Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Quiz 2 – Block 3

Rechnen: Di, 10.06.14
Besprechung: Di, 17.06.14

Aufgabe 1: Geodäte auf Kugel (*3+7+8+2=20 Bonuspunkte*)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Erde, idealisiert angenähert als eine Kugel. Ein Punkt auf der Oberfläche soll durch die in der Geografie übliche Form von Längen- und Breitengrad angegeben werden.
Gegenüber den sonst üblichen Kugelkoordinaten ändert sich der Wertebereich von ϑ zu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, und die Beziehung zu kartesischen Koordinaten lautet

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\cos\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$

mit den beiden Parametern ϑ und φ sowie festem r.
Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Kugel, eine sogenannte Geodäte.

(a) Berechnen Sie die infinitesimalen Elemente $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ mittels $\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi$, etc.

(b) Zeigen Sie dann, dass sich das Wegelement $\mathrm{d}s$ für die Kugel schreiben lässt als $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\mathrm{d}\vartheta)^2 + r^2\cos^2\vartheta(\mathrm{d}\varphi)^2}$,
und stellen Sie die Gleichung für die Länge L zwischen Startpunkt S und Endpunkt E auf.

(c) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die dazugehörige Funktion $F(\varphi, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vartheta}, \vartheta)$ auf. Integrieren Sie diese einmal, die dabei auftretende Integrationskonstante kann einfach mit c bezeichnet werden.
Lösung: $\varphi' = \pm cr(A^4 - c^2A^2)^{-\frac{1}{2}}$ *mit* $A = r\cos\vartheta$

(d) Bestimmen Sie daraus eine Integralgleichung für φ der Form
$\varphi - \varphi_S = \int \mathrm{d}\vartheta f(\vartheta)$.
Das Integral auf der rechten Seite soll hier nicht gelöst werden!