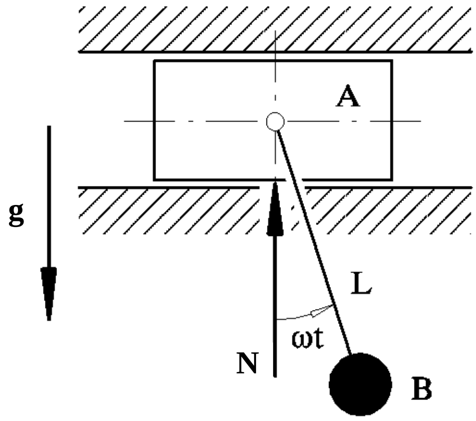
Aufgabe 1:



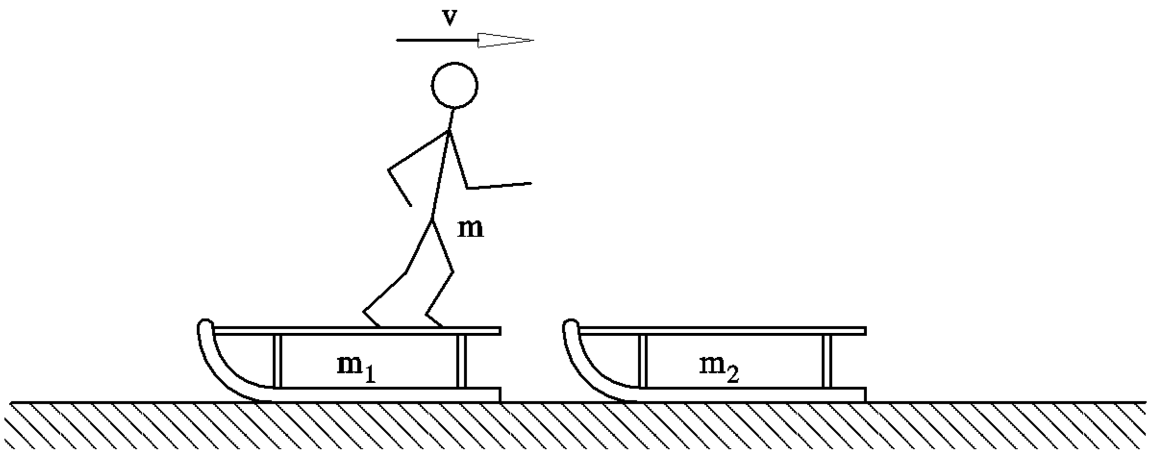
Der Körper A mit dem Gewicht G_1 bewegt sich in einer glatten Führung. Im Schwerpunkt von A ist das Pendel B vom Gewicht G_2 und der Pendellänge L befestigt. Die Pendelstange ist masselos und dreht sich mit der konstanten Drehgeschwindigkeit ω .

Wie groß ist die Normalkraft N, die auf den Körper A wirkt?

$$N = G_1 + G_2\left(1 + \frac{\omega^2}{g} L \cos\omega t\right)$$

Aufgabe 2: Ein Kind der Masse m springt mit der **Absolutgeschwindigkeit** v von einem Schlitten der Masse m_1 auf einen dahinter stehenden Schlitten der Masse m_2. Die Schlitten befinden sich auf einem gefrorenen See und waren zu Beginn in Ruhe.

Wie groß ist die Geschwindigkeit der Schlitten, nachdem das Kind auf dem Schlitten 2 steht, wenn von Reibungseinflüssen abgesehen wird?



$v_1 = -\frac{m}{m_1} v$ $\qquad$ $v_2 = \frac{m}{m+m_2} v$

Aufgabe 3: Einer Punktmasse m sei die Kraft $\mathbf{F}$ eingeprägt.

Welche Bedingung muss $\mathbf{F}$ erfüllen, damit der Betrag der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ konstant bleibt?

$\underline{F} \cdot \underline{v} = 0$ d.h. $\underline{F} \perp \underline{v}$

Aufgabe 4: In einer Publikation des Deutschen Verkehrssicherheitsrats über das Anlegen von Gurten im Straßenverkehr findet sich folgender Text:

Tatsache ist:
Um sich bei einem Aufprall mit "nur" 30 km/h abstützen zu können, müßte man ein Gewicht von weit über 1 Tonne (1.200 kg) stemmen können. Das kann niemand.

Zur Überprüfung dieser Aussage nehmen Sie an, dass Sie bei einem Aufprall mit der Geschwindigkeit v den Weg s zur Verfügung haben, um Ihren Körper (Masse m) mit der konstanten Kraft F abzubremsen, bevor er auf das Lenkrad trifft.

a) Wie groß ist die erforderliche Kraft?

$$F = \frac{mv^2}{2s}$$

b) Welcher Zahlenwert ergibt sich für $m = 50$ kg, $v = 30$ km/h und $s = 30$ cm?

$$F \approx 5790 \text{ N}$$

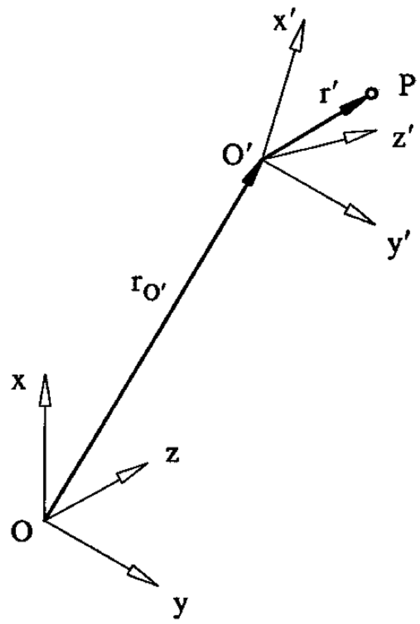
Hinweis: Dies war im WS 99/00 eine Prüfungsaufgabe für die Technische Mechanik II.

Aufgabe 1:

Die Lage des Punktes P wird im Koordinatensystem K' durch den Vektor $\mathbf{r}_{O'P,K'} = [at \quad bt^2 \quad 0]$ beschrieben. Der Ursprung O' von K' ist durch den konstanten Ortsvektor $\mathbf{r}_{OO',K} = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]$ festgelegt und die Orientierung von K' gegenüber K ist durch die Transformationsmatrix

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & 0 & -\sin\omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega t & 0 & \cos\omega t \end{bmatrix}, \quad \omega = \text{konst}\,.$$

bestimmt.



a) Um welche Achse werden die Koordinatensysteme zueinander verdreht?

☐ x-Achse ☒ y-Achse ☐ z-Achse

b) Mit welchem Winkel erfolgt die Verdrehung?

☐ ωt ☒ $-\omega t$ ☐ ω ☐ $-\omega$

c) Wie lautet der Ortsvektor $\mathbf{r}_{OP,K}$ von O nach P?

$$\mathbf{r}_{OP,K} = \begin{bmatrix} x_0 + at\cos\omega t \\ y_0 + bt^2 \\ z_0 + at\sin\omega t \end{bmatrix}$$

d) Welche Relativgeschwindigkeit hat der Punkt P gegenüber dem Koordinatensystem K'?

$$\mathbf{v}_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} a \\ 2bt \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Wie groß ist die Absolutgeschwindigkeit des Punktes P in Koordinaten des raumfesten Koordinatensystems K?

$$\mathbf{v}_{OP,K} = \begin{bmatrix} a\cos\omega t - a\omega t \sin\omega t \\ 2bt \\ a\sin\omega t + a\omega t\cos\omega t \end{bmatrix}$$

f) Bestimmen Sie die Führungs-, Coriolis- und Relativbeschleunigung von P dargestellt in K'?

$$\mathbf{a}_{F,K'} = \begin{bmatrix} -a\omega^2 t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{C,K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a\omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix}$$

g) Wie groß ist die Absolutbeschleunigung von P in K?

$$\mathbf{a}_{OP,K} = \begin{bmatrix} -a\omega^2 t\cos\omega t - 2a\omega\sin\omega t \\ 2b \\ -a\omega^2 t\sin\omega t + 2a\omega\cos\omega t \end{bmatrix}$$

Ergänzung: Überprüfen Sie das Ergebnis von Teil g) durch Berechnung auf einem anderen Weg.

Hinweise und Kommentare zur Lösung

a) Identifikation der Drehmatrix um Koordinatenachse

b) Vergleich mit Standardfall „Rotation um positive y-Achse“

c) Wie lautet der Ortsvektor $\mathbf{r}_{OP,K}$ von O nach P?

$$\mathbf{r}_{OP,K} = \mathbf{r}_{OO',K} + \mathbf{C}_{KK'} \cdot \mathbf{r}_{O'P,K'}$$

d) Welche Relativgeschwindigkeit hat der Punkt P gegenüber dem Koordinatensystem K’?

$\mathbf{v}_{O'P,K'} = \frac{d'}{dt}\mathbf{r}_{O'P,K'}$, diese Ableitung wird in der Darstellung in K’ durchgeführt.

e) Wie groß ist die Absolutgeschwindigkeit des Punktes P in Koordinaten des raumfesten Koordinatensystems K?

$\mathbf{v}_{OP,K} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{OP,K}$, diese Ableitung wird in der Darstellung in K durchgeführt.

f) Bestimmen Sie die Führungs-, Coriolis- und Relativbeschleunigung von P dargestellt in K’?
Siehe Merkblatt M5.4, Darstellung in K’:

$$\mathbf{a}_{OP} = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{rel}$$

$$\mathbf{a}_{F,K'} = \mathbf{a}_{OO',K'} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_{KK',K'} \times \mathbf{r}_{O'P,K'} + \boldsymbol{\omega}_{KK',K'} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{KK',K'} \times \mathbf{r}_{O'P,K'}\right)$$

$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} at \\ bt^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -a\omega^2 t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{C,K'} = 2\boldsymbol{\omega}_{KK',K'} \times \mathbf{v}_{O'P,K'}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ 2bt \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a\omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{rel,K'} = \mathbf{a}_{O'P,K'} = \frac{d'}{dt}\mathbf{v}_{O'P,K'}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix}$$

g) Wie groß ist die Absolutbeschleunigung von P in K?

Weg 1: $\mathbf{a}_{OP,K} = \mathbf{C}_{KK'} \cdot \mathbf{a}_{OP,K'}$ Transformation der Summe der Teilergebnisse aus f)

Weg 2: $\mathbf{a}_{OP,K} = \frac{d}{dt}\mathbf{v}_{OP,K}$ absolute Ableitung des Ergebnisses aus e)