manera que no sea por semillas. Pero, como dijimos, cada planta adulta de palo piche produce muchísimas semillas (unas 200.000 por año, en promedio) que permanecen “almacenadas” en el suelo durante mucho tiempo (hasta 80 años según algunas estimaciones) esperando las condiciones favorables para la germinación[18]. Para darnos una idea de la cantidad tremenda de semillas que se producen, un dato interesante es que en un matorral de esta especie puede ocupar desde unos cientos de metros cuadrados hasta varias hectáreas y en promedio hay unos 1.500 adultos por hectárea: 1.500 adultos por hectárea, por 200.000 semillas por adulto, por unos 80 años de viabilidad.... ¡Una enormidad! De esta manera aparece un nuevo supuesto: la cantidad de semillas no es un limitante para el reclutamiento de nuevos individuos, por lo que no fue incluido en el modelo.

El modelo para el palo piche

Como ya vimos, dentro del ciclo de vida de una planta de cualquier especie tienen lugar diversos procesos como la germinación, el establecimiento y la supervivencia de las plántulas, la maduración, la reproducción, y la mortalidad. Las condiciones ambientales influyen en estos procesos de distinta manera. Hay condiciones ambientales que pueden ser beneficiosas (como una cantidad de precipitación superior a lo acostumbrado) o perjudiciales (como un incendio). Incluso, un mismo fenómeno ambiental puede ser beneficioso para un proceso y perjudicial para otro dentro del mismo ciclo de vida. Por ejemplo, vientos fuertes pueden ser beneficiosos

18 Este reservorio de semillas acumulado en el suelo se llama “banco de semillas”

para una especie cuya dispersión de semillas depende de él, aunque la intensidad del viento podría perjudicar el establecimiento de plántulas si se producen voladuras de las capas superficiales del suelo.

Para la elaboración del modelo conceptual del ciclo de vida de nuestra planta era necesario identificar los principales procesos involucrados y de qué manera las condiciones ambientales (presencia o no de un incendio en el verano y abundancia o no de precipitación) inciden en estos procesos.

Vamos por partes: ¿de qué depende entonces la incorporación de nuevos individuos a la población? De las condiciones ambientales. Los datos de los que se disponía permitían afirmar que si nos encontráramos en una situación posterior a un incendio al que sucedió una primavera húmeda, la germinación sería máxima, si, en cambio, la primavera fuera más seca, la germinación sería del orden del 10% de la de la situación anterior. Por otra parte, si en el verano no hubiera ocurrido un incendio, aun cuando la primavera fuera húmeda, la cantidad de nuevos individuos sería extremadamente baja.

La supervivencia, por su parte, depende de varias cosas. Por un lado, se ve regulada por la ocurrencia de fuego. Aquí se hizo necesaria la inclusión de un nuevo supuesto: cuando ocurre un incendio, mata a un porcentaje de la población (en iguales proporciones en todas las clases) proporcional al tamaño que alcanza el incendio. Este supuesto introduce una simplificación bastante importante de la situación, ya que los individuos no se distribuyen homogéneamente en el terreno ni el fuego se propaga homogéneamente por el paisaje. Sin embargo no es un supuesto demasiado restrictivo a escala de paisaje. Otra causa de mortalidad independiente del fuego es la edad, y dentro de esto, la vulnerabilidad de las plantas a las condiciones del ambiente. Las plántulas en su primer año presentan una tasa de mortalidad mucho mayor que las aquellas que ya tienen un poco más de un año. Mientras, los ecólogos no han encontrado individuos juveniles o adultos muertos por causas diferentes del fuego. ¿Esto significa que las plantas adultas de palo poche son inmortales? Ciertamente no, lo que significa es que las plantas son muy longevas y que su vulnerabilidad a las condiciones del ambiente una vez que han desarrollado su sistema de raíces fuerte y profundo, es casi nula. Luego, fue necesario hacer un nuevo supuesto: que la tasa de mortalidad para estas clases por razones ajenas al fuego es muy baja.

La Figura 30 muestra el modelo conceptual para el ciclo de vida de esta planta y la influencia de las condiciones ambientales sobre los procesos involucrados. Cada círculo representa una clase dentro del ciclo de vida y las flechas representan los procesos que están en juego entre estas clases de un año al que sigue.

Estos procesos pueden describirse como probabilidades de transición de una clase a la siguiente (α_{P1}, α_{P2} y α_J), es decir, la probabilidad de que un individuo que este año está en una clase esté en la clase siguiente el próximo año; la probabilidad de permanecer dentro de la clase (γ_J y γ_A) y reproducción, es decir, la cantidad de plántulas producidas por adulto κ_A en un año. Estos valores dependen de la presencia o no de fuego en el verano y de la cantidad de precipitación que se registra en la primavera, si es más abundante que lo normal o no.

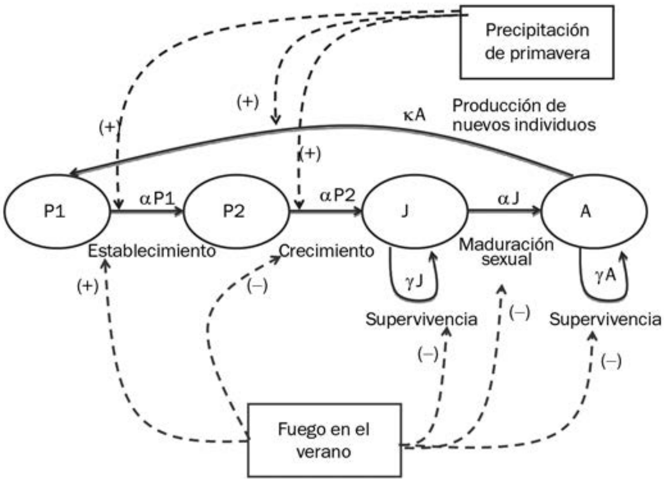

Figura 30: Modelo conceptual para la dinámica del ciclo de vida del palo piche. En los globos las categorías del ciclo de vida, las líneas llenas indican los procesos demográficos y las líneas punteadas el efecto de las condiciones ambientales sobre estos procesos. Entre paréntesis se indica si el efecto es positivo o negativo.

Este modelo, en la práctica, se traduce en ecuaciones, e incluye otros supuestos relativos a cuestiones matemáticas que no hemos mencionado.

Combinando la dinámica ambiental con la dinámica de la población

"Hay que simplificar las cosas tanto como sea posible, pero no más"
Albert Einstein (1879-1955)

Ya tenemos el modelo que describe la dinámica de la población dentro de cada conjunto de condiciones ambientales, y el modelo que describe la dinámica del ambiente dentro de cada escenario ambiental (definido por la probabilidad de ocurrencia de un incendio y por la cantidad de precipitación de la primavera siguiente). Ahora toca combinar todo eso en un nuevo modelo que nos permita proyectar una población arbitraria a lo largo del tiempo y analizar cuantitativamente si la cantidad de individuos tiene una tendencia a crecer, a decrecer o a mantenerse estable. Este procedimiento dio información acerca de la tendencia de esta especie a avanzar o no y aportó a la discusión acerca de la arbustización de los pastizales del noroeste de la Patagonia. Estas proyecciones se realizaron por medio de simulaciones que se conducen a través del desarrollo de programas de computadora.

¿Qué pasaría si...?

Este modelo que hemos analizado sirvió para explorar la respuesta poblacional del arbusto palo piche a la variabilidad ambiental que imponen distintas las frecuencias de fuego y la abundancia de precipitación en primavera. Esta es una cuestión que es prácticamente imposible de analizar con métodos experimentales, no sólo por costosos o peligrosos (hacer quemas en pastizales, aunque sean controladas es un peligro y carísimo), sino porque los tiempos involucrados en estos procesos son enormes. Una vez que el modelo estuvo armado, fue calibramos a partir de los datos disponibles (experimentales, de campo y de la bibliografía) y se pudo analizar de qué manera el palo piche se comportaría en estos "escenarios hipotéticos" que contemplaron tanto una disminución gradual de la frecuencia de fuego (desde un incendio por año hasta la exclusión total), como la variabilidad climática representada por la cantidad de precipitación que se observa en la primavera.

¿Qué pasaría si... la frecuencia de fuego fuera cambiando?

Bajo los supuestos que fuimos mencionando, el modelo prevé que la población de palo piche aumentará para una amplia variedad de frecuencias de fuego que va desde un incendio cada 4 años hasta uno cada 100 años, alcanzando un máximo de la tasa de crecimiento para una frecuencia de un fuego cada 6 a 10 años. En el caso de la exclusión de fuego, el modelo prevé un lento decrecimiento de los matorrales, en los cuales los individuos envejecerían hasta morir. Quizás eso podría resultar un beneficio desde el punto de vista del control de la expansión de los arbustos sobre áreas dominadas por pastos y en el caso del uso de la tierra con fines ganaderos, pero tendría como contrapartida negativa la acumulación de biomasa seca de las gramíneas dominantes, y un aumento en la continuidad de combustible que podría llevar a un incendio de grandes dimensiones y de consecuencias severas en caso de producirse.

Esto hace pensar que la exclusión de fuego no es la mejor manera de conservación aun en áreas protegidas, sino que una estrategia más adecuada sería reproducir el régimen de fuego al cual las especies están adaptadas. En varias de las frecuencias de fuego estudiadas los resultados del modelo indicaron que aun cuando la tendencia de variación poblacional es hacia el crecimiento, a lo largo de la simulación se registran períodos de crecimiento poblacional intercalados entre los períodos de decrecimiento. En los casos de las frecuencias bajas, los períodos de decrecimiento se relacionan con la ausencia de fuego y los de crecimiento con los eventos de fuego acoplados con primaveras húmedas. En los casos de incendios más frecuentes, los períodos de decrecimiento posiblemente se relacionen con el efecto destructor del fuego, que aun cuando estimula el reclutamiento, elimina parte de la población. El reclutamiento es máximo cuando se presenta un incendio seguido de una primavera húmeda, y con una alta frecuencia de fuego, este acople es más probable.

¿Qué pasaría si… las primaveras lluviosas fueran más frecuentes?

Los pronósticos de cambio climático prevén un aumento de la frecuencia de los fenómenos El Niño y, consecuentemente, un aumento en la frecuencia de primaveras húmedas y de veranos secos y calurosos con un aumento de las tormentas de rayos (que son la principal causa de incendios naturales). Dentro de este marco, la coincidencia de un verano con fuego y la primavera posterior con precipitaciones abundantes sería más probable, lo que constituiría el conjunto de condiciones ambientales óptimas para el crecimiento poblacional del palo piche.

La tasa de crecimiento de la población se vincula con todos los procesos demográficos (la reproducción, el crecimiento y la supervivencia). Cuando la frecuencia de fuego aumenta, la variación de la cantidad de individuos de la población es “responsabilidad” tanto de la producción de nuevos individuos como de la supervivencia de las plantas de todas las clases. En cambio, cuando la frecuencia de fuego disminuye, cobra importancia la supervivencia de los adultos. Cuando la frecuencia de fuego es muy baja, los eventos de reclutamiento son raros, y, consecuentemente, lo son la presencia de plántulas o de juveniles. En estos escenarios, el paisaje estaría formado por matorrales maduros de palo piche, y la persistencia de la población dependería de la supervivencia de los individuos, de la producción de semillas y de su acumulación en el suelo. Por el contrario, a frecuencias muy altas de fuego, se observarían pulsos de reclutamiento más frecuentes, con un paisaje dominado por matorrales más jóvenes compuestos por individuos de diferentes edades y estados reproductivos.

¿Y si agregáramos más actores?

Este modelo es un ejemplo de cómo la matemática puede dar respuesta a preguntas sobre el funcionamiento de un sistema en escenarios diferentes al actual pero que por alguna razón son interesantes: o porque es lo que se viene en términos de cambio climático, o porque interesa saber cuál sería el resultado de adoptar una u otra política de manejo de los ambientes considerados. Obviamente esto puede complejizarse mucho más y en tanto más variables se involucren, obtendremos respuestas más precisas. Porque, por ejemplo, esta planta convive con otras (y con algunos animales también) que se ven afectados de la alguna manera (no necesariamente la misma) por los mismos fenómenos (precipitaciones abundantes e incendios frecuentes). ¿Cómo es la dinámica a escala de paisaje, considerando más actores, y de qué manera estos factores influyen en el ecosistema? Mucho más para seguir estudiando.

Para terminar

"La ciencia es una estrategia,
es una forma de atar la verdad
que es algo más que materia,
pues el misterio se oculta detrás."
Luis Eduarto Aute (1943 -)
De paso (fragmento)

La vida en cualquier ambiente es un ensamble asombroso de seres vivos interactuando entre ellos y con el medio, de procesos y relaciones, y (en mi opinión) inescrutable como un todo. Sin embargo, cada ciencia desde su dominio puede aportar a dar un poquito más de luz sobre esta maravilla que es la naturaleza. Los modelos matemáticos en la ecología son una aproximación que va de la mano de la experimentación y de la observación que hacen los ecólogos en el campo y en sus laboratorios. La ecología matemática (o la matemática aplicada a la ecología), es un campo interdisciplinar que tiene sentido sólo en un fluido diálogo entre los especialistas de cada saber.

En una conferencia titulada: "Modelos matemáticos en biología: una historia de éxitos y fracasos" que diera el Profesor Philip Kumar Maini, del Centro de Biología Matemática del Instituto de Matemática de la Universidad de Oxford a principios de 2012, dijo: "*No hay receta mágica que asegure que un modelo matemático aplicado a la biología funcionará y, sin embargo, la mayoría ofrece elementos útiles para entender asuntos complejos de la vida*".

Cualquiera que sea la definición que adoptemos, el objetivo básico de las ciencias fácticas es la modelización de distintos aspectos de la realidad, de modo que estos modelos puedan utilizarse para, en términos comprensibles, predecir, descubrir mecanismos y patrones, entender, analizar, proyectar,.... Para desarrollar esta tarea (como ocurre con cualquier otra actividad humana), hace falta un lenguaje, y ese lenguaje es, por excelencia, el de la matemática. Más allá de su auxilio a otras ciencias, la matemática tiene su propio desarrollo interno, donde se crean estructuras de gran complejidad y belleza, que quizás hoy no tienen un correlato con un problema de la naturaleza, aún en su sentido más amplio, pero probablemente lo tendrán alguna vez.

Los biólogos y los matemáticos esperan cosas distintas de los modelos. Los primeros una perspectiva, los segundos una oportunidad. La perspectiva viene dada por la posibilidad de explorar escenarios interesantes (que podrían existir o no), y por la posibilidad de mostrar una generalidad dentro del mundo de las particularidades. La oportunidad, porque muchas veces un problema biológico propone un desafío que no es posible abordar con lo que tenemos o sabemos, e invita al desarrollo de nuevas herramientas, nuevas técnicas, nuevas teorías, o al menos, a usos novedosos de lo que ya teníamos. Esto en lo relativo al uso de los modelos matemáticos en el ámbito de las ciencias naturales específicamente, pero también aplica más ampliamente en el ámbito de cualquier ciencia.

Rara vez la construcción de un modelo se lleva a cabo de una manera directa, mecánica y fluida. Es una travesía de prueba y error, de búsqueda, de toparse con caminos sin salida, de saltos al vacío, y por supuesto, de disfrute de todo el proceso. Por eso, para terminar, me gusta una frase del físico teórico contemporáneo Lee Smolin: "*En el fondo, los científicos somos gente con suerte: podemos jugar a lo que queramos durante toda la vida*". Particularmente hacemos esto los hacemos que modelos matemáticos, pero en especial, cuando lo hacemos, también agregamos a nuestro juego algo de arte.

Para seguir leyendo: lecturas comentadas

En vez de una lista de bibliografía consultada, propongo a continuación un punteo de algunos libros que me apasionaron, aunque de ninguna manera es una lista exhaustiva. En primer lugar porque sería larga, y en segundo, porque aún está abierta, sigo encontrando libros maravillosos que son ventanas al fascinante mundo de la ciencia. En este relato hemos tocado temas diversos, tanto de aspectos de la historia de la ciencia en general como de la matemática en particular, en uno de sus múltiples desarrollos: los modelos matemáticos. Respecto de esto último hay relativamente poca literatura en castellano, y, aunque algunas obras han sido traducidas, es difícil dar con ellas, porque muchas veces están agotadas. Daré a continuación una breve lista de libros o revistas, separadas según la temática que abordan.

Sobre la ciencia y sus métodos, que hemos mencionado brevemente en un apéndice, hay un libro precioso, en castellano, que sirve de introducción, en un lenguaje claro y ameno, al estudio de la naturaleza de la ciencia: Se trata de *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?* de *Alan F. Chalmers* (Siglo XXI Editores, Argentina, 1988), que recorre diferentes teorías científicas. Otro libro imperdible es *El quark y el jaguar, Aventuras en lo simple y lo complejo,* escrito por el Premio Nobel *Murray Gell-Mann* (Tusquets Editores (1995), Barcelona). Hemos hablado de este libro al principio, cuando nos referíamos a la evolución de las teorías científicas. En esta obra Gell-Mann reflexiona acerca de la complejidad, ese nuevo reto de la física y la matemática que mantiene expectantes a los estudiosos de varias disciplinas como la biología, la economía, la arquitectura, el arte y la psicología. *El quark y el jaguar* es un libro fundamental para comprender la naturaleza de ese reto, porque investiga las conexiones entre las llamadas “leyes fundamentales de la física” y la asombrosa complejidad y diversidad del mundo natural que nos rodea. Gell-Mann maneja la analogía y la paradoja con agilidad y brillantez.

Para enterarse un poco sobre temas relacionados con la dinámica de poblaciones, ya hemos mencionado el libro *Ecología de poblaciones animales,* de *Jorge E. Rabinovich*, publicado por el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, del Departamento de Asuntos Cientificos de la OEA (Washington, 1978). Es parte de una colección de ciencias que vale la pena completa.

Para quienes desean incursionar sobre el tema de los modelos, hay un libro sencillo, ideal para aquellos que, no teniendo una formación matemática, desean aproximarse al mundo de los modelos en ecología. En un lenguaje accesible y agradable, incluye una síntesis intuitiva de las principales herramientas que permiten empezar a trabajar en la modelización matemática de procesos ecológicos. Se trata de *Ecología Matemática, principios y aplicaciones,* escrito por *Fernando R. Momo y Ángel F. Capurro (Ediciones Cooperativas, 2006).* Otro, más antiguo pero sencillo para empezar a leer es *Introducción a la biomatemática* de *David Machin* (Editorial Acribia, 1981).

Yendo a los libros que (pienso yo) deben formar parte de la bibliografía de cabecera de todo aquel que quiera encarar el estudio de los modelos matemáticos en ecología, podría mencionar los siguientes:

A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution de *Sarah P. Otto* y *Troy Day* (Princeton University Press, 2007) que comienza con el estudio de los modelos matemáticos, en el supuesto de que el lector ha tenido la matemática de la escuela secundaria y posee algunas nociones de cálculo. Construye progresivamente en su profundidad y complejidad, desde los modelos clásicos de la ecología a modelos mucho más intrincados.

Un clásico infaltable si uno piensa trabajar con modelos discretos es *Matrix population models: construction, analysis, and interpretation* de *Hal Caswell (Sinauer Associates Press,2001).* Ampliado de su primera edición de 1989, este libro trata sobre modelos que utilizan como herramienta el álgebra de matrices. Incluye el tratamiento de modelos estocásticos y densodependientes, análisis de sensibilidad, inferencia estadística, estimación de parámetros, modelos poblacionales estructurados, estocasticidad demográfica, y aplicaciones de estos modelos en el campo de la biología de la conservación.

Hay autores clásicos que uno debería leer si quiere dedicarse a trabajar en esto, como E.C Pielou, J. Murray, Leah Edelstein-Keshet o Simon A. Levin, prestigiosos estudiosos de ecología teórica y biología matemática y especialistas en el uso de modelos matemáticos y estudios empíricos para la comprensión de patrones macroscópicos de ecosistemas y de diversidades biológicas

Algunas revistas científicas y de divulgación de las ciencias que pueden aportar lecturas complementarias. De las primeras, *Ecología Austral*, una publicación de la Sociedad Argentina de Ecología, cuyos artículos pueden bajarse gratuitamente de internet (http://www.ecologiaaustral.com.ar). En esta publicación periódica a veces aparecen algunos artículos relacionados con modelos matemáticos en ecología. Uno de ellos, que se presenta como una ayuda didáctica al tema de modelos matemáticos en ecología, titulado *Modelos en ecología* de *Roberto A. Gollucio, Pablo A. Roset, Osvaldo E. Sala* y *José M. Paruelo* (Ecología Austral, Volumen 4, páginas123 a 132, 1994). De las segundas, la *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias*, de acceso libre, su contenido puede bajarse gratuitamente de internet (http://reuredc.uca.es/index.php/tavira), y también de descarga gratuita, algunos artículos de la revista *Desde la Patagonia, Difundiendo saberes*, (http://desdelapatagonia.uncoma.edu.ar).

Páginas de internet:

http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v19n2p231.pdf Modelos y analogías en la enseñanza de las ciencias naturales. El concepto de modelo didáctico analógico. Lydia Galagovsky y Agustín Adúriz-Bravo

http://es.scribd.com/doc/101182154/Modelizacion-matematica. Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. Morten Blomhøj

http://es.scribd.com/doc/184946074/La-Utilidad-de-Los-Modelos-Cientificos. Conferencia del Dr. Manuel Tohara Cortés en la Universidad de Málaga

http://escritoriorural.educ.ar/wp-content/uploads/PDF1_Modelos-en-ciencias.pdf. Los modelos en ciencia.

http://personal.us.es/angeles/Actual/mmcs/tema1.pdf. Modelos Matemáticos de Poblaciones. Métodos Matemáticos para las Ciencias de la Salud. Curso 2007/08. M. Gómez Mármol.

www.escholarship.org/uc/item/5536t55r. Cycling in the Complexity of Early Societies. Sergey Gavrilets, David G. Anderson y Peter Turchin.

www.ing-mat.udec.cl/~rburger/papers/biomatematicamanu2012.pdf . Introducción al Modelamiento en Biomatemática (Apunte). Raimund Bürger

www.librosorevistas.com/programacion/sanchez-garduno-el-dificil-amor-entre-la-biologia-y-las-matematicas-pdf.html. Artículo de Faustino Sanchez-Garduño y José Luis Gutiérrez Sánchez.

www.nature.com/nature/journal/v411/n6834/full/411151a0.html Beyond the spherical cow. John Doyle.

www.nature.com/news/human-cycles-history-as-science-1.11078. Human cycles: History as science. Laura Spinney

www.rac.es/ficheros/doc/00891.pdf. Epidemiología Matemática: Ejemplos, Datos y Modelos Asociados. Jorge X. Velasco-Hernández. Programa en Matemáticas Aplicadas y Computación Instituto Mexicano del Petróleo. Departamento de Biología Ambiental. Universidad Autónoma Metropolitana-Lerma. Guatemala.

www.rac.es/ficheros/doc/00891.pdf. Matemáticas y ciencia. Fernando Bombal Gordón. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España. Vol. 103, Nº. 2, pp 279-295, 2009. X Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

Apéndice

Las ciencias y sus métodos

"...no todo lo que se cuenta, cuenta y, no todo lo que cuenta, se cuenta..."
Albert Einstein (1879-1955)

Todas las ciencias se basan en determinadas raíces epistemológicas, (del griego *episteme,* conocimiento y *logo*, teoría) es decir, creencias acerca de cómo se produce el conocimiento. Esto se relaciona con dos aspectos: ¿qué es lo que puede conocerse (lo cognoscible)?, y ¿cuál es la naturaleza de las relaciones entre el investigador y el objeto investigado? Como todo proceso social, la ciencia es un proceso dinámico que ha evolucionado con el tiempo, pasando por diferentes criterios de evaluación de estos dos aspectos, que constituyen los *paradigmas* de la ciencia. En el ámbito científico un paradigma es una construcción social que ofrece un sistema de pautas a las cuales se circunscribe la comunidad de investigadores que comparten sus postulados.

Diferentes ciencias usan diversos métodos, y sus formas de aproximación al conocimiento dependen precisamente de su orientación epistemológica o paradigma en el que se enmarcan. Sin la pretensión de ahondar en este tema (que es tan apasionante como extenso), diremos que estos marcos de aproximación, teóricos y metodológicos son los que permiten a cada ciencia interpretar los fenómenos que desea estudiar. En las ciencias fácticas podemos distinguir dos aproximaciones: la cuantitativa y la cualitativa. La primera asume que existe una realidad objetiva y su meta es describir, explicar y predecir fenómenos de la naturaleza, a través de la generación de teorías que se ponen a prueba. Sus herramientas metodológicas básicas son la medición y la inducción. En esta aproximación el investigador se asume neutral, haciendo a un lado sus valores y creencias (lo cual vimos que es al menos difícil..., hablando de Newton y Leibniz) y la finalidad que persigue es la de poner a prueba hipótesis y explicar patrones. Los datos que se obtienen a partir de la medición (que pueden provenir de la experimentación o de la observación) se analizan sistemáticamente mediante métodos estadísticos con distintos niveles de sofisticación. Una de las ventajas de este método es la repetibilidad, es decir, otro investigador puede hacer lo mismo en otro lado, y en tanto sea así, los resultados son comparables. El enfoque cualitativo en cambio, asume que no existe una realidad objetiva y que ésta depende de la mirada del investigador, es decir, el investigador es parte de la realidad que se investiga. Su meta es describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de la experiencia del investigador dentro del contexto en el que se desarrollan, asumiendo que no pueden hacerse a un lado valores y creencias. Los datos que se obtienen se analizan mediante métodos descriptivos, son flexibles, suelen estar mechados de fragmentos de discurso de los participantes de los estudios, por lo que admiten subjetividades, y, aunque logran desarrollar ideas en profundidad, están restringidas al contexto. Esto hace que cada estudio sea particular e irrepetible.

Si bien son muy diferentes, ambas aproximaciones tienen algunos procesos en común. En ambos casos se *observa* un fenómeno, el investigador se *formula preguntas* a partir de las ideas que le suscita la observación, idea formas de *recoger información*, y de *mostrar* en qué medida las suposiciones e ideas tienen fundamento en los datos obtenidos de la realidad, lo cual permite decidir si las ideas previas que se desarrollaron son aceptables o no, y de ahí proponer nuevas observaciones que permitirán esclarecer las cosas que no quedaron bien resueltas e incluso generar otras nuevas preguntas, motivadas por las respuestas encontradas.

El marco de aproximación cuantitativo se conoce como *enfoque positivista*, preferido por ciencias como la biología, la física y la química, y mientras que la *hermenéutica* y la *teoría social o participativa* son aproximaciones cualitativas, preferidas por ciencias como la historia, la antropología, o la sociología. Resumidamente podríamos decir que mientras el enfoque positivista busca encontrar regularidades, explicar, predecir y encontrar relaciones entre variables, la hermenéutica y teoría social se concentran en comprender e interpretar la realidad y los significados de las acciones humanas. Para el positivismo, el objetivo es el conocimiento de las regularidades de carácter universal, generalizable a todos los contextos, mientras que para la aproximación cualitativa el conocimiento es válido en contexto.

El paradigma positivista ha liderado el pensamiento científico desde el siglo XIX ya que mostró ser muy efectivo desde los primeros abordajes de las ciencias naturales. Sin embargo, cuando Einstein estableció la relatividad del tiempo, considerado hasta entonces de carácter absoluto, y cuando la mecánica cuántica puso en evidencia que la sola presencia del investigador afecta el curso de las micropartículas, las bases del paradigma positivista tambalearon. El primer descubrimiento puso en crisis las creencias acerca del carácter estático de la realidad, y el segundo cuestionó las ideas relacionadas con la naturaleza "aséptica" del instrumento de investigación. Sin embargo, este paradigma sigue vigente y muchos trabajos de las ciencias experimentales como la biología, la física y la química se inscriben dentro de este paradigma. En la aproximación positivista "el método" es el rey, que debe ser perfecto, de manera que pueda captar la realidad "pura" (tal cual es, ya que se supone que es una sola) y por tanto, descontaminada de subjetividad. Para el positivismo existe un solo método para acceder al conocimiento, en donde el investigador no puede aportar nada de su subjetividad, aunque el objeto de estudio lo afecte directamente. El método científico para el paradigma positivista tiene dos pilares fundamentales: la *reproducibilidad,* es decir, permite repetir la medición de una variable en cualquier lugar y por cualquier persona, reproduciendo las condiciones bajo las cuales esto se hace; y la *falsabilidad*, que es la capacidad de una hipótesis de ser puesta a prueba. La corroboración experimental de una teoría científicamente "probada" se mantiene siempre abierta a escrutinio. Este método científico tiene una serie de pasos (que como vimos, comparte en parte con la aproximación cualitativa): la observación del fenómeno, que lleva a la formulación de las preguntas de investigación, la formulación de hipótesis, que son respuestas propuestas por el investigador a las preguntas de investigación, basadas en el conocimiento previo del sistema, la formulación de predicciones, es decir, qué esperaríamos encontrar si las hipótesis fueran ciertas, la recolección de información que nos permita verificar si nuestras hipótesis son acertadas o refutarlas, la inducción, es decir extraer el principio general implícito en los resultados observados y la comparación universal, eso sea, la contrastación de las hipótesis con la realidad observada.

La matemática, en cambio, como ciencia formal, se inscribe en un tercer paradigma, el enfoque *racionalista-deductivo,* de acuerdo al cual se concibe como producto del conocimiento científico el diseño de sistemas abstractos dotados de alto grado de universalidad que imiten los procesos de generación y de comportamiento de una cierta realidad. Según esto, el conocimiento es más un acto de invención que de descubrimiento. Pero, el ámbito de los modelos matemáticos en las ciencias es otra cuestión diferente de la matemática misma. Ciertamente la resolución de problemas de las ciencias (especialmente las naturales) ha conducido muchas veces al desarrollo de teorías dentro de la matemática, que escaparon a la necesidad específica del problema, y en este caso el método de la matemática es deductivo. Pero en muchos casos, el trabajo del modelado matemático en otra ciencia se trata más de la representación del funcionamiento de un sistema a partir del uso de objetos matemáticos ya existentes que son quizás novedosamente aplicados a la problemática particular pero no son novedosos para la matemática, de modo que no implican necesariamente un desarrollo de esta última. En este sentido, la aplicación de la matemática como herramienta para resolver problemas de otras disciplinas sería un área que se circunscribe al paradigma en el cual se posiciona la otra disciplina, clásicamente el enfoque positivista.

FHN
FUNDACIÓN
DE HISTORIA NATURAL
FELIX DE AZARA

La Fundación Azara, creada el 13 de noviembre del año 2000, es una institución no gubernamental y sin fines de lucro dedicada a las ciencias naturales y antropológicas. Tiene por misión contribuir al estudio y la conservación del patrimonio natural y cultural del país, y también desarrolla actividades en otros países como Paraguay, Bolivia, Chile, Brasil, Colombia, Cuba y España.

Desde el ámbito de la Fundación Azara un grupo de investigadores y naturalistas sigue aún hoy en el siglo XXI descubriendo especies -tanto fósiles como vivientes- nuevas para la ciencia, y en otros casos especies cuya existencia se desconocía para nuestro país.

Desde su creación la Fundación Azara contribuyó con más de cincuenta proyectos de investigación y conservación; participó como editora o auspiciante en más de doscientos libros sobre ciencia y naturaleza; produjo ciclos documentales; promovió la creación de reservas naturales y la implementación de otras; trabajó en el rescate y manejo de la vida silvestre; promovió la investigación y la divulgación de la ciencia en el marco de las universidades argentinas de gestión privada; asesoró en la confección de distintas normativas ambientales; organizó congresos, cursos y casi un centenar de conferencias.

En el año 2004 creó los Congresos Nacionales de Conservación de la Biodiversidad, que desde entonces se realizan cada dos años. Desde el año 2005 comaneja el Centro de Rescate, Rehabilitación y Recría de Fauna Silvestre "Güirá Oga", vecino al Parque Nacional Iguazú, en la provincia de Misiones. En sus colecciones científicas -abiertas a la consulta de investigadores nacionales y extranjeros que lo deseen- se atesoran más de 50.000 piezas. Actualmente tiene actividad en varias provincias argentinas: Misiones, Corrientes, Entre Ríos, Chaco, Catamarca, San Juan, La Pampa, Buenos Aires, Río Negro, Neuquén y Santa Cruz. La importante producción científica de la institución es el reflejo del trabajo de más de setenta científicos y naturalistas de campo nucleados en ella, algunos de los cuales son referentes de su especialidad.

La Fundación recibió apoyo y distinciones de instituciones tales como: Field Museum de Chicago, National Geographic Society, Consejo Superior de Investigaciones Científicas de España, Fundación Atapuerca, Museo de la Evolución de Burgos, The Rufford Foundation, entre muchas otras.

www.fundacionazara.org.ar
www.facebook.com/fundacionazara

No hay que saber matemática para leer este libro, sólo disponer de un poco de sentido común y un poco de fe para cuando hagamos un tratamiento informal de la matemática que vamos a usar. Veremos qué son y para qué sirven los modelos, cómo son parte de nuestra vida cotidiana, daremos un paseo por algunos modelos que han hecho historia, algunos modelos curiosos, y veremos, con un poco más de detalle, algunos ejemplos de modelos matemáticos en las ciencias naturales, particularmente en ecología. Uno se pregunta cómo es que la naturaleza puede ser expresada a través de una herramienta aparentemente tan artificial, abstracta y llena de restricciones como es la matemática. Sin embargo hay buenas razones para esto, que vamos a intentar explorar en este libro.

Mónica de Torres Curth es docente - investigadora del Departamento de Matemática y forma parte del Laboratorio Ecotono en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue, especializándose en modelos matemáticos en ecología. Trabaja también en divulgación de la ciencia, codirigiendo la revista *Desde la Patagonia, Difundiendo Saberes* que edita la Secretaría de Investigación de esa Universidad.

ISBN 978-987-3781-19-3
9 789873 781193

FHN
FUNDACIÓN
DE HISTORIA NATURAL
FÉLIX DE AZARA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
1972