ŠKODA AUTO Vysoká škola

Modelování produkčních a logistických systémů

Přednášky

Jan Fábry

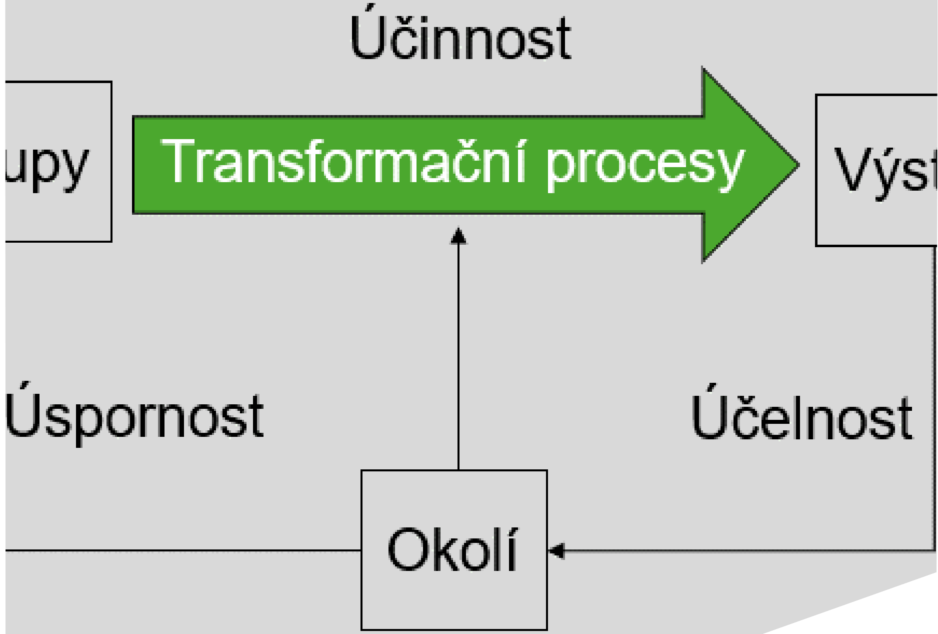
10/11/2022

Obsah

- Základní pojmy produkčních systémů
  - Základní model produkčního systému
  - Manažerské koncepce a typy produkčních systémů
  - Prognózy
  - Fáze analýzy produkčních systémů
- Modely navrhování produkčních systémů
  - Navrhování produktu
  - Rozmístění zařízení
  - Rozvržení podle produktu
- Modely řízení produkčních systémů
  - Řízení produkčních systémů
  - Plánování produkce
  - Rozvrhování produkce
    - Základní pojmy
    - Modely rozvrhování produkce
    - Základní model s jedním procesorem
    - Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
    - Modely s paralelními procesory
    - Modely se sériově řazenými procesory
- Počítačová simulace
  - Úvod do počítačové simulace
  - Analýza dat

1

Základní pojmy produkčních systémů



Základní pojmy produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Základní model produkčního systému

- Koncepce 3E
  - Economy = úspornost
  - Efficiency = účinnost
  - Effectiveness = účelnost
- Účinnost

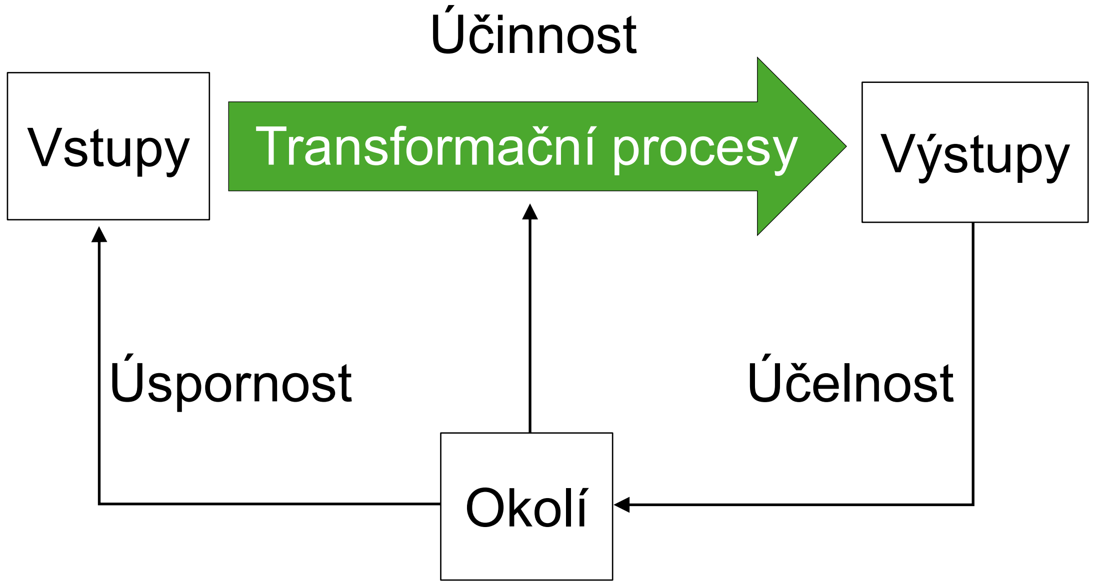
$z = TR - TC$

$TR = pq$

$TC = FC + VC$

$VC = vq$

$z = pq - (FC + vq) = (p - v)q - FC$



Základní pojmy produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Základní model produkčního systému

- STEEP analýza
  - S = social
  - T = technological
  - E = economic
  - E = ecological
  - P = political

→ Vliv externích faktorů na produkční systém

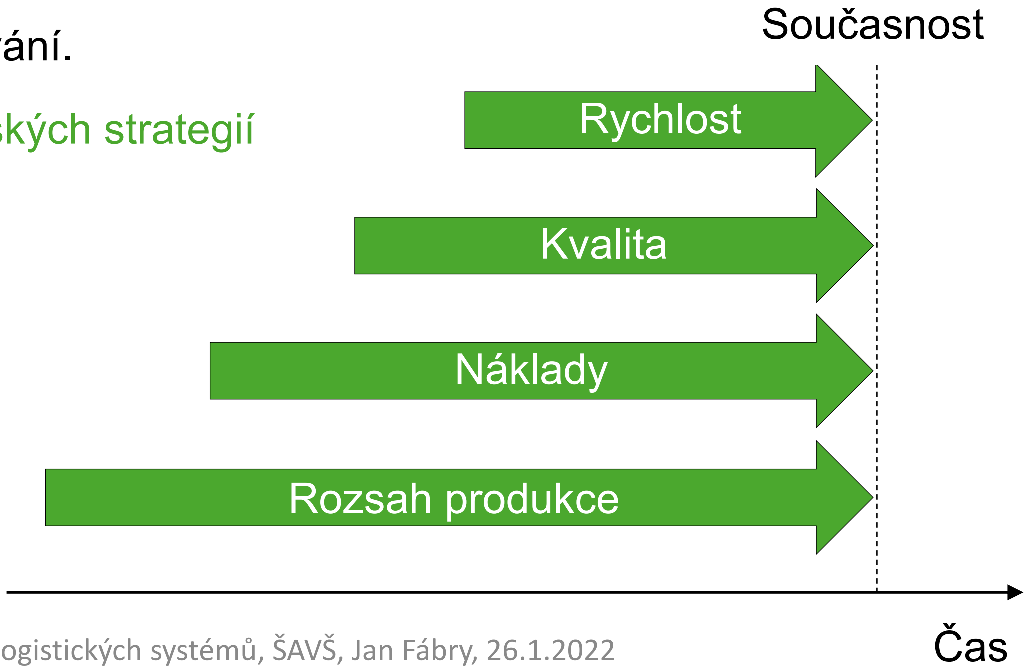
- SWOT analýza
  - S = strenghts
  - W = weeknesses
  - O = opportunities
  - T = threats

→ Stávající situace firmy ve vztahu k okolí

Základní pojmy produkčních systémů

Manažerské koncepce a typy produkčních systémů

- Hlavní funkce managementu
  - plánování,
  - rozhodování,
  - organizování,
  - vedení,
  - kontrolování.
- Vývoj manažerských strategií



Základní pojmy produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Manažerské koncepce a typy produkčních systémů

- Základní manažerské koncepce
  - **JIT (Just-in-Time)** – požadované množství v požadovaném čase.
  - **Lean Production System** – eliminace neužitečných procesů, zlepšování kvality.
  - **TOC (Theory of Constraints)** – odstraňování úzkých míst, optimalizace průchodnosti.
  - **TQM (Total Quality Management)** – komplexní řízení kvality, benchmarking.
  - **QRM (Quick Response Manufacturing)** – urychlení procesů, zkrácení dodacích lhůt.
  - **TEI (Total Employee Involvement)** – zapojení zaměstnanců do zlepšování kvality.
  - **BPR (Business Process Reingeneering)** – změna podnikových procesů s cílem zvýšit konkurenceschopnost podniku.
  - **Agile Manufacturing** – cílem je rychlá reakce na potřeby zákazníků.
  - **SCM (Supply Chain Management)** – optimalizace dodavatelských řetězců.

Základní pojmy produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Manažerské koncepce a typy produkčních systémů

- Typy produkčních systémů
  - **Typ operací**
    - výrobní operace – transformace vstupů na výstupy, snadnější měřitelnost kvality,
    - nevýrobní operace – poskytování služeb, větší kontakt se zákazníky.
  - **Typ poskytovaného produktu**
    - výrobní organizace,
    - organizace poskytující služby,
    - organizace poskytující výrobky a služby.
  - **Typ výroby**
    - výroba na sklad – skladové zásoby na základě odhadu očekávaných objednávek,
    - výroba na objednávku (na zakázku) – specifické požadavky zákazníků,
    - montáž na objednávku (na zakázku) – kombinace obou, produkt je kompletován podle specifické objednávky ze skladovaných komponent.

Základní pojmy produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Manažerské koncepce a typy produkčních systémů

- Typy produkčních systémů
  - **Typ zpracování produkce**
    - kusová produkce – nízká míra opakovatelnosti, vysoká míra variability,
    - sériová produkce – vyrábí se za sebou stejné produkty v určitém množství (v sérii),
    - hromadná produkce – vysoká míra opakovatelnosti, nízká míra variability.

Základní pojmy produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Prognózy

- Časové hledisko
  - krátkodobé prognózy (do 1 roku),
  - střednědobé prognózy (1-5 let),
  - dlouhodobé prognózy (nad 5 let).
- Zaměření prognózy
  - technologické prognózy – odhad technického a technologického pokroku,
  - ekonomické prognózy – vývoj hodnot základních ekonomických ukazatelů,
  - prognózy budoucí poptávky.

Základní pojmy produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Fáze analýzy produkčních systémů

- Navrhování produkčních systémů.
- Řízení produkčních systémů.
- Měření výkonnosti produkčních systémů.
- Zlepšování výkonnosti produkčních systémů.

Základní pojmy produkčních systémů

Fáze analýzy produkčních systémů

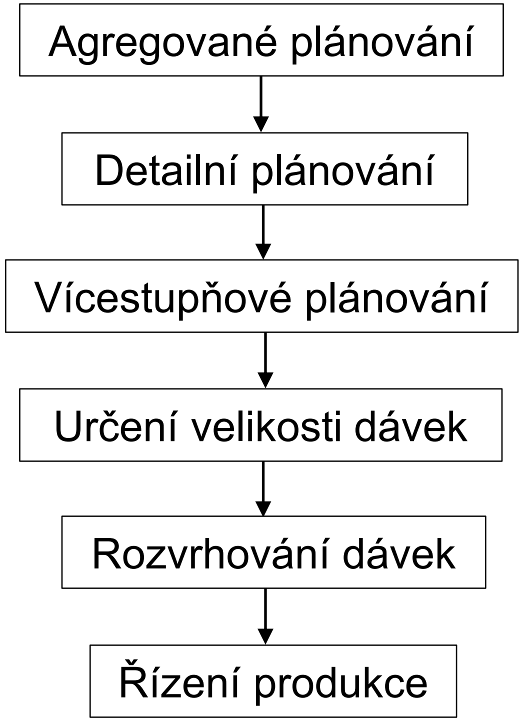
- Navrhování produkčních systémů
    - **Návrh produktu** – co se bude produkovat?
    - **Návrh procesu –** jak se bude produkovat?
        - výběr technologie,
        - plánování kapacit
            - dlouhodobé plánování – vysoké kapitálové výdaje,
            - krátkodobé plánování – efektivní využití stávajícího zařízení,
        - rozmístění zařízení – kam budou umístěna zřízení,
        - rozvržení zařízení – výběr způsobu zpracování produktů na zařízeních
            - pevná pozice produktu (dům, most, letadlo),
            - rozvržení podle procesu (zakázková výroba),
            - rozvržení podle produktu (sériová výroba),
            - skupinové (buňkové) rozvržení – seskupení zařízení s podobnými operacemi.

Základní pojmy produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

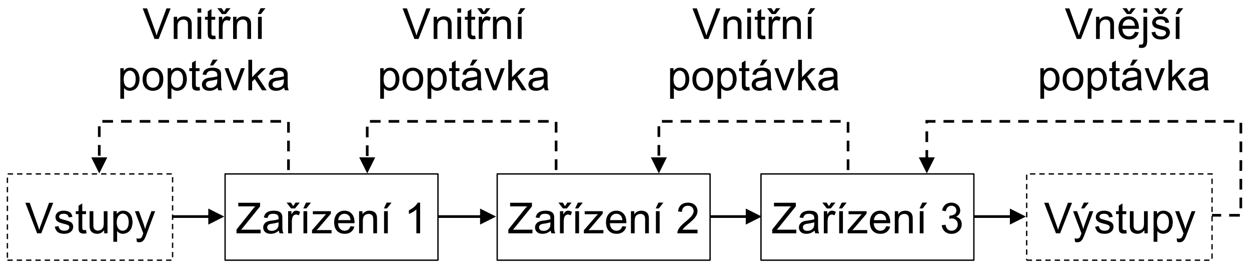
Fáze analýzy produkčních systémů

- Řízení produkčních systémů



- **Principy řízení**
  - PUSH

  - PULL



Základní pojmy produkčních systémů

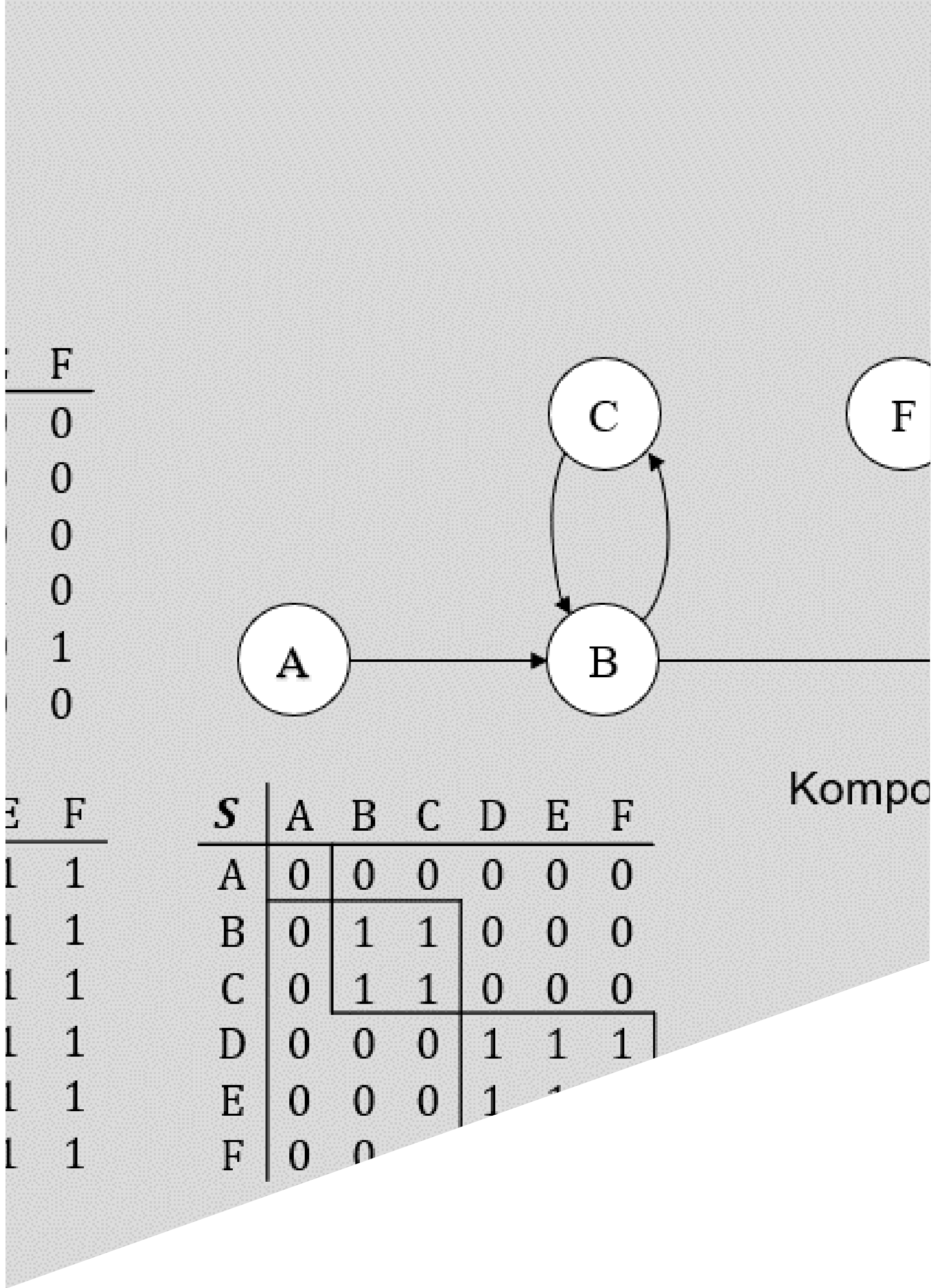
ŠKODA AUTO Vysoká škola

Fáze analýzy produkčních systémů

- Měření výkonnosti produkčních systémů
  - **Ukazatele**
    - Úspornost – náklady na zdroje.
    - Účinnost – produktivita (poměr výstupů a vstupů), efektivnost zapojení zdrojů.
    - Účelnost – kvalita výstupů:
      - Finanční ukazatele – náklady plynoucí ze špatné kvality nebo prevence před ní.
      - Operační ukazatele – procento zmetků, velikost odpadu, zpoždění dodávek.
      - Zákaznické ukazatele – spokojenost zákazníků.
- Zlepšování výkonnosti produkčních systémů
  - **Změna produkčního systému**
    - Skoková změna výkonu.
    - Soustavné zlepšování výkonu – použití metody PDCA (Plan, Do, Check, Act), tzv. Demingova cyklu.

2

Modely navrhování produkčních systémů



Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Navrhování produktu

- Cíle podniku
  - přivést na trh co nejrychleji nové produkty,
  - zvýšit úroveň uspokojování potřeb zákazníků, zvýšit kvalitu (viz TQM),
  - snížit náklady.
- Prostředky pro navrhování
  - standardizace,
  - Quality Function Deployment (QFD),
  - souběžné navrhování.

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Navrhování produktu

- Standardizace
  - VDA (Verband der Automobilindustrie),
  - modulární navrhování – seskupování součástek do modulů (snadná a rychlá výměna),
  - CAD (Computer-Aided Design), CAM (Computer-Aided Manufacturing), CAE (Computer-Aided Engineering).
- Quality Function Deployment (QFD)
  - metoda vyvinuta v Japonsku v 60. letech minulého století,
  - podnik vyvíjí a produkuje jen to, co očekává zákazník,
  - využití metody označované jako „dům kvality“,
  - výhody
    - prohloubení orientace na zákazníka,
    - zkrácení doby vývoje produktu, snížení nákladů na vývoj a produkci,
    - motivace spolupracovníků ke společné práci,
    - jednoduchost a přehlednost nástroje.

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Navrhování produktu

- Souběžné navrhování
  - na navrhování se podílí několik návrhářů,
  - strukturovaný postup,
  - projekt s činnostmi, které mohou probíhat také souběžně:
    - sériové – následující po sobě,
    - paralelní – mohou být vykonávány souběžně,
    - propojené – musí být vykonávány souběžně,
  - tzv. matice struktury návrhu $\boldsymbol{P}$:

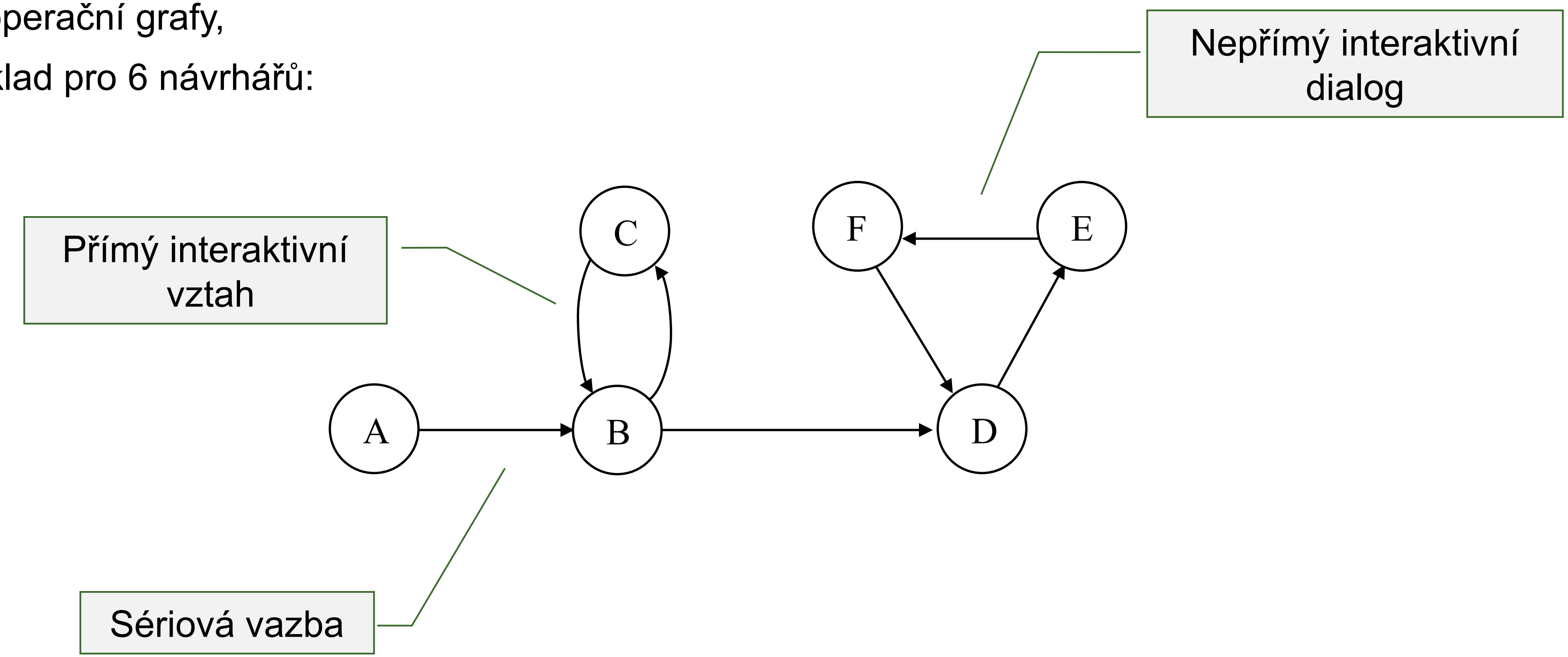
$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže existuje přímý informační tok od} \\ & i-\text{tého návrháře k } j-\text{tému návrháři,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots n, \\ j = 1,2,\dots,n. \end{array}$$

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Navrhování produktu

- Souběžné navrhování
  - kooperační grafy,
  - příklad pro 6 návrhářů:



Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Navrhování produktu

- Analýza informačních toků
  - cílem je zjistit kooperující skupiny návrhářů,
  - lze využít Booleovu algebru:

a	b	$a \oplus b$	$a \otimes b$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Modely navrhování produkčních systémů

Navrhování produktu

- Analýza informačních toků
  - Relace mezi prvky prostřednictvím m přímých relací:

$$p_{ij}^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže je relace mezi prvky } i \text{ a } j \\ & \text{tvořena posloupností } m \text{ přímých relací,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad \begin{aligned} i &= 1,2, \dots n, \\ j &= 1,2, \dots, n, \\ m &= 2,3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

  - Relační matice:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} \oplus \boldsymbol{P}^{(2)} \oplus \boldsymbol{P}^{(3)} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{P}^{(n-1)}.$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže existuje mezi prvky } i \text{ a } j \text{ relace,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad \begin{aligned} i &= 1,2, \dots n, \\ j &= 1,2, \dots, n. \end{aligned}$$

  - Dvě podmnožiny prvků:
    - existuje mezi nimi vzájemná relace,
    - neexistuje mezi nimi žádná relace.

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Navrhování produktu

- Analýza informačních toků
  - Matice silné relace $\boldsymbol{S}$:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } r_{ij} = r_{ji} = 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots n, \\ j = 1,2,\dots,n. \end{array}$$

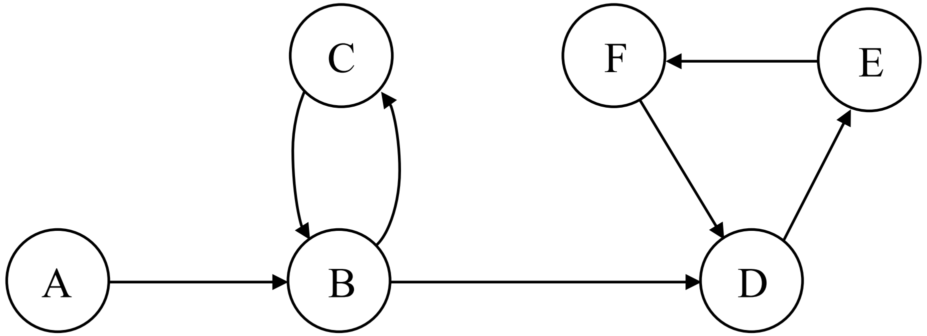
    - Matice je symetrická a tranzitivní.
    - Matici lze přeuspořádat do matice s blokově-diagonální strukturou.

Modely navrhování produkčních systémů

Navrhování produktu

- Analýza informačních toků
  - Příklad

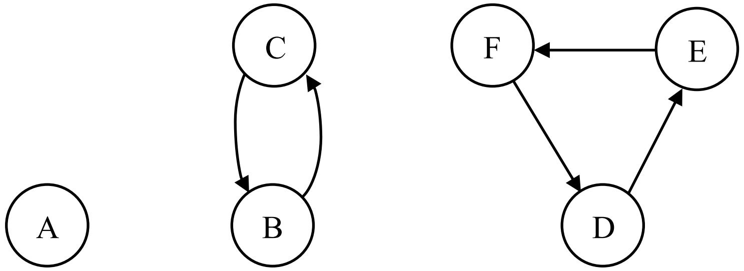
P	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	0	0	1	1	0	0
C	0	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1	0
E	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	1	0	0



R	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	1	1
B	0	1	1	1	1	1
C	0	1	1	1	1	1
D	0	0	0	1	1	1
E	0	0	0	1	1	1
F	0	0	0	1	1	1

S	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	0
B	0	1	1	0	0	0
C	0	1	1	0	0	0
D	0	0	0	1	1	1
E	0	0	0	1	1	1
F	0	0	0	1	1	1

Komponenty silné souvislosti



Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozmístění zařízení

- Vzdálenost zařízení od
  - zdrojů,
  - zákazníků,
  - konkurence,
  - ostatních částí systému.
- Další faktory
  - tržní – poptávka a konkurence,
  - hmotné – doprava, pracovní síla, energie atd.,
  - nehmotné – ekologie, postoje společnosti, zvyky zákazníků aj.
- Cíl
  - Návaznost nového zařízení na stávající produkční systém?
  - Kolik typů produktů bude nové zařízení produkovat?
  - Kolik nových zařízení bude umístěno?

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Metody pro výběr lokality
  - Analýza bodu zvratu.
  - Vícekriteriální hodnocení variant.
  - Metoda těžiště.
  - Optimální rozmístění zařízení – modifikovaný dopravní problém.
  - Optimální rozmístění zařízení – kvadratický přiřazovací problém.

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozmístění zařízení

- Analýza bodu zvratu
  - Vyrovnání celkových nákladů a celkových výnosů (nulový zisk):

$$TC = TR.$$

  - Výnosy jsou pro všechny lokality jsou stejné, tj. výběr závisí na jen celkových nákladech:

$$TC_i = FC_i + v_i q \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

  - Výběr lokality pro známou celkovou velikost produkce q^*:

$$TC_k = \min_{i=1,2,\dots,n} \left(FC_i + v_i q^*\right).$$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

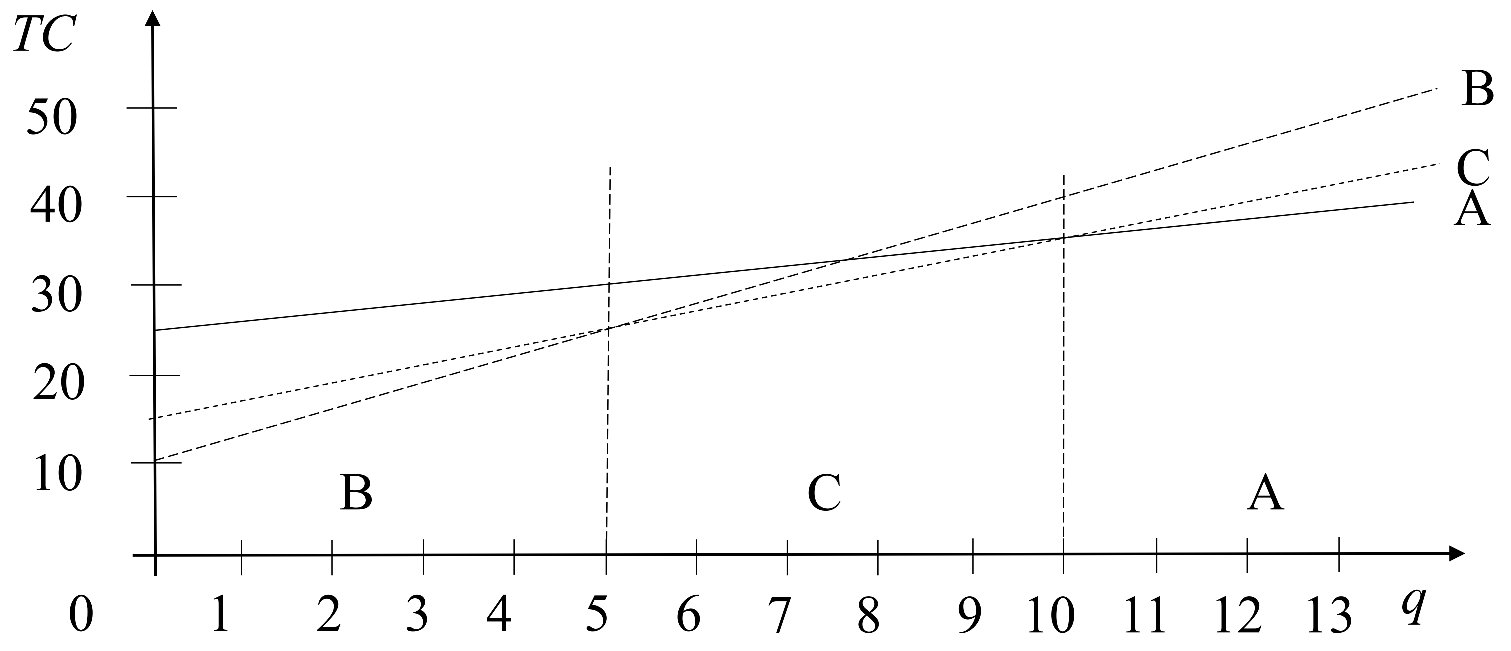
- Analýza bodu zvratu
  - Příklad
    - Jsou dány tři potenciální lokality pro umístění nového zařízení: A, B a C. V tabulce jsou uvedeny pro každou lokalitu fixní náklady v Kč za 1 měsíc a variabilní náklady v Kč na jednotku produkce.
    - Vyberte lokalitu pro známou produkci 800 jednotek.
    - Jak závisí výběr lokality obecně na velikosti produkce?

Lokalita	FC	v
A	25000	10
B	10000	30
C	15000	20

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Analýza bodu zvratu
  - Příklad – pokračování
    - Celkové náklady jsou znázorněny v 1000 Kč, velikost produkce ve 100 ks.



Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Vícekriteriální hodnocení variant
  - Lokality posuzovány z hlediska několika kritérií.
  - Metoda váženého součtu (WSA):
    - Hodnocení i–té varianty podle j–tého kritéria:

      $$y_{ij} \text{ pro } i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,k.$$

    - Váha j–tého kritéria:

      $$v_j > 0 \text{ pro } j = 1,2,\dots,k,$$

      $$\sum_{j=1}^{k} v_j = 1 \text{ (normalizované váhy).}$$

    - Vážený součet:

      $$u_i = \sum_{j=1}^{k} v_j y_{ij} \text{ pro } i = 1,2,\dots,n.$$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Vícekriteriální hodnocení variant
  - Příklad
    - Jsou dány tři potenciální lokality pro umístění nového zařízení: A, B a C. Každou variantu hodnotíme z hlediska sedmi kritérií. Tabulka obsahuje bodové ohodnocení jednotlivých variant podle kritérií a váhy kritérií. Firma má vybrat lokalitu, jejíž vícekriteriální hodnocení bude nejvyšší.

Lokalita	Materiál	Mzdy	Voda	Doprava	Klima	Daně	u_i
A	100	80	60	50	40	60	60
B	60	80	90	60	70	40	72
C	50	70	80	80	50	70	69
Váhy	0,10	0,05	0,40	0,10	0,20	0,15	

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Metoda těžiště
  - Znalost stávající sítě části systému, tj. souřadnic stávajících zařízení x_i a y_i pro $i = 1,2, \dots, n$.
  - Umístění nového zařízení do těžiště sítě se souřadnicemi:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \ .$$

  - Znalost objemů přepravy mezi jednotlivými zařízeními a novým zařízením: q_i pro $i = 1,2, \dots, n$.
  - Váhy:

$$v_i = \frac{q_i}{Q} \qquad i = 1,2, \dots, n, \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \ .$$

  - Souřadnice těžiště:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \qquad \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} v_i y_i \ .$$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

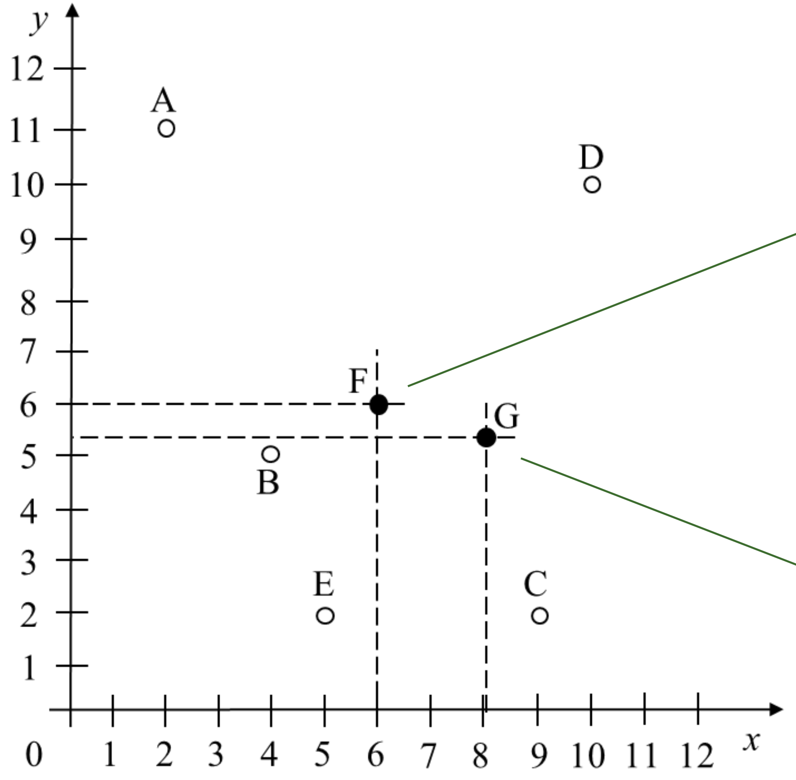
- Metoda těžiště
  - Příklad
    - Ve stávající síti existuje pět zařízení, jejichž souřadnice jsou uvedeny v tabulce. Máme určit souřadnice lokality pro umístění nového zařízení s využitím metody těžiště. Zjistěte, jak se změní tyto souřadnice v případě, že do rozhodování zahrneme denní objemy přepravy mezi stávajícími zařízeními a novým zařízením (viz sloupec tabulky q_i).

Lokalita	x_i	y_i	q_i
A	2	11	30
B	4	5	30
C	9	2	190
D	10	10	120
E	5	2	30

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Metoda těžiště
  - Příklad – pokračování



Těžiště bez objemů přepravy: (6;6)

Vážené těžiště: (8,1;5,3)

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozmístění zařízení

- Optimální rozmístění zařízení – modifikovaný dopravní problém
  - Množina m potenciálních lokalit pro nová zařízení:

    a_i kapacita zařízení v lokalitě i,

    f_i fixní náklady za využití lokality i, $\quad i = 1,2,\dots,m.$
  - Množina n zákazníků nebo vnitřních odběratelů:

    b_j poptávka odběratele j, $\quad j = 1,2,\dots,n.$
  - Náklady na přepravu:

    c_{ij} náklady na přepravu jednotky produkce z lokality i k odběrateli j
  - Proměnné:

    $$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jestliže zařízení bude umístěno v lokalitě } i, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad i = 1,2,\dots m.$$

    y_{ij} objem produktu přepravovaného od zařízení v lokalitě i k odběrateli j, $\quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n.$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Optimální rozmístění zařízení – modifikovaný dopravní problém
  - Matematický model:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i x_i \quad \rightarrow \ \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leq a_i x_i \qquad i = 1,2,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\dots,m,$$

$$y_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2,\dots,m.$$

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozmístění zařízení

- Optimální rozmístění zařízení – modifikovaný dopravní problém
  - Příklad
    - Firma může využít sedm potenciálních skladů, z nichž bude přepravovat materiál do svých pěti výroben. V tabulce jsou dány velikosti měsíčních požadavků výroben a měsíční kapacity skladů (v tis. tun). Pokud je daný sklad využitý, společnost musí platit za jeho měsíční pronájem uvedené částky (v tis. eur). Dále jsou účtovány jednotkové přepravní náklady (v eurech za tunu) pro každou dvojici skladu a výrobny. Rozhodněte, které sklady pronajmout a jaké množství materiálu se má přepravovat mezi pronajatými sklady a výrobnami, aby celkové měsíční náklady byly minimální.

Lokalita	V1	V2	V3	V4	V5	a_i	f_i
S1	10	15	20	12	8	20	10
S2	7	10	15	22	13	25	12
S3	20	13	10	11	9	15	8
S4	15	12	21	18	16	18	9
S5	11	22	12	10	15	22	11
S6	9	13	11	18	22	30	13
S7	18	10	15	7	9	23	11
b_j	25	22	17	22	15		

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozmístění zařízení

- Optimální rozmístění zařízení – kvadratický přiřazovací problém
  - Množina n zařízení:

    c_{ij} hodnota materiálového toku mezi zařízeními i a j, $\quad i = 1,2,\dots,n,\; j = 1,2,\dots,n.$

  - Množina n pracovišť:

    d_{kl} vzdálenost pracovišť k a l, $\quad k = 1,2,\dots,n,\; l = 1,2,\dots,n.$

  - Proměnné:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } i-\text{té zařízení je umístěno na } k-\text{té pracoviště}, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \qquad i = 1,2,\dots n,\; k = 1,2,\dots,n.$$

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozmístění zařízení

- Optimální rozmístění zařízení – kvadratický přiřazovací problém
  - Matematický model:

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl} \quad \rightarrow \quad \min,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1 \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1 \qquad k = 1,2,\dots,n,$$

$$x_{ik} \in \{0,1\} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,n, \\ k = 1,2,\dots,n. \end{array}$$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Optimální rozmístění zařízení – kvadratický přiřazovací problém
  - Linearizace matematického modelu:

$$y_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } i - \text{té zařízení je umístěno} \\ & \text{na } k - \text{té pracoviště a } j - \text{té zařízení} \\ & \text{je umístěno na } l - \text{té pracoviště,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad i, j, k, l = 1,2, \dots n.$$

$$y_{ijkl} \geq x_{ik} + x_{jl} - 1 \qquad i, j, k, l = 1,2, \dots, n,$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ij} d_{kl} y_{ijkl} \quad \rightarrow \quad \text{min.}$$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozmístění zařízení

- Optimální rozmístění zařízení – kvadratický přiřazovací problém
  - Příklad
    - Firma má v úmyslu vybudovat 5 skladů v 5 městech. V první tabulce jsou dány vzdálenosti (v km) mezi městy, ve druhé tabulce počty jízd, které se musí mezi sklady uskutečnit během jednoho měsíce. Cílem je rozhodnout, který sklad ve kterém městě bude zřízen, aby byly minimalizovány celkové přepravní náklady.

Vzdálenost	Mesto1	Mesto2	Mesto3	Mesto4	Mesto5
Mesto1	0	50	60	130	100
Mesto2	50	0	70	150	120
Mesto3	60	70	0	80	40
Mesto4	130	150	80	0	50
Mesto5	100	120	40	50	0

Jízdy	Sklad1	Sklad2	Sklad3	Sklad4	Sklad5
Sklad1	0	10	15	12	8
Sklad2	9	0	18	16	10
Sklad3	20	8	0	10	12
Sklad4	10	15	11	0	22
Sklad5	17	12	9	11	0

Modely navrhování produkčních systémů

Rozvržení podle produktu

- Základní pojmy a značení
  - Sériová a hromadní produkce.
  - Každý produkt vyžaduje stejnou posloupnost operací.
  - Operace probíhají na zařízeních uspořádaných do produkční linky.
  - Všechny vstupní parametry jsou celočíselné hodnoty.

$\boldsymbol{A}$	množina n operací,
t_i	operační čas i – té operace ($i = 1,2,\dots,n$),
$\boldsymbol{A}_j \subset \boldsymbol{A}$	množina operací, které probíhají na j – tém pracovišti ($j = 1,2,\dots,m$),
c	produkční takt,
$i \rightarrow k$	precedenční relace, i – tá operace předchází k – té operaci ($i,k = 1,2,\dots,n; i \neq k$),
z	počet nevyužitých časových jednotek na celé lince,
z_j	počet nevyužitých časových jednotek na j – tém pracovišti ($j = 1,2,\dots,m$).

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Základní pojmy a značení
  - Pracnost výrobku

$$t = \sum_{i=1}^{n} t_i \,.$$

  - Součet operačních časů všech operací na j – tém pracovišti

$$t(\boldsymbol{A}_j) = \sum_{i \in \boldsymbol{A}_j} t_i \qquad j = 1,2, \dots, m.$$

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Přípustný rozvrh
  - Příklad
    - Na produkční linku se 3 pracovišti, na níž se vyrábí daný produkt, je zapotřebí rozvrhnout 8 operací s následujícími operačními časy (v min): 2,1,7,3,6,5,4,2. Sedmá operace v pořadí s časem 4 min musí být zařazena za operaci s časem 1 min, tedy platí precedenční relace $2 \rightarrow 7$. Velikost taktu byla stanovena na 10 min.

      a) Jaká je pracnost produktu?

      b) Rozhodněte, zdá následující rozvrh je přípustný:

      $$\boldsymbol{A}_1 = \{3, 4\},$$

      $$\boldsymbol{A}_2 = \{5, 7\},$$

      $$\boldsymbol{A}_3 = \{1, 2, 6, 8\}.$$

      c) Určete počet nevyužitých minut na celé produkční lince.

      d) Jaká je efektivnost produkční linky?

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Přípustný rozvrh
  - Podmínky pro přípustný rozvrh
    - Budou rozvrženy všechny operace

$$\bigcup_{j=1}^{m} \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{A},$$

    - Každá operace bude probíhat na jednom pracovišti

$$\boldsymbol{A}_j \bigcap \boldsymbol{A}_k = \emptyset \qquad j, k = 1,2, \dots, m, j \neq k,$$

    - Všechny operace na pracovišti budou dokončeny v rámci taktu

$$t(\boldsymbol{A}_j) \leq c \qquad j = 1,2, \dots, m.$$

    - Budou respektovány všechny precedenční relace

$$i \rightarrow h, i \in \boldsymbol{A}_j \wedge h \in \boldsymbol{A}_k \Rightarrow j \leq k \qquad \begin{matrix} i, h = 1,2, \dots, n, \\ j, k = 1,2, \dots, m. \end{matrix}$$

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Optimální rozvrh
  - Kritéria
    - Minimalizace počtu pracovišť při dané velikosti taktu

$$m \rightarrow \min \qquad \text{pro } c = \text{konst.}$$

    - Minimalizace velikosti pracovního taktu při daném počtu pracovišť

$$c \rightarrow \min \qquad \text{pro } m = \text{konst.}$$

    - Minimalizace počtu nevyužitých časových jednotek na celé lince

$$z = \sum_{j=1}^{m} z_j = \sum_{j=1}^{m} \left(c - t(\boldsymbol{A}_j)\right) = mc - \sum_{j=1}^{m} t(\boldsymbol{A}_j) = mc - t \quad \rightarrow \min.$$

    - Maximalizace efektivnosti produkční linky

$$E = \frac{t}{mc} 100\ \% \ \rightarrow \ \max.$$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozvržení podle produktu

- Minimalizace počtu pracovišť
  - Obecně platí: $1 \leq m \leq n$.
  - Pro $m = 1$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned} &c = t \\ &z = z_1 = 0 \\ &E = 100\ \% \end{aligned}}$$

  - Pro $m = n$ platí:

$$\boxed{c = t_{\max} = \max_{i=1,2,\dots,n} t_i}$$

  - Pokud je zadána velikost taktu $c = \text{konst.}$, pak platí:

$$1 \leq m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \leq n \qquad m_{\min} = \left\lceil \frac{t}{c} \right\rceil \quad m_{\max} = \left\lceil \frac{t}{t_{\max}} \right\rceil$$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozvržení podle produktu

- Minimalizace počtu pracovišť
  - Příklad
    - Firma chce rozvrhnout na linku výrobek, jehož produkci tvoří 6 operací s produkčními časy (v min): 2,4,6,3,5,3. Mezi operacemi neexistuje žádná technologická návaznost, tedy není definována žádná precedenční relace. Velikost taktu je stanovena na 8 min.
      a) Jaká je pracnost produktu?
      b) Určete minimální a maximální počet pracovišť na produkční lince a najděte libovolný přípustný rozvrh.
      c) Pro nalezený rozvrh určete počet nevyužitých minut na celé produkční lince a vypočtěte efektivnost produkční linky.

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Minimalizace velikosti pracovního taktu
  - Obecně platí: $1 \le c \le t$.
  - Pro $m = 1$ platí:

    $$\boxed{\begin{array}{l} c = t \\ E = 100\ \% \end{array}}$$

  - Pro $m = n$ platí:

    $$\boxed{\text{pokud } t_i = 1 \text{ pro všechna } i = 1,2,\dots,n} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c = 1 \\ E = 100\ \% \end{array}}$$

  - Pro $1 < m < n$ platí:
    - Teoreticky dosažitelná minimální velikost taktu: $c_{\min} = \max\left(\left\lceil \frac{t}{m} \right\rceil, t_{\max}\right)$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozvržení podle produktu

- Minimalizace velikosti pracovního taktu
  - Velikost nejdelšího taktu pro požadovanou celkovou denní produkci Q a délku pracovní doby T:

$$c_{\max} = \left\lfloor \frac{T}{Q} \right\rfloor.$$

  - Skutečná velikost pracovního taktu:

$$1 \leq c_{\min} \leq \mathrm{c} \leq c_{\max} \leq t.$$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozvržení podle produktu

- Minimalizace velikosti pracovního taktu
  - Příklad
    - Firma chce rozvrhnout výrobek s 5 operacemi a operačními časy (v min): 5,1,3,4,2 na 3 pracoviště, přičemž mezi operacemi neexistuje žádná precedenční relace.
      a) Jaká je teoreticky dosažitelná minimální velikost taktu?
      b) Najděte přípustný rozvrh pro tuto hodnotu.
      c) Jaká bude efektivnost produkční linky?
      d) Jak se změní velikost pracovního taktu a efektivnost produkční linky pro operační časy 2,2,2,5,4 min?

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Minimalizace velikosti pracovního taktu
  - Příklad
    - Firma plánuje dosažení celkové denní produkce Q=100 ks při délce pracovní doby T=9 hod. Výrobek vyžaduje 7 operací s operačními časy (v min): 2,4,5,4,3,1,2.
      a) Jaká je nejvyšší možná velikost taktu, při které je možné ještě dosáhnout požadované denní produkce?
      b) Je možné nalézt přípustný rozvrh pro tuto hodnotu taktu se stávajícími pěti pracovišti?
      c) Jaká bude efektivnost celé produkční linky?

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Heuristické metody
  - Zadání úlohy
    - Produkce je rozdělena do n operací.
    - Návaznost jednotlivých operací je dána pomocí precedenčních relací. Pro jejich grafické znázornění lze použít orientovaného grafu.
    - Pro každou operaci i je zadána doba jejího trvání, tj. operační čas t_i.
    - Je zadána požadovaná celková denní produkce Q.
    - Denní pracovní doba je T.

Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Heuristické metody
  - Obecný postup
    - Krok 1
      - Vypočteme maximální dobu taktu: $c_{\max} = \left\lfloor \frac{T}{Q} \right\rfloor.$
    - Krok 2
      - Vypočteme pracnost produktu a teoreticky minimální počet pracovišť:

$$t = \sum_{i=1}^{n} t_i, \qquad m_{\min} = \left\lceil \frac{t}{c_{\max}} \right\rceil.$$

    - Krok 3
      - Použijeme některé z pravidel, podle něhož budeme přiřazovat operace na jednotlivá pracoviště (viz dále).
    - Krok 4
      - Vypočteme efektivnost celé produkční linky: $E = \frac{t}{mc} 100\ \%.$

Modely navrhování produkčních systémů

Rozvržení podle produktu

- Heuristické metody
  - Pravidla pro přiřazení operací na pracoviště (viz krok 3):
    - nejdelší operační čas,
    - maximální počet předchůdců,
    - maximální počet následníků,
    - maximální váha:

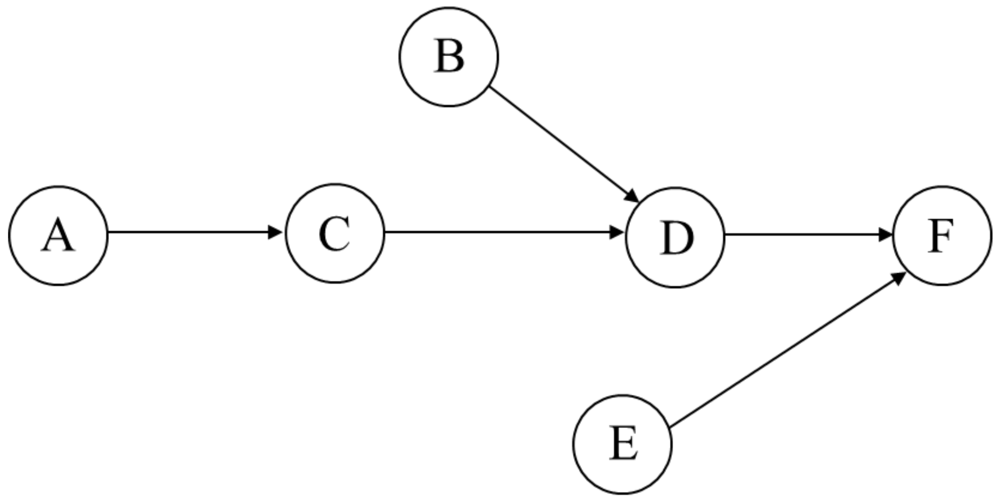
$$w_i = t_i + \sum_{j \in \boldsymbol{N}_i} w_j \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

kde N_i je množina všech bezprostředních následníků i – té operace.

Modely navrhování produkčních systémů

Rozvržení podle produktu

- Heuristické metody
  - Příklad
    - Firma má v plánu vyrobit za den 12 ks výrobku, jehož produkce je tvořena 6 operacemi. Jejich návaznost je znázorněna pomocí orientovaného grafu na obrázku.



Modely navrhování produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvržení podle produktu

- Heuristické metody
  - Příklad – pokračování
    - V tabulce je pro každou operací zadána doba jejího trvání. Z grafu jsou navíc získány množiny bezprostředně předchozích a bezprostředně následujících operací. Pro další výpočet jsou v tabulce u každé činnosti navíc zaznamenány počty všech předchozích a všech následných operací. Délka denní pracovní doby je 6 hod.

Operace	t_i	Předchůdci	Následníci	Počet předchůdců	Počet následníků
A	12	-	C	0	3
B	15	-	D	0	2
C	8	A	D	1	2
D	10	B, C	F	3	1
E	20	-	F	0	1
F	14	D, E	-	5	0

Modely navrhování produkčních systémů

Rozvržení podle produktu

- Matematický model

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } i - \text{tá operace je přiřazena} \\ & \text{na } j - \text{té pracoviště,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,n, \\ j = 1,2,\dots,m. \end{array}$$

$$z = \sum_{j=1}^{m} z_j = \sum_{j=1}^{m} \left(c - \sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij} \right) = mc - t \to \ \text{min},$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij} \le c \qquad j = 1,2,\dots,m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

$$x_{kh} \le \sum_{j=1}^{h} x_{ij} \qquad h = 1,2,\dots,m, i \to k,$$

3

Modely řízení produkčních systémů

$$z = \sum_{j=1}^{n} d_j^+, \quad \to \min,$$

$$C_j \leq F_{\max} \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

$$C_i + t_j \leq C_j + M(1 - x_{ij}) \qquad i,j =$$

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \qquad i,j = 1,2,\dots,n, i$$

$$C_j - d_j^+ + d_j^- = d_j \qquad j = 1,2,\dots,$$

$$C_j \geq t_j \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

$$d_j^+, d_j^- \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i,j =$$

Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

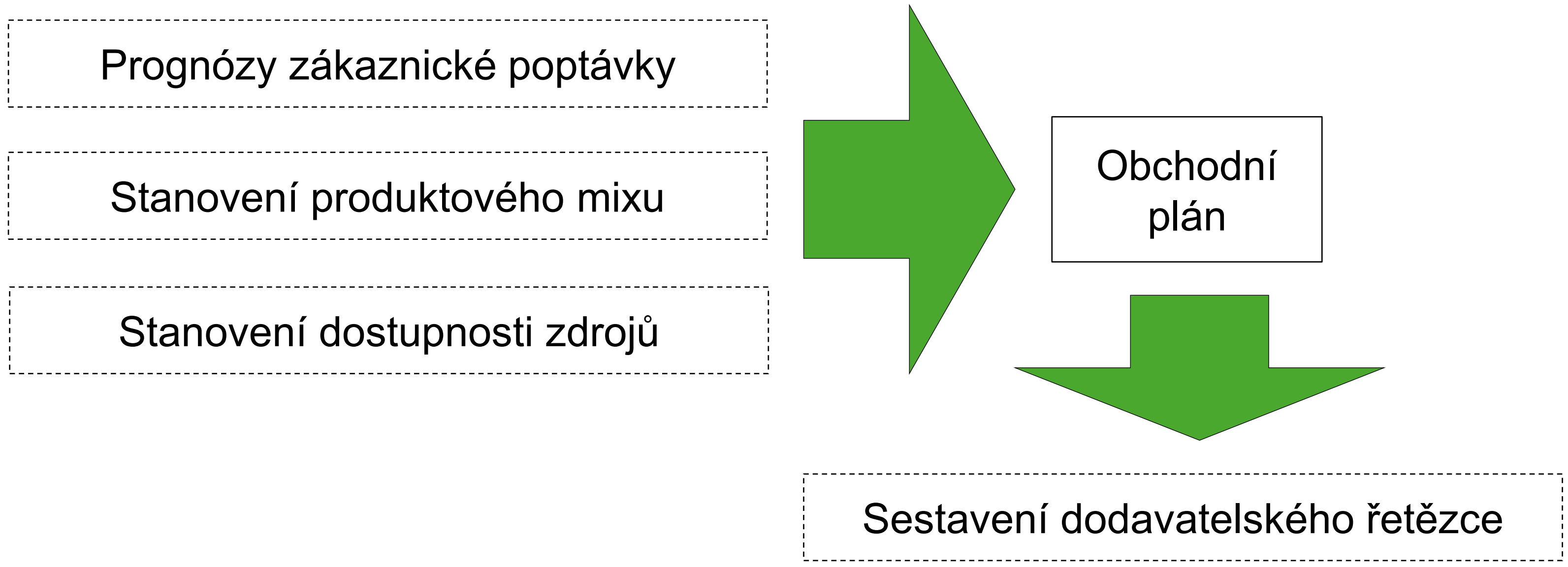
Řízení produkčních systémů

- Jednotlivé kroky řízení produkčních systémů
  - Plánování produkce – stanovení produkční kapacity v dlouhodobém časovém horizontu.
  - Rozvržení produkce – rozvržení produkce na jednotlivá zařízení v kratším časovém horizontu.
  - Řízení produkce – implementace rozvrhů, probíhá v reálném čase.

Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Plánování agregované produkce
  - Uspokojení poptávky.
  - Velikost poptávky stanovena v agregovaných jednotkách → v agregovaných jednotkách je stanovena i velikost produkce.
  - Posouzení produkčních kapacit a jejich možného navýšení.



Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Plánování agregované produkce
  - Rozhodovací problém

D_t	velikost agregované poptávky v období t,
P_t	velikost produkce v období t,
W_t	úroveň lidských zdrojů v období t,
I_t	úroveň zásob v období t.

Řídící proměnné

  - Strategie nastavení řídících proměnných:
    - **Konstantní úroveň**. Neměníme úroveň W_t, tedy ani P_t. Může docházet k nadprodukci (vyšší skladovací náklady) nebo nedostatečné produkci (ušlý zisk) vzhledem k poptávce.
    - **Strategie sledování**. Reakce na velikost poptávky změnou úrovně W_t tak, aby úroveň P_t co nejvíce odpovídala změně velikosti poptávky. Vyšší náklady související s propouštěním a najímáním pracovníků.
    - **Kombinovaná strategie**. Částečné sledování velikosti poptávky za účelem využití obou přístupů.

Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Plánování agregované produkce
  - Matematický model

N	počet skupin, do kterých jsou roztříděny produkty ($i = 1,2, \dots, N$),
T	počet intervalů, do kterých je rozdělen časový horizont ($t = 1,2, \dots, T$),
M	počet zdrojů ($m = 1,2, \dots, M$),
D_{it}	prognóza poptávky pro skupinu produktů i v období t,
R_{mt}	kapacita zdroje m v období t,
r_{im}	počet jednotek zdroje m, který vyžaduje skupina produktů i,
I_{it}	zásoba skupiny produktů i na konci období t,
I_{i0}	počáteční zásoba produktů skupiny i,
I_{it}^*	bezpečnostní úroveň zásob produktů skupiny i na konci období t,
c_i	jednotkové skladovací náklady skupiny produktů i za časový interval,
x_{it}	objem produkce skupiny i v období t.

Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Plánování agregované produkce
  - Matematický model – pokračování

$$z = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} c_i \, I_{it} \;\rightarrow \min,$$

$$I_{i,t-1} + x_{it} - I_{it} = D_{it} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2, \dots, N, \\ t = 1,2, \dots, T, \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_{im} x_{it} \le R_{mt} \qquad \begin{array}{l} m = 1,2, \dots, M, \\ t = 1,2, \dots, T, \end{array}$$

$$I_{it} \ge I_{it}^{*} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2, \dots, N, \\ t = 1,2, \dots, T, \end{array}$$

$$x_{it} \ge 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1,2, \dots, N, \\ t = 1,2, \dots, T. \end{array}$$

Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Plánování produkce

- Plánování agregované produkce
  - Matematický model – rozšíření pro přetížené zdroje

s_{mt} velikost přetížení zdroje m v období t,

p penále za přetížení zdroje,

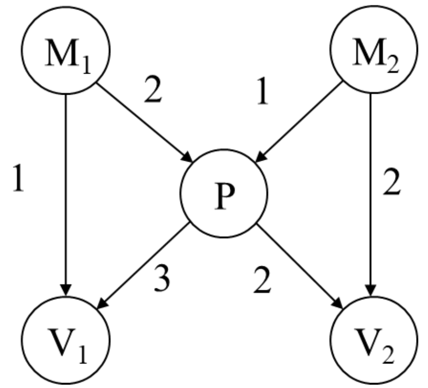
$$\sum_{i=1}^{N} r_{im} x_{it} \leq R_{mt} + s_{mt} \qquad \begin{matrix} m = 1,2, \dots , M, \\ t = 1,2, \dots , T, \end{matrix}$$

$$z = \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{N} c_i \, I_{it} + p \sum_{m=1}^{M} s_{mt} \right) \rightarrow \text{min.}$$

Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - Techniky
    - Strukturní analýza (input-output analýza)
    - Plánování materiálových požadavků (MRP – Material Requirement Planning).
    - Plánování výrobních zdrojů (MRP II – Manufacturing Resource Planning).
  - Gozinto graf
    - Uzly
      - Vstupy: materiál, polotovary.
      - Výstupy: finální produkty.
    - Hrany (orientované)
      - Transformace jednotlivých částí.
      - Ohodnocení hran: množství vstupujících částí do vystupujících částí.



Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - **Strukturní analýza** (input-output analýza)

$\boldsymbol{A}$ matice technických koeficientů a_{ij} (množství produkce i – té vstupující položky nezbytné na produkci jedné jednotky j – té vystupující položky),

$\boldsymbol{b}$ vektor hodnot požadované čisté produkce,

$\boldsymbol{y}$ vektor hodnot celkové produkce,

- Leontiefův model: $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$.
- Optimalizační model:

$$z = f(\boldsymbol{y}) \rightarrow \min\ (\max),$$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}.$$

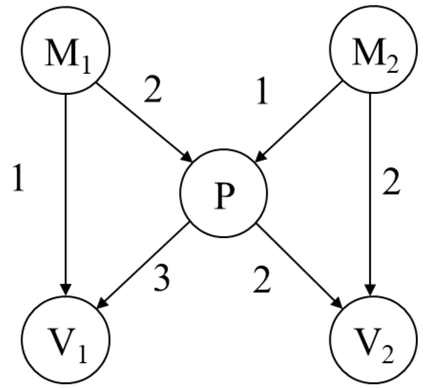
Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - **Strukturní analýza** (input-output analýza)
    - Příklad
      - Firma vyrábí dva finální produkty V1 a V2 v počtu 20 a 30 ks. Je využíváno dvou typů materiálů M1 a M2 a polotovaru P. Struktura produktu je vyjádřena Gozinto grafem. Vypočtěte vektor celkové produkce:

        a) S použitím Leontiefova modelu.

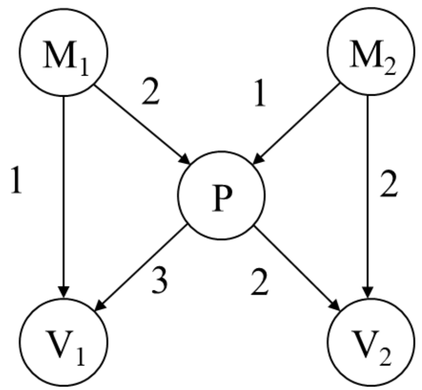
        b) Pomocí optimalizačního modelu.



Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - **Strukturní analýza** (input-output analýza)
    - Příklad – pokračování



$\boldsymbol{A}$	M_1	M_2	P	V_1	V_2
M_1	0	0	2	1	0
M_2	0	0	1	0	2
P	0	0	0	3	2
V_1	0	0	0	0	0
V_2	0	0	0	0	0

	$\boldsymbol{b}$
M_1	0
M_2	0
P	0
V_1	20
V_2	30

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$	M_1	M_2	P	V_1	V_2
M_1	1	0	2	7	4
M_2	0	1	1	3	4
P	0	0	1	3	2
V_1	0	0	0	1	0
V_2	0	0	0	0	1

	$\boldsymbol{y}$
M_1	260
M_2	180
P	120
V_1	20
V_2	30

Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - **MRP**
    - **Hlavní rozvrh produkce** (MPS – Master Production Schedule)
      - Transformace agregovaného plánu do podrobného plánu produkce.
      - Co, kdy a v jakém množství se bude produkovat (konkrétní produkty a kapacitní požadavky během uvažované časové periody).
    - **Seznam všech materiálů, součástek a polotovarů** (BOM – Bill of Materials).
      - Montážní strom struktury produktu (Gozinto graf).
      - Stav zásob, dodací lhůty, objednávky, výše pojistné zásoby.

Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - **MRP**
    - Příklad
      - Na 1 ks výrobku V je zapotřebí 1 jednotka materiálu M1, 2 jednotky materiálu M2 a 4 jednotky materiálu M3. Dodací lhůty (DL, v týdnech) jednotlivých druhů materiálu a výrobku V jsou uvedeny na obrázku. Výrobek V lze začít vyrábět v okamžiku, kdy je dostupný veškerý materiál.

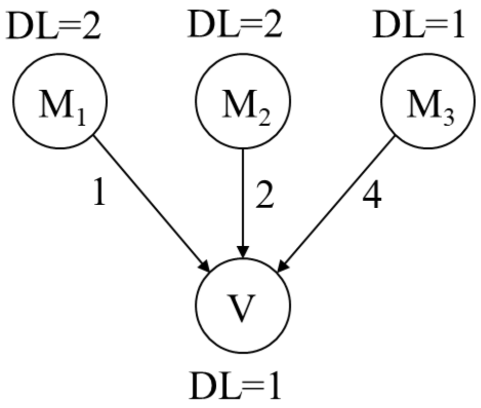
        Firma má ve 4. týdnu dodat 80 ks výrobku V a v 7. týdnu 160 ks výrobku V. Počáteční zásoba výrobku V je 50 ks, na skladě je 50 jednotek materiálu M1, 40 jednotek materiálu M2 a 140 jednotek materiálu M3.

        Cílem je naplánovat materiálové požadavky na celé období tak, aby byla splněna poptávka po výrobku V.

Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - **MRP**
    - Příklad – pokračování
      - Gozinto graf



Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - **MRP**
    - Příklad – pokračování

Dodávka výrobků V	Týden	1	2	3	4	5	6	7
	Počet výrobků				80			160

Výrobek V DL=1	Celkový požadavek				80			160
	Zásoba	50	50	50	50			
	Čistý požadavek				30			160
	Objednávka			30			160	

Modely řízení produkčních systémů

Plánování produkce

- Vícestupňové plánování
  - **MRP**
    - Příklad – pokračování

	Týden	1	2	3	4	5	6	7
Materiál M_1 DL=2	Celkový požadavek			30			160	
	Zásoba	50	50	50	20	20	20	
	Čistý požadavek						140	
	Objednávka				140			
Materiál M_2 DL=2	Celkový požadavek			60			320	
	Zásoba	40	40	40				
	Čistý požadavek			20			320	
	Objednávka	20			320			
Materiál M_3 DL=1	Celkový požadavek			120			640	
	Zásoba	140	140	140	20	20	20	
	Čistý požadavek						620	
	Objednávka					620		

Modely řízení produkčních systémů

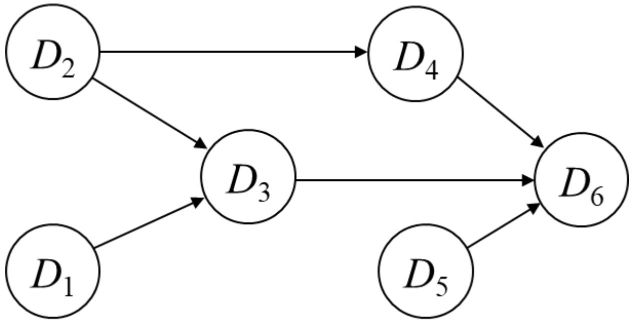
Rozvrhování produkce

- Základní pojmy
  - Prvky
    - Procesory: $P_1, P_2, \dots, P_m$ nebo $1,2,\dots,m$.
    - Dávky: $D_1, D_2, \dots, D_n$ nebo $1,2,\dots,n$.
  - Klasifikace modelů
    - Podle počtu procesorů
      - jednoprocesorové,
      - víceprocesorové, procesory uspořádány paralelně nebo sériově.
    - Podle uvažování náhody:
      - deterministické,
      - stochastické (pravděpodobnostní).
    - Podle znalosti všech dávek předem:
      - statické,
      - dynamické.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní pojmy
  - Precedenční relace
    - Vyjádření návaznosti dávek při zpracování.
    - $D_j \rightarrow D_k$ znamená, že zpracování dávky D_k může začít až poté, co je dokončena dávka D_j.
    - Precedenční graf – grafické vyjádření všech precedenčních relací v úloze.



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní pojmy
  - Přerušení dávky
    - rozdělení dávky do dvou či více časových intervalů, mezi nimiž existuje časový odstup,
    - k přerušení dávky většinou dochází po dokončení právě probíhající operace.
  - Prostoj
    - časový interval, v němž se nerealizuje žádná dávka, tj. neprobíhá žádná operace,
    - prostoje mohou být plánované (údržba), mohou nastat v důsledku neefektivního vyvážení produkční linky, může jít i o vynucené prostoje (poruchy).
  - Rozvrh
    - uspořádání dávek, vyjádřené pomocí časových údajů,
    - Gantt diagram je grafickým vyjádřením rozvržení dávek na časové ose.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní pojmy
  - Modely síťové analýzy
    - jediná dávka, tzv. projekt,
    - operace se nazývají činnosti,
    - každá činnost probíhá na samostatném procesoru,
    - návaznost činností lze vyjádřit pomocí tzv. síťového grafu,
    - časová a nákladová analýza projektů, rozvrhování sdílených zdrojů.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Značení v modelech
    - Zadané *parametry* jsou značeny malými písmeny.
    - *Proměnné* a *vypočtené údaje* jsou značeny velkými písmeny.
  - Parametry – pro každou dávku D_j lze zadat následující údaje $(j = 1,2, \dots, n)$

t_j doba trvání (realizace) j – té dávky, pokud se dávka skládá z více operací, jsou známy i jejich časy,

r_j nejdříve možný termín zahájení j – té dávky,

d_j požadovaný termín dokončení j – té dávky,

w_j váha j – té dávky pro vyjádření její důležitosti (jednotkové náklady, penále za případné nedodržení termínu apod.).

Modely řízení produkčních systémů

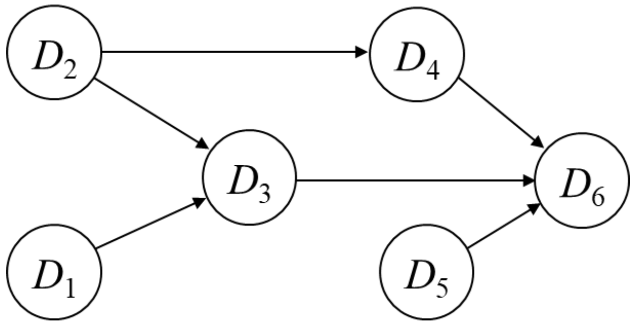
Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Přípustný rozvrh
    - Žádný procesor nemůže vykonávat více dávek současně.
    - Žádná dávka nemůže být zpracovávána na více procesorech současně.
    - Realizace žádné dávky nemůže začít před nejdříve možným termínem jejího zahájení.
    - U všech dávek musí být respektovány všechny precedenční relace.
    - Je nutné respektovat další podmínky, např. zákaz přerušení realizace dávek, zákaz realizace některé dávky na určitém procesoru, respektování nejpozději přípustného termínu dokončení dávky apod.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Příklad
    - Uvažujme 6 dávek, jejichž precedenční graf je znázorněn na obrázku. Máme rozvrhnout tyto dávky na 2 paralelní procesory. V tabulce jsou uvedeny doby realizace všech dávek (v hodinách).



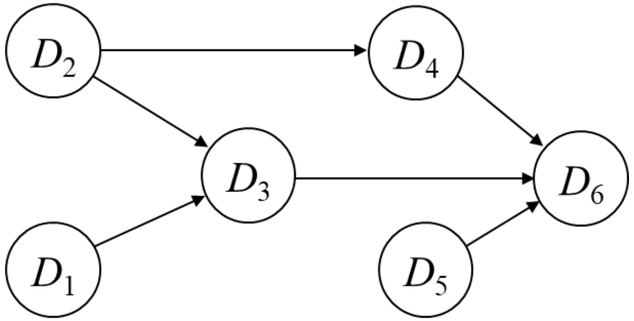
Dávka	t_j
D_1	3
D_2	2
D_3	1
D_4	2
D_5	2
D_6	1

Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

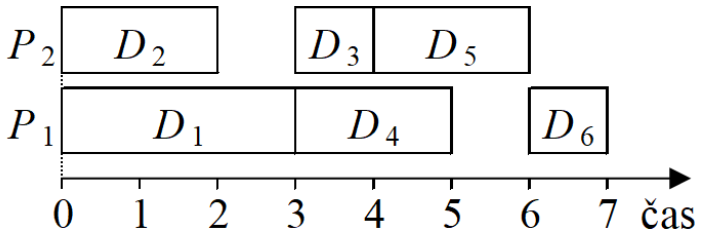
Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Příklad – pokračování

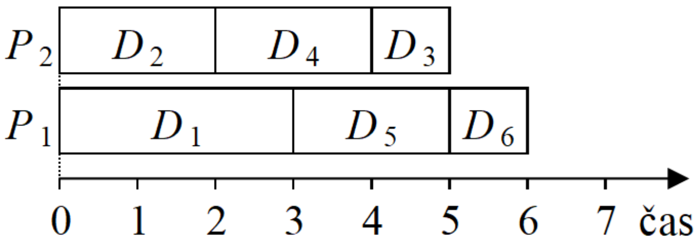


Dávka	t_j
D_1	3
D_2	2
D_3	1
D_4	2
D_5	2
D_6	1

- 3 prostoje



- 1 prostoj



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Proměnné (vypočtené údaje)

C_j	čas dokončení j – té dávky,
$F_j = C_j - r_j$	doba pobytu j – té dávky v systému,
$L_j = C_j - d_j$	časová diference mezi časem dokončení a požadovaným termínem dokončení j – té dávky;

    - pro předstih platí $L_j < 0$,
    - pro zpoždění dávky $L_j > 0$,

$T_j = \max(0, L_j)$	zpoždění j – té dávky,
$\delta(T_j) = 1$	j – tá dávka je zpožděna ($T_j > 0$),
$\delta(T_j) = 0$	j – tá dávka není zpožděna ($T_j = 0$).

  - Optimální výrobní rozvrh – je to takový přípustný rozvrh, který minimalizuje vybrané kritérium.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Kritéria:
    - Čas dokončení poslední dávky, tj. čas dokončení všech dávek

$$C_{\max} = \max_{j=1,2,\dots,n} \{C_j\}, \qquad C_{\max}(w) = \max_{j=1,2,\dots,n} \{w_j C_j\}.$$

    - Průměrný čas dokončení dávky

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} C_j , \qquad \bar{C}(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j C_j .$$

    - Nejdelší doba pobytu dávky v systému

$$F_{\max} = \max_{j=1,2,\dots,n} \{F_j\}, \qquad F_{\max}(w) = \max_{j=1,2,\dots,n} \{w_j F_j\}.$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Kritéria:
    - Průměrná doba pobytu dávky v systému

$$\bar{F} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j \,, \qquad \bar{F}(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j F_j \,.$$

    - Největší časová diference mezi časem dokončení a plánovaným termínem dokončení dávky

$$L_{\max} = \max_{j=1,2,\ldots,n}\{L_j\}, \qquad L_{\max}(w) = \max_{j=1,2,\ldots,n}\{w_j L_j\}.$$

    - Průměrná časová diference mezi časem dokončení a plánovaným termínem dokončení dávky

$$\bar{L} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} L_j \,, \qquad \bar{L}(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j L_j \,.$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Kritéria:
    - Největší zpoždění dávky

$$T_{\max} = \max_{j=1,2,\ldots,n} \{T_j\}, \qquad T_{\max}(w) = \max_{j=1,2,\ldots,n} \{w_j T_j\}.$$

    - Průměrné zpoždění dávky

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T_j, \qquad \bar{T}(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j T_j.$$

    - Počet zpožděných dávek

$$N = \sum_{j=1}^{n} \delta(T_j), \qquad N(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j \delta(T_j).$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Klasifikace modelů $\alpha|\beta|\gamma$

α:	1	systém s jedním procesorem,
	P_m	systém s m paralelně uspořádanými procesory,
	F_m	systém s m sériově uspořádanými procesory, kterými všechny dávky procházejí ve stejném pořadí (typickým případem je výrobní linka v sériové výrobě),
	O_m	systém s m sériově uspořádanými procesory, kterými dávky procházejí v libovolném pořadí,
	J_m	systém s m sériově uspořádanými procesory, kterými každá dávka prochází v pevně daném pořadí, které však může u každé dávky jiné (typickým případem je zakázková výroba).

Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvrhování produkce

- Modely rozvrhování produkce
  - Klasifikace modelů $\alpha|\beta|\gamma$

β: r_j nejdříve možné termíny zahájení dávek nejsou nulové,

$prmp$ dávky je možné přerušit,

$prec$ v modelu existuje technologická závislost dávek (precedenční relace),

γ: vybrané kritérium.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||Z$
    - V systému je jeden procesor.
    - Zpracovává se n dávek, každá je tvořena jednou operací.
    - Z je obecně jakékoliv kritérium.
    - Pro každou dávku $j = 1,2, \dots, n$ je dána doba realizace t_j.
    - Podmínky:
      - S_1: Na začátku je k dispozici všech n dávek, tj. pro každou dávku $j = 1,2, \dots, n$ je termín jejího nejdříve možného zahájení $r_j = 0$.
      - S_2: Všechny dávky jsou vzájemně nezávislé, neexistuje mezi nimi žádná precedenční relace.
      - S_3: Doby realizace dávek jsou nezávislé na pořadí jejich realizace.
    - Nesmí dojít k přerušení dávky, nedochází k prostojům,
    - Zápis "$[i] = j$" znamená, že j – tá dávka je v daném rozvrhu zpracována na i – tém místě v pořadí.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||F_{\max}$
    - Všechny optimální rozvrhy jsou rovnocenné.
    - Hodnota kritéria (maximální doby pobytu dávky v systému) nezávisí na pořadí dávek:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} t_j \, .$$

    - Matematický model pro respektování požadovaných termínů dokončení dávek (pokud jsou považovány za nejpozději přípustné termíny dokončení):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } i - \text{tá dávka je realizována} \\ & \text{kdykoli před } j - \text{tou dávkou,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,n, \\ j = 1,2,\ldots,n. \end{array}$$

d_j^+ zpoždění dávky,
d_j^- předstih dávky.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||F_{\max}$ – pokračování

$$z = \sum_{j=1}^{n} d_j^+, \quad \to \min,$$

$z_0 = 0$ Žádná dávka není zpožděna

$z_0 > 0$ Alespoň jedna dávka je zpožděna

$$C_j \le F_{\max} \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

$$C_i + t_j \le C_j + M(1 - x_{ij}) \qquad i,j = 1,2,\ldots,n, i \ne j,$$

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \qquad i,j = 1,2,\ldots,n, i \ne j,$$

$$C_j - d_j^+ + d_j^- = d_j \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

$$C_j \ge t_j \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

$$d_j^+, d_j^- \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Modely řízení produkčních systémů

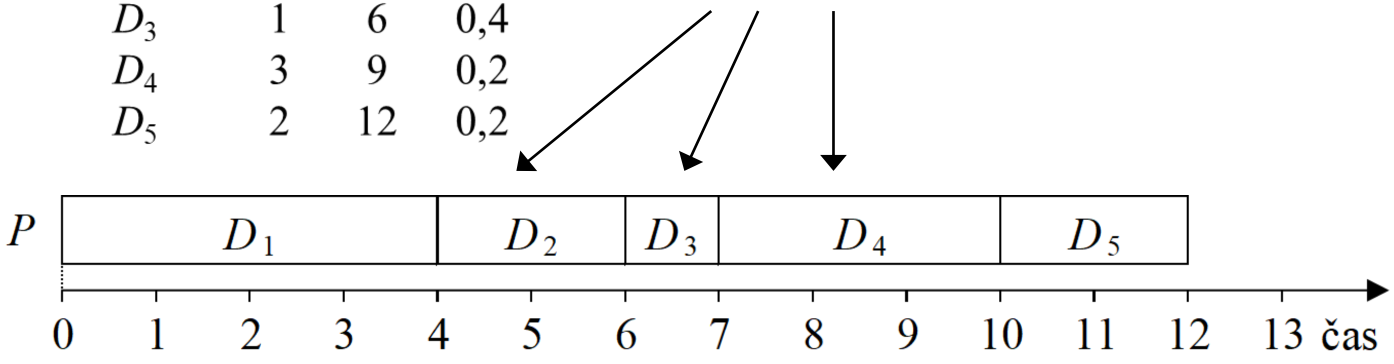
Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||F_{\max}$ – pokračování
    - Příklad
      - Uvažujme 5 dávek, u nichž známe dobu jejich realizace (v hodinách), požadovaný termín dokončení (v hodinách) a jejich relativní důležitost v podobě váhy (viz tabulka). Nejdříve možné termíny zahájení všech dávek jsou nulové.

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

$F_{\max} = 12$ hod

Celkové zpoždění dávek = 5 hodin



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

ŠKODA AUTO Vysoká škola

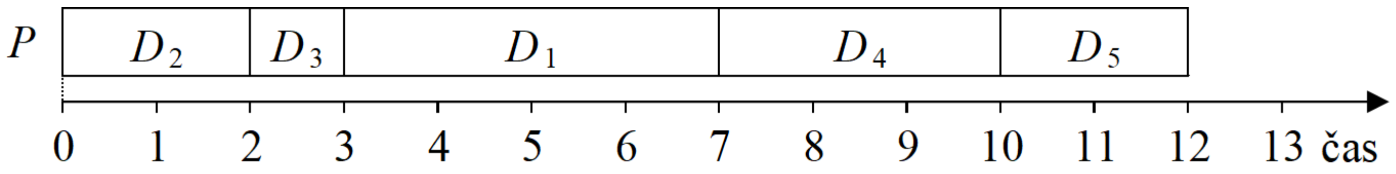
- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||F_{\max}$ – pokračování
    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

Alternativní optimální rozvrh

$F_{\max} = 12$ hod

Celkové zpoždění dávek = 1 hodina



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

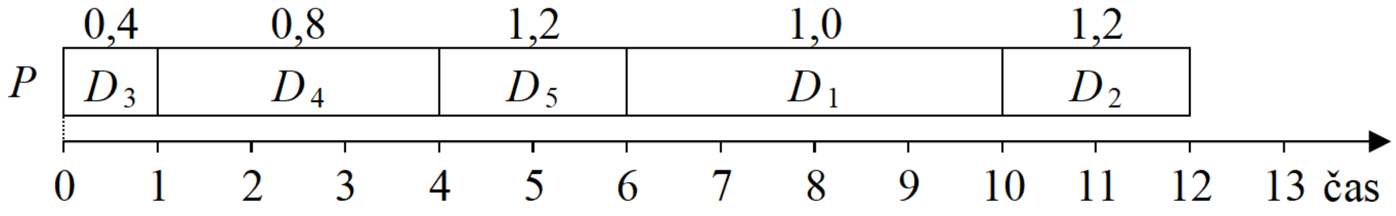
- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||F_{\max}(w)$
    - Optimálním rozvrhem je rozvrh, v němž jsou dávky uspořádány podle nerostoucí posloupnosti jejich vah:

$$w_{[1]} \geq w_{[2]} \geq \cdots \geq w_{[n]}.$$

    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

$$F_{\max}(w) = 1{,}2 \text{ hod}$$



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

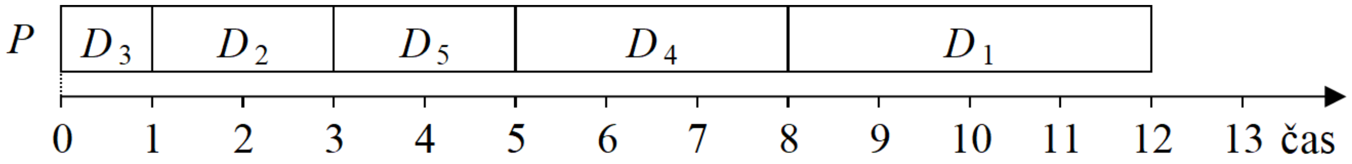
- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||\bar{F}$
    - Optimálním rozvrhem při minimalizaci průměrné doby pobytu dávky v systému je rozvrh s následující vlastností:

$$t_{[1]} \leq t_{[2]} \leq \cdots \leq t_{[n]}.$$

    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

$\bar{F} = 5{,}8$ hod



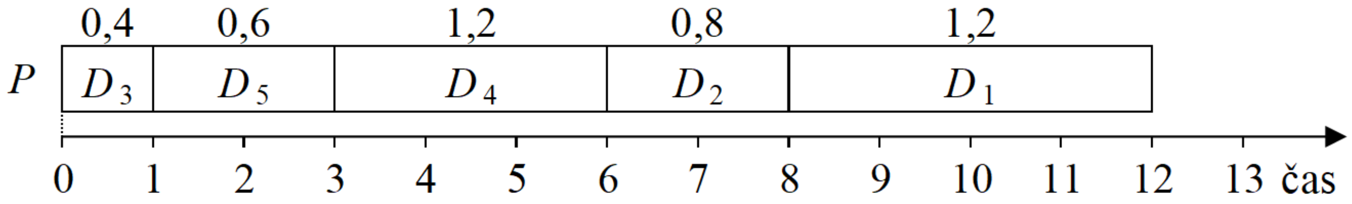
Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||\bar{F}(w)$
    - Pro optimální rozvrh platí: $$\frac{t_{[1]}}{w_{[1]}} \le \frac{t_{[2]}}{w_{[2]}} \le \cdots \le \frac{t_{[n]}}{w_{[n]}}.$$
    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

$$\bar{F}(w) = 4{,}2 \text{ hod}$$



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

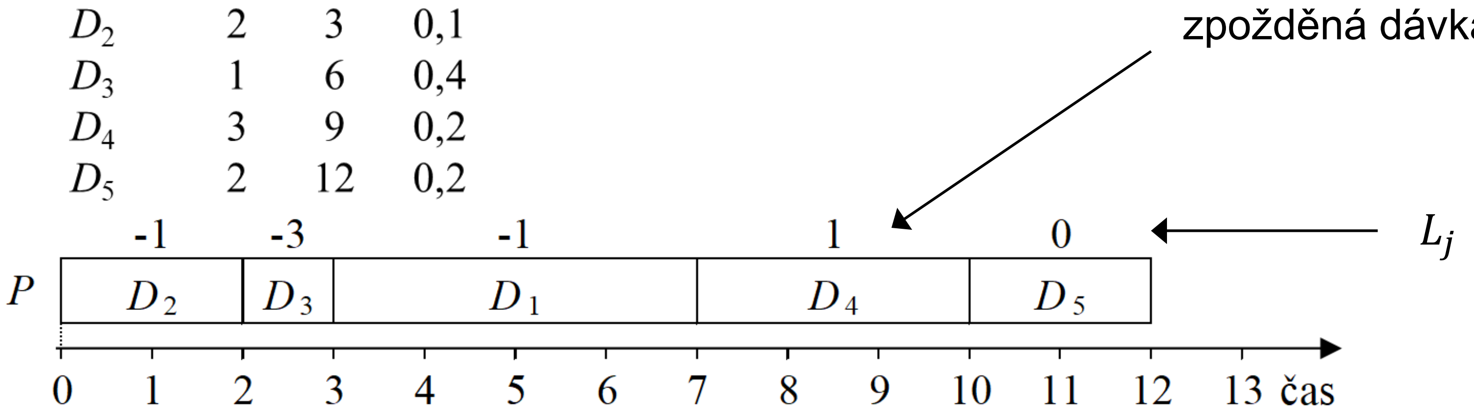
- Základní model s jedním procesorem
  - Modely $1||L_{\max}$ a $1||T_{\max}$
    - Optimálním rozvrhem je rozvrh, v němž jsou dávky uspořádány podle neklesající posloupnosti jejich požadovaného termínu dokončení:

$$d_{[1]} \leq d_{[2]} \leq \cdots \leq d_{[n]}.$$

    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

$$L_{\max} = T_{\max} = 1 \text{ hod}$$



Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||L_{\max}(w)$ a $1||T_{\max}(w)$
    - Lawlerův algoritmus (optimalizační postup)
      - Krok 1
        - Vypočteme hodnotu představující celkovou dobu realizace všech dávek: $t = \sum_{j=1}^{n} t_j$.
        - Množina nezařazených dávek je $\boldsymbol{U} = \{1,2,\dots,n\}$.
      - Krok 2
        - V tomto kroku jde o nalezení dávky, která bude zařazena do rozvrhu tak, aby končila v čase t.
        - K tomuto účelu nejprve pro všechny dosud nezařazené dávky vypočteme hodnotu f_j:

$$f_j = w_j\left(t - d_j\right), j \in \boldsymbol{U}, \text{ pro kritérium } L_{\max}(w),$$

$$f_j = w_j \max\left(0, t - d_j\right), j \in \boldsymbol{U}, \text{ pro kritérium } T_{\max}(w),$$

        - Ze všech takto vypočtených hodnot najdeme minimální hodnotu, která odpovídá dávce k:

$$f_k = \min_{j \in \boldsymbol{U}} f_j \,.$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Modely $1||L_{\max}(w)$ a $1||T_{\max}(w)$ – pokračování
    - Lawlerův algoritmus – pokračování
      - Krok 3
        - Dávku k zařadíme do rozvrhu tak, aby tato dávka končila v čase t, tj. $C_k = t$.
        - Upravíme hodnotu t a množinu dosud nezařazených dávek:

$$t = t - t_k, \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \backslash \{k\}.$$

        - Pokud $t = 0$ či také $\boldsymbol{U} = \emptyset$, pak je nalezen optimální rozvrh, jinak pokračujeme krokem 2.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

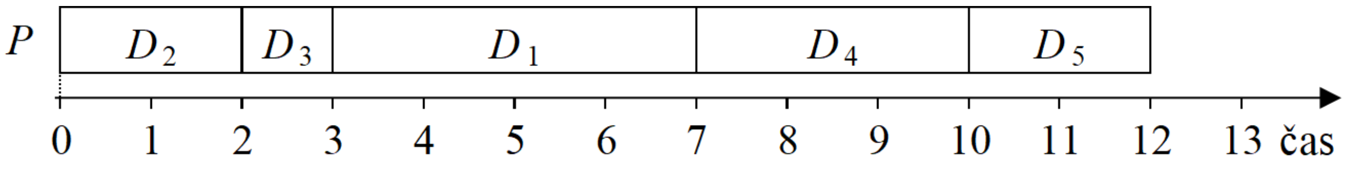
- Základní model s jedním procesorem
  - Modely $1||L_{\max}(w)$ a $1||T_{\max}(w)$ – pokračování
    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

Použití Lawlerova algoritmu pro model $1||T_{\max}(w)$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	k
t_j	4	2	1	3	2	-
d_j	8	3	6	9	12	-
w_j	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	-
$f_j(12)$	0,4	0,9	2,4	0,6	0	5
$f_j(10)$	0,2	0,7	1,6	0,2	-	4
$f_j(7)$	0	0,4	0,4	-	-	1
$f_j(3)$	-	0	0	-	-	3
$f_j(2)$	-	0	-	-	-	2
C_j	7	2	3	10	12	-
L_j	-1	-1	-3	1	0	-
T_j	0	0	0	1	0	-

$$T_{\max}(w) = 0{,}2 \text{ hod}$$



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||\bar{L}$
    - Optimálním rozvrhem při minimalizaci průměrné časové diference mezi časem dokončení a plánovaným termínem dokončení dávky je rozvrh s následující vlastností:

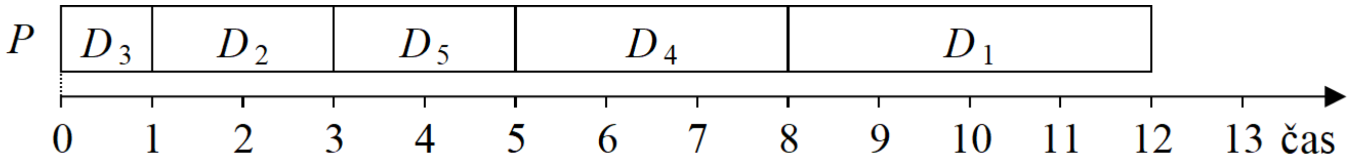
$$t_{[1]} \leq t_{[2]} \leq \cdots \leq t_{[n]}.$$

    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
t_j	4	2	1	3	2
d_j	8	3	6	9	12
w_j	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2
C_j	12	3	1	8	5
L_j	4	0	-5	-1	-7

$\bar{L}$= -1,8 hod



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||\bar{L}(w)$
    - Pro optimální rozvrh platí:

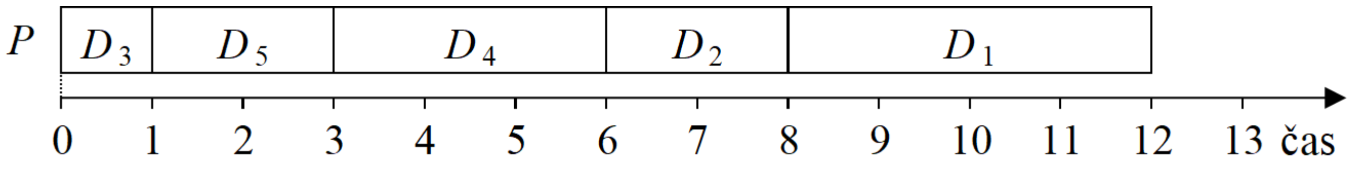
$$\frac{t_{[1]}}{w_{[1]}} \leq \frac{t_{[2]}}{w_{[2]}} \leq \cdots \leq \frac{t_{[n]}}{w_{[n]}}.$$

    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
t_j	4	2	1	3	2
d_j	8	3	6	9	12
w_j	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2
C_j	12	8	1	6	3
L_j	4	5	-5	-3	-9
$w_j L_j$	0,4	0,5	-2,0	-0,6	-1,8

$$\bar{L}(w) = \text{-3,5 hod}$$



Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||N$
    - Mooreův algoritmus (optimalizační postup)
      - Krok 1
        - Vytvoříme rozvrh ze všech dávek podle:

$$d_{[1]} \leq d_{[2]} \leq \cdots \leq d_{[n]}.$$

        - Dávky v tomto pořadí zařadíme do posloupnosti $\boldsymbol{E}$. Pro zpožděné dávky zavedeme množinu $\boldsymbol{L} = \emptyset$.
      - Krok 2
        - Jestliže posloupnost $\boldsymbol{E}$ neobsahuje žádnou zpožděnou dávku, pak posloupnost $\boldsymbol{E}$ rozšířená o dávky z množiny $\boldsymbol{L}$ (v jakémkoli pořadí dávek) tvoří optimální rozvrh $\boldsymbol{R}$.
        - Počet zpožděných dávek je $N = |\boldsymbol{L}|$, algoritmus končí.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||N$ – pokračování
    - Mooreův algoritmus – pokračování
      - Krok 3
        - V posloupnosti $\boldsymbol{E}$ najdeme první zpožděnou dávku. Nechť je to dávka $D_{[k]}$ na místě k.
        - Mezi prvními k dávkami najdeme dávku $D_{[m]}$ s největší dobou realizace $t_{[m]}$:

$$t_{[m]} = \max_{j=1,2,\dots,k} t_{[j]} \,.$$

        - Dávku $D_{[m]}$ přesuneme z posloupnosti $\boldsymbol{E}$ do množiny $\boldsymbol{L}$ a pokračujeme krokem 2.

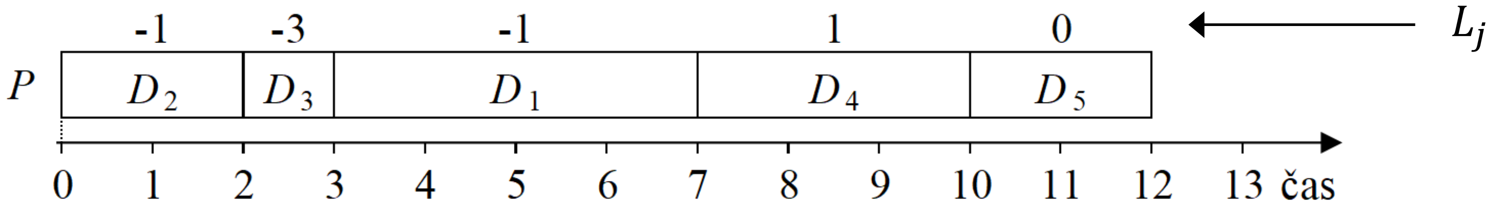
Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Základní model s jedním procesorem
  - Model $1||N$ – pokračování
    - Příklad – pokračování

$$\boldsymbol{E} = (D_2, D_3, D_1, D_4, D_5)$$

Dávka	t_j	d_j	w_j
D_1	4	8	0,1
D_2	2	3	0,1
D_3	1	6	0,4
D_4	3	9	0,2
D_5	2	12	0,2



- První (a také jediná) zpožděná dávka je D_4, která je v posloupnosti $\boldsymbol{E}$ na čtvrtém místě. Ze čtyř prvních dávek má dávka D_1 nejdelší dobu realizace, proto ji vyřadíme z posloupnosti $\boldsymbol{E}$ a zařadíme ji do množiny $\boldsymbol{L}$. Protože v upravené posloupnosti $\boldsymbol{E}$ již není žádná dávka zpožděná, algoritmus končí.

$$\boldsymbol{R} = (D_2, D_3, D_4, D_5, D_1),$$
$$N = 1.$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

ŠKODA AUTO Vysoká škola

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|r_j, prmp|\bar{T}$
    - Termíny zahájení dávek nejsou nulové (uvolnění podmínky S_1).
    - Dávky je možné přerušit.
    - Příklad
      - Uvažujme 3 dávky, u nichž známe dobu jejich realizace, nejdříve možný termín zahájení a požadovaný termín dokončení (všechny hodnoty jsou v hodinách).

Dávka	t_j	r_j	d_j
D_1	4	1	7
D_2	2	0	4
D_3	1	3	5

Modely řízení produkčních systémů

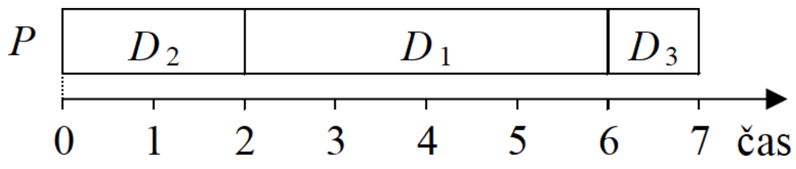
ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvrhování produkce

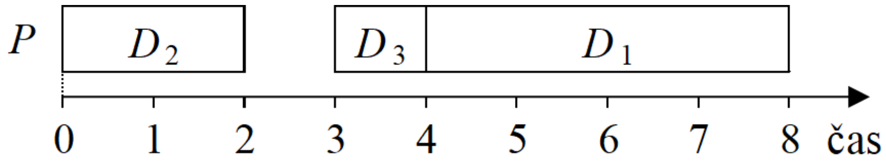
- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|r_j;prmp|\bar{T}$ – pokračování
    - Příklad – pokračování

Dávka	t_j	r_j	d_j
D_1	4	1	7
D_2	2	0	4
D_3	1	3	5

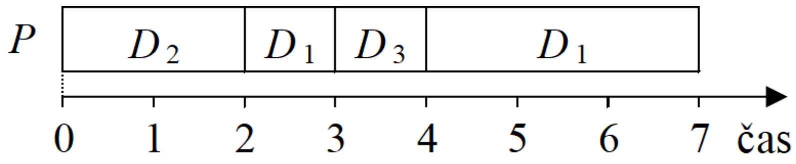
- Rozvrh bez přerušení, $\bar{T} = 2/3$ hod



- Rozvrh bez přerušení, $\bar{T} = 1/3$ hod



- Rozvrh s přerušením, $\bar{T} = 0$ hod



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|prec|T_{\max}$
    - Technologická závislost dávek vyjádřená pomocí precedenčních relací (uvolnění podmínky S_2).
    - Rozšíření Lawlerova algoritmu (optimalizační postup).
      - Krok 1
        - Vypočteme hodnotu představující celkovou dobu realizace všech dávek: $t = \sum_{j=1}^{n} t_j$.
        - Množina nezařazených dávek je $\boldsymbol{U} = \{1,2,\dots,n\}$.
      - Krok 2
        - V tomto kroku jde o nalezení dávky, která bude zařazena do rozvrhu tak, aby končila v čase t.
        - Nechť množina $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{U}$ obsahuje dávky, které nemají žádné následníky nebo jejichž následníci jsou již zařazeni v rozvrhu, tj. pro něž neexistuje taková dávka $i \in \boldsymbol{U}$, která je jejich následníkem.
        - Pro všechny dávky z množiny $\boldsymbol{V}$ pak vypočteme hodnotu $f_j = \max\left(0, t - d_j\right), j \in \boldsymbol{V}$.
        - Ze všech takto vypočtených hodnot najdeme minimální hodnotu, která odpovídá dávce k:
          $$f_k = \min_{j \in \boldsymbol{V}} f_j \, .$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|prec|T_{\max}$ – pokračování
    - Rozšíření Lawlerova algoritmu – pokračování
      - Krok 3
        - Dávku k zařadíme do rozvrhu tak, aby tato dávka končila v čase t, tj. $C_k = t$.
        - Upravíme hodnotu t a množinu dosud nezařazených dávek:

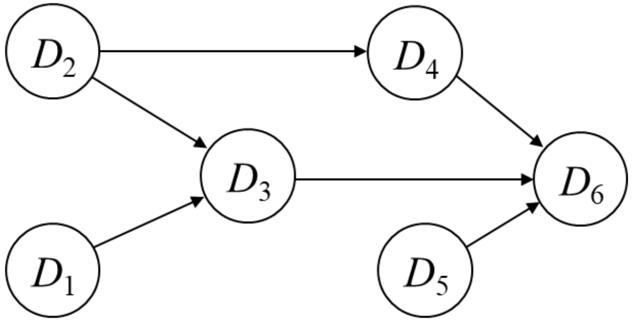
$$t = t - t_k, \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \backslash \{k\}.$$

        - Pokud $t = 0$ či také $\boldsymbol{U} = \emptyset$, pak je nalezen optimální rozvrh, jinak pokračujeme krokem 2.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|prec|T_{\max}$ – pokračování
    - Příklad
      - Máme sestavit rozvrh pro 6 dávek, daných precedenčním grafem. V tabulce jsou uvedeny doby realizace dávek a požadované termíny jejich dokončení (obě veličiny jsou v hodinách).



	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
t_j	3	2	5	4	6	7
d_j	5	8	16	12	20	25

Optimální rozvrh: $(D_2, D_1, D_4, D_3, D_5, D_6)$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
C_j	5	2	14	9	20	27
T_j	0	0	0	0	0	2

$T_{\max} = 2$ hod

Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvrhování produkce

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|s_{jk}|C_{\max}$
    - Délka zpracování dávek je závislá na jejich pořadí v rozvrhu (uvolnění podmínky S_3):

      s_{jk} doba přenastavení procesoru pro zpracování dávky k, které bezprostředně následuje po zpracování dávky j.
    - Úlohu hledání optimálního rozvrhu lze transformovat na úlohu nalezení takového pořadí dávek, které minimalizuje celkovou dobu všech realizovaných přenastavení.
    - Analogie s úlohou obchodního cestujícího, v níž vzdálenosti mezi místy odpovídají dobám přenastavení.

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } j-\text{tá dávka je realizována} \\ & \text{bezprostředně před } k-\text{tou dávkou,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} j = 1,2,\dots,n, \\ k = 1,2,\dots,n. \end{array}$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|s_{jk}|C_{\max}$ – pokračování
    - Matematický model

$$z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{jk}x_{jk} + \sum_{j=1}^{n} t_j \quad \rightarrow \quad \min,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{jk} = 1 \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jk} = 1 \qquad k = 1,2,\dots,n,$$

$$u_j + 1 - (n-1)(1 - x_{jk}) \le u_k \qquad \begin{matrix} j = 1,2,\dots,n, \\ k = 2,3,\dots,n, \end{matrix}$$

$$x_{jk} \in \{0,1\} \qquad \begin{matrix} j = 1,2,\dots,n, \\ k = 1,2,\dots,n, \end{matrix} \qquad u_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|s_{jk}|C_{\max}$ – pokračování
    - Metoda nejbližšího souseda (heuristický algoritmus)
      - Krok 1
        - Vybereme libovolnou dávku (předpokládejme, že zpracování začíná a končí dávkou 1), označme ji i. Tato dávka je zařazena jako první do vytvářeného rozvrhu, který označíme jako posloupnost $\boldsymbol{R}$. V tomto kroku je tedy $\boldsymbol{R} = (1)$.
        - Celková doba realizace všech dávek včetně přenastavení je označena t. Nastavíme $t = t_i = t_1$. Ze všech ostatních dávek vytvoříme množinu dosud nezařazených dávek $\boldsymbol{U} = \{2,3, \dots, n\}$.
      - Krok 2
        - V tomto kroku najdeme (z dosud nezařazených dávek) k dávce i jejího „nejbližšího souseda“, což je dávka k s nejnižší dobou přenastavení:

$$s_{ik} = \min_{j \in \boldsymbol{U}} s_{ij} \, .$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|s_{jk}|C_{\max}$ – pokračování
    - Metoda nejbližšího souseda
      - Krok 3
        - Dávku k zařadíme na konec posloupnosti $\boldsymbol{R}$ a vyřadíme ji z množiny $\boldsymbol{U}$. Zároveň upravíme hodnotu t a nakonec nahradíme index i indexem k:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} + (\boldsymbol{k}), \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \backslash \{k\}, t = t + s_{ik} + t_k, i = k.$$

        - Pokud je $\boldsymbol{U} = \emptyset$, pokračujeme krokem 4, jinak pokračujeme krokem 2.
      - Krok 4
        - Protože podle předpokladu celý proces končí přenastavením procesoru na dávku 1, upravíme hodnotu t následujícím způsobem:

$$t = t + s_{k1}.$$

        - Algoritmus končí, posloupnost $\boldsymbol{R}$ obsahuje přípustný rozvrh, hodnota t představuje celkovou dobu realizace všech dávek včetně příslušných dob přenastavení.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Zobecnění základního modelu s jedním procesorem
  - Model $1|s_{jk}|C_{\max}$ – pokračování
    - Příklad
      - Firma chce rozvrhnout na 1 procesor 8 dávek tak, aby byly realizovány v minimálním čase. V tabulce jsou zadány doby realizace dávek a doby přenastavení mezi jednotlivými dávkami (všechny hodnoty jsou v minutách).

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	t_j
D_1	0	15	17	12	14	18	16	10	50
D_2	12	0	13	24	20	13	15	14	40
D_3	14	18	0	15	19	11	10	17	30
D_4	13	14	17	0	18	11	16	15	50
D_5	21	17	18	17	0	15	12	12	60
D_6	12	14	13	14	20	0	16	11	20
D_7	11	22	17	19	15	14	0	13	60
D_8	10	13	17	16	13	12	15	0	40

Metoda nejbližšího souseda:
$\boldsymbol{R} = (1,8,6,3,7,5,2,4)$,
$t = 464$ min.

Optimální rozvrh:
$\boldsymbol{R} = (1,4,6,2,3,7,5,8)$,
$t = 447$ min.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m|prmp|F_{\max}$
    - V systému je m paralelně uspořádaných identických procesorů.
    - Zpracovává se n dávek, které jsou nezávislé (neexistuje mezi nimi žádná precedenční relace).
    - Nejdříve možné termíny zahájení realizace všech dávek jsou nulové.
    - Dávky je možné přerušit po dokončení právě realizované operace a pokračovat v jejím zpracování na stejném či jiném procesoru.
    - Zápis "$[i] = j$" znamená, že j – tá dávka je v daném rozvrhu zpracována na i – tém místě v pořadí.
    - Pro délku nejkratšího rozvrhu platí:

průměrná doba obsazení procesoru

doba realizace nejdelší dávky

$$F_{\max} = \max\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} t_j;\ \max_{j=1,2,\dots,n} t_j\right\}.$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m|prmp|F_{\max}$ – pokračování
    - McNaughtonův algoritmus (optimalizační postup)
      - Krok 1
        - Vypočteme hodnotu $F_{\max}$. Dávku D_1 zařadíme na procesor P_1 v čase 0.
      - Krok 2
        - Na stejný procesor přiřazujeme další dávky podle jejich pořadových čísel při respektování hodnoty $F_{\max}$.
        - Mohou nastat tři případy:

          a) Na procesor lze přiřadit všechny zbývající dávky, tj. poslední přiřazenou dávkou je dávka D_n.

          b) Poslední přiřazovaná dávka D_k je dokončena přesně v čase $F_{\max}$.

          c) Při přiřazovaní dávky D_k dojde k překročení hodnoty $F_{\max}$.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m|prmp|F_{\max}$ – pokračování
    - McNaughtonův algoritmus – pokračování
      - Krok 3
        - Dále postupujeme podle toho, který případ v předchozím kroku nastal:

          a) Všechny dávky jsou rozvrženy, algoritmus končí.

          b) Na další procesor přiřadíme dávku D_{k+1} v čase 0 a pokračujeme krokem 2.

          c) Rozdělíme dávku D_k tak, že její první část bude dokončena na rozvrhovaném procesoru v čase $F_{\max}$ a její zbývající část přiřadíme na další procesor v čase 0, pokračujeme krokem 2.

      - Uvedeným postupem může dojít maximálně k $m-1$ přerušením.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

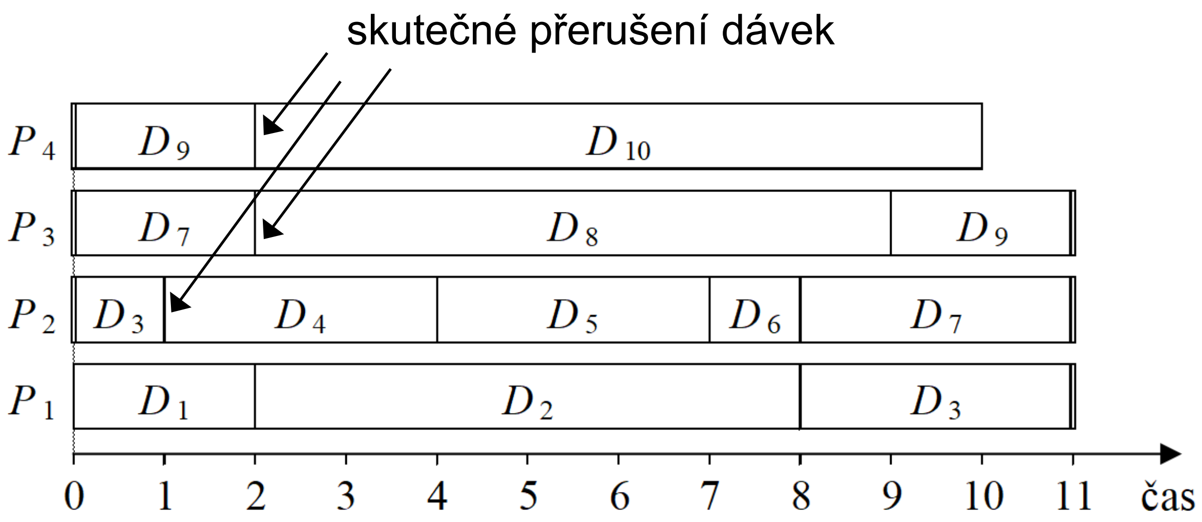
- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m|prmp|F_{\max}$ – pokračování
    - Příklad
      - Úkolem je rozvrhnout 10 dávek na 4 procesory tak, aby byly realizovány v minimálním čase, tj. aby nejdelší pobyt dávky v produkčním systému byl minimální. V tabulce jsou zadány doby realizace dávek (v min). Operace, které tvoří jednotlivé dávky, mají dobu trvání 1 min, tudíž je možné všechny dávky přerušit kdykoli po každé minutě jejich realizace.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
t_j	2	6	4	3	3	1	5	7	4	8

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m|prmp|F_{\max}$ – pokračování
    - Příklad – pokračování
      - Vypočteme $F_{\max} = \max\left\{\frac{43}{4}; 8\right\} = \frac{43}{4}$
      - Protože dávky lze přerušit až po dokončení právě prováděné operace, je nutné z hodnoty 43/4 vypočítat horní celou část, tedy 11 min.



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m|prmp|F_{\max}$ – pokračování
    - Matematický model pro získání rozvrhu bez přerušení dávek (pokud existuje)

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } j - \text{tá dávka je realizována} \\ & \text{na } i - \text{tém procesoru,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,m, \\ j = 1,2,\dots,n. \end{array}$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \rightarrow \max,$$

Účelová funkce není nutná, jde o to najít přípustný rozvrh.

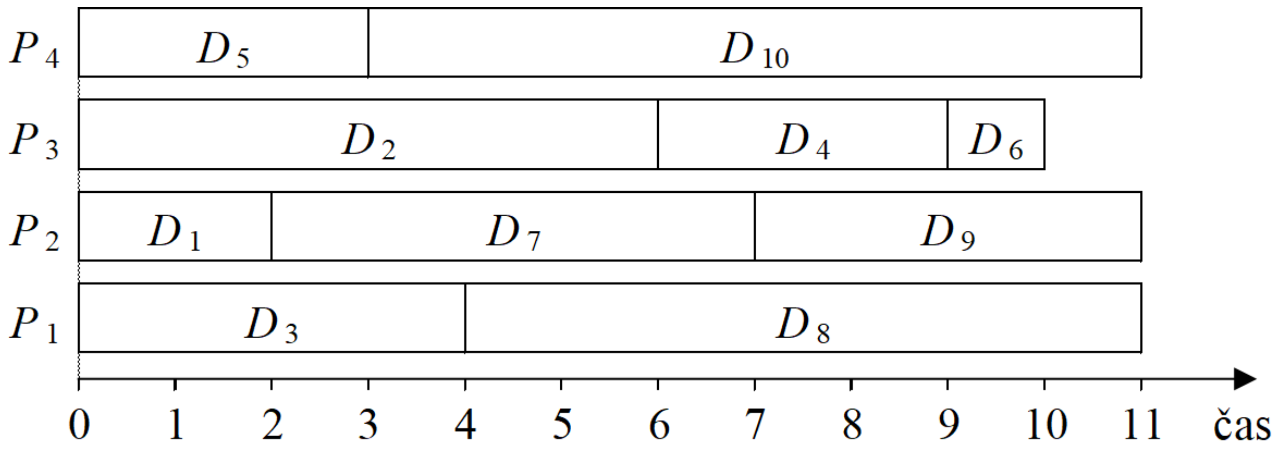
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} t_j \leq F_{\max} \qquad i = 1,2,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m|prmp|F_{\max}$ – pokračování
    - Příklad – pokračování



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m||F_{\max}$
    - Dávky není možné přerušit.
    - Zobecnění matematického modelu formulovaného pro model $P_m|prmp|F_{\max}$:
      - $F_{\max}$ je proměnnou nikoli vypočtenou konstantou, je nutné nastavit podmínky celočíselnosti (vzhledem k nepřerušitelnosti operací v dávce).
      - Účelová funkce je $z = F_{max} \rightarrow \min.$
      - Dávky není možné přerušit.
    - NP–obtížná úloha.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

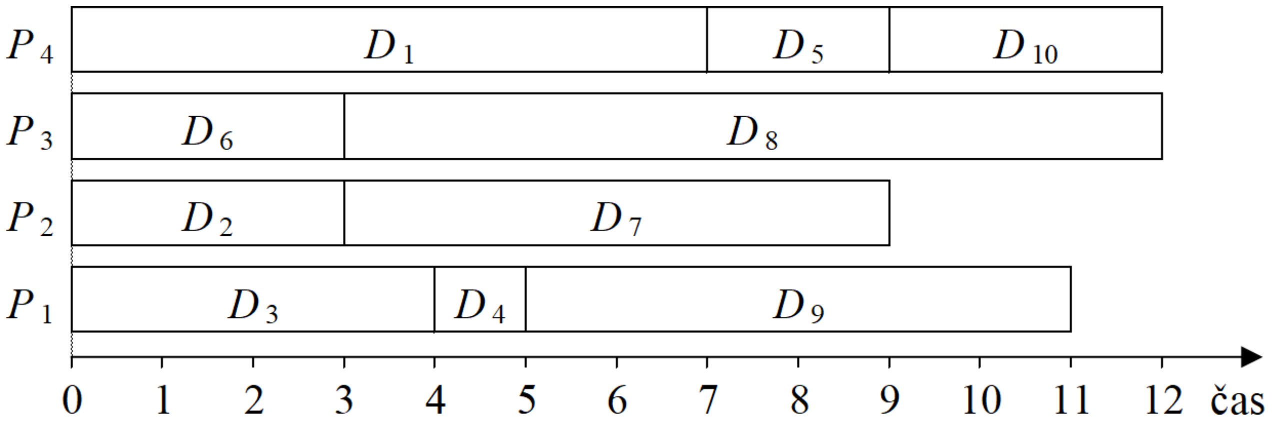
- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m||F_{\max}$ – pokračování
    - Příklad
      - Úkolem je rozvrhnout 10 dávek na 4 procesory tak, aby byly realizovány v minimálním čase, tj. aby nejdelší pobyt dávky v produkčním systému byl minimální. V tabulce jsou zadány doby realizace dávek (v min), dávky není možné přerušit. Operace, které tvoří jednotlivé dávky, mají dobu trvání 1 min.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
t_j	7	3	4	1	2	3	6	9	6	3

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m||F_{\max}$ – pokračování
    - Příklad – pokračování



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m||F_{\max}$ – pokračování
    - Heuristický algoritmus:
      - Krok 1
        - Vytvoříme následující pořadí dávek:

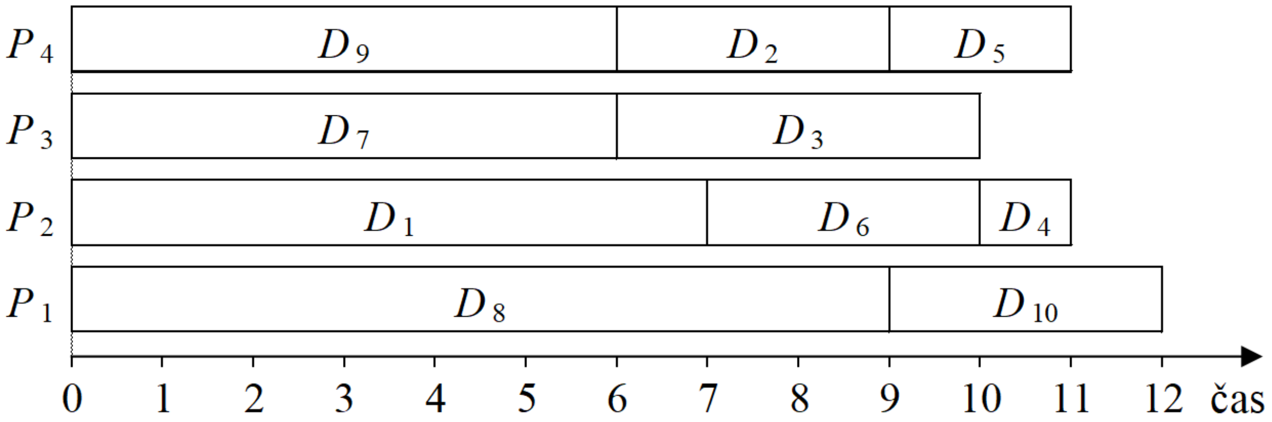
$$t_{[1]} \geq t_{[2]} \geq \cdots \geq t_{[n]}.$$

      - Krok 2
        - Vybereme prvních m dávek v pořadí z kroku 1 a zařadíme je na procesory v čase 0.
      - Krok 3
        - Vybereme další dávku v pořadí a zařadíme ji za poslední dávku na procesor, který se nejdříve uvolní, tj. za dávku, která ze všech posledních dávek na procesorech končí nejdříve.
        - Tento postup opakujeme, dokud nejsou rozvrženy všechny dávky.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
    - Model $P_m||F_{\max}$ – pokračování
        - Příklad – pokračování



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m||\bar{F}$
    - Stejný princip jako optimalizační postup pro model $1||\bar{F}$:
      - Krok 1
        - Vytvoříme následující pořadí dávek:

$$t_{[1]} \leq t_{[2]} \leq \cdots \leq t_{[n]}.$$

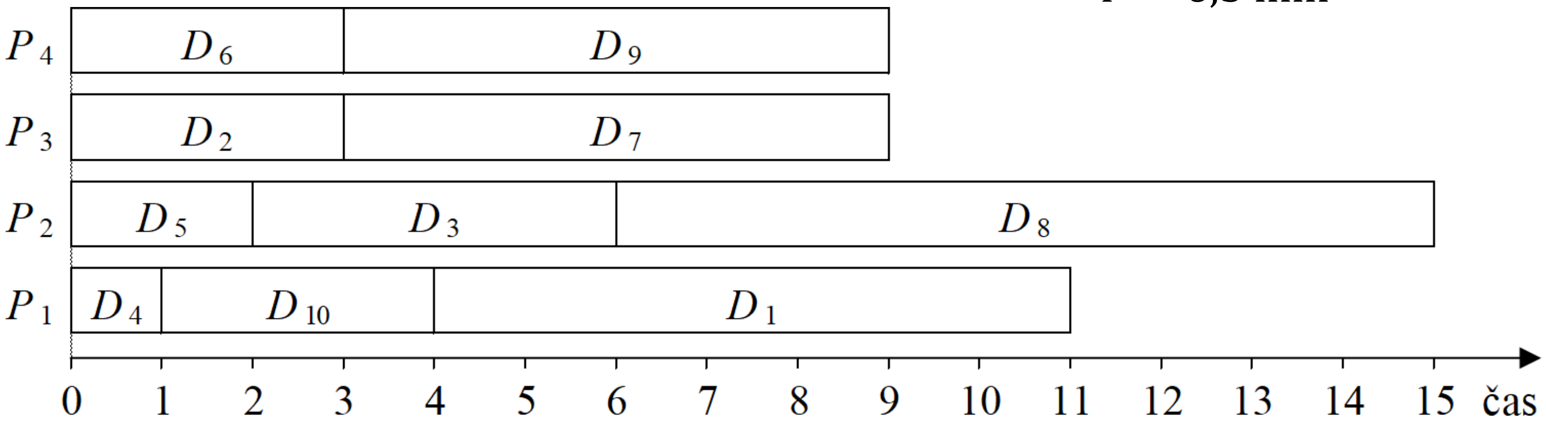
      - Krok 2
        - Vybereme prvních m dávek v pořadí z kroku 1 a zařadíme je na procesory v čase 0.
      - Krok 3
        - Vybereme další dávku v pořadí a zařadíme ji za poslední dávku na procesor, který se nejdříve uvolní, tj. za dávku, která ze všech posledních dávek na procesorech končí nejdříve.
        - Tento postup opakujeme, dokud nejsou rozvrženy všechny dávky.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely s paralelními procesory
  - Model $P_m||\bar{F}$ – pokračování
    - Příklad – pokračování

$\bar{F} = 6{,}3$ min



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely se sériově řazenými procesory
  - Model $F_m||C_{\max}$
    - V systému je m sériově uspořádaných procesorů.
    - Zpracovává se n dávek, všechny se skládají z m operací, každá z nich probíhá na jednom procesoru.
    - Dávky musí procházet procesory ve stejném pořadí, tj. i – tá operace každé dávky probíhá na i – tém procesoru.
    - Doba realizace i – té operace j – té dávky je označena t_{ij}.
    - Žádný procesor nemůže současně zpracovávat víc než jednu dávku a žádná dávka nemůže být současně zpracovávána na více procesorech.

Modely řízení produkčních systémů

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Rozvrhování produkce

- Modely se sériově řazenými procesory
  - Model $F_m||C_{\max}$ – pokračování
    - Podmínky:
      - S_1 : všechny dávky a procesory jsou dostupné od okamžiku 0.
      - S_2 : dávky jsou vzájemně nezávislé, neexistuje mezi nimi precedenční relace.
      - S_3 : doby trvání operací t_{ij} jsou nezávislé na pořadí jejich realizace na procesoru.
      - S_4 : operace nelze přerušovat.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely se sériově řazenými procesory
    - Model $F_m||C_{\max}$ – pokračování
        - Příklad
            - Sestavme přípustný rozvrh pro 5 dávek, které je nutné rozvrhnout na 3 sériově řazené procesory. Tabulka obsahuje doby realizace dávek (v min) na jednotlivých procesorech.

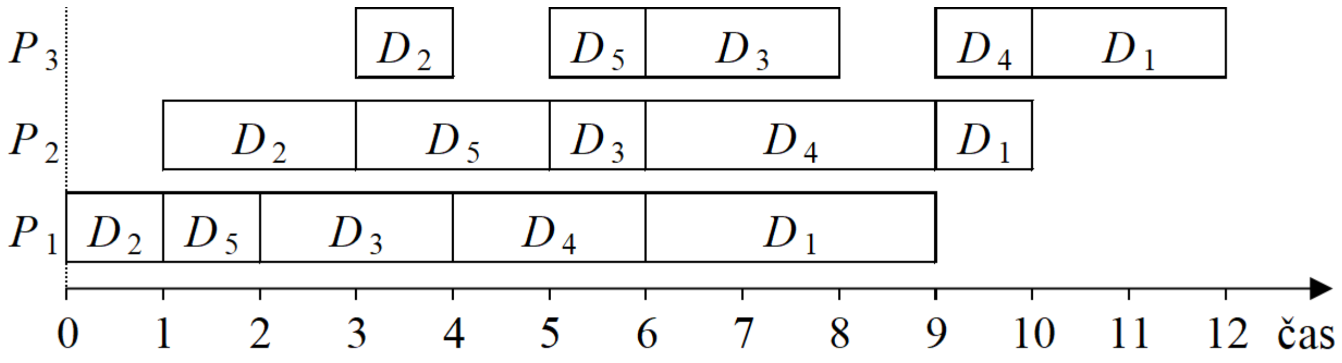
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
t_{1j}	3	1	2	2	1
t_{2j}	1	2	1	3	2
t_{3j}	2	1	2	1	1

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely se sériově řazenými procesory
  - Model $F_m||C_{\max}$ – pokračování
    - Příklad – pokračování
      - Přípustný rozvrh:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
t_{1j}	3	1	2	2	1
t_{2j}	1	2	1	3	2
t_{3j}	2	1	2	1	1



Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely se sériově řazenými procesory
  - Model $F_m||C_{\max}$ – pokračování
    - Johnsonův algoritmus (optimalizační) pro úlohu se 2 procesory
      - Krok 1
        - Množinu dávek rozdělíme do dvou podmnožin:

$$\boldsymbol{U} = \left\{D_j \,\middle|\, t_{1j} < t_{2j}\right\}, \qquad \boldsymbol{V} = \left\{D_j \,\middle|\, t_{1j} \geq t_{2j}\right\}.$$

      - Krok 2
        - Dávky v množině $\boldsymbol{U}$ uspořádáme podle neklesající posloupnosti dob realizace operací t_{1j} do posloupnosti $(\boldsymbol{U})$. Dávky v množině $\boldsymbol{V}$ uspořádáme podle nerostoucí posloupnosti dob realizace operací t_{2j} do posloupnosti $(\boldsymbol{V})$.
      - Krok 3
        - Optimální pořadí dávek $(\boldsymbol{R})$ na obou procesorech tvoří posloupnost dávek $(\boldsymbol{U})$ s následnou posloupností $(\boldsymbol{V})$. Hodnota $C_{\max}$ je dána termínem dokončení poslední dávky v posloupnosti $(\boldsymbol{V})$ na druhém procesoru.

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

- Modely se sériově řazenými procesory
  - Model $F_m||C_{\max}$ – pokračování
    - Příklad
      - Nechť je dáno 6 dávek, které je nutné rozvrhnout na 2 sériově řazené procesory. V tabulce jsou zadány doby realizace dávek (v min) na obou procesorech. Cílem je minimalizovat čas dokončení všech dávek.

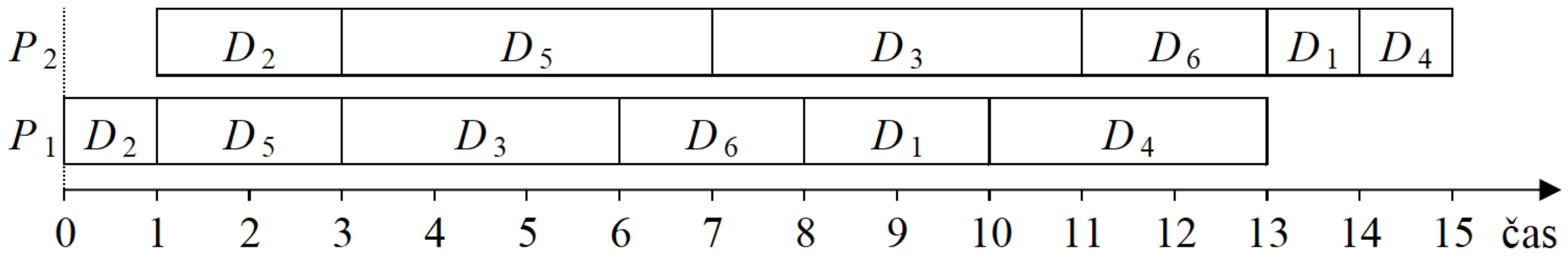
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
t_{1j}	2	1	3	3	2	2
t_{2j}	1	2	4	1	4	2

Modely řízení produkčních systémů

Rozvrhování produkce

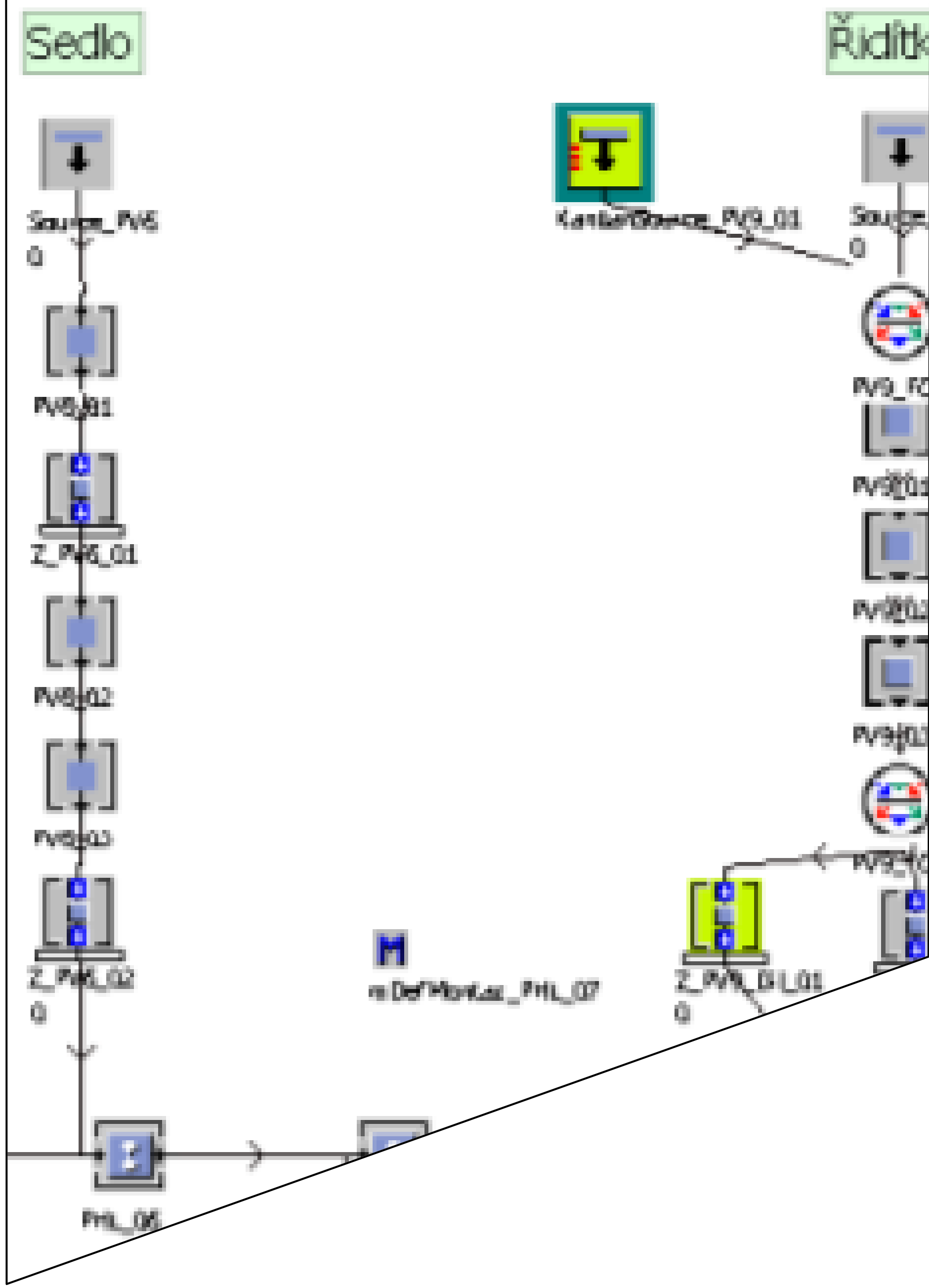
- Modely se sériově řazenými procesory
  - Model $F_m||C_{\max}$ – pokračování
    - Příklad – pokračování
      - Krok 1 $\boldsymbol{U} = \{D_2, D_3, D_5\}$, $\boldsymbol{V} = \{D_1, D_4, D_6\}$.
      - Krok 2 $(\boldsymbol{U}) = (D_2, D_5, D_3)$, $(\boldsymbol{V}) = (D_6, D_1, D_4)$.
      - Krok 3 $(\boldsymbol{R}) = (D_2, D_5, D_3, D_6, D_1, D_4)$, $C_{\max} = 15$.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
t_{1j}	2	1	3	3	2	2
t_{2j}	1	2	4	1	4	2



4

Počítačová simulace



Počítačová simulace

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úvod do počítačové simulace

- Definice
    - Zobrazení reálného (ale i plánovaného, dosud neexistujícího) systému s jeho stochastickými a dynamickými procesy ve formě simulačního modelu.
    - Základní myšlenkou je napodobit chování reálného systému prostřednictvím simulačního modelu a na základě experimentování s tímto modelem navrhnout změny, které fungování systému zlepší.
- Oblasti uplatnění simulace
    - Optimalizace rozsáhlých produkčních systémů.
    - Analýza logistických procesů uvnitř podniku či celého dodavatelského řetězce.
    - Optimalizace skladovacích procesů.
    - Optimalizace rozvrhování výroby.
    - Zlepšení fungování komunikačních systémů, optimalizace informačních toků.

Počítačová simulace

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úvod do počítačové simulace

- Náklady spojené s počítačovou simulací
  - Personální náklady na kvalifikovaného analytika a programátora.
  - Náklady související s časem manažerů věnovaným komunikaci s analytikem v průběhu řešení projektu.
  - Náklady na výkonnou výpočetní techniku (HW).
  - Náklady na programové vybavení (SW).
  - Náklady na sběr dat.

Počítačová simulace

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Úvod do počítačové simulace

- Simulační projekt
  - Rozpoznání problému a stanovení cílů.
  - Tvorba konceptuálního modelu (KM).
  - Sběr dat a jejich analýza.
  - Tvorba simulačního modelu (SM).
  - Verifikace a validace modelu (ověření toho, zda SM je v souladu s původním KM a zda je SM ve shodě s realitou).
  - Provádění experimentů.
  - Analýza výsledků.
  - Vytvoření dokumentace projektu.
  - Implementace výsledků.

Počítačová simulace

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Analýza dat

- Základní analytické nástroje
  - *Tabulky* (běžná, šachovnicová – vztahy mezi objekty, kontingenční – vztahy dvou statistických znaků aj.).
  - *Diagramy* (Sankeyův diagram – intenzita materiálového toku, P–Q diagram – souvislost produktů a velikosti produkce).
  - *Grafy* (bodový, spojnicový, sloupcový, výsečový atd.).
  - *Schémata* (vazby mezi oblastmi společnosti, dispoziční řešení, návaznost procesů).
- Obecné metody zpracování dat
  - *Seskupování* – cílem je roztřídit data do skupin tak, aby prvky každé skupiny sdílely společný atribut (typ automobilu, typ karosérie, barva).
  - *Filtrování* – omezení skupiny výsledků pouze na prvky, které splňují zadané podmínky (jednoduché filtry, vícestupňové filtry).
  - *Řazení* – třídění dat podle hodnot jednoho či více atributů (tzv. klíč), výsledkem je pořadí prvků.
  - *Párování* – spojování informací (hodnot znaků) z několika databází či seznamů získaných např. na základě průchodu produktů jednotlivými evidenčními body.

Počítačová simulace

Analýza dat

- Software
    - Access, Excel, SAS, SPSS, Gretl, Statgraphics, MATLAB, R.
- Statistická analýza dat
    - *Náhodný pokus* – je pokus, který může být opakován a jehož výsledek není znám předem.
    - *Náhodná veličina* – proměnná, jejíž hodnota je dána výsledkem náhodného pokusu (diskrétní, spojitá).
    - *Náhodný jev* – výsledek náhodného pokusu vyjádřený hodnotou náhodné veličiny.
    - *Pravděpodobnost náhodného jevu* – číselné vyjádření míry možnosti nastoupení náhodného jevu.
    - *Pravděpodobnostní rozdělení* – pravidlo, jež každé hodnotě nebo intervalu hodnot přiřadí pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty nebo hodnoty z tohoto intervalu.

Počítačová simulace

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Analýza dat

- Statistická analýza dat
  - *Náhodné číslo* je definováno jako hodnota rovnoměrného pravděpodobnostního rozdělení na intervalu (0, 1). Pro generování náhodných čísel je vyvinuta celá řada generátorů, z nichž nejpoužívanějšími jsou aritmetické generátory. Náhodná čísla se získávají tak, že každé číslo se vypočítá za pomoci určité aritmetické operace z čísla předchozího. Protože jde o aritmetický výpočet, a nikoliv o náhodu, lze čísla takto získaná označit pouze za čísla pseudonáhodná. Vygenerovaná náhodná čísla jsou pak transformována pomocí různých metod na hodnoty náhodných veličin.
  - *Metoda inverzní transformace* je jednou z metod, která se používá pro převedení náhodného čísla r na hodnoty náhodné veličiny X. Příklad pro hodnoty rovnoměrného pravděpodobnostního rozdělení na intervalu (a, b):

$F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ distribuční funkce na intervalu (a, b),

$r = \dfrac{x-a}{b-a}$ náhodné číslo,

$x = a + r(b-a)$ hodnota náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením.

ŠKODA AUTO Vysoká škola

Děkuji za pozornost

Jan Fábry

Katedra řízení výroby, logistiky a kvality

fabry@savs.cz www.janfabry.cz

www.savs.cz