

Festigkeitslehre

Festigkeitslehre setzt die Grundlagen der Statik voraus. Die Idealisierung eines realen Körpers zu einem starren Körper ermöglichte in der Statik, äußere und innere Kräfte an Tragwerken allein mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln. Um in der späteren Ingenieurspraxis das mechanische Bauteilverhalten wie Festigkeit, Steifigkeit, Stabilität, Dauerfestigkeit und Verformbarkeit zu berechnen und genau vorherzusagen, sind die Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichend. Es

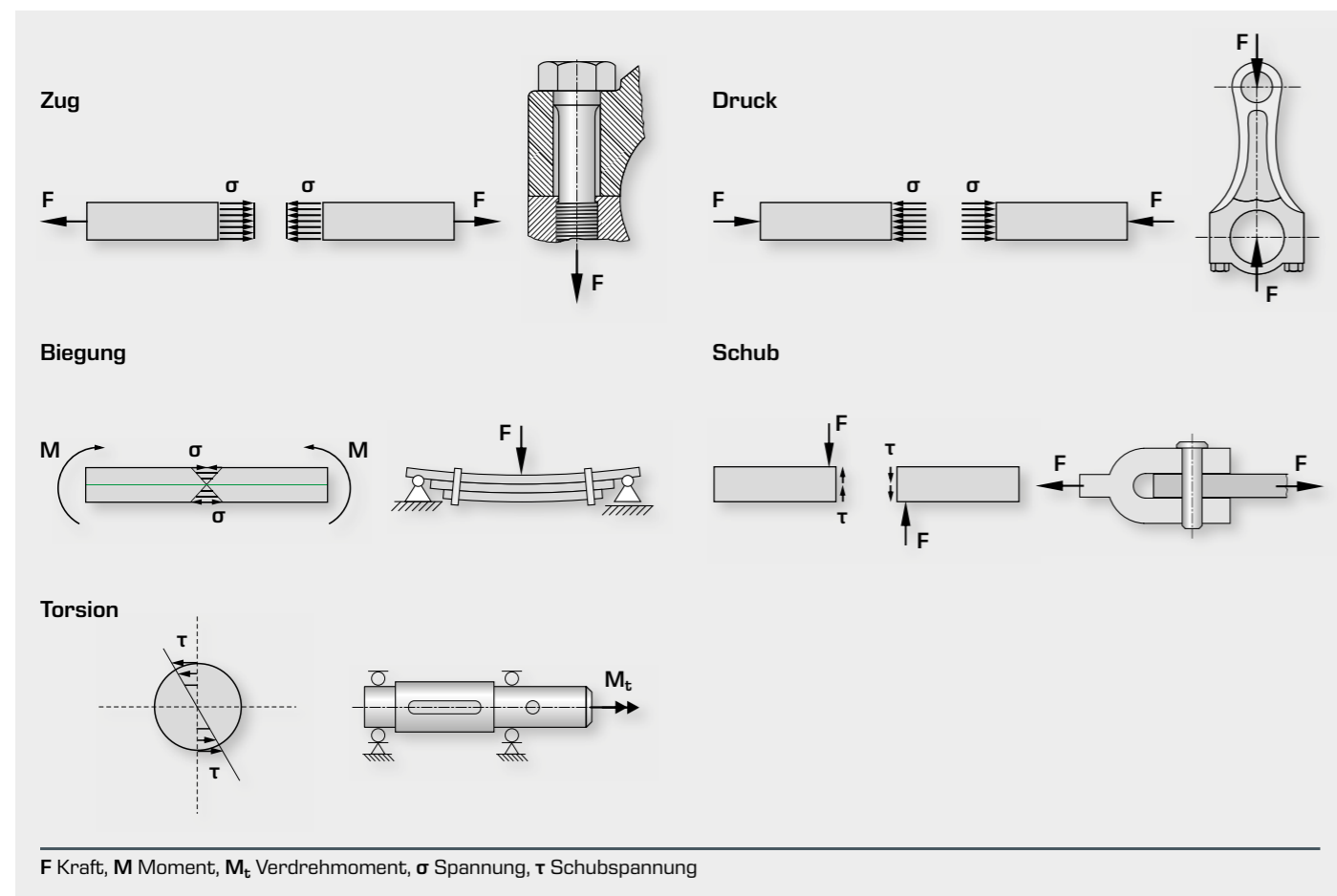
werden nun Kenntnisse über die Deformierbarkeit materieller Körper benötigt, ohne Betrachtung des Werkstoffes.

Die Festigkeitslehre befasst sich mit der Wirkung von Kräften auf verformbare Körper. Die Betrachtung werkstoffabhängiger Parameter kommt dazu. Eine Einführung in die Festigkeitslehre vermittelt daher den Spannungs- und Verformungsbegriff sowie das Hooke'sche Gesetz, das anschließend auf Zug- bzw. Druck-, Torsions- und Biegeprobleme angewandt wird.

Grundbegriffe der Festigkeitslehre

Beanspruchungsarten

Bauteile können auf unterschiedliche Weise beansprucht werden: Zug, Druck, Schub- und Scherbeanspruchung, Biegung, Torsion, Knickung und zusammengesetzte Beanspruchung.



Mechanische Spannungen

Sobald auf ein Bauteil Lasten, Momente oder Kräfte von außen einwirken, entstehen in seinem Inneren Kraftflüsse. Die Verteilung dieser Belastungen wird als mechanische Spannung

bezeichnet. Die mechanische Spannung definiert sich somit als Kraft pro Fläche. Dabei werden zwei verschiedene Fälle unterschieden:

Senkrechte Krafteinwirkung auf die Schnittfläche, Normalspannung σ

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Parallele Krafteinwirkung zur Schnittfläche, Schubspannung τ

$$\tau = \frac{F}{A}$$

F Kraft, A Schnittfläche, σ Spannung, τ Schubspannung

Elastische Verformung, Elastizitätsgesetz

Unter der Einwirkung von Kräften verformen sich Maschinen- und Bauteile elastisch. Solange die Belastung nicht groß genug ist, bleibt es bei einer rein elastischen Verformung. Das Elastizitätsgesetz beschreibt die elastische Verformung von Festkörpern, wenn diese Verformung proportional zur einwirkenden Kraft ist.

Energiemethoden

Bei den Energiemethoden spielen geometrische Betrachtungen eine untergeordnete Rolle. Anstatt der bisher verwendeten Gleichgewichtsbedingungen werden Aussagen darüber getroffen, welche Arbeit die äußeren Kräfte bei der Verformung eines Systems verrichten und in welcher Energieform und wo diese Arbeit gespeichert wird.

Die Energiemethoden in der Festigkeitslehre beruhen auf dem Energieerhaltungssatz und nutzen das Prinzip, dass jede Energie, die von außen auf einen Körper oder ein System übertragen wird, in innere Energie umgewandelt wird, z.B. in Verformung, Geschwindigkeitsänderung oder Wärme.

Zur Berechnung allgemeiner Systeme und der Stabilitätsuntersuchung elastischer Strukturen kommen unterschiedliche Energiemethoden zum Einsatz: z.B. das Prinzip der virtuellen Verschiebungen; das Prinzip der virtuellen Kräfte, die Sätze von Maxwell und Betti oder der Satz von Castigliano.

Der Ausgangspunkt aller Energiemethoden ist das **Prinzip der virtuellen Arbeit**. Es drückt eine Gleichgewichtsbedingung aus und lautet: Befindet sich ein mechanisches System unter der Einwirkung äußerer und innerer Kräfte im Gleichgewicht, so ist die Summe der gesamten virtuellen Arbeit, hervorgerufen durch innere und äußere Kräfte und beliebige virtuelle Verschiebungen, gleich Null.

Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta W = F \cdot \delta x = 0; \delta W = M \cdot \delta \phi = 0$$

$$\delta W = \sum \delta W = \sum F \cdot \delta x = 0$$

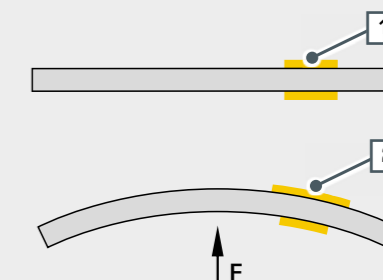
$$\delta W = \sum \delta W = \sum M \cdot \delta \phi = 0$$

δW virtuelle Arbeit,
 δx virtuelle Verschiebung,
 $\delta \phi$ virtueller Verdrehwinkel,
M Moment, F Kraft

Experimentelle Spannungsanalyse als Nachweis der Spannungen

Dehnmessstreifen (DMS)

Bei der experimentellen Spannungsanalyse wird die mechanische Spannung, die im belasteten Bauteil auftritt, zur Untersuchung der Werkstoffbeanspruchung herangezogen. Eine Methode zur experimentellen Bestimmung der mechanischen Spannung basiert auf dem Zusammenhang zwischen der Spannung und der von ihr abhängigen Verformung. Diese Verformung, „Dehnung“ genannt, tritt auch an der Oberfläche der Bauteile auf und kann somit gemessen werden. Das Prinzip der Dehnmessung ist ein bedeutender Zweig der experimentellen Spannungsanalyse.

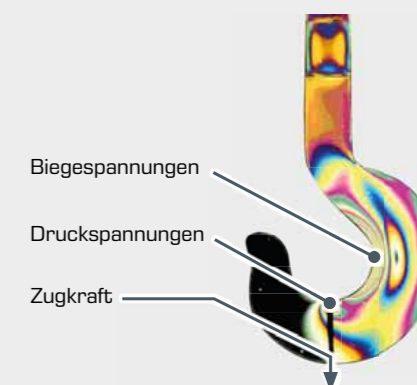


F Kraft, 1 DMS bei unbelastetem Bauteil, 2 DMS bei belastetem Bauteil

Spannungsoptik (Durchlicht-Polariscope)

Die Spannungsoptik ist ein optisches Verfahren zur experimentellen Ermittlung der Spannungsverteilung in durchsichtigen, meist ebenen Ersatzkörpern. Die Spannungsoptik liefert das komplette Bild des Spannungsfeldes. Bereiche hoher Spannungskonzentration und der daraus resultierenden Dehnung, genauso wie weniger belastete Bereiche lassen sich so gut visualisieren.

Die Spannungsoptik ist eine bewährte Methode zur Überprüfung analytisch oder numerisch durchgeführter Spannungsbetrachtungen (z.B.: FEM). Sie wird sowohl zum quantitativen Messen als auch zur Demonstration komplexer Spannungszustände eingesetzt.



Basiswissen Elastische Verformungen

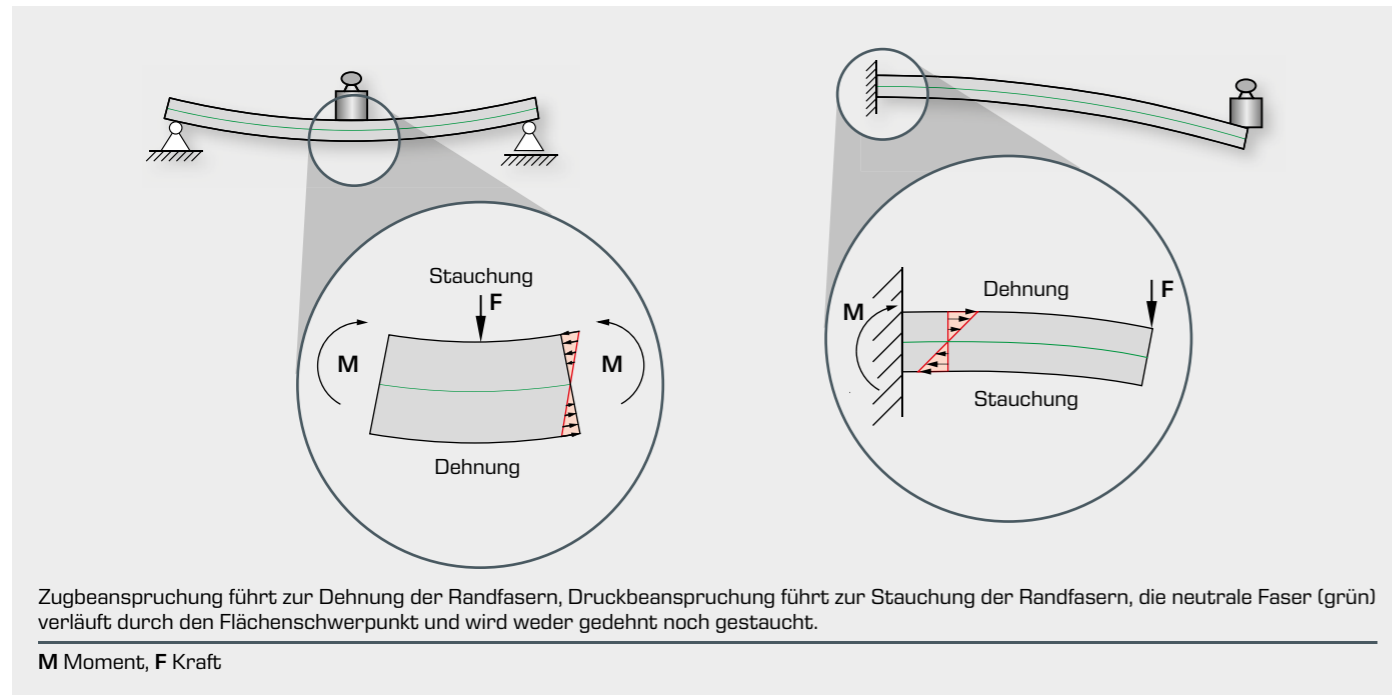
Bei Belastung durch äußere Kräfte werden Bauteile unterschiedlich beansprucht. Die Beanspruchung verursacht Spannungen in den Bauteilen. Das Gitter des Werkstoffs wird unter Krafteinwirkung verformt, z. B. zusammengedrückt, gedehnt etc. Diese Beanspruchung führt zu Verformungen des Volumens oder

Verformung von Balken

Durchbiegung und Tragfähigkeit von Balken und Trägern sind von großer Bedeutung für die Praxis im Hoch- und Brückenbau sowie im Maschinen- und Fahrzeugbau. Die Durchbiegung hängt

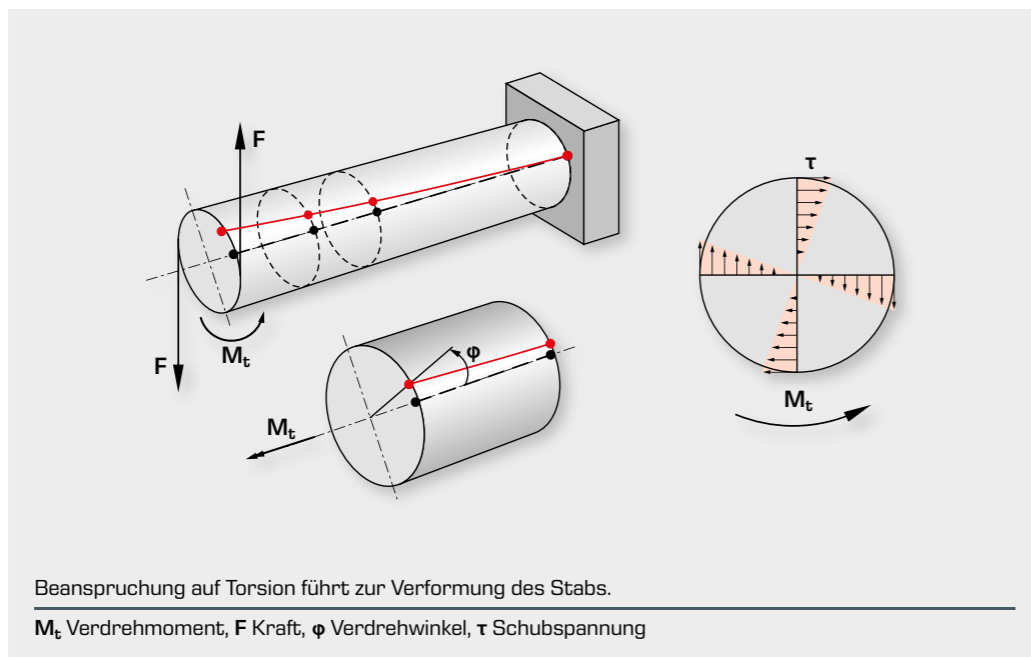
der Form. Im Gegensatz zur plastischen Verformung, versteht man unter elastischer Verformung, wenn nach Beendigung der Krafteinwirkung alle Atome wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren. Verschiedene Beanspruchungen führen zu typischen Verformungen der Bauteile.

von den Abmessungen, der Werkstoffeigenschaft und vor allem davon ab, wie die Balken und Träger an den Enden gelagert sind.



Verformung von Stäben infolge eines Verdrehmomentes

Bei einer Beanspruchung durch ein Verdrehmoment werden Stäbe um ihre Stabachse verdreht. Die Torsionsverformung wird durch den Verdrehwinkel φ beschrieben. Das Hooke'sche Gesetz besagt, dass der Verdrehwinkel φ proportional zu dem außen wirkenden Verdrehmoment ist.



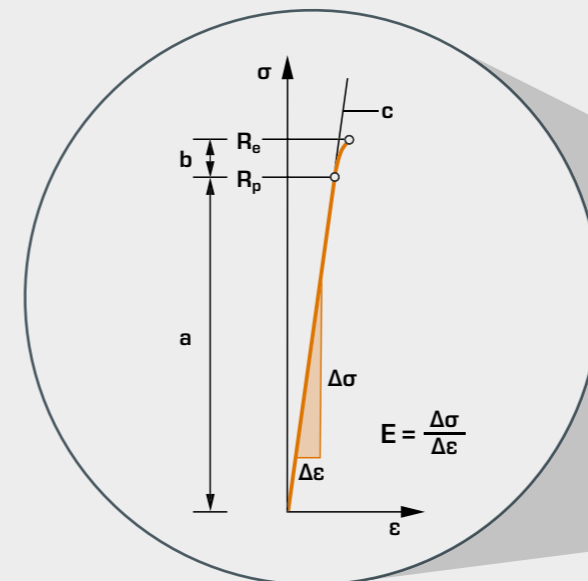
Bestimmung des elastischen Verhaltens

Zwischen der Verformung und der einwirkenden Kraft besteht eine direkte Proportionalität. Zur Bestimmung der Dehnung bzw. elastischen Verformung wird daher außer der Spannung der Werkstoffkennwert benötigt. Dieser Werkstoffkennwert, Elastizitätsmodul genannt, beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung bei der Verformung eines festen Körpers bei linear elastischem Verhalten. Den Elastizitätsmodul kann man aus den Messwerten des Zugversuches berech-

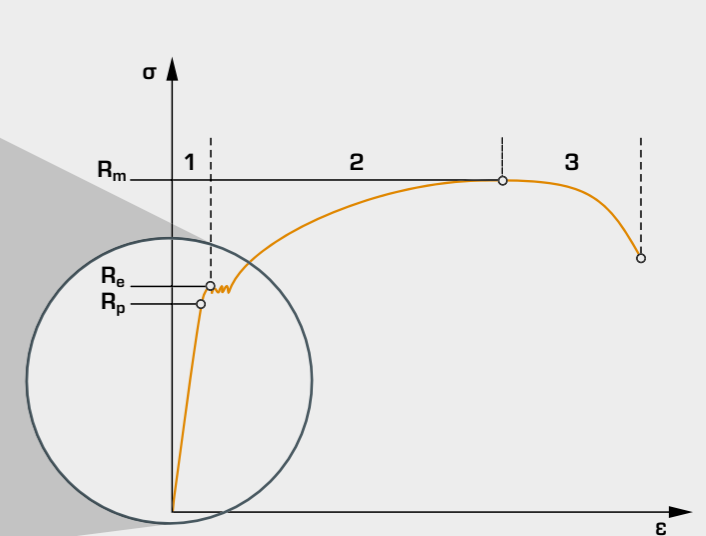
nen oder grafisch aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm ermitteln (siehe dazu auch Kapitel 6 Werkstoffprüfung).

In der Festigkeitslehre wird der linear-elastische Bereich betrachtet, da die Verformung des Werkstoffes in diesem Bereich reversibel ist. Bei der Auslegung von Trag-, bzw. Bauwerken sollte der linear-elastische Bereich nicht überschritten werden.

Elastischer Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms



Spannungs-Dehnungs-Diagramm



Der elastische Bereich unterteilt sich in einen linear-elastischen Anteil a, bei dem die Dehnung proportional zur Spannung verläuft und reversibel ist und einen nichtlinear-elastischen Anteil b, bei dem die Dehnung **nicht** proportional zur Spannung verläuft aber dennoch reversibel bleibt. Im plastischen Bereich ist die Dehnung nicht reversibel und die Verformung bleibt auch nach der Entlastung bestehen.

sigma Spannung, epsilon Dehnung, E Elastizitätsmodul, R_p Proportionalitätsgrenze, R_e Streckgrenze, R_m Zugfestigkeit, 1 elastischer Bereich, 2 plastischer Bereich, 3 Einschnürung bis zum Bruch, a linear-elastischer Anteil, b nichtlinear-elastischer Anteil, c Hooke'sche Gerade

Die Berechnung von Verformungen unter einer Last beschreibt das Hooke'sche Elastizitätsgesetz

$$\sigma = E \cdot \epsilon = \frac{F}{A}$$

sigma Spannung, E Elastizitätsmodul, epsilon Dehnung, F Kraft, A Fläche

Elastizitätsmodul für verschiedene Werkstoffe

Werkstoff	E in N/mm ²
Stahl	2,1 · 10 ⁵
Aluminium	0,7 · 10 ⁵
Beton	0,3 · 10 ⁵
Holz (in Faserrichtung)	0,7...1,6 · 10 ⁴
Gusseisen	1,0 · 10 ⁵
Kupfer	1,2 · 10 ⁵
Messing	1,0 · 10 ⁵