ESTADISTICA ESPAÑOLA
núm. 105, 1984, págs. 129 a 142

Modelos aleatorios de reemplazamiento de revisión continua

por M.ª TERESA ELGUEA ORTEGA
Facultad de Ciencias de Bilbao
Universidad del País Vasco

RESUMEN

Exposición de la teoría de los procesos aleatorios de reemplazamiento de sistemas de revisión continua para una determinada política de reemplazamiento. Se estudian separadamente dos situaciones según se considere o no el valor del dinero en el tiempo.

Palabras clave: Procesos estocásticos, revisión continua, política de reemplazamiento.

1. INTRODUCCION

Supongamos un equipo que opera de forma continua, si consideramos las pérdidas de tiempo de operación asociadas con las reparaciones es necesario distinguir dos fases diferentes en el estado del equipo: la fase de operación y la fase de pérdida de tiempo. Suponemos que la pérdida de tiempo está ocasionada por avería del equipo, y su duración es el tiempo necesario para reparar el equipo y ponerlo de nuevo en operación. En general, lo mismo en la frecuencia de ocurrencia de la pérdida de tiempo que en su duración está presente un elemento de incertidumbre. Una pérdida de tiempo no afecta a la edad de servicio del equipo.

La política de reemplazamiento a seguir es: reemplazar el equipo existente por uno nuevo idéntico cuando alcance la edad de servicio X.

En el gráfico siguiente se muestra un ejemplo de una función que representa el envejecimiento del equipo y su proceso de reemplazamiento.

Consideremos aquí el caso más característico de estos problemas de reemplazamiento.

Supongamos:

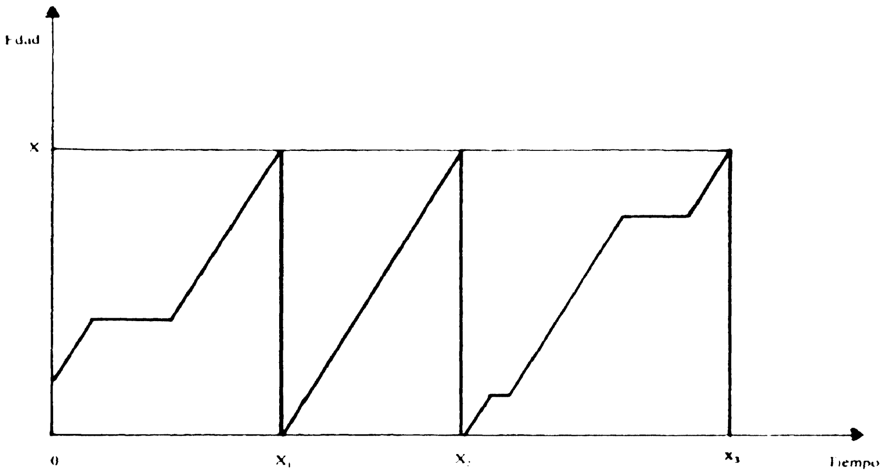

Fig. 1

a) Que las variables que consideramos, los tiempos de reemplazamiento y el tiempo de reparación, son estadísticamente independientes con f.d.p.

$$f(u) = \lambda(u)e^{-\lambda(u)u} \qquad \text{y} \qquad g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

b) Que en el instante $t = 0$, la edad del equipo es x, con $0 \leq x < X$. Es lógico atribuir un costo mientras el equipo está operando y otro mientras está en estado de reparación. Por tanto, los costos de operación tienen dos componentes básicos, un costo de operación y un costo de reparación. Observamos que durante un estado de operación la cantidad envejecida es igual al tiempo transcurrido, es decir, $\Delta u = \Delta t$.

Y en lo que sigue hacemos uso de los axiomas que caracterizan a este tipo de procesos estocásticos (véase Feller, I, pp. 442 y siguientes):

— P (ocurra un fallo en un intervalo infinitesimal de longitud Δu) $= \lambda(u)\Delta u + 0(\Delta u)$.

— P (ocurra más de un fallo en Δu) = $0(\Delta u)$.

— P (se repare el equipo, supuesto que ha habido un fallo, durante un intervalo Δt) = $= \alpha \Delta t + 0(\Delta t)$.

— P (se repare el equipo más de una vez, supuesto que ha habido más de un fallo en Δt) = $0(\Delta t)$.

2. REEMPLAZAMIENTO DE UN EQUIPO SIN CONSIDERAR VALORES ACTUALES

Consideramos un proceso de Poisson con dos estados E_0, estado de reparación, y E_1, estado de operación, y sus probabilidades asociadas.

$P_0(t, u)$ = probabilidad de que en el instante t el equipo está en el estado de reparación y su edad sea u.

$P_1(t, u)$ = probabilidad de que en el instante t el equipo está en estado de operación y su edad sea u.

Entonces tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} P_1(t + \Delta t, u + \Delta u) &= P_1(t, u)(1 - \lambda(u)\Delta u + 0(\Delta u)) + \\ &+ P_0(t, u + \Delta u)(\alpha\Delta t + 0(\Delta t)) \\ P_0(t + \Delta t, u) &= P_0(t, u)(1 - \alpha\Delta t + 0(\Delta t)) + \\ &+ P_1(t, u)(\lambda(u)\Delta u + 0(\Delta u)) \end{aligned}$$

La primera de estas relaciones expresa que la probabilidad de que en el instante $t + \Delta t$ el equipo esté en operación y tenga la edad $u + \Delta u$, es igual a la suma de las probabilidades de dos sucesos mutuamente excluyentes, esto es: la probabilidad de que en el instante t la edad del equipo sea u, esté operando y no ocurra ningún fallo mientras el equipo envejece una cantidad Δu sobre el intervalo tiempo $(t, t + \Delta t)$, y la probabilidad de que en el instante t el equipo esté en estado de reparación y tenga una edad $u + \Delta u$ y la reparación finaliza sobre el intervalo $(t, t + \Delta t)$.

La segunda relación expresa que la probabilidad de que en el instante $t + \Delta t$ el equipo esté en estado de reparación y su edad sea u, es igual a la suma de la probabilidad de dos sucesos mutuamente excluyentes, es decir, la probabilidad de que en el instante t el equipo está en reparación y su edad sea u y no se finalice la reparación sobre el intervalo $(t, t + \Delta t)$, más la probabilidad de que el instante t el equipo esté en operación, su edad sea u y ocurra un fallo al envejecer a $u + \Delta u$ sobre el intervalo $(t, t + \Delta t)$.

Estas dos relaciones se pueden escribir en la forma siguiente:

$$P_1(t + \Delta t, u + \Delta u) - P_1(t, u) = -\lambda(u)P_1(t, u)\Delta u +$$
$$+ \alpha P_0(t, u + \Delta u)\Delta t + 0(\Delta u) + 0(\Delta t)$$
$$P_0(t + \Delta t, u) - P_0(t, u) = -\alpha P_0(t, u)\Delta t + \lambda(u)P_1(t, u)\Delta u +$$
$$+ 0(\Delta u) + 0(\Delta t)$$

Dividiendo en ambos lados por Δt podemos poner, respectivamente:

$$\frac{P_1(t + \Delta t, u + \Delta u) - P_1(t, u + \Delta u)}{\Delta t} + \frac{P_1(t, u + \Delta u) - P_1(t, u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t} =$$
$$= -\lambda(u)P_1(t, u)\frac{\Delta u}{\Delta t} + \alpha P_0(t, u + \Delta u) + \frac{0(\Delta u)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$
$$\frac{P_0(t + \Delta t, u) - P_0(t, u)}{\Delta t} =$$
$$= -\alpha P_0(t, u) + \lambda(u)P_1(t, u)\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{0(\Delta u)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

Tomando límites en ambos lados de cada expresión cuando $\Delta t \rightarrow 0$ (y, por tanto, $\Delta u \rightarrow 0$) obtenemos, respectivamente, para $t \geq 0$ y $0 \leq u < X$

$$\frac{\partial P_1(t, u)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, u)}{\partial u} = -\lambda(u)P_1(t, u) + \alpha P_0(t, u)$$
$$\frac{\partial P_0(t, u)}{\partial t} = -\alpha P_0(t, u) + \lambda(u)P_1(t, u)$$

En este momento se debe observar que la decisión de conservar o reemplazar el equipo no ha jugado ningún papel al establecer el sistema de ecuaciones anterior. Este sistema debería ser válido incluso en una situación en que no ocurre ningún reemplazamiento y el equipo se separa cada vez que falla para recobrar su edad en el momento del fallo. El punto distintivo es observar, sin embargo, que si el reemplazamiento se realiza a la edad X, entonces, para todo tiempo $t \geq 0$, la edad del equipo no puede exceder de X, luego en $t = 0$ la edad inicial del equipo es x, $0 \leq x < X$. Además, como el reemplazamiento ocurre tan pronto como se alcance la edad X debemos tener

$$P_1(t, X^-) = P_1(t, 0) \qquad \text{para todo } t \geq 0$$

Supongamos ahora las condiciones del estado de equilibrio y sean

$$\varphi_1(u) = \lim_{t \to \infty} P_1(t, u) \qquad \varphi_0(u) = \lim_{t \to \infty} P_0(t, u)$$

con $0 \leq u < X$. El sistema de ecuaciones anterior se reduce a

$$\frac{d\varphi_1(u)}{du} = +\lambda(u)\varphi_1(u) + \alpha\varphi_0(u)$$

$$0 = -\alpha\varphi_0(u) + \lambda(u)\varphi_1(u)$$

con la condición

$$\varphi_1(X^-) = \varphi_1(0)$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce

$$\frac{d\varphi_1(u)}{du} = 0 \qquad \text{para todo } 0 \leq u < X$$

Luego $\varphi_1(u) = A$, donde A es una constante arbitraria que se determinará. Además esa constante A satisface la tercera ecuación del sistema.

Para obtener $\varphi_0(u)$ sustituimos $\varphi_1(u) = A$, en la ecuación

$$0 = -\alpha\varphi_0(u) + \lambda(u)\varphi_1(u)$$

y tenemos

$$\varphi_0(u) = A\frac{\lambda(u)}{\alpha}$$

Sea ahora:

U = v.a. que denota la edad del equipo en el estado de equilibrio.

$\varphi(u)\Delta u$ = probabilidad que en un estado de equilibrio la edad del equipo estará entre u y $u + \Delta u$, es decir

$$\varphi(u)\Delta u = P(u < U \leq u + u) \qquad 0 \leq u < X$$

Como el equipo sólo puede estar o en estado de operación o en estado de avería se sigue de

$$\varphi_1(u) = A$$

y

$$\varphi_0(u) = A\frac{\lambda(u)}{\alpha}$$

que

$$\varphi(u) = \varphi_1(u) + \varphi_0(u) = A + A\frac{\lambda(u)}{\alpha} = A\left[1 + \frac{\lambda(u)}{\alpha}\right]$$

para $0 \leq u < X$.

Como $\varphi(u)$ es una función de densidad se debe verificar

$$\int_0^x \varphi(u)du = 1$$

Usando la expresión hallada para $\varphi(u)$ tenemos

$$\int_0^x A\left[1 + \frac{\lambda(u)}{\alpha}\right]du = 1$$

despejamos A, para ello definimos

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u)du$$

entonces obtenemos

$$A = \frac{1}{X + \dfrac{\Lambda(x)}{\alpha}}$$

Sustituyendo este valor en $\varphi_1(u)$ y $\varphi_0(u)$ tenemos

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{X + \dfrac{\Lambda(x)}{\alpha}} \qquad 0 \leq u < X$$

$$\varphi_0(u) = \frac{\lambda(u)}{\alpha\left[X + \dfrac{\Lambda(x)}{\alpha}\right]} \qquad 0 \leq y < X$$

Sea:

T = la v.a. que denota el tiempo entre dos reemplazamientos sucesivos en el estado de equilibrio.

Podemos obtener una expresión de E[T] teniendo en cuenta que la probabilidad de que el equipo esté en funcionamiento es

$$\int_0^X \varphi_1(u)du = \frac{X}{X + \frac{\Lambda(x)}{\alpha}}$$

Esto es lo mismo que la frecuencia del tiempo que el equipo está trabajando sobre un ciclo T, y que es X/E[T]. Luego

$$E[T] = X + \frac{\Lambda(x)}{\alpha}$$

Ahora podemos escribir una expresión del costo total de operación esperado por unidad de tiempo $\xi(X)$ como función de la edad de reemplazamiento X.

Al establecer las expresiones del costo es necesario distinguir entre el costo asociado cuando el equipo está en estado de operación, y el costo asociado cuando está en estado de reparación. Sea:

$\tilde{C}(u)\Delta u$ = costo de operación de un equipo entre las edades u y $u + \Delta u$, supuesto que el equipo está en estado de operación.

$r(u)$ = costo asociado con una unidad de tiempo de pérdida para un equipo de edad u; $r(u)$ se considera algunas veces como el costo de reparación por unidad de tiempo.

Asimismo, K denotará el costo de adquisición o no cíclico de un nuevo equipo. Entonces, usando la expresión E(T) tenemos, para el costo de adquisición esperado por unidad de tiempo

$$\frac{K}{E(T)} = \frac{K}{X + \frac{\Lambda(X)}{\alpha}}$$

El costo de operación esperado por unidad de tiempo es, a partir de la expresión de $\varphi_1(u)$

$$\int_0^X \tilde{C}(u)\varphi_1(u)du = \frac{\int_0^X \tilde{C}(u)du}{X + \frac{\Lambda(X)}{\alpha}}$$

Y de la expresión $\varphi_0(u)$ se tiene que el costo de mantenimiento esperado por unidad de tiempo es

$$\int_0^X r(u)\varphi_0(u)du = \frac{\frac{1}{\alpha}\int_0^X r(u)\lambda(u)du}{X + \frac{\Lambda(X)}{\alpha}}$$

Por tanto, el costo total esperado por unidad de tiempo, que es la suma de los tres anteriores, es

$$\xi(X) = \frac{K + \int_0^X \left(\bar{C}(u) + \frac{r(u)}{\alpha}\lambda(u)\right)du}{X + \frac{\Lambda(X)}{\alpha}}$$

El valor óptimo de X se puede obtener por métodos clásicos del cálculo variacional o los propuestos por Bellmann de la programación dinámica.

Caso especial: $\lambda(u) = \lambda$; $r(u) = r$. Entonces, $\Lambda(X) = \lambda X$. La expresión de $\xi(X)$ se puede escribir como

$$\xi(X) = \frac{K + \int_0^X \bar{C}(u)du + \frac{r\lambda X}{\alpha}}{X + \frac{\lambda X}{\alpha}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha}}\;\frac{K + \int_0^X \left[\frac{r\lambda}{\alpha} + \bar{C}(u)\right]du}{X}$$

Derivando respecto a X, e igualando el resultado a cero se obtiene

$$X\left[\frac{r\lambda}{\alpha} + \bar{C}(X)\right] - \int_0^X \left[\frac{r\lambda}{\alpha} + \bar{C}(u)\right]du = K$$

Integrando por partes se tiene

$$\int_0^X \left[\frac{r\lambda}{\alpha} + \bar{C}(u)\right]du = u\left(\frac{r\lambda}{\alpha} + \bar{C}(u)\right)\Bigg]_0^X - \int_0^X ud\left[\frac{r\lambda}{\alpha} + \bar{C}(u)\right]$$

Por tanto, el valor óptimo de X, X*, será la solución de la ecuación

$$\int_0^X ud[\bar{C}(u)] = K$$

Esta expresión es independiente de λ, α y r; luego el único elemento importante del costo que afecta a X es el costo de operación $\bar{C}(u)$.

3. REEMPLAZAMIENTO DE UN EQUIPO CONSIDERANDO VALORES ACTUALES

La situación es similar a la del problema anterior, excepto que el costo es actualizado sobre un intervalo de tiempo infinito.

Sea para $0 \leq x < X$:

$f_1(x)$ = costo mínimo total descontado esperado cuando el equipo tiene inicialmente edad x y está en operación.

$f_0(x)$ = costo mínimo total descontado esperado cuando el equipo tiene inicialmente edad x y no está operando, es decir, está en estado de reparación.

i = tasa de interés.

Además se mantienen las mismas suposiciones que en el modelo descontado, y se sigue la misma política de reemplazamiento, un equipo de edad X se reemplaza por uno nuevo idéntico.

Se tiene la siguiente ecuación funcional

$$f_1(x) = \text{mín}\begin{cases} K + f_1(0) & x = K \\ \bar{C}(x)\Delta x + (1 - i\Delta t)(1 - \lambda(x)\Delta x)\, f_1(x + \Delta x) + \\ \quad + (1 - i\Delta t)\lambda(x)\Delta x f_0(x) & 0 \leq x < X \end{cases}$$

La primera alternativa es el costo de reemplazar el equipo existente por uno nuevo en un estado de operación. La segunda representa el costo de que no haya reemplazamiento, que incluye el costo de operación del equipo y la suma de los costos descontados asociados con el equipo en estado de operación con edad $x + \Delta x$ y que el equipo haya fallado exactamente a la edad x. Para $0 \leq x < X$, no se da ningún reemplazamiento y $f_1(x)$ satisface la relación

$$f_1(x) = \bar{C}(x)\Delta x + (1 - i\Delta t)(1 - \lambda(x)\Delta x) f_1(x + \Delta x) +$$
$$+ (1 - i\Delta t)\lambda(x)\Delta x f_0(x)$$

operando

$$0 = \bar{C}(x)\Delta x + [f_1(x + \Delta x) - f_1(x)] - [i\Delta t + \lambda(x)\Delta x] f_1(x + \Delta x) +$$
$$+ \lambda(x) f_0(x)\Delta x + 0(\Delta x)$$

Dividiendo por Δx y haciendo $\Delta x \to 0$, obtenemos para $\Delta x / \Delta t = 1$

$$0 = \tilde{C}(x) + \frac{d f_1(x)}{dx} - [i + \lambda(x)] f_1(x) + \lambda(x) f_0(x) \qquad 0 \leq x < X$$

Para obtener una expresión para $f_0(x)$ observemos que para un equipo que acaba de fallar, si el tiempo de reparación es v, el costo total esperado descontado es

$$\int_0^v r(x) e^{-i\theta} d\theta + f_1(x) e^{-iv}$$

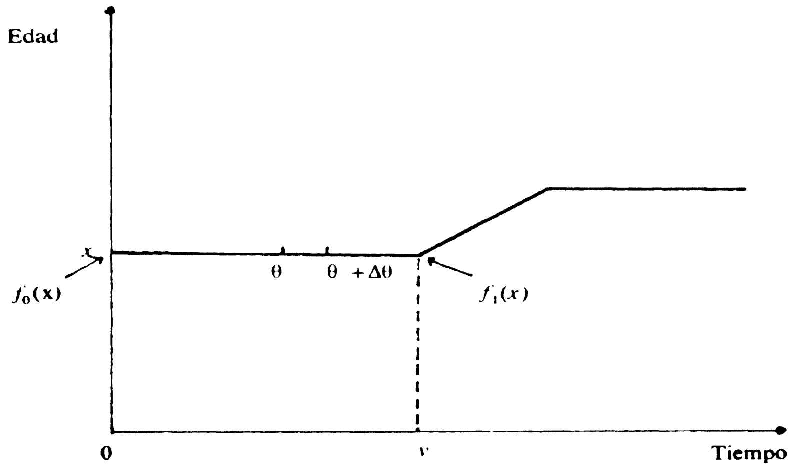

Fig. 2. Gráfica de la función $f_0(x)$.

Como el tiempo de reparación tiene una distribución exponencial negativa con parámetro α se sigue que

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \int_0^\infty \left[\int_0^v r(x) e^{-i\theta} d\theta + f_1(x) e^{-iv} \right] \alpha e^{-\alpha v} dv = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{r(x)}{i}(1 - e^{-iv}) + f_1(x) e^{-iv} \right] \alpha e^{-\alpha v} dv = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{r(x)}{i} \alpha e^{-\alpha v} - \frac{r(x)}{i} e^{-iv} \alpha e^{-\alpha v} + f_1(x) e^{-iv} \alpha e^{-\alpha v} \right] dv = \\ &= \left. - \frac{r(x)}{i} e^{-\alpha v} + \frac{r(x)}{i} \frac{\alpha}{\alpha + i} e^{-(i+\alpha)v} - \frac{f_1(x)\alpha}{\alpha + i} e^{-(i+\alpha)v} \right]_0^\infty = \\ &= \frac{1}{i + \alpha} (\alpha f_1(x) + r(x)) \end{aligned}$$

Sustituyendo $f_0(x)$ en la ecuación anterior, tenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden para $f_1(x)$, $0 \leq x < X$.

$$0 = \bar{C}(x) + \frac{df_1(x)}{dx} - (i + \lambda(x))f_1(x) + \frac{\lambda(x)}{i + \alpha}(\alpha f_1(x) + r(x))$$

de donde

$$\frac{df_1(x)}{dx} - \frac{i^2 + i\alpha + i\lambda(x)}{i + \alpha} f_1(x) = -\bar{C}(x) - \frac{\lambda(x)r(x)}{i + \alpha}$$

integrando se obtiene la expresión de $f_1(x)$

$$f_1(x) = \exp\left(ix + \frac{i}{i+\alpha}\int_0^x \lambda(\tau)d\tau\right)f_1(0) +$$

$$+ \exp\left(ix + \frac{i}{i+\alpha}\int_0^x \lambda(\tau)d\tau\right)\cdot$$

$$\int_0^x \exp\left[-\left(i\alpha + \frac{i}{i+\alpha}\int_0^u \lambda(\tau)d\tau\right)\right]\left[-\bar{C}(u)\frac{\lambda(u)r(u)}{i+\alpha}\right]du$$

De esta ecuación se observa que minimizar $f_1(x)$ respecto de X es equivalente a minimizar $f_1(0)$ respecto de X; el siguiente objetivo es determinar $f_1(0)$.

Como la política que se sigue es reemplazar el equipo a la edad X (y el equipo debe estar en estado de operación a la edad X) se sigue que para $x = X$.

$$f_1(X) = K + f_1(0)$$

Sea $\int_0^x \lambda(\tau)d\rho = \Lambda(x)$.

De las expresiones de $f_1(x)$ y $f_1(X)$, la continuidad de $f_1(x)$ en $x = X$ implica que

$$K + f_1(0) = \exp\left\{iX + \frac{i}{i+\alpha}\Lambda(X)\right\}f_1(0) - \exp\left\{iX + \frac{i}{i+\alpha}\Lambda(X)\right\}$$

$$\int_0^X \exp\left\{-\left[iu + \frac{i}{i+\alpha}\Lambda(u)\right]\right\}\cdot\left[\bar{C}(u) + \lambda(u)r(u)/(i+\alpha)\right]du$$

Despejemos $f_1(0)$

$$f_1(0) - \exp\left\{iX + \frac{i}{i+\alpha}\Lambda(X)\right\} f_1(0) = -K - \left\{\exp iX + \frac{i}{i+\alpha}\Lambda(X)\right\}\cdot I$$

donde

$$I = \int_0^X \exp\left\{-\left[iu + \frac{i}{i+\alpha}\Lambda(u)\right]\right\}\left[\bar{C}(u) + \frac{\lambda(u)r(u)}{i+\alpha}\right]du$$

$$\exp\left\{-\left[iX + \frac{i}{i+\alpha}\Lambda(X)\right]\right\} f_1(0) - f_1(0) =$$

$$= -K\exp\left\{-\left[iX + \frac{i}{i+\alpha}\Lambda(X)\right]\right\} - I$$

$$f_1(0) = \frac{K\exp\{-[iX + i\Lambda(X)/(i+\alpha)]\} + I}{1 - \exp\{-[iX + i\Lambda(X)\Lambda(i+\sigma)]\}}$$

Finalmente tenemos:

$$f_1(0) = -K + \frac{K + \int_0^X \exp\{-[iu + i\Lambda(u)\lambda(i+\sigma)]\}}{1 - \exp - iX + i\Lambda(X)\lambda(i+\alpha)}\cdot$$

$$\cdot\frac{[\bar{C}(u) + \Lambda(u)r(u)\lambda(i+\alpha)]du}{1 - \exp\{-[iX + i\Lambda(X)\lambda(i+\alpha)]\}}$$

El valor óptimo de X se obtiene diferenciando $f_1(0)$ respecto de X, e igualando el resultado a cero.

Estudiemos el caso en que $\lambda(u) = \lambda$, $r(u) = r$, y, por tanto $\Lambda(u) = \lambda u$

En esta situación se tiene

$$f_1(0) = -K + \frac{K + \int_0^X \exp\{-iu[1 + \lambda/(i+\alpha)]\}\bar{C}(u)\,du}{1 - \exp\{-iX[1 + \lambda/(i+\alpha)]\}} +$$

$$+ \frac{\int_0^X [\lambda r/(i+\alpha)]\exp\{-iu[1 + \lambda/(i+\alpha)]\}\,du}{1 - \exp\{-iX[1 + \lambda/(i+\alpha)]\}} =$$

$$= -K + \frac{K + \int_0^X \exp[-i(1 + \lambda/(i + \alpha))u]\bar{C}(u)du}{1 - \exp[-i(1 + \lambda/(i + \alpha))X]} +$$

$$+ \frac{[\lambda r/(i + \alpha)][(i + \alpha)/i(1 + \alpha + \lambda)] \exp[-i(1 + \lambda/(i + \alpha))u] \, 0}{1 - \exp[-i(1 + \lambda/(i + \alpha))X]} =$$

$$= -K + \frac{K + \int_0^X \exp[-i(1 + \lambda/(i + \alpha))u]\bar{C}(u)du}{1 - \exp[-i(1 + \lambda/(i + \alpha))X]} + \frac{\lambda r}{i(i + \alpha + \lambda)}$$

De aquí se deduce, haciendo operaciones, que el valor óptimo de X es la solución de la ecuación

$$\int_0^X (1 - \exp[-i(1 + \lambda/(i + \alpha))u])d\bar{C}(u) = i\left(1 + \frac{\lambda}{i + \alpha}\right)K$$

BIBLIOGRAFIA

BELLMAN, R.: *Notas in the Theory of Dynamic Programming-III: Equipment Replacement Policy*, p. 632. RAND Corp. Enero 1955.

——: «Equipment Replacement Policy», *J. Soc. Industrial and Applied Math.*, 3, p.p. 133-136, 1955.

DREYFUS, S. E.: «A Note on an Industrial Replacement Process», *Opnal. Res. Quart.*, 8, pp. 190-193, 1957.

ELGUEA, M. T.: *Modelos de reemplazamientos en Investigación de Operaciones*. Facultad de Ciencias. Universidad del País Vasco. Bilbao, 1981.

ELMAGHRABY, S. A.: «Probabilistic Considerations in Equipment Replacement Studies», *The Engineering Economist*, 4, p. 1, 1958.

EPSTEIN, B.: *Test for the Validity of the Assumption That the Underlying Distribution of Life is Exponential*, p. 80. Wayne State University. Detroit (Michigan), 1959.

FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I, John Wiley & Sons. Nueva York, 1950.

——: *On the Theory of Stochastic Processes, with Particular Reference to Applications*, p. 403. Proc. First Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, 1949.

KAUFMANN, A.: *Métodos y modelos de la Investigación de Operaciones*, Compañía Editorial Continental, S. A. México, 1974.

LOTKA, A. J.: «On an Integral Equation in Population Analysis», *Ann. Math. Statist*, 10, pp. 144-61, 1939.

——: «The Theory of Industrial Replacement», *Skand. Aktuar Tidskr*, pp. 1-14, 1940.

RUTENBERG, Y. H., y GUPTA, S. K.: *Sequential Decision Rules for Minimum-Cost Replacement of Equipment*. Abstract F6, Program of the Sixteenth National Meeting of ORSA, Pasadena (California, 1959.

SASIENI, M. W.: «A Markov Chain Process in Industrial Replacement», *Opnal. Res. Quart.* 7, pp. 148-155, 1956.

SASIENI, M.; YASPAN, A., y FRIEDMAN, L.: *Operation Research Methods and Problems*, pp. 102-124, John Wiley & Sons. New York, 1959.

VILAPLANA, J. P.: *Modelos de reemplazamiento*. Editorial Universitaria. Rosario, 1983.

SUMMARY

STOCHASTIC REPLACEMENT MODELS OF CONTINUOUS REVIEW

Contains the theory of stochastic replacement methods of continuous review systems for a particular replacement policy. Two situations are studied separately according to whether or not the value of money in time is considered.

Key words: Stochastic processes; continuous review; replacement policy.

AMS 1980. Subjets classification: Primary 90A11; Secondary 60K20.