Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

8 JCRME

כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי

כנס ירושלים השמיני למחקר בחינוך מתמטי

ספר מאמרי הכנס

עורכות: רונית בסן-צינציגטוס, רותי סגל, נעמי חן-חדד

תוכן עניינים

דיווח על ממצאי מחקר

קבוצות דיון

מיצגים

דבר יושבות הראש

“Educating the mind without educating the heart is no education at all”
אריסטו – פילוסוף, המאה הרביעית לפני הספירה

שלום לחברי קהילת החינוך המתמטי,

אנו שמחות לברך את באי כנס ירושלים השמיני למחקר בחינוך מתמטי.

זו מסורת של שמונה שנים שאנו – כל העוסקים בקידום החינוך המתמטי בישראל, נפגשים על מנת לשתף זה את זה במחקרים, הרהורים, תובנות ורעיונות פרי עמל של מחקר ויצירה. השיתוף מאפשר ומזמן לנו לגלות תחומי מחקר חדשים ולהכיר מקרוב את העוסקים במחקר ובחינוך מתמטי הלכה למעשה.

השנה בכנס יציגו 127 חוקרים בהצגות שונות ממגוון רחב של מוסדות אקדמיים בארץ. במסגרת הכנס יוצגו ארבע הרצאות מליאה, 32 – דיווחים על ממצאי מחקר, 24 - במתכונת של שיח סביב מחקרים, 9 - מיצגים ו 5 - קבוצות דיון.

למשימת השיפוט נרתמו 53 שופטים העוסקים במחקר בחינוך מתמטי מ- 22 מוסדות אקדמיים שונים ברחבי הארץ.

מתוך סקירה של כלל ההצעות זיהינו קווים משותפים בנושאים כמו: תפיסות מורים, הכשרת פרחי הוראה, סוגיות בחינוך מתמטי בגיל הרך, בבית הספר היסודי והעל יסודי, התפתחות מקצועית של מורים, שילוב טכנולוגיה ואומנות בהוראה ובמחקר, שימוש בשיח ובהצדקות מתמטיות בתהליכי הלמידה וההוראה, האתגר והתרומה של שילוב תכנים מעבר לתוכ"ל.

השנה במסגרת המושב של שיח מחקרים יוצגו מחקרים בהתהוות ו/או מחקרים הנמצאים בשלב מחקרי מתקדם יותר, תוך שימת דגש על השיח סביב המחקרים כמנוף לתהליך שיתוף ולמידה.

בכנס יוצגו 5 קבוצות דיון בנושאים: בעיות מאתגרות במתמטיקה - שימוש בפדגוגיות חדשניות לשילובן בתיכון, אירועים קריטיים בהכשרת מורים למתמטיקה - הגדרתם והאפשרויות הטמונות בשימוש בהן, פרקטלים - ממתמטיקה אל טכנולוגיה בחינוך, ייצוגי הוראה והזדמנויות הלמידה שהם מזמנים למורים וסוגיות מרכזיות בחינוך מתמטי לעשור הקרוב.

ההצעות לכנס מגוונות ומזמנות שיח מעמיק ופורה בנושאים מחקריים שונים. אנו בטוחות שכל אחד מכם ימצא במגוון הנושאים הרחב את הנושאים הקרובים לליבו. בספר שלפניכם תוכלו לקרוא על כל אחת מההצגות שיתקיימו במסגרת הכנס.

ולסיום, התודות:

תודה מקרב לב למרכז האקדמי לב על הכנסת האורחים החמה מיום היווסדותו של הכנס, ובמיוחד לפרופ' נח דנא-פיקארד, לפרופ' קנת הוכברג וליעקב קולטקר.

תודה למוסדות אשר תמכו בכנס וסייעו להוציאו לפועל : אוניברסיטת בר אילן, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, מט"ח – המרכז לטכנולוגיה חינוכית, מכון ויצמן למדע, סמינר הקיבוצים המכללה לחנוך לטכנולוגיה ולאומנויות ושאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

תודה לכל מי ששפט את ההצעות שהוגשו לכנס, תודה למציגים בכנס, ותודה לכולכם על ההשתתפות בו.

תודה ענקית לנעמי חן-חדד, המלווה את הכנס בפעם הראשונה, ומנצחת במקצועיות על כל ההיבטים הארגוניים וכל התיאומים במהלך תכנון וארגון הכנס כמו גם במהלך הכנס עצמו.

וכמובן, תודה לכל חברי ועדת התכנית – ברכה, בועז, תקווה ויניב על שותפות מקצועית בכל השלבים.

אנו מאחלות לכולנו, מפגש חווייתי, פורה, מעניין, מעורר סקרנות, שיתופי פעולה עתידיים ויצירת קשרים חדשים להמשך הדרך.

בברכה,

רונית בסן צינצינטוס, רותי סגל - יו"ר הכנס

חברי ועדת התכנית (לפי סדר הא"ב)

ד"ר יניב ביטון, מט"ח ומכללת שאנן
ד"ר בועז זילברמן, הטכניון
ד"ר תקוה עובדיה, מכללת אורנים ומכללת ירושלים
פרופ' ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר-אילן

חברי הוועדה המארגנת (לפי סדר הא"ב)

פרופ' נח דנא-פיקראד, המרכז האקדמי לב
נעמי חן-חדד, מכללת אורנים ומכללת סמינר הקיבוצים
יעקב קולטקר, המרכז האקדמי לב

- ניסוח המאמרים בספר הכנס הינו באחריות המציגים. לא נעשתה עריכה לשונית.

רשימת שופטי הכנס (לפי סדר הא"ב)

אבישר תמרה
אבן רוחמה
איילון מיכל
אילני בת שבע
ביטון יניב
בסן צינצינטוס רונית
ברקאי רותי
גבל מיקה
גלעד שוש
דורפברגר שושי
דנא פיקארד נח
דרייפוס טומי
הד מצויינים עינת
הופמן אנה
הרשקוביץ רנה
הרשקוביץ שרה
וידר מירלה
וייסמן שולה
זילברמן בועז
חאג' יחיא איחסאן
טבח מיכל
כהן דורית
כהן זהבית
לבנברג אילנה
לוינסון אסתר
לפקורט תמרה
מובשוביץ-הדר נצה
מרקו נדב
מרקוביץ צביה
נגרי-חדיף גלית
נוטוב ליאורה
נוריק יעל
נחליאלי טלי
סגל רותי
סגרה סבינה
סווידאן אוסמה
סטופל משה
סיניצקי איליה
עובדיה תקוה
פטקין דורית
פינטו אלון
פלטניק אליק
צוהר רוזן מירב
קויצ'ו בוריס
קופר ג'ייסון
קרמרסקי ברכה
קרסנטי רוני
רון עזרא מאיה
רותם סיגל
שוורץ גיל
שיר קרני
שרייבר איריס
שריקי עטרה

Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

8 JCRME

כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי

לתכנית הכנס לחץ כאן >>

הרצאות מליאה

מצויינות ושוויון בחינוך – הילכו השניים יחדיו?

אלי הורביץ- מנכ"ל קרן טראמפ

יש משהו עקום ביחס שלנו לפערים בחינוך, עד כדי שנדמה שאנחנו לא באמת מאמינים שנוכל לצמצם אותם. צמצום פערים נתפס אצלנו כלעזור לחלשים ביותר להגיע לרף בסיסי של הישגים. לכן לפריפריה הצענו תמיד להסתפק רק בזכאות לבגרות בעוד שאת החזקים במרכז כיוונו לחמש יחידות. כך יצא שבלי להתכוון גרמנו לכך שדווקא מי שאין להם דרכי קיצור בחיים, לא קיבלו הזדמנות אמתית.

הפריפריה התעוררה מאוחר והמשיכה לעבוד על הנוסחה הקודמת. במשך שנים כולם רדפו אחרי הזכאות לבגרות, כי זה מה שהבטיח כניסה להשכלה גבוהה, לעבודה טובה ולאיכות חיים נוחה. אבל מבלי ששמו לב, הפערים עלו כיתה, ומזכאות הם עברו לאיכות. היום בישראל יש יתרון למי שסיים תיכון עם תעודת בגרות איכותית שכוללת חמש יחידות באנגלית, במתמטיקה ובמקצוע מדעי.

הסיבה היא ששוק העבודה מוצף באקדמאים ולכן המעסיקים יכולים להציע את המשרות הנחשקות רק לבוגרים של הפקולטות הנחשבות באוניברסיטאות המחקר. כתוצאה מכך יש היום אקדמאי שמרוויח כמה עשרות אלפי שקלים בחודש ויש שמכניס אלפים בודדים. לשניהם אנחנו קוראים 'מעמד ביניים', אבל האחד יקנה דירה והשני יתקשה לגמור את החודש.

כדי להבין מה קורה פה, צריך להבין את הסיפור הישראלי המיוחד. בישראל יש 'צינור מצוינות', שלא קיים במדינות אחרות. אצלנו, מי שלומד בכיתת מצוינות בחטיבת הביניים, מומלץ לחמש יחידות במתמטיקה ופיזיקה בתיכון, מאותר ל-8200, מתקבל ללימודי הנדסה או מחשבים, ומשם דרכו סלולה אל הסטארטאפ ניישן. במילים אחרות, העתיד מתחיל בחטיבת הביניים.

הבעיה היא שצינור המצוינות הזה שלנו צר מדי. קוטרו עומד על תשעה אחוזים בלבד. תשעה אחוזים מצטיינים במבחני פיז"ה במתמטיקה, כ-9% לומדים הנדסה באוניברסיטאות, ו-9% מהשכירים עובדים בתעשיית ההייטק הישראלית. הצינור הזה צר מדי והומוגני מדי, הוא מורכב בעיקר מגברים, יהודים, המתגוררים במרכז הארץ.

מהפכת חמש היחידות מוכיחה שהמצב הזה הוא לא גזירת גורל. בשנת 2019 ניגשו לבגרות במתמטיקה ברמת חמש יחידות כ-17% מבוגרי יב', כשמחציתם הן תלמידות, ורבים מהם הגיעו מהפריפריה החברתית ומבתי ספר ערביים. פריצת הדרך הזו יוצרת כעת 'לחץ בצנרת'. בעוד שנים ספורות הם יבואו בשערי הפקולטות להנדסה באוניברסיטאות ויבקשו להיכנס.

עבור מערכת החינוך, הזרקור פונה כעת אל חטיבת הביניים. כיום זו חוליה חלשה שבה נפערים פערים גדולים וילדים רבים הולכים בה לאיבוד. אבל, אם נפעל ברצינות ביחד, נעלה את רמת ההוראה והלמידה לדרגות גבוהות יותר של עומק, חשיבה ויישום, נוכל להרחיב ולגוון את מעגל המצוינות שלנו. כך ישראל תהיה לא רק למדינה משגשגת מבחינה כלכלית, אלא גם לחברה צודקת והוגנת יותר.

האם לימודים גבוהים במתמטיקה רלוונטיים ותורמים להוראה בבתי הספר?

ד"ר אלון פינטו, מכון ויצמן למדע

במדינות רבות, לימודים גבוהים במתמטיקה הם נדבך חשוב בהכשרה ובפיתוח המקצועי של מורים. מורים נדרשים ללמוד קורסים רבים של מתמטיקה על תיכונית או אף להשלים תואר במתמטיקה. בישראל, דרישות ברוח זו קיבלו משנה תוקף ב-2012 בהמלצות ועדת גוטפרוינד. המלצות דומות נכתבו בשנים האחרונות במדינות נוספות. מכך ניתן להסיק שהמקום המרכזי של מתמטיקה גבוהה בהכשרה ובפיתוח המקצועי של מורים אינו תוצאה של מסורת, אלא מייצג את עמדת הקהילייה שלימודים גבוהים במתמטיקה תורמים למורים ולשיפור איכות ההוראה בבתי הספר. עמדה זו נתמכה במשך השנים במאמרים תיאורטיים רבים, אך לא במחקר אמפירי. בעשור האחרון עמדה זו נבחנת מחדש לאור הצטברות עדויות אמפיריות המצביעות על כך שלימודים גבוהים במתמטיקה אינם משפיעים כמצופה על החינוך המתמטי הבית-ספרי. מהי הרלוונטיות של מתמטיקה גבוהה להוראה הבית-ספרית, וכיצד ניתן להביא את הרלוונטיות הזו לידי ביטוי בהכשרה ובפיתוח מקצועי של מורים, ובהוראה בבתי הספר? בהרצאה אבחן סוגיות אלו דרך תובנות שהצטברו בספרות המחקרית, ודרך בעיות ופעילויות שפותחו בעולם ואצלנו עבור מורי יסודי, חטיבה או תיכון המדגימות כיצד מתמטיקה גבוהה עשויה לתרום למורים בהתמודדות עם אתגרים פדגוגיים שונים.

מדע ואמונה במנהרת הזמן ולאור התגליות המדעיות החדשות

פרופ' משה קוה , אוניברסיטת בר-אילן

המתח בין מדע ואמונה הוא עתיק יומין ובמנהרת הזמן נראה שהמדע עבר כמה מהפכות מחשבתיות דרמטיות וכתוצאה מכך קירבו אותו לתפישת עולמה של היהדות על הממשק של מדע ואמונה.

התגליות המדעיות המרתקות של השנים האחרונות על תחילת ומבנה היקום,מאירים באור חדש את תפישת עולמנו על היקום וראשיתו.נראה שהממצאים המדעיים החדשים מהווים פרשנות חדשה לפסוקי הבריאה בפרשת בראשית.

הרחבת המודעות המקצועית של המורה - זה לא עניין לפסיכולוגים

פרופ' ירון להבי, מכון ויצמן למדע - רחובות, מכללת דוד ילין – ירושלים

באופן מסורתי, ההתפתחות המקצועית של מורים מתרחשת ונבחנת במרחב האינטראקציות מורה-תלמיד .(Guskey, 2003) אולם, החלק ההולך וגדל של אינטראקציות בין מורים למורים סביב ההוראה, מזמין להתייחס להתפתחות המקצועית של מורים גם כשותפים להתפתחות המקצועית של עמיתיהם. מתוך גישה זו פותחה התכנית "וידקטיקה" (וידאו-דידקטיקה) שמטרתה לקדם שיח מקצועי מונע סקרנות (curiosity-driven discourse) בין מורים הממוקד בתוכן ומיועד לצורך התפתחותם המקצועית. על חשיבות התוכן בהכשרה המקצועית של מורים עמד כבר האטי (Hattie, 2012) חיזוק לכך מצאנו גם אנחנו באופן אמפירי במחקרים שליוו (ומלווים) את תכנית וידקטיקה. כך למשל, מממצאי המחקר שלנו שנערך בקרב מורים למתמטיקה לפיזיקה עולה ששיח וידקטי חקרני-סקרני המבוסס על צפייה בוידאו מעלה באופן דרמטי את המודעות לסוגיות ממוקדות תוכן לעומת סוגיות הממוקדות בפדגוגיה כללית.

ממצאים אלה הביאו אותנו לחקור את הרחבת המודעות המקצועית של מורים כגורם המאפיין את התפתחותם המקצועית. המחקר נערך על ידי צוות הכולל גם חוקרים מהאוניברסיטה העברית וממכללת אורנים. המודל התיאורטי אותו אנו חוקרים הוא פיתוח שלנו של המודל של מייסון (Mason, 2013) לרמות המודעות המקצועית של מורים והוא מתייחס גם לנקודות המפנה (Turning Points) המצביעות על עליה בין רמות אלה. ההרצאה תישא אופי אינטראקטיבי ותשלב צפייה באפיזודות של הוראה ושל שיח וידקטי בין מורים. כמו כן, נדון בהשלכות אפשריות של תוצאות המחקר על תכניות שונות של הכשרת מורים ועל הזהות המקצועית של מורים.

שיח סביב מחקרים

משחקים בשיעורי המתמטיקה בכיתה ט': הזדמנויות ללמידה בהסתכלות קומוגניטיבית

פאולה לוי, הטכניון- מכון טכנולוגי לישראל
טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך

הקדמה ורקע תיאורטי

מחקר זה עוסק בהזדמנויות ללמידה שעולות במהלך שיעורי מתמטיקה הכוללים משחקים מתמטיים, בקרב תלמידי כיתה ט'. מחקר זה מגדיר משחק מתמטי בעזרת סינתזה של הגדרותיהם של Telfer & Cruickshank (1980) ושל Gough (1999), *כאינטראקציה תחרותית המבוססת על עקרונות מתמטיים. אינטראקציה זו כוללת לכל הפחות שני שחקנים המחוייבים לאותה מערכת חוקים והם חופשיים לבחור את האסטרטגיה והמהלכים שלהם על בסיס ידע מתמטי ומזל*. המשחק המתמטי נולד כדרך לגוון את דרכי ההוראה בדרך ללמידה משמעותית בחינוך המתמטי בחטיבות הביניים.

המסגרת המושגית כמו גם המתודולוגיה במחקר זה מתבססים על הגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) המגדירה למידת מתמטיקה כשינוי בשיח של הלומד. מחקר זה מתמקד ברוטינה כאחד ממאפייני השיח המשתנים. הרוטינה הינה דפוס פעולה בתגובה לסיטואציה שהמבצע רואה כמוכרת מהעבר. לביא, שטיינר וספרד (Lavie, Steiner & Sfard, 2019) מציעות שניתן לראות למידה כתהליך של רוטיניזציה של פעולות הלומד. רוטיניזציה הינה התהליך שבו היחיד מאמץ והופך לשלו רוטינות שאותן למד על ידי הסתכלות בעשייה של אחרים וחיקוי עשייה זו. מחקרים מראים כי בתהליך זה הלומד פועל תחילה באופן ריטואלי- מתוך חיקוי נוקשה של רוטינות של מומחה הידע. עם הזמן ובעזרת הזדמנויות למידה מתאימות הלומד עובר תהליך של דה-ריטואליזציה, הכולל מעבר מדורג מהשתתפות ריטואלית להשתתפות חקירתית. את המעבר ניתן לזהות דרך שינויים במספר מאפיינים של פעולות הלומד, כמו: גמישות (Flexibility), קישוריות (Bondedness), יישומיות (Applicability), סוכנות של המבצע (Performer's Agentivity), עיצום (Objectification), והנמקה (Substantiability). כלומר, הוראה המאפשרת דה-ריטואליזציה מרחיבה את הזדמנויות הלמידה של התלמיד. מחקר זה בודק מהן הזדמנויות הלמידה שמזמן השימוש במשחק מתמטי בהוראה בכיתה בכלל, וכיצד המשחק מזמן (או לא) ללומדים הזדמנויות לדה-ריטואליזציה. הפעילות המשחקית משתלבת היטב עם הראייה הקומוגניטיבית, השחקן תחילה פועל באופן ריטואלי סביב חוקי המשחק כפי שהוסברו לו אך בהדרגה מאפשר המשחק שימוש באסטרטגיות ומהלכים מורכבים יותר.

מתודולוגיה

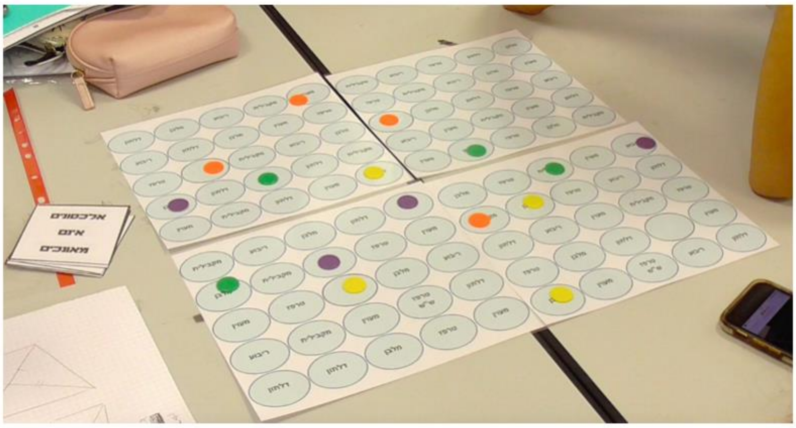
המאפיינים של תהליך הדה-ריטואליזציה הותאמו אופרציונלית לשיח המשחקי של התלמידים והם מפורטים בטבלה מספר 1. כל התכתובים נותחו על פי מאפיינים אלה והשאלות המופיעות בטבלה 1. במהלך ניתוח התמלולים של חמישה שיעורי משחק מתמטיים, אותרו מאפיינים נוספים: *פתיחות* וצורך. במהלך המשחק הגיאומטרי המוצג נבחנו מאפייני הדה-ריטואליזציה ברובד המשחקי והמתמטי.

טבלה 1. אופרציונליזציה של ניתוח הנתונים

דה-ריטואליזציה	משחק	מתמטיקה
גמישות	האם שחקנים מבצעים מהלכים שונים על מנת להשיג מטרת ניצחון זהה?	האם התלמידים מגיעים לאותה מטרה מתמטית בדרכים שונות?
סוכנות	האם השחקן מקבל על עצמו את חופש הפעולה בתורו ובאיזה אופן הוא עושה זאת?	האם לשחקן יש חופש פעולה מתמטי ?
עיצום	האם השחקן פועל מתוך הבנה של חוקי ומטרת המשחק?	האם התלמידים דנים על התכנים המתמטיים באופן מועצם?
קישוריות	האם השחקן פועל באופן היעיל ביותר כדי לחתור לניצחון?	קישוריות בין שלבי הפתרון: האם התוצאה של שלב פתרון אחד הוא הקלט של שלב הפתרון הבא? קישוריות בין הבעיה לדרך הפתרון: האם רצף שלבי הפתרון מובילים את התלמיד לפתרון הבעיה הנתונה?
הנמקה	האם השחקן מנמק את מהלכיו והאסטרטגיה שלו במסגרת חוקי המשחק?	האם התלמידים מצדיקים ומסבירים את פעולותיהם באמצעות כלים מתמטיים?
צורך	האם קיים בשחקן הצורך לחתור לניצחון?	האם מפתח התלמיד צורך לדייק את הבנותיו בנוגע לתוכן המתמטי?
פתיחות	האם השחקן משתף את השחקנים במהלכים ואסטרטגיות משחק?	האם השחקן משתף את השחקנים בקשיים, רעיונות והתלבטויות שנוגעים לתכנים מתמטיים של התלמידים?

משחק הטוטם פורש בפני ארבעת שחקניו לוח משחק ובו אליפסות המכילות את שמותיהם של כל המרובעים הנלמדים בכיתה ט' במבנה של 10X10 (כמתואר באיור 1). כל שחקן מתחיל בשוליו של צד אחד בלוח המשחק ומטרתו היא להצעיד את ארבעת חייליו אל הקצה הנגדי. התנועה על לוח המשחק מתאפשרת בעזרת קלף תכונה. שחקן יכול לנוע מספר אליפסות בכיוון יחיד בתנאי שכולן מקיימות את הכתוב בקלף התכונה. עצירה על אליפסה ריקה מביאה להחלפת קלף התכונה.

איור 1. המשחק טוטם.



ממצאים

בחלק זה נבהיר את אופי הנתונים וניתוחם בעזרת דוגמה מתוך שיעור שבו שוחק הטוטם. השיחה הבאה התרחשה כתגובה לקלף התכונה: "זוג זוויות נגדיות שאינן שוות זו לזו".

145. שושי אה, דלתון

146. הראל לא, זוג זוויות נגדיות ש**__אינן__** [מדגישה] שוות זו לזו

147. נורית בדלתון הן לא שוות

148. סיוון נגדיות שוות

149. שושי לא, לא חושבת

150. סיוון כן, נגדיות שוות

151. הראל תעשו, למה? תסתכלו אפילו בציור שהיא [ציור של המורה כמפורט באיור 3] עשתה. זה שני משולשים שווי שוקיים. יש פה זוויות בסיס שוות ועוד זוויות בסיס שוות

152. נורית [קוטעת את הראל] אבל זה וזה לא שוות

153. שושי אה, טוב, אז אני מחליפה

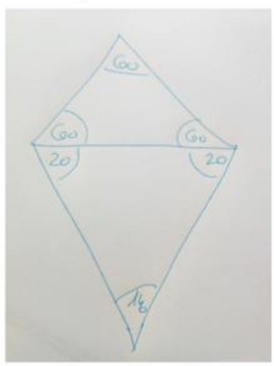
154. סיוון היא החליפה קלף

155. הראל אה נכון... צודקת

156. נורית את צודקת... את צודקת אבל דלתון... אה... זה

157. סיוון אבל **__אחותי__** [בהדגשה], היא החליפה קלף אז תוציאי קלף [פונה לנורית]

איור 3. שחזור שרטוט הדלתון של המורה



השיחה בין התלמידות נפתחה באי הסכמה. הראל טענה שדלתון לא מקיים את התכונה שבקלף כי יש לו זוג זוויות שוות (146,151). נורית טענה שהדלתון מקיים את התכונה כי זוויות הראש שלו שונות (152,147). נתייחס לרכיבי הדה-ריטואליזציה שבטבלה: ישנה עדות לגמישות בהסתכלות הלוגית על הדלתון בעוד שתי תלמידות קובעות שדלתון מקיים את התכונה בעקבות זוג אחד של זוויות שמקיים את התכונה, שתי בנות אחרות קובעות שדלתון אינו מקיים את התכונה בעקבות זוג אחד של זוויות שאינו מקיים את התכונה. ישנה עדות ל*קישוריות* בין הבעיה (התכונה בקלף) והפתרון בהסבר של נורית (152), וקישוריות בין שלבי ההנמקה והפתרון שמנסחת הראל (151). *ההנמקה* שמציעה הראל מתבססת על עקרונות גיאומטריים ולא על דוגמה פרטית כמו נורית. שתיהן פועלות באופן *עצמאי* ללא כל תלות במומחה ידע. סיוון ושושי דוחקות בנורית והראל להתקדם במשחק (154,153,157) אבל הראל ונורית חשות *צורך* לבחון את עמדותיהן ביחס לאחרת (156,155). האווירה בקבוצה מאפשרת פתיחות של העלאת רעיונות סותרים (145-150) ומאפשרת לשתף בשינוי הדעה האישית (156,155). השיח *מועצם*. לסיכום, בדוגמה לעיל יש עדות להזדמנות הניתנת לתלמידים להשתתף בשיח חקירתי.

דיון

זהו מחקר ראשוני בנושא של שימוש במשחקים ללמידת מתמטיקה בחטיבות הביניים. בפרט, הממצאים כוללים פירוט ותיאור של הזדמנויות הלמידה המתרחשות במסגרת משחק מתמטי בכיתה. אופרציונליזציה של מאפייני הדה-ריטואליזציה מאפשרים להתחקות אחר תהליכים ריטואלים וחקירתיים והמעבר ביניהם. השימוש במשחק מתמטי יכול להיעשות מתוך הבנה פדגוגית ותמרון של הזדמנויות הלמידה הטמונים בו. התרומה של המחקר נובעת מזיהוי של תהליכי הלמידה וההזדמנויות ללמידה שמאפשרים משחקים בשיעורי מתמטיקה בחטיבת הביניים.

מקורות

Gough, J. (1999). Playing Mathematical Games: Whenis a Game Not a Game. *Australian Primary Mathematics Classroom (APMC), 14*(2), pp. 12-17.

Cruickshank, D. R., & Telfer, R. (1980). Classroom games and simulations. *Theory into practice*, *19*(1), 75-80.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153-176.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

"כולם אומרים שמתמטיקה זה חשוב" – תהליכים דיאלוגיים סביב אימוץ נרטיבים מקובלים בחברה על ידי תלמידים

נעמה בן-דור, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
עינת הד-מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

תיאוריות סוציו-תרבותיות מדגישות את האופן שבו נרטיבים מקובלים בחברה מאומצים על ידי בני אדם (Bakhtin, 1981; Sfard, 2008). חוקרים רבים מכירים בערך של חינוך תלמידים לבחינה ביקורתית של נרטיבים מקובלים אלה, ומדגישים כי חינוך כזה מכין את התלמידים בצורה מיטבית לתפקודם כאזרחים בחברה דמוקרטית משתנה (e.g. Gutmann, 1999). אחד הנרטיבים המקובלים בחברה הוא שחינוך מתמטי הוא חשוב (Brown, Solomon, & Williams, 2016). בישראל, נרטיב זה עמד בשנים האחרונות בבסיס תוכנית להכפלת אחוז הלומדים מתמטיקה ברמת חמש יחידות (Blass & Shavit, 2017). על אף שקיימים מספר מחקרים בנוגע לחשיבות מקצוע המתמטיקה בעיני תלמידים ולסיבות שהם מספקים לכך (e.g. Wiik & Vos, 2019), רוב המחקרים אינם בוחנים את האופן שבו נרטיב זה מאומץ על ידי תלמידים ממקורות חברתיים, ובפרט את האופן שבו תהליכים דיאלוגיים עשויים להביא לשינוי באופן אימוץ הנרטיב. מחקר זה עושה צעד ראשון בכיוון זה.

רקע תאורטי

התיאוריה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) מתייחסת לנרטיבים כתוצר של החברה, כלומר כנתונים לאימוץ או לדחייה. תפישה זו מתקשרת לתיאוריה של בכטין (1981) לפיה המילים והמבעים שלנו הם הדהוד של הקולות הסובבים אותנו. בתחילת תהליך האימוץ, ההדהוד חזק ואנו מאמצים מבעים מכיוון שאומצו על ידי אחרים בסביבתנו; אולם, במידה שמתרחש *תהליך דיאלוגי* של בחינה, הטלת ספק ועימות עם מבעים מנוגדים, ההדהוד נחלש, ואנו עשויים לאמץ את המבעים כ"שלנו" על בסיס "שכנוע פנימי". חוקרים שבחנו את חשיבות המתמטיקה בעיני תלמידים התמקדו לרוב בהבחנה בין אימוץ על בסיס "ערך-השימוש" של לימוד המתמטיקה (כמו פיתוח החשיבה), לאימוץ על בסיס "ערך-החליפין" של לימוד המתמטיקה (כמו היותה כרטיס כניסה לעבודות רווחיות) (e.g Wiik & Vos, 2019), וכן בקשר שבין החשיבות שמייחסים תלמידים למתמטיקה לזהותם ולשאיפות המקצועיות שלהם (e.g. Lauermann, Tsai, & Eccles, 2017). עם זאת, מרבית המחקרים לא התמקדו באופן אימוץ חשיבות המתמטיקה מהחברה ובתהליכים הדיאלוגיים הקשורים באימוץ זה. לפיכך, בהתבסס על בכטין וספרד, שאלות המחקר שלנו היו: (1) כיצד ניתן לאפיין הצדקות תלמידים בנוגע לחשיבות המתמטיקה באופן הכולל התבססות על מקורות סוציו-תרבותיים? (2) כיצד ניתן להשתמש באפיון זה לצורך ניתוח תהליכים דיאלוגיים סביב אימוץ חשיבות המתמטיקה?

מתודולוגיה

המענה לשאלות המחקר ניתן על בסיס שני מחקרים: מחקר פיילוט בנוגע ליחסם של תלמידים למתמטיקה בהקשר סוציו-תרבותי (Ben-Dor & Heyd-Metzuyanim, 2019), ומחקר המשך (2019) שנערך כחלק מפרוייקט "דיאלוגוס" שמטרתו עידוד השתתפות דיאלוגית בלמידה. הנתונים המובאים נלקחו מ-10 ראיונות חצי-מובנים עם תלמידי כיתות ח' (4 ממחקר הפיילוט ו-6 ממחקר ההמשך) וקבוצת מיקוד, שבהם המחברת הראשונה שאלה את התלמידים שאלות שונות בנוגע לזהותם הלימודית, וביניהן, שאלות לגבי מקצועות הלימוד החשובים להם והסיבות לכך. מתוך ראיונות אלו נבחרו הנרטיבים הנוגעים לחשיבות המתמטיקה. הנרטיב "מתמטיקה זה חשוב" הוגדר כמאומץ על ידי תלמיד, אם התלמיד הזכיר את מתמטיקה כמקצוע חשוב או הסכים עם אחרים שאמרו זאת. בשלב הבא ריכזנו את כל *ההצדקות* לאימוץ הנרטיב "מתמטיקה זה חשוב" ומיינו אותן לפי קטגוריות שהתקבלו מתוך הנתונים. מהימנות גובשה על פי הסכמה (קונצנזוס) בין המחברות.

ממצאים

הניתוח הניב 58 נרטיבי הצדקות, שאותם מיינו ראשית לפי 9 קטגוריות שעלו מתוך הנתונים (ראו טבלה 1). לאחר מכן, בהתבסס על הספרות התיאורטית שתוארה לעיל, קיבצנו קטגוריות אלה ל-5 קטגוריות-על: "אימוץ-מבוסס-אחרים"; "הצדקה ריקה" (תשובות כלליות נטולות ביסוס כלשהו); "ערך-חליפין"; "ערך-שימוש"; ו"זהות". טבלה 1 מציגה את מספר הנרטיבים ששויכו לכל קטגוריה. כ-20% מההצדקות היו מסוג אימוץ-מבוסס-אחרים; כ-14%

אימוץ מבוסס הצדקה ריקה; כ-24% אימוץ מבוסס ערך-חליפין וכ- 33% אימוץ מבוסס ערך-שימוש. רק כ-8% היו מסוג אימוץ מבוסס זהות. הקולות החברתיים שהתלמידים הדהדו הם קולות ההורים או הקהילה שאליה הם משתייכים (למשל קהילת העולים מרוסיה). בנוסף, בבחינה של ההצדקות לפי תלמיד, מצאנו כי 8 מתוך 10 מהמשתתפים השתמשו בנרטיבי הצדקות מקטגוריות שונות.

טבלה 1 – נרטיבי הצדקות תלמידים לחשיבותה של המתמטיקה

קטגוריות-על	תת-קטגוריות	דוגמאות להצדקות	מס' הצדקות לפי קטגוריה
מבוסס-אחרים	אחרים אומרים	כי אומרים שזה חשוב	8
	לאחרים זה חשוב	כי אמא שלי רוצה שאהיה מהנדסת תוכנה	4
הצדקה ריקה		כי צריך מתמטיקה	8
ערך-חליפין	חשוב לבגרות	כי זה חלק חשוב מהבגרות	1
	כרטיס כניסה	כדי שאוכל להתקבל לעבודות הטובות	13
ערך-שימוש	ידע מתמטי הוא חיוני	כי מתמטיקה היא כמו שפה שנייה	8
	כישורי חישוב	כדי לחשב מידות או זמנים	5
	פיתוח החשיבה	כי זה מפתח את החשיבה של פתרון בכמה דרכים	6
זהות		כי אני רוצה להיות מנתח	5

במהלך הראיונות, תהליכים דיאלוגיים ביקורתיים בנוגע לאימוץ תלמידים את חשיבותה של המתמטיקה, אותחלו על ידי המראיינת באמצעות בקשות חוזרות להצדקות, במיוחד כאשר הושמעו הצדקות ריקות או כאשר המרואיינים הזכירו בהצדקותיהם קולות אחרים. לדוגמה, בתגובה לתשובה מסוג "כי ההורים אומרים", המראיינת שאלה "ומה אתה אומר?". תהליך דיאלוגי זה הניב מגוון הצדקות עשיר יותר מאלו שניתנו באופן ראשוני, ולעיתים אף הוביל למעבר מהצדקות מבוססות אחרים להצדקות מבוססות זהות. אנו מדגימות תהליך זה באמצעות המקרה של סוניה, תלמידה אשר רואיינה במסגרת השתתפותה בחוג מדעי בטכניון (כחלק ממחקר הפיילוט). הצדקותיה הראשוניות של סוניה לאמירתה, שמתמטיקה ואנגלית הם המקצועות הכי חשובים, היו מסוג אימוץ-מבוסס-אחרים ("תמיד אומרים הכי חשוב מתמטיקה ואנגלית"). כאשר נשאלה סוניה שוב באופן מפורש "למה מתמטיקה זה חשוב?" היא ענתה "אומרים" והודתה שהיא "עדיין לא מבינה למה מתמטיקה (זה חשוב)", ושהיא רוצה "שמישהו יסביר לי את זה". כאשר נשאלה על ידי המראיינת "מי אומר?", ענתה ש"ההורים" וגם "כמעט כל האנשים" והוסיפה ש"זה חשוב להנדסה וכל זה..." (אימוץ מבוסס ערך-חליפין). ההסבר לחשיבות לימודי ההנדסה הוצדק באופן עקיף באמירתה: "אמא שלי רוצה שאני אלמד אחרי בית ספר בטכניון וגם אני די רוצה" (אימוץ מבוסס אחרים משולב באימוץ מבוסס ערך-חליפין). כאשר המראיינת עימתה אותה עם הצהרה קודמת שלה בדבר רצונה ללמוד במגמת אמנות בתיכון, סוניה השיבה שיש לה רעיון ללמוד הנדסת תוכנה כי היא "ממש אוהבת משחקי מחשב" ואהבתה לציור יכולה "לעזור לי במשחקי מחשב, להמציא משהו כזה מעניין" (אימוץ מבוסס זהות). בדיאלוג זה ניתן לראות מעבר מהצדקות מבוססות אחרים (אמא, הורים, כולם) להצדקות מבוססות זהות (שאיפה לתכנת משחקי מחשב). כמו כן, ניתן לראות שהמעבר היה כרוך בשאילת שאלות מאתגרות מצד המראיינת.

דיון

הכלים המוצעים במאמר תורמים להמשגת אימוץ נרטיבים מקובלים סביב למידת מתמטיקה תוך הנכחת תפקידם של מקורות סוציו-תרבותיים באימוץ. ממצאי המחקר מראים כי אימוץ חשיבותה של המתמטיקה הוא תהליך מורכב ותלמידים יכולים לאמץ נרטיב זה בהתבסס על הצדקות מסוגים שונים. יתרה מכך, הקטגוריות המוצעות איפשרו לנו להראות כי אימוץ נרטיבים הוא דינמי וכי דיאלוג ביקורתי עשוי להביא לשינוי באופן שבו תלמידים מאמצים נרטיבים מקובלים.

רשימת מקורות

Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: four essays* (M. Holquist, ed.). University of Texas Press.

Ben-Dor, N., & Heyd-Metzuyanim, E. (2019). Adolescents' endorsement of narratives regarding the importance of mathematics: A dialogic perspective. *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)*. Utrecht.

Blass, N., & Shavit, Y. (2017). Israel's education system in recent years: an overview. In A. Weiss (Ed.), *State of the Nation Report: Society, Economy and Policy* (pp. 207–223).

Brown, T., Solomon, Y., & Williams, J. (2016). Theory in and for mathematics education: in pursuit of a critical agenda. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(3), 287–297.

Gutmann, A. (1999). *Democratic education*. Princeton University Press.

Lauermann, F., Tsai, Y.-M., & Eccles, J. S. (2017). Math-related career aspirations and choices within Eccles et al.'s expectancy–value theory of achievement-related behaviors. *Developmental Psychology*, *53*(8), 1540–1559.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Wiik, A., & Vos, P. (2019). "I want a high-educated job that pays well and is fun": Secondary students' reasons for selecting the advanced mathematics course. *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)*.

שינוי בהזדמנויות ללמידה במהלך השתלמות 'מחשב"ה'

רינת באור, הטכניון- מכון טכנולוגי לישראל
עינת הד-מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

הוראה המבוססת על משימות המעודדות חקירה הוכחה כמסייעת להבנה מעמיקה יותר של תכנים מתמטיים ולפיכך מאומצת ברחבי העולם, כמו גם בתכנית הלימודים של בתי הספר היסודיים בארץ (מבוא לתוכנית הלימודים, 2006). אולם, מחקרים רבים (Boston & Wilhelm, 2017; Stein & Smith, 1998) מראים כי גם כאשר המשימות המובאות לכתה מזמנות חקירה, יישומן הופך לעתים קרובות לפרוצדורלי (Stein & Smith, 1998). תופעה זו, אשר מוגדרת במחקר זה כ"ריטואליזציה", איננה מובנת דיה מבחינת מנגנוני השיח המתמטי האחראים לה. מטרת המחקר הנוכחי היא לבחון את תהליך הריטואליזציה בשיח הכיתתי והאופן שבו הוא משתנה בעקבות השתלמות מקצועית.

רקע תיאורטי

לפי המסגרת הקומוגניטיבית (Sfard, 2008), למידה הינה תהליך שבו הלומד עובר בהדרגה מביצוע שגרות (רוטינות) ריטואליות על פי כללים נוקשים המבוצעים למען אחרים, לשגרות חקירתיות שבהן הפרוצדורות גמישות ונועדו ליצור היגד מתמטי חדש באופן עצמאי (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019). בהתאם לכך הוראה יכולה לזמן יותר או פחות הזדמנויות לביצוע שגרות חקירתיות (Nachlieli & Tabach, 2018).

מחקרים שונים מרמזים על כך שתהליך ה'ריטואליזציה' של משימות הוא נפוץ (McCloskey, 2014; Stein, Grover, & Henningsen, 1996). תהליך זה מוגדר במחקר הנוכחי *כשינוי בהזדמנויות למידה (ה"ל), הניתנות לתלמידים על ידי המורה, מה"ל חקירתיות לה"ל ריטואליות*. נפוצות הריטואליזציה הובילה לבניית תכניות לפיתוח מקצועי, ביניהן תכנית "חמש הפרקטיקות להובלת דיונים פוריים" (Smith & Stein, 2011) ותכנית שיח מחויב (Accountable Talk) (Resnick, Asterhan, & Clarke, 2018) המסייעות למורים לשמר ה"ל חקירתיות. עקרונות תכניות אלו יושמו בתכנית השתלמות מקצועית 'מחשב"ה' (מהלכים מעודדי חשיבה בהוראת המתמטיקה), תוך התאמתן לשדה הישראלי.

מטרת המחקר הנוכחי היתה להתחקות אחר תהליך הריטואליזציה ולבחון שינוי במהלך השתלמות מחשב"ה. הגישה הקומוגניטיבית יכולה להעמיק את הבנת תהליכי השינוי בשיח הכיתתי בעקבות תהליכי פיתוח מקצועי, שכן היא מספקת כלים אופרטיביים לניתוח השיח. שאלת המחקר שהנחתה את חקר המקרה המוצג כאן היא: מהם מנגנוני השיח העומדים בבסיס תהליך הריטואליזציה והאם הם השתנו בכתה של המורה המשתלמת?

שיטת המחקר

המחקר התבסס על חקר מקרה של מורה מנוסה בשם (הבדוי) סימון, בעלת ניסיון של מעל 25 שנות הוראה במתמטיקה בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי. סימון השתתפה בהשתלמות 'מחשב"ה' במשך שנתיים, בסך כולל של 120 שעות אשר הוקדשו למפגשים קבוצתיים במרכז הכשרת המורים (בהנחיית הכותבת הראשונה) וכן למפגשי צוות וליווי אישי של המנחה. המורים בתכנית התבקשו לתעד את השיעורים שתוכננו במסגרת ההשתלמות במצלמת וידיאו. המקרה של סימון נבחר לניתוח מעמיק מאחר ומצד אחד, סימון דיווחה שלא התחוללו שינויים מהותיים בדרכי ההוראה שלה, ומצד שני, תצפיות בשיעוריה המוסרטים הראו שדווקא כן חלו שינויים מסוימים. יחד עם זאת, שינויים אלו לא היו ברורים דיים. לצורך הבנה מעמיקה שלהם, בחרנו לנתח את השיח בשניים מתוך שמונת השיעורים המצולמים - השיעור הראשון (דצמבר 2016, כתה ה') והשיעור האחרון בכיתה ו' (פברואר, 2018). השיעור הראשון עסק במשימת 'הריבועים' (איור 1) והשיעור האחרון עסק במשימה מסוג 'דגמים צומחים' אותה כינינו 'משימת ה-S' (איור 2). שתי המשימות מזמנות כר נרחב לשגרות השתתפות חקירתיות.

איור 1. משימת 'הריבועים' - שיעור ראשון

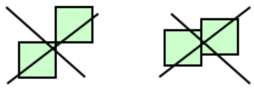
ריבועים והיקפים

מצאו את כל האפשרויות לסידור 3, 4, 5 ריבועים. המשיכו ל- 6 ריבועים ועוד.

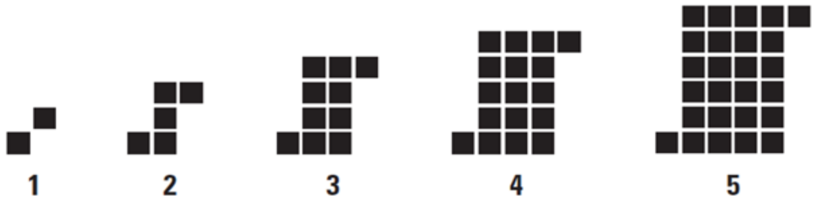
מהו הסידור בעל ההיקף הגדול ביותר?

מהו הסידור בעל ההיקף הקטן ביותר?

האם יש כאן חוקיות?



איור 2. משימת ה-S - שיעור אחרון



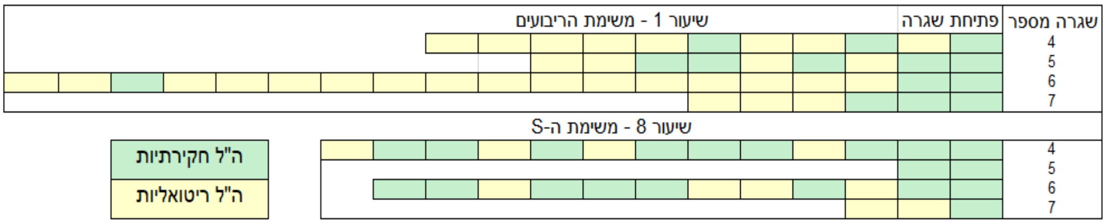
א. שרטטו את הדגם הבא. ב. תארו את הדגם ה-20. ג. תארו את הדגם הכללי

מטרת הניתוח היתה להשוות את הזדמנויות הלמידה שהוצעו ע"י סימון לתלמידים בשני השיעורים. בשלב הראשון נערכה חלוקה לשגרות (Nachlieli & Tabach, 2019). זיהינו פתיחה של שגרה כשאלה או הוראה של המורה. תת-שגרה זוהתה כשאלה או הוראה שהתייחסה לפתיחת שגרה קודמת, אך הפכה את השאלה/הוראה לספציפית יותר. בשלב השני נערך סיווג לה"ל ריטואליות וחקירתיות באופן הבא: ראשית, נוסח עבור כל שגרה "נרטיב מצופה" שהנו היגד שסביר שיתקבל כתוצאה משאלת המורה. לדוגמה, הנרטיב המצופה לשאלה "כמה זה ארבע כפול שתיים?" הוא מוגדר וברור - "שמונה", בעוד נרטיב מצופה לשאלה "כיצד פתרת?" יכול להיות מנעד רחב של תיאורי פתרון. שגרות (או תת-שגרות) שבהן הנרטיב המצופה היה מוגדר וממוקד זוהו כה"ל ריטואליות בעוד אלו שבהן היה מנעד רחב של אפשרויות למענה הוגדרו כשגרות חקירתיות.

ממצאים

שני השיעורים התנהלו כמתוכנן בהשתלמות, כאשר המורה מציגה לתלמידים את הבעיה, משלחת אותם לעבוד בקבוצות, ולאחר מכן אוספת את הכתה לדיון כתתי. זמן הדיון בשני השיעורים היה דומה (כ-25 דקות). בכל דיון כיתתי התרחשו 4 שגרות עיקריות ובתוכן תת-שגרות רבות נוספות, כאשר כמעט כל השגרות שילבו תת-שגרות חקירתיות וריטואליות. בסך הכל, בשיעור הראשון היו 31% תת-שגרות חקירתיות ואילו בשיעור האחרון 67% מתת-השגרות היו חקירתיות. בנוסף, נצפתה ירידה במספר הכולל של תת-השגרות (מ-45 ל-30). ירידה זו מרמזת על כך שבשיעור האחרון ניתן לתלמידים יותר זמן להתמודד ולהשיב לשאלות מאשר בשיעור הראשון.

איור 3. חלוקת השיעורים לשגרות חקירתיות וריטואליות



המנגנון השכיח ביותר בבסיס תהליכי הריטואליזציה בשיעור הראשון היה זה שבו ההיגד המצופה איננו מתקבל מהתלמידים ובעקבות זאת המורה מצמצמת בהדרגה את ההיגדים המצופים. ניתן לראות זאת באיור 3 בכך שכל השגרות נפתחו בתת-שגרה חקירתית אך בהמשך עברו לתת-שגרות ריטואליות. דוגמה לשיח סביב תהליך הריטואליזציה הזה היא שגרה מס' 6 בשיעור הראשון שבה, בכדי לעודד הכללות בנוגע לקשר בין ההיקף לשטח הריבועים, המורה פתחה בשאלה מדוע "ביקשו (בדף העבודה) להמשיך עוד ועוד?". כמענה לשאלה זו יכולים היו להתקבל מגוון נרחב של היגדים מצופים כגון "כדי שנמצא את החוקיות שהיא..." או "כדי שנמצא מה הקשר בין היקף לשטח". כאשר לא התקבל אף אחד מההיגדים המצופים האפשריים, צמצמה המורה בהדרגה את שאלותיה כך שההיגדים המצופים הפכו למוגדרים יותר ויותר. ההיגד שהתקבל בסוף ("שטח מודדים באמצעות סמ"ר") כבר לא היה קשור באופן ישיר להיגד המצופה הכללי סביב הקשר בין שטח והיקף הריבועים.

בשיעור האחרון חלה ירידה כללית בריטואליזציה של ה"ל, כאשר 3 מתוך השגרות הכילו יותר תת-שגרות חקירתיות מאשר ריטואליות, ושגרה אחת (מס' 5) אף היתה חקירתית לחלוטין. בשיעור זה המורה המשיכה לזמן ה"ל חקירתיות גם כאשר לא התקבל ההיגד המצופה. במקום צמצום של האפשרויות להיגדים מצופים, היא הציעה לתלמידים הליכים אלטרנטיביים להפקת ההיגד המצופה המקורי. זאת, בזמן שהיא ממשיכה ומבקשת מהם להצדיק ולנמק את טיעוניהם.

דיון ומסקנות

שינוי בפרקטיקות הוראה לכיוון הוראה חקירתית הוא תהליך חמקמק ומורכב (Heyd-Metzuyanim, Smith, Bill, & Resnick, 2019). אמנם, תופעת הריטואליזציה, או בשמה הנפוץ "הורדת הדרישה הקוגניטיבית" (Stein & Smith, 1998) הנה תופעה ידועה, אולם שיטת הניתוח הקומוגניטיבית שהצענו כאן מאפשרת לאפיין אותה ביתר דיוק וכך להבין גם את האופן שבו היא יכולה להשתנות עקב התפתחות מקצועית. דיוק זה יכול לאפשר הן למורים והן למורי-מורים הבנה ברורה יותר של מהלכי השיח אשר יכולים לשמר הזדמנויות ללמידה חקירתיות. המחקר הנוכחי מוגבל שכן הוא מראה את השינוי בשיח הכיתתי אצל מורה אחת בלבד, ורק בשתי נקודות זמן. יחד עם זאת, אנו צופות שהתובנות שהתקבלו מניתוח זה יוכלו בעתיד לסייע בהכשרת מורים להוראה מעודדת חקירה במתמטיקה.

רשימת מקורות

משרד החינוך והתרבות (התשס"ו, 2006). *תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים*. האגף לתכנון ופיתוח תוכניות לימודים, ירושלים: הוצאת מעלות.

Boston, M. D., & Wilhelm, A. G. (2017). Middle School Mathematics Instruction in Instructionally Focused Urban Districts. *Urban Education*, *52*(7), 829–861. https://doi.org/10.1177/0042085915574528

Heyd-Metzuyanim, E., Smith, M., Bill, V., & Resnick, L. B. (2019). From ritual to explorative participation in discourse-rich instructional practices: a case study of teacher learning through professional development. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 273–289. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9849-9

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

McCloskey, A. (2014). The promise of ritual: A lens for understanding persistent practices in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 19–38.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2018). Ritual-enabling opportunities-to-learn in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 253–271. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9848-x

Resnick, L. B., Asterhan, C. S. C., & Clarke, S. N. (2018). *Accountable Talk: Instructional dialogue that builds the mind*. *Educational Practices Series*. International Academy of Education (IAE) and the International Bureau of Education (IBE). Retrieved from http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/educational_practices_29-v7_002.pdf

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Smith, M. S, Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455–488. https://doi.org/10.3102/00028312033002455

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection : From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268–275.

תלמידי חינוך מיוחד בכיתות ב׳-ג׳, המשולבים בכיתות הרגילות, פותרים ומסבירים פתרונות לתרגילי חיבור

מאיה רון עזרא, אוניברסיטת תל-אביב
אסתר לוינסון, אוניברסיטת תל-אביב

מבוא

ברבות מהכיתות משולבים ילדי החינוך המיוחד אשר אובחנו כבעלי לקויות שונות (אוטיזם, ליקויי למידה ועוד), שזכאים להתאמות שונות ומהווים חלק אינטגראלי מהכיתה (נאון, מילשטיין ומרום, 2013). יחד עם זאת, מעט מחקרים מתייחסים לאוכלוסיית תלמידי החינוך המיוחד בהקשר של חינוך מתמטי (להוציא מחקרים העוסקים בתלמידים אשר מאובחנים בדיסקלקוליה). מחקר זה מתמקד בשלושה תלמידי חינוך מיוחד מכיתות ב' וג', המשולבים בכיתות רגילות (להלן יקראו "תלמידים משולבים") ובודק כיצד הם פותרים תרגילי חיבור דו-ספרתיים, מסבירים פתרונות לתרגילים אלה ומאתרים שגיאות.

רקע תיאורטי

פעולת החיבור מהווה יסוד לפעולות חשבוניות נוספות. בכיתות הנמוכות ניתן דגש רב בעת ההוראה על אסטרטגיות שונות לפתרון תרגילי חיבור מספרים טבעיים, כאשר המטרה הנה התמקצעות ושליטה מלאה של התלמידים בפעולה תוך שימת דגש על תובנה וחקר (משרד החינוך והתרבות, תשס"ו). השליטה במיומנות החיבור הנה פועל יוצא של שימוש במגוון רב של דרכי פתרון בהתאם לתרגיל. כמו כן, קיימות אסטרטגיות שונות לפתרון אצל תלמידים שונים, (תירוש, ברקאי, תירוש, 2005; Baroody, 2006; Ma, 2011). לדוגמא, פתרון התרגיל 39+45 באמצעות מספר אסטרטגיות:

- פירוק (חלקי/מלא) : 5+9=14 ; 40+30=70 וחיבור התוצאות שהתקבלו 14+70=84
- מעבר לתרגיל עזר: 45+40 ולאחר מכן פיצוי 84=1-(45+40)
- מעבר לתרגיל שקול: $(45-1)+(39+1)=44+40$
- "ארגון מחדש": $(30+9)+(40+1+4)=(30+9+1)+40+4$

בהתייחס לשגיאות אופייניות בפתרונות תרגילי חיבור, חוקרים (Ashlock, 1972; Cox, 1975) מצביעים על קשיים ב"חוש למספר", בהבנת ערך מקום הספרה ובאי-שליטה ב"קיבוץ מחדש" כסיבות מרכזיות לתפיסות מוטעות בפתרון תרגיל חיבור. להלן דוגמאות של שגיאות בערך המקום בחיבור שלמים:

$$\begin{array}{r} 153 \\ +\underline{\;52\;} \\ 673 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67 \\ +\underline{18} \\ 715 \end{array}$$

ניתן להשתמש בידע הנצבר לגבי שגיאות אופייניות ולשלבו כאמצעי למידה במערכי השיעור. גישות ההוראה הדוגלות בשותפות התלמיד ולמידה באופן פעיל, מדגישות את החשיבות של העיסוק בשגיאות, התמודדות עם קונפליקט וברפלקציה כחלק משמעותי בתהליך הלמידה (צמיר וברקאי, 2005). לדעת רבים, לדיון בשגיאות תועלת רבה ביצירת שיח הנוגע למכשלות מועדות וכן לסיבות האפשריות לשגיאה, והוא עשוי לצמצם את הסבירות שתלמידים יחזרו עליהן בעתיד (באשרה, 2016; סמובול ואפלבאום, 2003; צמיר וברקאי, 2005).

בהתייחס לשילוב תלמידים עם צרכים מיוחדים בכיתות הרגילות, מטרת מחקר זה היא לבחון כיצד "תלמידים משולבים" פותרים ומסבירים תרגילי חיבור. שתי שאלות המחקר הן: (1) כיצד פותרים "תלמידים משולבים" תרגילי חיבור מסוגים שונים (עם וללא העברה) במאוזן ובמאונך, ובאילו אסטרטגיות הם משתמשים? (2) האם "תלמידים משולבים" מאתרים שגיאות בתרגילי חיבור במאוזן ובמאונך, וכיצד הם מנמקים את הסיבה לדרך הפתרון השגויה?.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו שלושה בנים, תלמידים משולבים בכיתות ב'-ג'. תלמיד המאובחן על רצף האוטיזם (ASD), תלמיד המאובחן עם עיכוב התפתחותי וקשיים ברכישת קריאה וכתיבה ותלמיד שאותר על ידי בית הספר כמתקשה ברכישת קריאה וכתיבה.

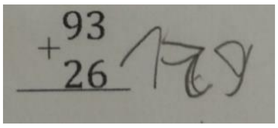
לצורך המחקר פותחו שני כלים: הכלי הראשון, שאלון העוסק בפתרון תרגילי חיבור והסבר לפתרון, המחולק לשניים: (1) 24 תרגילי חיבור במאוזן, מתוכם נדרש הסבר ל-8 תרגילים. (2) 24 תרגילי חיבור במאונך, מתוכם נדרש הסבר ל-8 תרגילים. תרגילי המאוזן והמאונך זהים, אך הייצוג בשאלון שונה. התרגילים סווגו מראש על ידי עורכי המחקר למספר קטגוריות (עם העברה בספרת אחדות/עשרות, ללא העברה, העברה עם 0). הכלי השני עוסק באיתור שגיאה והסבר, כולל כ- 6-9 כרטיסיות, בכל כרטיס תרגיל (במאונך או במאוזן) הפתור באופן שגוי.

במסגרת המחקר נערכו שלושה מפגשים עם כל תלמיד בביתו, במשך 10-20 דקות. המפגשים תועדו בוידאו, באישור ובהסכמת ההורים והילדים.

ממצאים

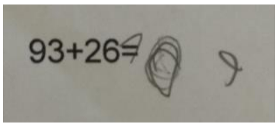
על אף ההקפדה לא לקיים השוואה בין שלושת התלמידים, נמצאו מספר נקודות השקה שעלו מתוך הביצועים של שלושתם. ראשית, מתוך 144 תרגילים במאוזן ובמאונך, פתרו שלושת התלמידים כ 136 תרגילים נכונה, שהם 94.44% מכלל התרגילים שהובאו בפניהם. שנית, מספר הפתרונות הנכונים המידיים (ללא תיקון) במאונך (66 פתרונות), היה גבוה ממספר הפתרונות המידיים במאוזן (62 פתרונות). כמו כן, רוב התרגילים בהם התרחשה שגיאה, בין אם אותרה ותוקנה ובין אם לא, התרחשו בקטגוריה בה קיימת העברה (ראה איור 1).

תמונה 1



+93
26 129

תמונה 2



26+93=109

איור 1. שגיאות בתוצאת חיבור דו ספרתי עם דו ספרתי העברה בספרת העשרות.

בהתייחס להסברים, התלמידים השתמשו במגוון אסטרטגיות לפתרון, וכי בתרגילי המאוזן הגיוון היה רב יותר מאשר במאונך (ראה איור 2).

$$7 + 27 \rightarrow \ (3 + 4) + 27 \rightarrow \ 27 + (3 + 4) \rightarrow \ (27 + 3) + 4 \rightarrow \ 30 + 4 = 34$$

איור 2. דוגמא לשימוש באסטרטגית "ארגון מחדש" בתרגיל 7+27 במאוזן.

בנוסף, האסטרטגיה השכיחה ביותר במאוזן היא "פירוק חלקי/ או מלא" של המחוברים, לעומת השימוש הרב באלגוריתם החיבור בתרגילי המאונך.

פירוק מלא

$$(4+5)+(40+60)=9+100=109$$

אלגוריתם החיבור

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\,4 \\ \hline 9 \end{array} \;\leftarrow\; \begin{array}{r} 4(40) \\ +\,6(60) \\ \hline 10 \end{array} \;\leftarrow\; \begin{array}{r} 45 \\ +\,64 \\ \hline 109 \end{array}$$

איור 3. ניתוח הסבר תרגיל 45+64 במאוזן ובמאונך.

בנוגע להתמודדות עם תרגילים שגויים, נראה היה כי משימה זו הייתה אתגר עבורם וכי שלושתם לא התנסו בעבר בפעילות שכזו. לראייה, ההתרגשות והפליאה שמביע אחד התלמידים כאשר הצליח לאתר שגיאה בכרטיס:

תלמיד: "יואו אני טוב?", "wow זה דווקא קל" וגם "אני טוב בלפתור את התוצאות האלה".

ולחילופין, תגובה המעידה על קושי כאשר איתור מקור השגיאה אינו צולח:

תלמיד: "הטעות שלהם...זה אני לא יודע איך להסביר את הטעות שלהם...זה יותר מידי, זה קצת מסובך הפעם".

או תלמיד אחר שפתר על דף טיוטא את התרגיל ולא מצא נימוק לשגיאה, אז הושיט את הכרטיסייה למראיינת, ובאמצעות מחווה זו סמן לה שהוא אינו מבין את מקור השגיאה.

יחד עם זאת נראה היה שהקונפליקט שזימן הפתרון השגוי, עורר מחשבה ועודד חשיבה רפלקטיבית. כך לדוגמא אחד התלמידים ציין:

תלמיד: "הם התבלבלו בין יחידות לעשרות כמו שאני התבלבלתי".

ובהזדמנות אחרת אמר תוך כדי צחוק:

תלמיד: "גם אני התבלבלתי בין זה לזה",

דבר שאולי מעיד על עריכת ביקורת עצמית וחשיבה מטה-קוגניטיבית כפי שנרצה לעודד בסוג כזה של אתגר.

דיון

אחוזי ההצלחה הגבוהים בפתרון התרגילים באו בניגוד להשערה כי "תלמידים משולבים" יחוו קשיים בעת הפתרון, הנובעים מאופי הלקות כגון קשיים בזיכרון עבודה, קושי בביצוע רצף של פעולות, הכללה ועוד (באשרה, 2016; מרגלית, 2014). עצם קיומן של אסטרטגיות מגוונות אצל "תלמידים משולבים" יכולה להעיד על תובנה מספרית וכן על שליטה במיומנות היסוד "חיבור". מתוך הסבריהם עולה כי התלמידים תכננו איזו אסטרטגיה יעילה עבור כל תרגיל ולאמץ אסטרטגיות אשר מתאימות לצרכיהם, ומביאות אותם לתפקד בצורה אופטימלית תוך השגת הישגים תואמי- גיל. עוד נציין, כי שיתוף הפעולה בלאתר, להבין ולהסביר שגיאות של תלמיד אחר אינו מובן מאליו, בפרט בהתייחס לתלמיד המאובחן על רצף ה- ASD.

מפאת גודלו המצומצם של המחקר והשונות בין התלמידים לא ניתן לספק מסקנה כללית אודות יכולותיהם של תלמידים "משולבים". יחד עם זאת חשיבותו של המחקר בכך שהוא פותח צוהר למחקרים גדולים ומקיפים יותר בתחום המתמטיקה באוכלוסייה מיוחדת זו. על אף הלקויות השונות והקשיים הנגזרים מהן, חשוב לתת הזדמנות שווה לכלל התלמידים בכל מקצועות הלימוד ובתוכם גם המתמטיקה.

רשימת מקורות

בשארה, ס'. (2016). הכוונה עצמית בהוראת המתמטיקה לתלמידים עם לקויות למידה. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, 3, 61-74.

בשארה, ס'. (2016). טיפוח הכוונה עצמית בלמידה ובהוראת מקצוע המתמטיקה. *רב גוונים- מחקר ושיח* 2(15), 213-234.

מרגלית, מ'. (2014). לקויות למידה מודל נירו-התפתחותי לאחר 15 שנים. *מפגש לעבודה חינוכית- סוציאלית*, 39, 15-34.

משרד החינוך (2006). *מתמטיקה – תכנית לימודים לכיתות א'-ו' בכל המגזרים*. תשס"ו. ירושלים: המחבר.

נאון, ד'. מילשטיין, א'. מרום, מ'. (2013). *שילוב ילדים עם צריכים מיוחדים בבתי ספר יסודיים: מעקב אחר יישום "פרק השילוב" בחוק חינוך מיוחד*. ירושלים: מאיירס - ג'וינט- מכון ברוקדייל - המרכז לחקר מוגבלויות ותעסוקת אוכלוסיות מיוחדות.

סמובול, פ. אפלבאום, מ. (2003). מצא את הטעות. *על"ה- עלון למורי מתמטיקה*, 30, 45-47.

צמיר, פ'. ברקאי, ר'. (2005). *שימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה: תיאוריה ויישום*. תל-אביב: הוצאת רמות – אוניברסיטת ת"א.

תירוש, ח'. ברקאי, ר'. תירוש, ד'. (2005). *מספרים טבעיים: מחקרים ופעילויות*. תל אביב: הוצאת רמות – אוניברסיטת ת"א.

Ashlock, R.B. (1972). *Error Patterns in computation: A Semi–Programmed Approach*. Columbus. Ohio: Merrill.

Baroody, A.J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number-combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, 13 (1), 22-31.

Cox, L. S. (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematical Education*, 6, 202-220.

Isaacs, A. C., & Carroll, W. M. (1999). Strategies for basic-facts instruction. *Teaching Children Mathematics*, 5(9), 508-515.

Ma, L. (2011). Three approaches to one-place addition and subtraction: Counting strategies, memorized facts, and thinking tools. Retrieved from: https://scholar.google.co.il/scholar?q=related:gVaF0qmsgiMJ:scholar.google.com/&hl=iw&as_sdt=0,5.

מעקב אחר מהלכי ההוראה בשיעורי מתמטיקה בבתי ספר יסודיים המשלבים משחקים מתמטיים ממוחשבים

אודליה צייאדה, אוניברסיטת תל-אביב
מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

תקציר

מעשה ההוראה הינו עניין מורכב, המגלם בתוכו רבדים שונים להתייחסות. במחקר הנוכחי נעשה ניסיון לתת מענה לתיאור עבודתם של מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים, במהלך שילוב של משחקים מתמטיים ממוחשבים ברצף ההוראה, בהתבסס על דיווח עצמי. התיאור נעשה באמצעות כלי מתודולוגי שפותח- *תמונת שטף שיעור*. הכלי מספק מידע אודות התזמורים (Orchestrations) עליהם מדווחים מורים במהלך השיעור; רמות החשיבה המאפיינות את כל אחת מפעילויות הלמידה; הארטיפקטים בהם נעשה שימוש, ובפרט דיווח מורים על שימוש במשחקים מתמטיים ממוחשבים במהלך השיעור. מחקר איכותני זה עושה שימוש בתשתית המושגית שהניחו דרייברס וחובריו (Drijvers et al., 2013), לתיאור פעולות המורה בסביבה עתירת טכנולוגיה (במעבדה או בכיתה עם מחשב מורה ומקרן), בהתאם למטרות ההוראה.

מבוא

מחקרים בחינוך המתמטי שבחנו שילוב משחקים ממוחשבים בתהליכי למידה, העלו כי לשילוב זה תועלת הן ביחס להיבטים רגשיים הנוגעים בלמידה והן לשיפורה. באשר להיבטים רגשיים, להתנסות במשחק ממוחשב השפעה חיובית על מוטיבציית הלומדים, בהשוואה למשימות נייר ועיפרון (Ke, 2008); כמו גם על חיזוק תחושת המסוגלות שלהם, ועל גישתם לתחום הנלמד, תחושות אשר נותרו גם לאחר תום תקופת התנסות במשחק (Riconscente, 2013). תועלת ללמידה תוארה אף היא. כך למשל להתערבות שכללה משחק בנושא שברים על ישר מספרים (Riconscente, 2013); להתנסות תלמידים בית ספר יסודי במשחק אריתמטי בעל מאפיינים רפלקטיביים (Pareto et al., 2011); וללמידה מתוך משחק שעסק בחשיבה פרופורציונלית הייתה תרומה לידע המתמטי של הלומדים בתוך משחק, ואף לידע המפורש שרכשו בעקבותיו (Vrugte et al., 2015).

נוסף על מחקרים שבחנו את האינטראקציה שבין הלומד לסביבה המשחקית הממוחשבת באופן בלעדי, קיימים גם מחקרים אשר בחנו שילוב משחקים בתוך תנאי למידה רחבים יותר. במחקר שהשווה בין התנסות במשחק מתמטי ממוחשב בשלושה תנאים: למידה שיתופית תוך משחק ממוחשב, התנסות תחרותית בסביבה משחקית ממוחשבת ולמידה ללא משחק, עלה כי בשני התנאים ששילבו משחק, ההתנסות קידמה את הלמידה, בהשוואה ללמידה ללא משחק (Ke & Grabowski, 2007). במחקר אחר, נמצא שמשחק מתמטי ממוחשב שעסק בלמידת ראשית האלגברה בשעות הפנאי בשילוב עם ודיון כיתתי קצר, הוביל לשיפור בהישגיהם הלימודיים של המתנסים (Van den Heuvel-Panhuizen, Kolovou & Robitzsch, 2013).

רקע תיאורטי

נראה כי אף שלמשחקים מתמטיים ממוחשבים השפעה חיובית על למידה ומוטיבציה, ראוי לבחון את שילובם בתוך הקשר הלמידה רחב, קרי- מהלך שיעור. עבודת המורה בכיתה תוארה על- ידי דרייברס וחובריו (Drijvers et al., 2013), אשר עקבו אחר פרקטיקות ההוראה של מורים ללא ניסיון עשיר ביישום שיעורים בסביבה עתירת טכנולוגיה בכיתותיהם. החוקרים מבחינים בין שמונה תזמורים שמיישם מורה במפגש עם כיתה שלמה, לבין חמישה תזמורים המתקיימים במפגש של מורה עם תלמיד בודד, מול מחשב אישי. מאחר שפעולות ההוראה של המורה אינן נפרדות מתהליכי הלמידה של תלמידיו, נראה כי יש חשיבות לתאר את פעולות ההוראה של המורה ביחס לרמות החשיבה אליהן יחשפו תלמידיו. זיהוי רמות חשיבה בלמידת מתמטיקה במערכת החינוך בישראל, מסווג על ידי חלוקה לארבע רמות. שתיים מהן נמוכות (ידע וזיהוי וחשיבה אלגוריתמית) ושתיים גבוהות (חשיבה תהליכית וחיפוש פתוח והנמקה)

(גליקמן, 2017). לחשיבה מסדר גבוה (ח.ס.ג.) אין הגדרה מדויקת, אך ניתן לתאר אותה לפי מאפייניה (Resnick, 1987), בהם: ח.ס.ג. איננה אלגוריתמית, והלומד נדרש לאיתור מבנה בתוך אי סדר קיים; ח.ס.ג. מאופיינת במורכבות ואי-ודאות באשר לדרך הפתרון; ח.ס.ג. מחייבת את הלומד לשיפוט, לפרשנות, ולוויסות עצמי.

מטרת ושאלת המחקר

מטרת המחקר: להציע כלי מתודולוגי אשר יאפשר מעקב אחר דיווח מורים לגבי פעולות ההוראה שלהם בשיעורים המשלבים משחקים מתמטיים ממוחשבים.

שאלת המחקר: כיצד מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים, ללא ניסיון קודם, משלבים משחקונים מתמטיים ממוחשבים במהלך שיעור, לאור דיווחיהם?

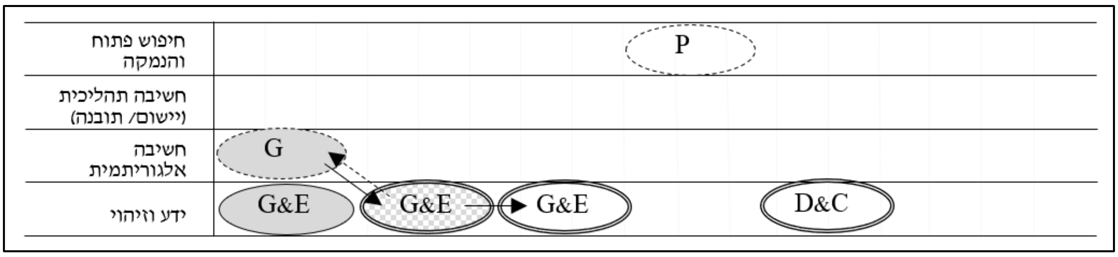
מתודולוגיה

במחקר משתתפים 18 מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים, אשר לקחו חלק בהשתלמות מורים בשנת הלימודים תשע"ח. המורים התבקשו לתכנן שיעור המשלב שימוש במשחקון מתמטי ממוחשב (לפחות 1), וליישמו בכיתותיהם. במפגשי ההשתלמות דיווחו המורים על ההתנסות שלהם מהעברת השיעור. הדיווח בעל-פה תועד בהסרטה, תומלל, וסיפק תמונה משלימה לדיווח הכתוב שהגישו המורים שכלל את תכנון השיעור והעברתו.

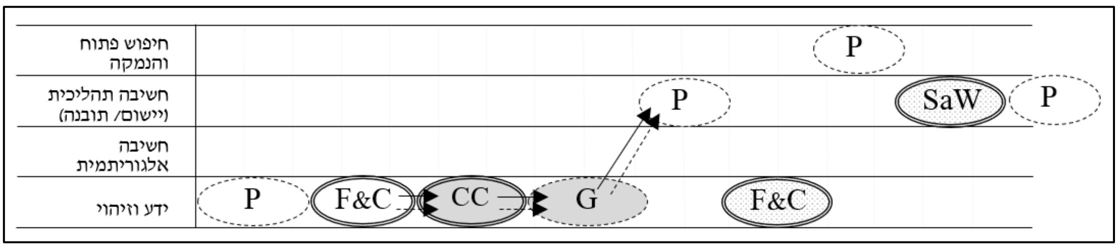
הניתוח נעשה באמצעות *תמונת שטף שיעור*. כלי המחקר שפותח מספק תיאור ויזואלי לתכנון השיעורים ולדיווחים שספקו מורים על פעולותיהם השונות לאורך כל חלקי השיעור, בהתייחס להיבטים שונים הקיימים בשיעור. בהם: תזמורים, רצף, משתתפים, רמת חשיבה, וארטיפקטים. התזמור האינסטרומנטלי (Instrumental Orchestration)- תיאור פעולות ההוראה הספציפיות שעושה המורה במהלך השיעור. רצף- הצגת הפעילויות על-פי סדר הופעתם הכרונולוגי, לאורך השיעור. מעגל המשתתפים- הבחנה בין פעילות של המורה עם תלמידיו במליאת הכתה, במפגש המורה עם תלמיד/ים בודד/ים, (בהתבסס על דרייברס, Drijvers et al., 2013), או בהקצאת פעילות לעבודה עצמית של התלמידים. תיאור משלים ניתן על-ידי התייחסות לרמת החשיבה המאפיינת את הפעילות, ולתיאור הארטיפקט במהלך הפעילות, ובפרט בהתייחס לשימוש במשחקון הממוחשב.

ממצאים ודיון

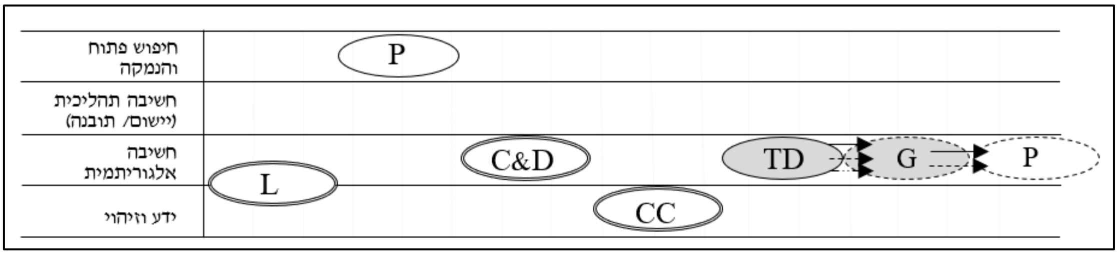
באיור 1 מוצגות שלוש *תמונות שטף שיעור*, לשיעורים של שלוש מורות. הניתוחים מבוססים על תכנון ודיווח שהתקבלו מהמורות, לשיעורים שהתנסו בהם. כל השיעורים התקיימו במעבדות מחשבים. רצף פעולות ההוראה משתקף בסידור האופקי משמאל- תחילת השיעור, לימין- סיומו. המקום האנכי של כל אליפסה בתוך התמונה מבטא את רמת החשיבה של הפעילות. אליפסות המונחות זו על גבי זו, מתארות פעולה בו-זמנית. קווי המתאר של האליפסות מבחינים בין: פעולות המורה עם כיתה שלמה (קו כפול); פעולות המורה עם תלמיד בודד (קו יחיד); ופעולות תלמיד בעבודה עצמית (קו מקוקו).



איור 1א. השיעור של ברכה



איור 1ב. השיעור של נועה



איור 1ג. השיעור של סיגל

בהשוואה בין השיעורים, ניתן לראות באיורים כי מקום השילוב של המשחקים הממוחשבים (מסומן בהצללה) בתוך השיעור, משתנה. גם התזמור אותו מיישמת המורה במהלך השימוש במשחקון משתנה בין: הנחיה-והסבר (G&E) של תוכן המשחקון; הדגמה טכנית (TD) לשימוש במשחקון; משחק עצמי של התלמידים במשחקון (G); או הבהרת מושגים מתמטיים (CC) בעת תצוגת המשחקון. הסימון בחיצים מתאר את מהות הקשר שבין השימוש במשחקון לבין חלקי השיעור הסמוכים לו (מתמטי, פדגוגי או טכנולוגי). כמו כן דרך *תמונת שטף שיעור* ניתן לבחון את קיומו של קשר בין השימוש במשחקון למשימה מסדר חשיבה גבוה, או העדרו.

למחקר מספר תרומות. תרומה מתודולוגית- בתיאור שיעורים באופן תמציתי, ובאפשרות להשוות ביניהם. תרומה קונספטואלית- בהרחבת ההמשגה של דרייברס (Drijvers et al., 2013), שכן מאפייני המשחקונים (משוב), גיל הלומדים (בית ספר יסודי) וסביבת הלמידה (כיתה עם מקרן) מזמנים תזמורים חדשים. בנוסף, למחקר תרומה מעשית לקהילת ההוראה- במעקב אחר רבדים שונים של שיעורים, בתהליכי תכנון וביישום בפועל.

מגבלת המחקר הינה בביסוס הממצאים על דיווחי מורים אודות שעורים שהם העבירו בכיתותיהם, ולא על תצפיות.

מקורות

גליקמן, ה' (2017). *מיצ"ב תשע"ז- דו"ח מבחני ההישגים, ראמ"ה.* אוחזר מתוך http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Rama/Meitzav/DochotMaarachtim.htm

Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., Doorman, M., & Boon, P. (2013). Digital resources inviting changes in mid-adopting teachers' practices and orchestrations. *ZDM*: *The International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 987-1001.

Ke, F. (2008). Computer games application within alternative classroom goal structures: cognitive, metacognitive, and affective evaluation. *Educational Technology Research and Development*, *56*(5-6), 539-556.

Ke, F., & Grabowski, B. (2007). Gameplaying for maths learning: cooperative or not?. *British Journal of Educational Technology, 38*(2), 249-259.

Pareto, L., Arvemo, T., Dahl, Y., Haake, M., & Gulz, A. (2011). A teachable-agent arithmetic game's effects on mathematics understanding, attitude and self-efficacy. In G. Biswas, S. Bull, J. Kay, & A. Mitrovic (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 247–255). Heidelberg, Germany: Springer.

Resnick, L. (1987). *Education and learning to think*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Riconscente, M. M. (2013).Results from a controlled study of the iPad fractions game Motion Math. *Games and Culture*, *8*(4), 186-214.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A., & Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 281-307.

Vrugte, J., Jong, T., Wouters, P., Vandercruysse, S., Elen, J., & Oostendorp, H. (2015). When a game supports prevocational math education but integrated reflection does not. *Journal of computer assisted learning, 31*(5), 462-480.

התרומה של שילוב משימות מבוססות משחק להבניית ידע מתמטי ופדגוגי של פרחי הוראה – המקרה של בניות עם גפרורים

אליה סיניצקי, האקדמית גורדון מכללה לחינוך, שאנן-המכללה האקדמית הדתית לחינוך
משה סטופל, האקדמית גורדון מכללה לחינוך, שאנן-המכללה האקדמית הדתית לחינוך
רותי סגל, אורנים-המכללה האקדמית לחינוך, שאנן-המכללה האקדמית הדתית לחינוך

רקע תיאורטי

שילוב משימות הכוללות משחק בגיאומטריה

פתרון משימות מתמטיות מהווה מקור פיתוח דרכי החשיבה של הלומדים ומדד מרכזי להערכת הידע המתמטי של הלומדים. יכולת זו כוללת את הידע והמיומנויות לפרש סיטואציה מתמטית ולהציג את הפתרון/ות בדרכים מגוונות תוך כדי שימוש במגוון ייצוגים. פיתוח יכולת זו, חיונית גם בסביבת הוראה של פרחי הוראה שאמורה לזמן לתלמידיהם התמודדות עם פתרון משימות והתאמתן למטרות פיתוח ולימוד עצמאי. אחת מהאפשרויות היא להציג במהלך ההוראה משימות מתמטיות המשלבות משחק (Romberg, 1994).

מחקרים בחינוך מצביעים על כך, שמשימות וחידות המבוססות על משחקים מהווים אתגר אינטלקטואלי ומאיצים תהליכי למידה (Delvin, 2013). אחת מדוגמאות של משחק הכולל בנייה אינטראקטיבית של צורות גיאומטריות ומצולעים הוא משחקים המשלבים בניות עם גפרורים. בניות מגפרורים ידועות כדוגמא לחשיבה ויזואלית מגוונת ומורכבת (Hershkowitz *et al*, 2001). שילוב משחק בניות באמצעות גפרורים נפוצים בתרבות הפנאי בפרט בשל הדינמיות, ויזואליות והנגישות אליהם לצורך התנסות של בניות שונות (Kordemsky, 1992). התמודדות עם משימות כאלו תורמת לבניית תובנות כלפי עקרונות אלגבריים וגיאומטריים (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2007). העיסוק במשימות המשלבות משחק עם גפרורים מוביל את הלומדים לסיטואציות מתמטיות בעלות אופי דינמי ומתפתח ומזמנות ייצוג ויזואלי לפתרונות מפתיעים ולא טריוויאליים (Katz, Segal & Stupel, 2015).

ידע נדרש ממורים למתמטיקה

במהלך העשורים האחרונים חוקרים בחינוך מתמטי עוסקים באפיון הידע הנדרש ממורים למתמטיקה. Ball *et al* (2008) הרחיבו את הגדרותיו הקלאסיות של Shulman והגדירו את המונח Mathematical Knowledge for Teaching – כיידע שחוצה תחומים ורמות של מתמטיקה הבית-ספרית, ידע התומך ברעיונות מגוונים של המורים למתמטיקה ומדגיש את היכולת של המורים לתכנן להעריך ולנהל תכנים מתמטיים להשבחת ההוראה. אחד משששת מרכיבי ידע זה הרלוונטי למחקר הנוכחי הוא: specialized content knowledge (SCK) - רכיב זה כולל את הידע והמיומנויות המתמטיים הייחודיים להוראה שאינם נדרשים בדרך כלל למטרות שאינן הוראה, כגון חיפוש שגיאות סטודנטים, שילוב מושכל של דוגמאות ומשימות במהלך ההוראה, היכרות עם מספר גישות להוראת נושא מסוים וכו'. חיזוק ידע זה בהקשר לעקרונות הכללים של המקצוע, מודגש במאמרו של Wu (2013).

מתודולוגיה:

המחקר הנוכחי מבוסס על פרדיגמת המחקר האיכותני, ומטרתו לחקור את התרומה של שילוב משימות מתמטיות העוסקות בהרכבת אובייקטים מאוסף גפרורים, לידע המתמטי והפדגוגי של פרחי הוראה.

משתתפי וסביבת המחקר

במחקר הכולל השתתפו 30 פרחי הוראה הלומדים במכללות להוראה לקראת תואר ראשון בחינוך המתמטי בבית הספר היסודי. המשימות הוגשו לסטודנטים במסגרת הקורס לפיתוח חשיבה מתמטית. הקורס התמקד בין היתר בשילוב משימות חקר הכוללות משחקים וחידות מתמטיות במגוון תחומים.

כלי המחקר כללו

1. סיטואציה מתמטית פתוחה המתפתחת לחמש משימות רב-שלביות המשלבות משחק בניות עם גפרורים, המזמנות חשיבה רב-כיוונית, בחירת פרשנויות ותהליכי חקר. המשימות עסקו בבניות של מצולעים שונים בעלי יחידות שטח שלמות והיקף קבוע. מטרות שילוב המשימות היו להגביר את תובנות הלומדים אודות קשרים בין שטח והיקף של מצולעים במודלים שונים (מצולעים על רשת משבצות, מצולעים עם הקודקודים על רשת נקודות, משולשים "בבניה חופשית") לרבות תכונות קיצון של מצולעים מסוימים. לפתח , להכשיר ולהקנות לפרחי ההוראה את היכולת לשלב משימות מסוג זה, עם יציאתם לשדה ההוראה וזאת בשלבים השונים של הוראת הגאומטריה ובהתאם לידע וליכולת של התלמידים.
2. דוגמאות למשימות מתמטית המשלבות משחק עם גפרורים ששולבו במחקר: על לוח ריבועי של המשבצות בהינתן שטח של מצולע (מספר שלם) יש לבנות מגוון מצולעים בעלי אותו שטח; בהינתן שטח של מצולע (מספר שלם) יש לבנות את המצולע בעל ההיקף המינימלי; בהינתן היקף נתון יש לבנות מגוון מצולעים בעלי אותו שטחים שונים ועוד. הסטודנטים עבדו על המשימות בקבוצות.
3. הפתרונות של הסטודנטים למשימות, נבחנו במטרה להעריך את דרכי ההתמודדות ואת המגוון הרחב של הפתרונות שנמצאו, וון את דרכי ההנמקה, יכולת ההכללה של הפתרונות ועוד.
4. תצפית משתתפת - באמצעות התצפית בעבודת הסטודנטים והשיח שהם קיימו סביב פתרון המשימות ניתן היה להתחקות אודות התרומה של פתרון משימות המשלבות משחק בניות עם גפרורים לידע המתמטי שלהם.

בשלב הראשון נאספו ונותחו הנתונים מתוך דפי העבודה של הסטודנטים, במטרה לזהות קטגוריות ראשוניות לאפיון התרומה של שילוב משחק בניות באמצעות גפרורים לידע המתמטי והפדגוגי של הסטודנטים. בשלב שני נותחו הנתונים מתוך התצפיות במטרה לזקק את הקטגוריות שעלו מהשלב הראשון ובהתאם להן גובשו קטגוריות מתאימות.

ממצאים חלקיים

השילוב של המשחק בהוראה עורר את התלמידים לתחרות בתוך כל אחת מהקבוצות ובין הקבוצות, שעוררה את העניין והמוטיבציה של הסטודנטים להמשיך לחקור את המשימות. המשחק הדינמי עם הגפרורים אפשר לכל אחד מהסטודנטים להשיג הצלחה בפתרון המשימה **"היה מאוד מעניין לבחון אפשרויות שונות של בניות מצולעים וממש לא שמנו לב איך שהזמן עבר", "כמה מפתיע שנמצאו צורות רבות ושונות זו מזו במידה רבה".**

במסגרת הנוכחית נציג את הממצאים מתוך המענה הסטודנטים למשימה 3, כאשר היקף המצולע הנתון היה 12 יחידות אורך. מתוך המענה של הסטודנטים למשימה ומתך התצפיות על תהליך עבודת הסטודנטים על פתרון המשימה ניתן היה לזהות פרשנויות שונות של הנתונים, וכן דרכי התמודדות מגוונות "הבלתי קונבנציונליות". בכל המקרים של חיפוש המצולע בעל היקף/שטח קיצוני הסטודנטים מרבית הסטודנטים (כ- 93%) בחרו בצורה ריבוע. כ- 63% הסטודנטים נטו להשתמש בפתרון הכולל שימוש במצולעים המוכרים להם (כמו: ריבוע, מלבן, משולש). כך למשל סטודנטים שהתקשו לזהות מצולעים שהיקפם 12 יחידות בעלי שטחים שונים טענו: **"ההיקפים יהיו חייבים להיות שונים מ- 12 יחידות ברב המקרים"; "כשקראתי את המשימה ניסיתי לחשוב על פתרונות אפשריים, וכשלא הצלחתי החלטתי שזה בלתי אפשרי, זה נראה ממש לא הגיוני. נדהמתי לראות שזה כן אפשרי מהפתרונות שהוצגו"**. בהמשך, תוך כדי חשיפה לפתרונות של עמיתים, רוב פרחי הוראה (הצליח להתנתק מאילוץ זה. במקביל הסטודנטים הרחיבו את הידע הפדגוגי שלהם באמצעות חשיפתם לכלי הוראה המזמן מצד אחד הנאה ומצד שני תהליך למידה משמעותי: **"אני מתכוונת לעשות שימוש במשחק הזה גם בהוראה שלי במסגרת העבודה המעשית".**

סיכום ודיון

משימות לפרחי הוראה המשלבות משחק הכולל הרכבת מצולעים מגפרורים, הוביל להרחבת הידע המתמטי של הסטודנטים. במסגרת תהליכי החקר, הסטודנטים נחשפו לרפרטואר מגוון פתרונות לכל אחת מהמשימות שהוגשו להם, והצליחו לבנות מגוון רחב של מצולעים בהתאם להגבלות שהוטלו. פרחי ההוראה ציינו, כי אופן הצגת המשימות והסביבה המוחשית העשירו את התובנות שלהם אודות דרכי הוראה ודיון בכיתה. תוצאות דומות התקבלו, למשל גם במחקרה של פרוסק (2018). על בסיס הרחבת הידע המתמטי שלהם וחוויית הלימוד, הסטודנטים עשירו את הידע המתמטי להוראה שלהם ובפרט את ה-specialized content knowledge, על ידי חשיפה לכלי נוסף שעשוי לגוון

ולהשביח את הוראת המתמטיקה, תוך כדי והתנסות הלכה למעשה עם כלי המזמן את הוראת קשרים בין שימור ושינוי של שטח והיקף של צורות גאומטריות.

ממצאים אלו עולים בקנה אחד עם ההמלצות להוראת הגיאומטריה בבית הספר הכוללות בנייה של אופני חשיבה שונים ושילובם בהוראה (לייקין וירושלמי, 2012). תכנית הלימודים בגיאומטריה אמורה לספק הזדמנות לחוות ולהתנסות בצורות גיאומטריות במגוון גדול עד כמה שניתן כמו בניות בשילוב אמצעים מוחשיים, באופן אינטראקטיבי.

רשימת מקורות

לייקין, ר' וירושלמי, מ' (2012). **הוראת הגיאומטריה – נייר עמדה**. http://ymath.haifa.ac.il/images/stories/part3/moreymorim/teaching_geometry_position_paper_2012.pdf

פרוסק, נ' (2018). השפעת עיצוב המטלות וסביבת הלמידה על המעבר מהצדקות אינטואיטיביות ויזואליות לשימוש בטעונים דדוקטיביים. ב- א. לבנברג, ד. פטקין (עורכות). **גאומטריה פנים רבות לה : מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה**, עמ' 196-226, תל-אביב : מכון מופ"ת.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389–407.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (235-272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Devlin, K. (2013). The Music of Math Games. American Scientist the magazine of Sigma Xi, The Scientific Research Society, pp. 87-91.

Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Bruckheimer M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning - the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32:2, 255-265.

Katz, S, Segal, R., & Stupel, M. (2015). Promoting Creativity and Self-efficacy of Elementary Students through a Collaborative Research Task in Mathematics: A Case Study. *Journal of Curriculum and Teaching*, 4(1), pp. 68-82.

Kordemsky, B. A. (1992). *The Moscow puzzles 359 mathematical recreations* (trans. A. Parry). New York: Dover Publications.

Romberg, T. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving: connections between theory and practice. In A. Schoenfeld (Ed.). *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 287-304). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *American Mathematical Society,* 58(3), 372-384.

תוכן מתמטי הנוצר באופן ציבורי במרשתת כמשאב למידה פוטנציאלי: חקר תגובות לסרטונים מתמטיים ויראליים

נחמה יעקוביץ, מכללת אורנים – המכללה האקדמית לחינוך
אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית

מבוא ורקע תיאורטי

OER (open educational resources) הינו מונח המתאר שימוש בטכנולוגיה לצרכי למידה באמצעות שיתוף של תכנים וחומרים, כגון שיעורים באופן מקוון (Caswell et al., 2008), אתרי אינטרנט ייעודיים המכילים תכנים בתחום מסוים (Trgalova & Jahn ,2013), ושיתוף של תכנים ברשתות חברתיות. Trgalova and Jahn (2013) טוענות כי היעדר כלים לתקשורת ושיתוף פעולה עשוי להפחית את המוטיבציה של המשתמשים לתרום ולפתח תכנים חדשים ב- OER. Kynigos (2014) קורא לעיצוב של סוגים חדשים של OER שיכולים להוביל קהילות רחבות יותר ללמידה של מתמטיקה. חקר של תופעת סרטונים מתמטיים ויראליים (סרטונים שצברו מיליוני צפיות) שנוצר עקב שיתוף, שינוי ופיתוח תכנים ספונטני ב- Web 2.0 (Andersen, 2007) יכול לשמש מפתח לעיצוב של OER מסוג חדש.

לאור הצורך בפיתוח OER נוספים, מטרות מחקר זה הן: 1. לבחון את איכות התוכן המתמטי המתפתח סביב סרטונים מתמטיים ויראליים בהלימה לנושאי הלימוד בתוכנית הלימודים במדינת ישראל. 2. ניתוח התוכן המתמטי המתפתח סביב סרטונים מתמטיים ויראליים בדגש על שגיאות אופייניות, אסטרטגיות פתרון והתפתחות דיוני גולשים.

פלטפורמת מחקר זה הינה יוטיוב (YouTube) - אתר לצפייה בתכני וידאו, שלפי Khan (2017) מאפייניו הם חופשיות שיתוף המידע וצריכתו, השתתפות באמצעות דירוג (אהבתי/לא אהבתי), כתיבת הערות ושיתוף התוכן. כפי שהוצג על ידי Haran & Poliakoff (2011), סרטונים חינוכיים יכולים להפוך לוויראליים. תגובות על סרטוני וידאו עלולות ליצור אינטראקציות דיאלוגיות, ובכך לתרום לאטמוספירה מסקרנת, דינאמית ויצירתית, בה לכל משתתף תחושת שותפות ותרומה. Asterhan and Schwarz (2007) הראו שלמידה דיאלוגית מביאה לרווחים הרעיוניים של התלמידים, כאשר מארגנים דיון וויכוח כיתתי מנומק, אך לא ברור האם אינטראקציה דיאלוגית בתגובות לסרטונים תניב תוצאות דומות.

תופעת התפתחות של ידע מתמטי ספונטני על גבי תגובות לסרטון ויראלי נחקרה מעט יחסית. Palatnik (2015) בדק את הידע המתמטי שנוצר בעקבות סרטון ויראלי בנושא סדרות אינסופיות מתכנסות באמצעות ניתוח התגובות לסרטון, וממצאיו העלו כי אינטראקציות בין הגולשים הובילו ליצירת תגובות המכילות תוכן מתמטי רב ברמות שונות. ניתוח דפוס חיפושים בגוגל בתקופה בה הופץ הסרטון, הראה שהסרטון הצליח לעורר עניין גלובאלי לתוכן מתמטי הקשור בצורה ישירה ועקיפה לתכניו.

מחקר זה מתמקד בתוכן של תגובות לסרטונים מתמטיים ויראליים, ומידת התאמתו למטרות חינוכיות. בהצעתינו נדון בשאלות הבאות:

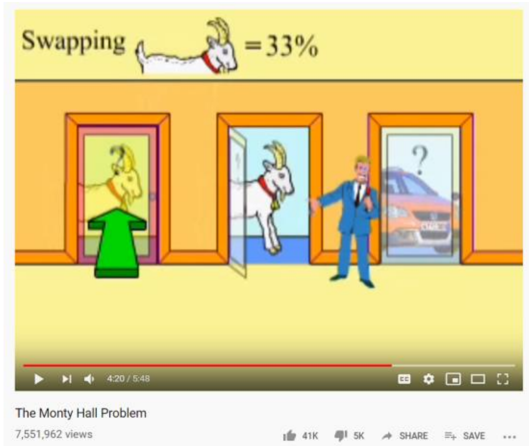
מה מכילות תגובות גולשים שנכתבו בעקבות צפייה בסרטון מתמטי ויראלי מבחינת: הרכב ואיכות תוכן התגובות; התפתחות דיוני גולשים. נדגים גם כיצד התגובות לסרטונים ויראליים חושפות את הגולשים לתוכן מתמטי פדגוגי כמו: מגוון אסטרטגיות לפתרון או מגוון שגיאות אופייניות.

מתודולוגיה

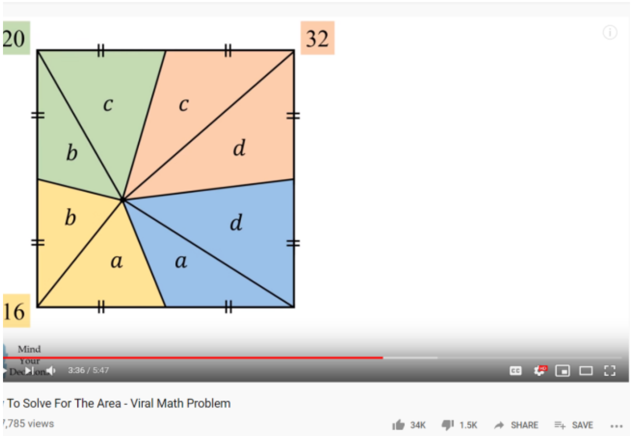
לצורך המחקר נבחרו שני סרטונים ויראליים שפורסמו ביוטיוב (ראה איור 1):

1)"How To Solve For The Area - Viral Math Problem": סרטון המציג חידה גיאומטרית של חישוב שטח חלקי מריבוע. עד לתאריך 10.2.19 הסרטון צבר 1,237,185 צפיות ו-1,993 תגובות.

2) "The Monty Hall Problem": סרטון העוסק בחידה פופולרית, שהוצגה בשעשועון טלוויזיוני אמריקאי. בסרטון ניתן הסבר על הבעיה באמצעות בחינת סיכויי ההתרחשות של כל המקרים האפשריים. עד לתאריך 10.2.19 הסרטון צבר 7,358,380 צפיות ו-23,993 תגובות.



https://www.youtube.com/watch?v=mhlc7peGlGg

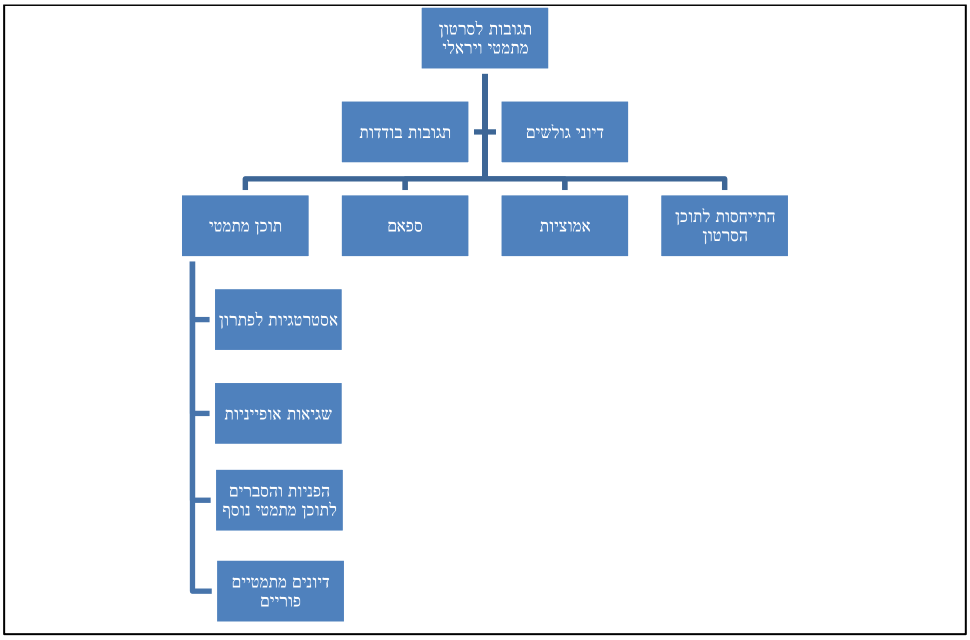


https://www.youtube.com/watch?v=BgrWHOocYZA

איור 1. צילומי מסך וקישורים לשני הסרטונים.

סך הנתונים למחקר היה כדלהלן: סרטון חישוב השטחים: 198 עמודי תגובות, מתוכם נדגמו 25 עמודים, המכילים 223 תגובות. סרטון מונטי הול: 234 עמודי תגובות, מתוכם נדגמו 22 עמודים, המכילים 134 תגובות.

ניתוח הנתונים הוא ניתוח איכותני של תוכן הטקסט שנעשה אינדוקטיבית באופן הבא: קריאת כל התגובות במטרה לזהות מאפיינים ייחודיים ומשותפים בין התגובות שהובילה לקטגוריזציה ראשונית: תגובות בעלות תוכן מתמטי, תגובות ספאם, תגובות אמוציונאליות, תגובות המכילות התייחסות לתוכן הסרטון. לאחר מכן נקראו שנית התגובות בעלות התוכן המתמטי בלבד, והן חולקו לתתי קטגוריות. (ראה תרשים 1. ניתוח נתונים בהתאם לקישוריות, תוכן ומפרט מתמטי של התגובה) לצורך אימות החלוקה לקטגוריות, בכל השלבים נערכה בחינה הדדית של המחברים.

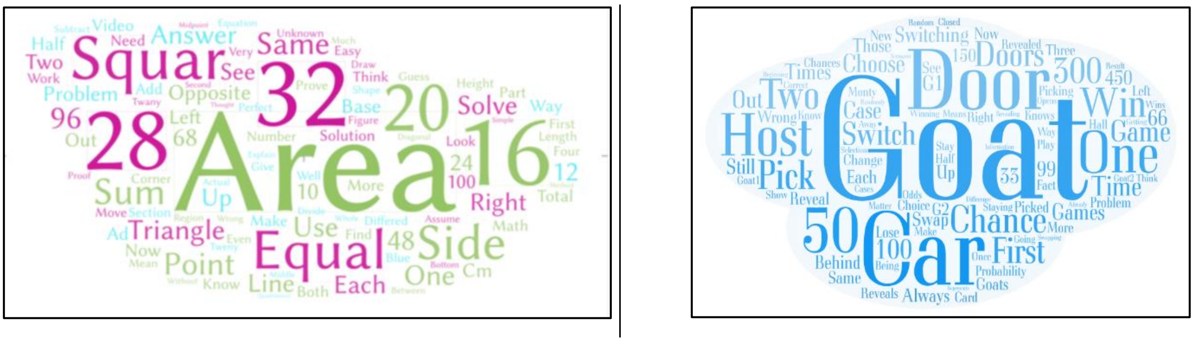


תרשים 1. ניתוח נתונים בהתאם לקישוריות, תוכן ומפרט מתמטי של התגובה

לצד זאת, נעשה שימוש בסטטיסטיקה תיאורית, שבוצעה באמצעות ענן מילים (Feiberg, 2013; McNaught & Lam, 2010; Palatnik, 2015).

ממצאים ודיון

ענן המילים וטבלת התפלגות מילים של סרטון חישוב השטחים הראו רוב של מילים בעלות טרמינולוגיה מתמטית, ואלה של סרטון מונטי הול הראו רוב מילים הקשורות לחידה המוצגת (ראה איור 2):



איור 2. ענני מילים (100 מילים הנפוצות ביותר) מדגים שתוכן התגובות מתייחסת לתוכן הסרטון.

נמצא גם כי רוב התגובות הינן בעלות תוכן מתמטי מסוגים שונים, וסביב חלקן מתפתחת אינטראקציה פעילה ונוצר דיון בין גולשים. נדגים מספר אסטרטגיות לפתרון מתוך התגובות לסרטון השטחים. האסטרטגיה הראשונה היא באמצעות הסבר העקרון שימור השטח, כך שהגדלה או הקטנה של אחד השטחים, משנה באופן פרופורציונאלי את שטחם של האחרים:

"Because the area is 100%. Imagining the dot starting from the centre, every movement of that dot increases and simultaniously decreses opposite sides by the same proportion."

נדגיש שבתגובה זו מוצג העקרון הנ"ל, תוך הצעה להמחשה דינאמית באמצעות הזזת הנקודה לאמצע הריבוע.

תגובה אחרת מציגה באופן דינאמי מקרה קיצון בכדי להמחיש את הטענה:

"I thought how the area was changing when the point approached to a corner. Realized the CD part will approach to 1/2 while BA will approach to 0. CB and AD will then approach to 1/4. So CB+AD=CD+BA =>AD =28".

כך הגולשים נחשפים לפתרון הבעיה בכמה דרכים (לייקין ולבב, 2012; סטופל ובן חיים, 2014).

מורה המחפשת דוגמאות לשגיאות אופייניות בנושאים מתכנית הלימודים יכולה גם להיעזר בתגובות לסרטונים. להלן שגיאה מהתגובות לסרטון מונטי הול:

"If he's going to show me a door with a goat, obviously I'm not gonna pick it, so it isn't 66% chance for goat and 33% for car, it's already 50% chance with 2 doors, one for both. wheter you swap or not."

תגובה זאת כוללת תרגום אינטואיטיבי של החידה לכלים הסתברותיים שאינם נכונים עבורה, כך שבמקום לזהות שמדובר בהסתברות מותנית, הגולשים מזהים הסתברות פשוטה (בהתאם לקופרמן, 1998 ; & Tsakiridou Vavyla, 2015). בעקבות תגובה זו ודומות לה התפתחו דיונים פעילים שכללו הסברים מגוונים ותיקון שגיאות. ככלל, ניתן להבחין כי דיונים בעלי תוכן מתמטי התעוררו בעיקר בעקבות תגובה שהכילה שגיאה, ופחות בעקבות שאלות פתוחות.

אחד מהמאפיינים המבדילים בין תגובות לשני הסרטונים היה נוכחותם של גולשים דומיננטיים בתגובות לסרטון מונטי הול: שלושה מגיבים, שנראו כמומחים לבעיה, הגיבו לכל שגיאה שהועלתה, וניהלו דיונים. נראה כי לכל אחד מהם גישה דידקטית שונה, וכתוצאה ממנה – התפתחות דיונים שונה. השתתפותם יצרה תהליכי למידה מסודרים, המזכירים התנהלות כיתתית מנוהלת ע"י המורה.

יש לציין שלא כל התגובות הכילו תוכן מתמטי. 9% מכלל התגובות המכילות אמוציות שליליות וחיוביות כלפי הסרטון ומתמטיקה בכלל , ו-7.5% נוספות הכילו ספאם.

מחקר זה מחזק ומעמיק ממצאים של Palatnik (2015), לפיהם בתגובות לסרטונים ויראליים ניתן לראות התפתחות ידע מתמטי וסביבת למידה פורייה. יחד עם זאת ממצאינו מגלים אי אחידות באופי של תגובות ודיונים. התופעה של

מנחים ספונטניים דורשת בחינה מדוקדקת יותר. יש צורך ביצירת בסיס תיאורטי ללמידה המתרחשת בסביבה חינוכית פתוחה מבוססת על תוכן מתמטי הנוצר באופן ציבורי במרשתת. כמו כן ישנו צורך לבחון תרומה מעשית של משאב זה להוראה וללמידה.

מקורות

ליקין, רוזה, לבב-וינברג, ענת, ולטמן, אינה, & ויינברג, ענת. (2012). ריבוי פתרונות לבעיה בגאומטריה והכללת הבעיה. *על"ה: עלון למורי המתמטיקה, 47: 30-36.*

סטופל, משה, & בן-חיים, דוד. (2014). בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון: ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 1:* 80-106.

קופרמן, אלכס. (1998). הסתברות מותנית כמקור לפרדוקסים ותוצאות מפתיעות. *על"ה: עלון למורי המתמטיקה 22: 64-67.*

Andersen, P. (2007). *What is Web 2.0?: Ideas, technologies and implications for educa*tion (Vol. 1, No. 1, pp. 1-64). Bristol: JISC.

Asterhan, C. S., & Schwarz, B. B. (2007). The effects of monological and dialogical argumentation on concept learning in evolutionary theory. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 626.

Caswell, T., Henson, S., Jensen, M., & Wiley, D. (2008). Open content and open educational resources: Enabling universal education. *The International Review of Research in Open and Distributed Learning*, *9*(1), 1-11.

Haran, B., & Poliakoff, M. (2011). The periodic table of videos. *Science, 332*(6033), 1046–1047.

Khan, M. L. (2017). Social media engagement: What motivates user participation and consumption on YouTube ?. *Computers in Human Behavior, 66*, 236-247**.**

Kynigos, C. (2014). Clark-Wilson A, Robutti O, Sinclair N. (Eds.): The Mathematics Teacher in the Digital Era, An International Perspective on Technology Focused Professional Development. *Technology, Knowledge and Learning*, *19*(1–2), 249–253.

Palatnik (2015). What can be learned from online public-generated mathematical content? The case-study of comments on viral mathematical video. In K. Krainer, N. Vondrová (Eds.), *Electronic Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME), pp. 2374-2380, Prague, Czech Republic.

Trgalová, J., & Jahn, A. P. (2013). Quality issue in the design and use of resources by mathematics teachers. *ZDM*, *45*(7), 973–986.

Tsakiridou, H., & Vavyla, E. (2015). Probability Concepts in Primary School. *American Journal of Educational Research*, *3(4),* 535-540.

מטא-קוגניציה: ממד חדש בחיבור שבין המתמטיקה האקדמית לבין ידע להוראת מתמטיקה (MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING-MKT)

תמרה לפקורט, אוניברסיטת בר-אילן

מבוא

ידע מתמטי להוראה (MKT), היא מסגרת תיאורטית שפותחה על ידי Ball, Phelps & Thames (2008) אשר מזהה תחומי ידע שהמורים צריכים לרכוש כדי ללמד ולתמוך בלמידה של תלמידיהם בצורה אפקטיבית.

בשנים האחרונות, מתמקדים יותר ויותר על החיבור שבין "המתמטיקה האקדמית" לבין MKT. בדו"ך זה, משמעותה של "המתמטיקה האקדמית" היא המתמטיקה הנלמד במהלך לימודי תואר ראשון במתמטיקה. רובם המחקרים על החיבור בין המתמטיקה האקדמית לבין MKT מתמקדים על מבנים של הקורסים (e.g., Lai, 2018; Wasserman et. al, 2019; Zaslavsky & Cooper, 2017)

דו"ח תיאורטי זה מתייחס לגורם בלתי נחקר ברובו במסגרת המאמצים להפוך את המתמטיקה האקדמית לרלוונטית להוראת המתמטיקה בחינוך העל יסודי: התהליכי החשיבה (מטא-קוגניציה) של המורים עצמם. אני דנה כאן באפשרות למורים להשתמש בתהליכים של רפלקציה מטא-קוגניטיביות כדי לחבר בין חוויותם כלומדים של מתמטיקה אקדמית לבין ההוראה שלהם.

הבסיס התיאורטי

דה-מרכוז ("DECENTERING") של רכישת הידע

מושג DECENTERING של פיאז'ה (1955)--היכולת לבחון סיטואציה מכמה נקודות מבט--יכול להיחשב כמרכיב של MKT (Teuscher, Moore, & Carlson, 2016). בהקשר זה, הוא מאפיין את יכולת המורים לאמץ את נקודת המבט של התלמידים. Thompson & Silverman (2008) תיארו את התפתחות ה-MKT כתהליך של DECENTERING התפתחות של הידע. הם משתמשים במונחים של המסגרת התיאורטית "ההבנות ההתפתחותיות המרכזיות" (KEY DEVELOPMENT UNDERSTANDINGS-KDUs) של Simon (2006) כדי לאפיין את התפתחות הידע כסדרה של התקדמויות מושגיות משמעותיות. על פי Thompson & Silverman ה-MKT מתפתח באמצעות תהליך של DECENTERING KDUs אישיים של מורים, שבדרכו מורים תומכים בלמידה התלמיד ומטפח את ה-KDUs של התלמיד.

DECENTERING יכול להתפרש כמיומנות שנרכשת תוך כדי ההכשרת מורים או ההתפתחות המקצועית (e.g., Wasserman, 2018); אפשר גם לראות בה תהליך מודע של רפלקציה מטא-קוגניטיבית, אשר הוכח כבעל השפעה חיובית על ההוראה (Breen, Meehan, Rowland, & Breen, 2018). בהקשר של מתמטיקה אקדמית, DECENTERING מופיעים כאל מרכיב בהכנת מורים או בהתפתחות מקצועית אך לא כתהליך מטה-קוגניטיבי.

דו"ח תיאורטי זה מתייחס לתחום שלא נחקר בעבר: DECENTERING של מתמטיקה אקדמית כתהליך מודרך של רפלקציה מטא-קוגניטיבית.DECENTERING של מתמטיקה אקדמית כתהליך מטא-קוגניטיבי.

DECENTERING המתמטיקה האקדמית כתהליך מטא-קוגניתיבי

Koichu & Marmur (2018) חוקרים את אירועי מפתח בלתי נשכחים (Key Mathematical Events-אירועי-KME-- טריגרים רגשיים ולמידה.אירועי KME מתיחסים לתפקיד הרגשות בהתפתחות הידע במתמטיקה האקדמית. אירועי KME הם מקרים שמתרחשים בכיתה, אשר סטודנטים רואים אותם כתומכים בלמידתם ובהתפתחות הידע שלהם. לעתים קרובות מזוהים אירועים אלה באמצעות רגשות החיוביים או השליליים חזקים הנלווים אליהם (Marmur, 2019). דוגמאות לאירועי KME כוללות: רגעי "וואו" שבהם מזהה התלמיד גשרים בין חשיבה אינטואיטיבית לחשיבה אנליטית; וכן רגעים שבהם מתגלים חיבורים בין רעיונות מתמטיים (Marmur & Koichu, 2018). הם יכולים להיות טריגרים ל-KDUs.

דוגמה אמפרית של DECENTERING המתמטיקה האקדמית: KMEכתהליך של רפלקציה מטא-קוגניטיבית

אוניברסיטה פרטית גדולה בארצות הברית מציעה מסלול של תואר שני בהוראת מתמטיקה. התלמידים (על פי רוב מורים), נדרשים להירשם לסמינר פדגוגי שניתן במקביל לחדו"א 1 או 2. את הסמינר ואת מסלול החדו"א מעבירים מרצים שונים.

המורים שרשומים לקורס ולסמינר למדו כבר חדו"א; מטרת הסמינר היא לעשות שימוש ב"התרחשויות" בחדו"א כדי לעורר דיונים בהוראת המתמטיקה. מבנה הסמינר היא גמישה, ולמרצים ניתנת אוטונומיה בתכנון של הסמינר ובהגדרת של מטרותו.

בסמינר הפדגוגי של קיץ 2019, השתמשתי ב-KME ככלי לחבר בין החוויות של המורים בשיעורי חדו"א לבין הוראהתם. במהלך הסמינר, התברר כי DECENTERING של אירועי-KME הוא כלי עוצמתי להופך את המתמטיקה האקדמית לרלוונטית להוראה. הפעילויות והדיונים בסמינר מוצעות באופן אנקדוטי על מנת לעמוד בדרישות הקפדניות של וועדת האתיקה בנוגע לנתונים לא סמויים מלכתחילה.

במפגש הראשון של הסמינר הוצגו בפני המורים (כסטודנטים) מושג ה-KME:

היזכרו בשיעור חדו"א מאתמול וחישבו עליו. למשל: מה למדתם שם? מה חשבתם? איך הרגשתם? איך הגבתם? אילו סוגים של אירועים ו/או זכרונות משיעור עולים לך לראש?

מבין אלה, האם יש אירוע/זכרון ספציפי משמעותי במיוחד בחוויה שלך מהשיעור? אירועים/זכרונות אלו נקראים KEY MEMORABLE EVENTS[1]

אחרי הקדמת מושג ה-KME המורים התבקשו לתאר KME אחד משיעור החדו"א ,כולל מה היה משמעותי במיוחד עבורם בקשר ל-KME.

לפני כל אחד ממפגשי הסמינר התבקשו המורים לזהות KME מכל אחד שיעורי החדו"א שהתקיים בין מפגשי הסמינר ולהסביר מה היה משמעותי במיוחד עבורו. המורים הגישו את התגובות. האירועי-KME ההוגשו היו בסיס לדיון במפגשי הסמינר. דרך הדיונים, התגלו את הרעיונות המתמטיים שעלו לראש ואת וההוראה/למידה שהתרחשו במהלך ה-KME

ככל שהתקדם הסמינר, הדיונים התמקדו DECENTERNG של אירועי-KME: המורים קיימו סיעורי מוחות בנוגע לתרחישים ולפעילויות למידה שבהם KME יבאו לדי ביטוי עבור התלמידים. במקביל, השאלות המטה-קוגניטיביות הורחבו לכלול רפלקציה על DECENTERNG של אירועי-KME .

בשבועות האחרונים של הסמינר, המורים,עבדו בזוגות ליצור פעילויות למידה על סמך KME שעלה מהרפלקציה המטא-קוגניטיבית. מטרת הפעילות שנוצרה הייתה היתה לאפשר תלמיד לחוות אותו ה-KME. בטבלה 1 להלן מפורטות דוגמאות.

טבלה 1. מאירועי KME אישיים דרך אירוע KME של תלמיד לפעילות למידה

KME של המורה	בהקשר של חדו"א	Decentering ה-KME	פעילות לתלמידים
קליטת רעיון/גישור	בשימוש בתוכנה גרפית דינמית המרצה לחדו"א הדגים את הקשר בין: דיוק באומדן הערך של פונקציה בנקודה באמצעות פולינום טיילור; לבין מעלה הפולינום	תוכנה גרפית דינמית מתאימה להדגמה דרמטית של מושגים אלגבריים	פעילות שמשתמשת תוכנה גרפית דינמית כדי לגלות את עקרונות התנהגות של פולינומים – כולל אומדן של ערכי שורשים
הבחנה בתסכול/פער הידע אצל אחרים	סטודנטים תואר ראשון בשיעור החדו"א לא הבינו את משמעות של מבחן היחס כדרך לבדוק התכנסות/התבדרות של טור חזקות	לו היה בידי הסטודנטים הרקע הנחוץ, הם היו יכולים לחוות אירוע KME חיובי של חיבור בין ידע קודם לידע חדש	פעילות להדגמת הקשר בין פונקציות מעריכיות לבין סדרות הנדסיות וסכומים חלקיים

[1]תודות לעופר מרמור על דיונים על כיצד להציג מושג ה-KME

בסוף הסמינר, הסיקו המורים כי DECENTERNG של אירועי-KME דרך רפלקציה מטא-קוגניטיבית שיפרה את הוראתם. הם מתכננים להמשיך בתהליךבאופן עצמיי ומצפים לכך שזה תעלה את הרלוונטיות של קורסים במתמקטיה אקדמית. באמצעות DECENTERNG של אירועי-KME המורים צפו ההשפעה של המתמטיקה האקדמית על ההוראה: הם זיהו סמנים של בלבול מתמטי אפשרי והבחינו בהזדמנויות מתמטיות להעשיר את הידע המתמטי של תלמידהם.

השלכות

תהליכי רפלקציה מוסיף פרספקטיבה מטא-קוגניטיבית לדיונים בהקשר ההשפעה של מתמטיקה אקדמית. המושג המופשט מחשה באמצעות הדוגמה הדוגמא המובאת כאן: DECENTERING של אירועי-KME

ניתן להרחיב את היקף המחקרים על קשרים בין המתמטיקה האקדמית לבין MKT על ידי מציאת מקום למטא-קוגניציה. תהליכים של מטא-קוגניציה רפלקטיבית יתנו למורים היכולת למצוא קשרים באופן עצמעי. וכך ההשפעת המתמטיקה האקדמית על הוראת המתמטיקה העל-יסודית תעל.

רשימת מקורות

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Breen, S., Meehan, M., Rowland, T., & Breen, S. (2018). *An Analysis of University Mathematics Teaching using the Knowledge Quartet*. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849532

Lai, Y. (2018, March 1). Accounting for mathematicians' priorities in mathematics courses for secondary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, pp. 164–178. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.08.001

Marmur, O. (2019, June 1). Key memorable events: A lens on affect, learning, and teaching in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, p. 100673. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.002

Marmur, O., & Koichu, B. (2018). Which Key Memorable Events are Experienced by Students during Calculus Tutorials? *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3*, 347–354. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/326674510

Piaget, J. (1955). The development of time concepts in the child. In P. H. Hoch & J. Zubin (Eds.), *Psychopathology of childhood* (pp. 34–44). Oxford, England: Grune & Stratton.

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(6), 499–511. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5

Simon, M. A. (2006). Key Developmental Understandings in Mathematics: A Direction for Investigating and Establishing Learning Goals. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 359–371. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_1

Teuscher, D., Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2016). Decentering: A construct to analyze and explain teacher actions as they relate to student thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(5), 433–456. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9304-0

Wasserman, N. H. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 116–128. https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2017.11.003

Wasserman, N. H., Weber, K., Fukawa-Connelly, T., & McGuffey, W. (2019). Designing advanced mathematics courses to influence secondary teaching: fostering mathematics teachers' "attention to scope." *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(4), 379–406. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09431-6

Zaslavsky, O., & Cooper, J. (2017). What Constitutes a Proof? Complementary Voices of a Mathematician and a Mathematics Educator in a CoTaught Undergraduate Course on Mathematical Proof and Pr. *Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. San Diego, California.

התרומה ההדדית של תפיסת הכפל ותפיסת הריצוף בפתרון משימות משני התחומים

בטי סלע, בי"ס "שלום עליכם" ומכללת אורנים
תקוה עובדיה, מכללת אורנים ומכללת ירושלים

מבוא

ריצוף גיאומטרי קיים כבר מאות שנים אך עם זאת עדיין מופיעות תגליות מתמטיות חדשות ונושא זה יוצר עניין גם כיום. חלק מתגליות אלו מגיע מהשטח, מן התלמידים. מורים אשר מעזים ומשלבים את תחום הריצופים בתוכנית הלימודים בבית הספר ובמיוחד בכיתות הצעירות, יוצרים לתלמידיהם תשתית של אפשרות לחקר וגילוי. בעזרתם של Furner, Goodman & Meeks (2004) ו- Eberle (2015) ניתן להגדיר ריצוף כדפוס של צורה אחת או יותר המכסה מישור בצורה מושלמת ללא רווחים או חפיפות בין הצורות כך שהדגם יכול להמשיך באופן אינסופי בכל הכיוונים. בכיתה ב' התלמידים מתחילים בלימוד עובדות הכפל. הכפל הוא אחד מארבע פעולות החשבון המרכזיות והחשובות הנלמדות בבית הספר היסודי. עפ"י Wallace & Gurganus (2005) ו- Brendefur, Strother, Thiede, & Appleton (2015) תלמיד המגלה קשיים בלימוד הכפל יגלה קושי בהמשך לימודיו בבית הספר בשיעורי המתמטיקה ויבזבז את זמנו בפרוצדורות לא יעילות ויטעה בחישוביו. במחקר זה התבססנו על מערכי הכפל, תבנית חזותית המקלה על התלמידים בלימוד הכפל והבנת פעולת אלגוריתם הכפל (Day & Hurrell, 2015; Stott, 2016). אנו רואות חשיבות רבה בלימוד נושא זה ושילובו יחד עם נושא הריצופים באופן חדשני אשר לא נלמד באופן זה עד כה. אנו מאמינות כי לימוד הכפל בעזרת ריצופים יעורר את המוטיבציה של התלמידים ללמידה ויעודד אותם ללמוד את עובדות הכפל. בנוסף, לימוד נושא אחד באמצעות נושא אחר, כלומר כפל באמצעות ריצוף וההיפך מעשיר את הקשרים הקוגניטיביים שהתלמידים בונים כסכמה לכל מושג בפני עצמו.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 24 תלמידי כיתה ב' בשנה"ל תשע"ח אשר לקחו חלק בשיעור החשבון. לצורך המחקר פותחו יחידות לימוד המשלבות בעיות הדנות בריצופים ובכפל. בניתוח הנתונים התמקדנו תחילה בכל מושג בנפרד, כפל וריצופים, ולאחר מכן מצאנו את ההדדיות והקשרים בין המושגים. מתוך נתונים אלו נבנה עץ מושגים וסרגל התפתחות של הלמידה, בעזרתם הגענו להכללות ולממצאים המתארים את התפתחות הלמידה של התלמידים.

ממצאים

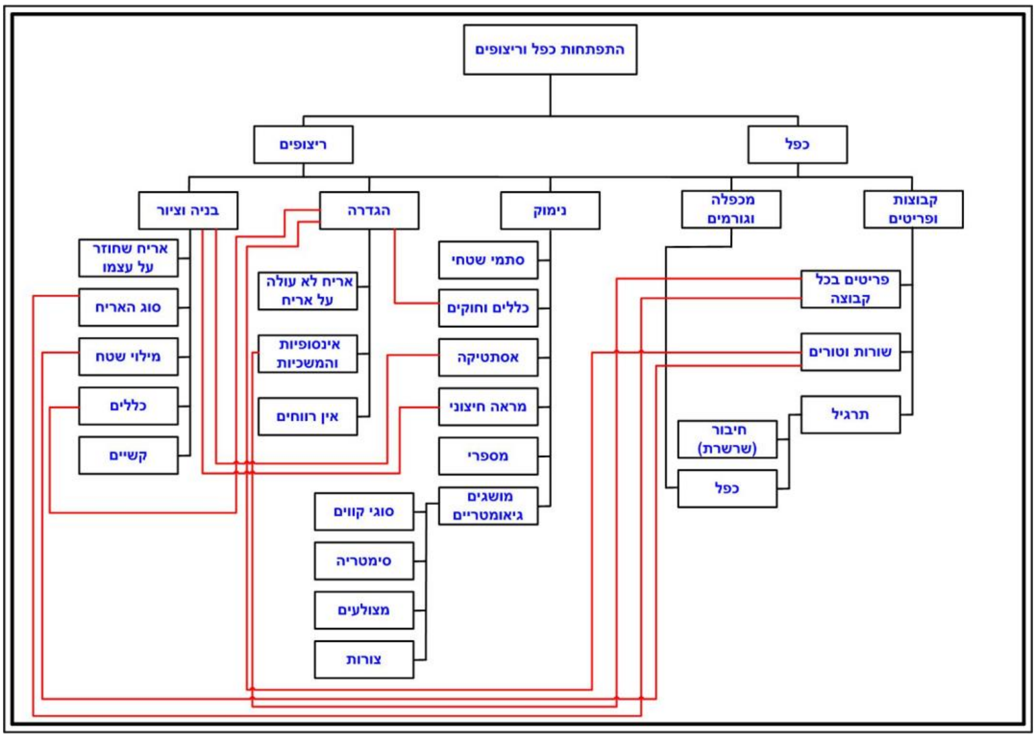
ממצאי המחקר חולקו לשלושה תחומים עיקריים: התפתחות מושג הריצוף, התפתחות מושג הכפל והיחסים ההדדיים בין כפל לריצוף והעברת הלמידה בין שני התחומים.

בהתפתחות מושג הריצוף ניתן לראות מעבודות התלמידים הפנמה של כללי הריצוף ושימוש בכללים אלו במהלך הריצוף. בתחילת המחקר התלמידים ציירו ובנו ריצופים עם רווחים וככל שהתקדמו המשימות התלמידים הקפידו שלא יהיו רווחים בין האריחים השונים בריצוף ובמשימות האחרונות לא ניתן למצוא תיעוד בעבודות התלמידים לרווחים בין האריחים. דוגמא לכך ניתן היה לראות ביחידה השלישית בסעיף של משימת העצים כאשר חלק מהתלמידים לא ראה את העצים ההפוכים. אחד התלמידים ניסה להסביר מדוע חבריו לכיתה טעו כשטען "זה לא מתאים למשימה, חייב להיות ריצוף ובריצוף אין חורים" וכך הראנו את העצים ההפוכים שיצרו ריצוף. כמו כן, חלה התפתחות גם בנושא אינסופיות הריצוף אם תחילה היה קושי לתלמידים לצאת מגבולות הדף לאט לאט נצפו מקרים של עבודות תלמידים אשר יצאו בעבודתם מגבולות הדף או המסגרת.

בחקירתנו אחר התפתחות הכפל ניתן היה לראות שהתלמידים השתמשו בריצופים וחיפשו את מבנה המערך הכפלי, השתמשו בשורות וטורים על מנת לתאר ולהסביר את עבודתם. בריצופים שונים היה על התלמידים למצוא את השורה ההפוכה וטענו שבלעדיה היו רווחים ולכן לא יכלו לתאר ריצוף. היה שימוש בקבוצות

מספר הפריטים בכל קבוצה כך שכאשר תלמידה טענה "יש 2 פרחים ו- 7 עלי כותרת לכל פרח" "זה מתאים לתרגיל אבל זה לא ריצוף וביקשת שזה גם יהיה ריצוף" ולכן הריצוף לא התאים לתרגיל הכפל הנתון.

מממצאי המחקר עולה כי התלמידים ביצעו העברת למידה של מושגי הכפל לתחום הריצופים והשתמשו במושגי הריצוף בהבנתם את נושא הכפל. הבנת הריצוף והכפל התפתחו יחדיו ובסוף התהליך התלמידים הבינו יותר טוב את מושג הכפל וידעו להשתמש בתכונות הריצוף בכדי למצוא את הקבוצות והפריטים בכל קבוצה בכדי לכתוב תרגיל כפל מתאים ולפתור אותו בדרכים שונות. באופן דומה ובמקביל לתהליך לימוד הכפל התלמידים הצליחו ליצור ריצופים שונים לתרגילי הכפל כששמרו על כללי הריצוף. את הקשרים בין המושגים וההתפתחות ניתן לראות באופן ברור בעץ המושגים שנבנה לצורך ניתוח הנתונים ראה איור 1. הקווים הרוחביים (אדומים) בעץ מתארים את ההדדיות בין שני המושגים הגדולים כפל וריצוף. בעזרת קשרים אלו ניתן למצוא את היחסים בין כפל לריצוף ובכך את העברת הלמידה בין שני הנושאים. התלמידים השתמשו במושגים משתי הקטגוריות בעץ על מנת לתאר ולהסביר את ביצועיהם במשימות השונות.



איור 1: עץ מושגים לתיאור תפיסת הכפל והריצוף והיחסים ההדדיים ביניהם

דיון

במהלך מחקרנו ראינו העברת למידה משני התחומים כפי שטענו Hurst & Hurrell (2016) על הבנת הכפל כקשר בין מושגים קשורים ויצירת קשרים חדשים ויישומם במצבים חדשים. תכנון הפעילויות והמשימות במחקרנו התבססו על המלצותיהם של Resing, Bakker, Pronk, & Elliott (2016) אשר גילו במחקרם כי המשוב במשימות סייע להצלחת העברת הלמידה. אחד המרכיבים הקבועים והחשובים היה קיומו של דיון לאחר כל משימה בכל יחידת לימוד. בעזרת הדיון הוסקו התובנות אשר בעזרתן נבנה עץ המושגים המתאר את תפיסת הכפל והריצוף והיחסים ההדדיים ביניהם (ראה איור 1).

במהלך השיעורים שהועברו במסגרת מחקר זה ניסינו ללמד את תלמידי כפל בדרך של תובנה מספרית והבנה של פעולת הכפל וחשיבה ולא רק מידיעת עובדות הכפל כפי שהציעו Fuson (2003), Wallace & Gurganus (2005), Boaler (2015) Hurst & Hurrell (2016) ו- Day & Hurrell (2015). דרך הריצופים התלמידים השתמשו בכללי הריצוף כשחיפשו את תרגיל הכפל ואת הקבוצות והפריטים בכל קבוצה. כמו כן, הם חיפשו את השורות והטורים על מנת לא ליצור רווחים. למידה באמצעות הבנה עזרה לתלמידים והם קישרו בין תכונות הריצוף לתכונות הכפל ובכך יצרו קשרים והבנה דרך היכולת שלהם תוך עבודה באופן גמיש עם המספרים בדרך התובנה המספרית.

לאורך כל המחקר התלמידים שמרו על כך שאריחי הריצוף לא יעלו אחד על השני ומאוד השתדלו לקיים

את התנאי של שמירה על רווחים בין האריחים. כפי שטען Eberle (2014) התלמידים ניסו למצוא דפוס שחוזר על עצמו בכל הכיוונים, אך הדבר לא תמיד היה פשוט לתלמידים הצעירים ויכולתם לשמור על רווחים הייתה תלויה ברמת הקושי של האריחים שהוצגו להם. בבדיקת אינסופיות הריצוף והפריצה מחוץ לגבולות הדף כפי שטוען Eberle (2015) הייתה קשה לתלמידים. הם טענו בנימוקיהם "אפשר להמשיך עם אותה צורה עוד פעם" אך בבואם לצייר או במהלך הבניה ניתן היה לראות שרובם לא מצליחים לפרוץ את גבולות הדף וחלקם אמר "אין לי מקום לעוד אחד, אני לא מצליחה, זה קשה". כאשר התלמידים קיבלו אריחי ריצוף מוחשיים הם חוו תחושה של הצלחה. לרובם האריחים הסתדרו והתיישרו באופן טבעי לשורות וטורים. עפ"י המערך הכפלי.

לסיכום, במחקרנו גילינו את התפתחות הלמידה של כפל וריצופים באופן משולב והדדי בדרך יצירתית ומיוחדת. על כן, לדעתנו יש להמשיך ולשלב נושאים באופן ההוראה בבית הספר.

רשימת מקורות

Boaler, J. (2015). Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts. *Retrieved from youcubed. org*.

Brendefur, J., Strother, S., Thiede, K., & Appleton, S. (2015). Developing Multiplication Fact Fluency. *Advances in Social Sciences Research Journal*.

Day, L., & Hurrell, D. (2015). An explanation for the use of arrays to promote the understanding of mental strategies for multiplication. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *20*(1).

Eberle, R. S. (2015). I Don't Really Know How I Did That!. *Teaching Children Mathematics*, *21*(7), 402-411.

Eberle, R. S. (2014). The role of children's mathematical aesthetics: The case of tessellations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *35*, 129-143.

Furner, J. M., Goodman, B., & Meeks, S. (2004). Creating Tesselations with Pavement Chalk: Implementing Best Practices in Mathematics. *Australian Mathematics Teacher*, *60*(2), 25-28.

Fuson, K. C. (2003). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics*, *9*(6), 300-305.Kling, G., & Bay-Williams, J. M. (2015). Three steps to mastering multiplication facts. *Teaching Children Mathematics*, *21*(9), 548-559.

Hurst, C., & Hurrell, D. (2016). Multiplicative thinking: Much more than knowing multiplication facts and procedures. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *21*(1), 34.

Resing, W. C., Bakker, M., Pronk, C. M., & Elliott, J. G. (2016). Dynamic testing and transfer: An examination of children's problem-solving strategies. *Learning and Individual Differences*, *49*, 110-119.

Stott, D. (2016). Using Arrays for Multiplication in the Intermediate Phase. *Learning and Teaching Mathematics*, *2016*(21), 6-11.

Wallace, A. H., & Gurganus, S. P. (2005). Teaching for mastery of multiplication. *Teaching Children Mathematics*, *12*(1), 26.

עיצוב משימה ממוחשבת בהשראת משימת נייר ועיפרון: המקרה של משפחה פרמטרית

גלית נגרי חדיף, אוניברסיטת חיפה

תקציר:

מחקרים מתארים אתגרים רבים במחשוב משימות נייר ועיפרון (Pead, 2010). מחקר זה הוא חלק ממחקר העוסק בסוגיות עיצוב של משימות הערכה ממוחשבות, הניתנות לבדיקה אוטומטית. במאמר זה נדגים כיצד ניתן לעצב משימה ממוחשבת בהשראת משימת נייר ועיפרון, העוסקת במשפחה פרמטרית, ועל תוצאות ניסוי במהלכו 39 תלמידי תיכון התמודדו עם המשימה.

מבוא ורקע תיאורטי:

מחשוב משימת נייר ועיפרון כרוכה באתגרים רבים. למשל, לתלמידים שאינם רגילים להשתמש בכלים, העבודה מול מחשב עשויה לגרום לעומס קוגניטיבי (Pead, 2010). כמו כן, האינטראקטיביות עלולה להוביל להתנסות לא מבוקרת, הסתמכות על מראה עיניים וניחוש התשובה ללא חישוב מתאים (Nagari-Haddif, & Yerushalmy, 2015). למרות זאת, קיימות שאלות שהסבתן למחשב עשויה להעניק להן ערך מוסף משמעותי. למשל, השימוש ברב ייצוג דינמי תומך בקבלת החלטות ובמיומנויות אחרות הנדרשות לפתרון בעיות, כמו הערכה, בחירת הייצוג, קישור בין ייצוגים (Yerushalmy, 2006).

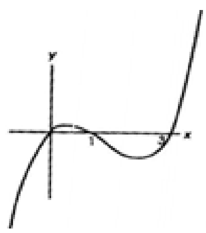
מטרת המחקר:

ברור שלא ניתן לתרגם משימת נייר ועיפרון למשימת הערכה ממוחשבת כפי שהיא ויש צורך בשיקולים עיצוביים מיוחדים, שמבוססים על עקרונות עיצוב של סביבות למידה ממוחשבות. במחקר הנוכחי[1], באמצעות עיצוב מחדש של משימת נייר ועיפרון, נדגים עקרונות עיצוב של משימות הערכה ממוחשבות אשר מעודדת חקר.

המחקר

במחקר השתתפו 39 תלמידי כיתה יוד וי"א (5 יח"ל) שהתנדבו להתנסות במשימה הממוחשבת. התלמידים למדו עם מורים שונים באותו בית ספר על פי תכנית הלימודים הרגילה. מכיוון שמדובר בפריטי הערכה ממוחשבים חדשניים, הדורשים תהליך איטראטיבי של עיצוב, המתודולוגיה שבה נקטנו היא מחקר עיצוב (להלן נציג את הסבב האחרון עם הצעות לשיפור). רון, אחד התלמידים, דיבר את מחשבותיו (thinking aloud) במהלך תהליך הפיתרון, מה שעזר להתרשם מתהליך הפיתרון ולא רק מהתשובות הסופיות. המערכת שבה השתמשנו ("המראה", "STEP") מאפשרת לתלמידים להגיש דוגמאות של עצמים מתמטיים שנבנו בדיאגרמות אינטראקטיביות בסביבת רב ייצוג דינמי.

בתרשים 1 מתוארת המשימה המקורית (Taylor, 1992, p.204):



משמאל מתואר גרף הפונקציה שמשוואתה $y=x(x-1)(x-3)$. בהתייחס למשפחת הישרים הלא מאונכים לציר איקס העוברים דרך ראשית הצירים, כמה נקודות משותפות יש לישרים עם הפונקציה הנתונה?

א. התחילו עם השערה בהתבסס על התמונה משמאל.

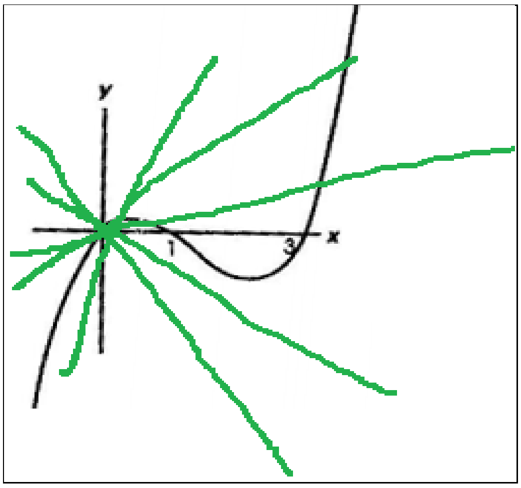
ב. תארו את משפחת הישרים בצורה אלגברית ואמתו את תשובתכם.

---

[1] מחקר זה הוא חלק מעבודת דוקטורט בהנחייתה של פרופ' מיכל ירושלמי ומומן על ידי קרן ISF (מענק 522/13).

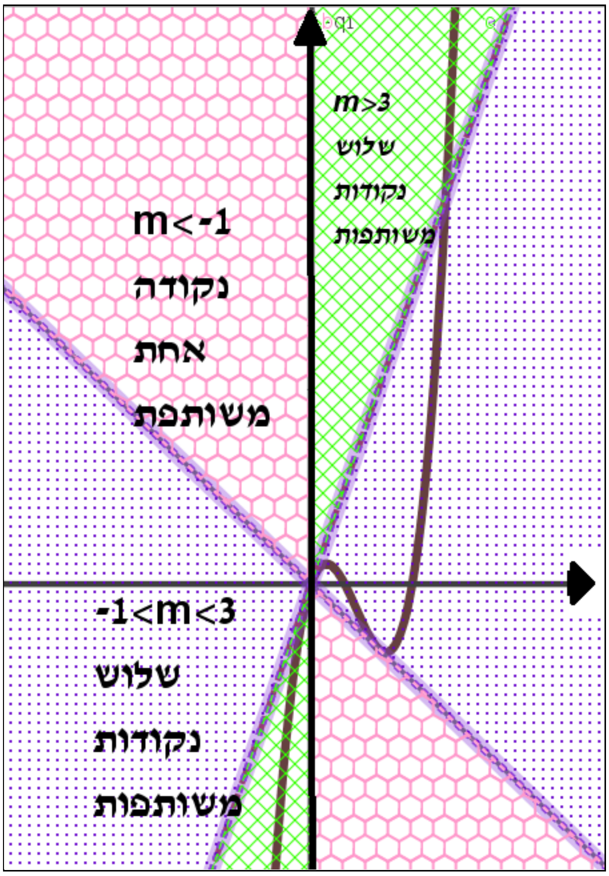
תרשים 1: המשימה המקורית כפי שכתובה בספר של טיילור

מחקרים מראים ששימוש בדוגמאות מהווה תפקיד חשוב בתהליכי חקר, העלאת השערות והוכחת טענות בקרב מתמטיקאים (Lockwood, Ellis, and Lynch, 2016). לגבי המשימה שמתוארת בתרשים 1, ניתן לצפות לעבודה מהסוג שמתואר בתרשים 2: התלמידים יציירו לעצמם דוגמאות של ישרים העוברים דרך ראשית הצירים. במקרה כזה, יתכן ותהיה בעיה להכליל ולאבחן את שלושת המקרים האפשריים של מספר נקודות משותפות בין משפחת הישרים $y = mx$ לבין הפונקציה $f(x) = x(x-1)(x-3)$.



תרשים 2: סקיצה טיפוסית אפשרית להעלאת השערות בנוגע למספר הנקודות המשותפות בין הישר לפונקציה הנתונה

יכולת ההפשטה וההכללה הנדרשת על מנת למצוא את הערכים והתחומים האפשריים של m לכל אחד מהמקרים של מספר נקודות משותפות מהווה אתגר גדול (תרשים 3).



תרשים 3: התחומים והערכים של הפרמטר m לכל המקרים של מספר הנקודות המשותפות בין הישר לפונקציה הנתונה

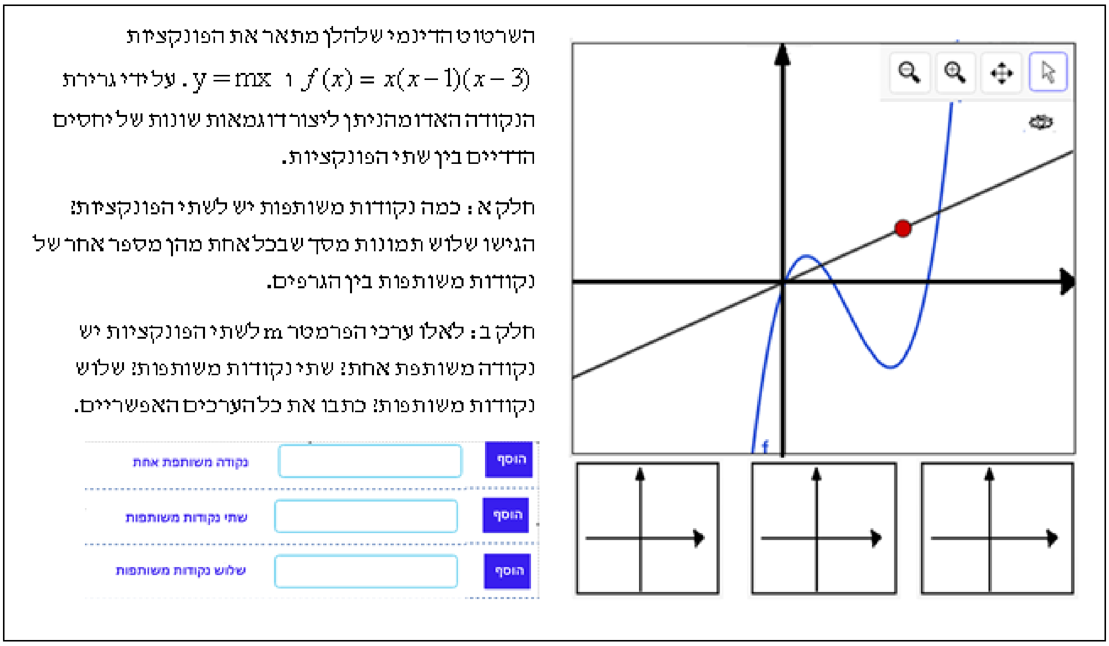
באופן כללי, על מנת למצוא את הערכים של m עבורם יש לשני הגרפים שתי נקודות משותפות, יש אפשרות לנקוט בשתי גישות: אלגברית וגרפית, כפי שמתואר בתרשים 4. בשתי הגישות יש ערך "קל" לחישוב, בעוד הערך השני פחות מיידי. כאשר מתמודדים עם משימה כזו, תלמידים צריכים להבחין שיש שני ערכים אפשריים לפרמטר m, על מנת לא להחמיץ את חישוב הערך הפחות מיידי לחישוב, או לחלופין לנקוט בגישה אחרת על מנת למצוא את הערך החסר.

	מציאת הערך ה"קל" של m	השלמת הערך השני של m
הגישה האלגברית	$x^3-4x^2+3x=mx$ $x^3-4x^2+3x-mx=0$ $x[x^2-4x+(3-m)]=0$ $x=0$ הוא אחד הפתרונות. לכן צריך לדרוש שלמשוואה $x^2-4x+(3-m)=0$ יהיה פיתרון אחד. כלומר: $\Delta=b^2-4ac=16-4(3-m)=0\Rightarrow m=-1$	המקרה השני: למשוואה: $x^2-4x+(3-m)=0$ יש שנ י פתרונות, שאחד מהם הוא: $x=0$. $0^2-4\cdot 0+(3-m)=0$ $m=3$
הגישה הגרפית (חדו"א)	$m=f'(0)$ $f(x)=x^3-4x^2+3x$ $f'(x)=3x^2-8x+3$ $f'(0)=3\Rightarrow m=3$	נסמן את נקודת ההשקה ב: $(t,t(t-1)(t-3))$ $m=\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{t(t-1)(t-3)-0}{t-0}$ $m=(t-1)(t-3)$ $f(t)=t(t^2-4t+3)$ $=t^3-4t^2+3t$ $m=f'(t)=3t^2-8t+3$ $m=(t-1)(t-3)$ $=3t^2-8t+3$ $t^2-4t+3=3t^2-8t+3$ $t_{1,2}=2,0$ $m_{1,2}=3,-1$

תרשים 4: שתי דרכים עיקריות למציאת ערכי הפרמטר m עבורם לשני הגרפים שתי נקודות משותפות

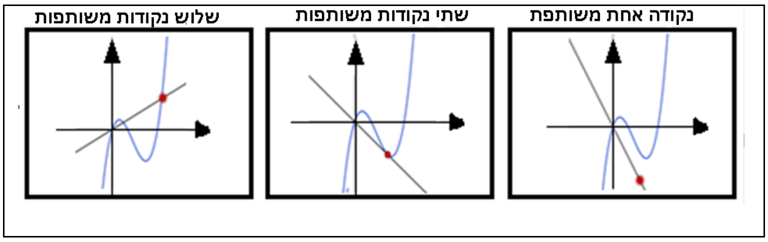
המשימה הממוחשבת והשיקולים לעיצובה

בחלק א', התלמידים מתמודדים עם שרטוט דינמי שמראה על מערכת צירים אחת את הפונקציה $f(x)=x(x-1)(x-3)$ ואת המשפחה הפרמטרית $y=mx$ (תרשים 5).



תרשים 5: עיצוב מחדש של המשימה

בתרשים 6 ניתן לראות דוגמא לפיתרון נכון לחלק א': התלמיד הגיש שלוש דוגמאות שונות, כל אחת מהן מספר שונה של נקודות משותפות.



תרשים 6: דוגמא לפיתרון נכון לחלק א'.

הטכנולוגיה מאפשרת יצירה מהירה של דוגמאות רבות. כל שינוי בערך של m במשפחה הפרמטרית בסביבת רב ייצוג דינמי, משנה סימולטנית את הייצוג הגרפי של הישר. מטרת חלק א' של המשימה היא לעודד את התלמיד להתנסות בשרטוט הדינמי ולוודא שמכיר את השרטוט הדינמי ואת נתוני המשימה, כך שבחלק ב' יתפנה לחקירת המקרים הכלליים ללא עומס קוגניטיבי לא רצוי.

בשרטוט הדינמי מופיעים במכוון מעט מאוד כלים ייעודיים למשימה: אפשרות הגדלה והקטנה של קנה המידה של מערכת הצירים ואפשרות הזזה של מערכת הצירים. כמו כן, הקואורדינטות במערכת הצירים לא סומנו במכוון. הסיבה לעיצוב מינימלי זה הוא לאפשר התנסות איכותנית בשרטוט הדינמי ללא "רמזים כמותניים".

ממצאים עיקריים ודיון:

בחלק א' רוב התלמידים (74.8%) הגישו תשובה נכונה, היתר הגישו תמונות מסך של שני מקרים בלבד של מספר נקודות משותפות. זה אינו מפתיע על רקע המטרות של חלק זה שצויינו קודם. בחלק ב': במקרה של שתי נקודות משותפות 18 תלמידים מצאו לפחות אחד משני ערכי הפרמטר. במקרים האחרים רק שני תלמידים פתרו באופן מלא.

כאמור, בכל אחת משתי הגישות לפתרון יש ערך אחד שמתקבל בקלות יחסית והשני עשוי לחמוק (תרשים 4). כאשר מתנסים בשרטוט הדינמי (תרשים 5), הדיאגרמה האינטראקטיבית מרמזת על קיומו של ערך נוסף. רון, שתהליך הפיתרון והחשיבה בקול שלו תועדו (Nagari-Haddif, 2017), נקט בשיטה האלגברית ומצא את $m=-1$. אולם, כאשר התנסה במקביל בשרטוט הדינמי, הבחין בערך נוסף של הפרמטר שבו יש שתי נקודות משותפות, ולא התקבל מהחישובים שלו. בשלב זה אמר: "אני לא יודע מהי הטעות..אני צריך לבדוק שוב את המשוואה". לאחר שלא מצא טעות בפיתרון האלגברי, פנה לפיתרון

הגרפי ואמר "זה משיק בראשית הצירים" ומכאן המשיך בחישובים וקיבל m=3. רון נתקל בקונפליקט בין הפיתרון האלגברי לבין הגרפי שנראה על המסך, ונאלץ להתמודד עם הסתירה הזו. כאשר פותרים משימת נייר ועיפרון, כמעט ואין לנו אמצעים לעשות בקרה על התשובה שלנו ולשקף לעצמנו את נכונות התשובה. השימוש בדיאגרמה אינטראקטיבית מאפשר לתלמידים לקבל משוב ראי מיידי על פתרונם, מבלי לגלות להם ישירות אם צדקו או טעו. בנוסף, שימוש בדיאגרמה אינטראקטיבית מעודד העלאת השערות ויצירת קונפליקט קוגניטיבי המעודד למידה. המקרה של רון ממחיש כיצד תיתכן למידה משמעותית במהלך פתרון משימת הערכה. יתכן, שאם היה פותר את המשימה המקורית, היה מתקשה לגלות שהחמיץ ערך אחד של הפרמטר.

התוצאות של החלק השני מעידות על כך שהמשימה קשה יחסית, וממחישות את המתח התמידי שקיים בין הרצון לפתח משימות הערכה משמעותיות ללא רמזים המעודדות חקר, ואשר ניתנות לבדיקה אוטומטית, לבין הרצון שלנו להעריך באופן מדוייק את התשובות והטעויות של התלמידים. בנוגע למשימה שהוצגה כאן, ראינו שהתלמידים התמודדו עם שני קשיים עיקריים: מציאת הערכים הקריטיים של הפרמטר m וכתיבה נכונה של התחומים האפשריים של m באופן אלגברי. לפיכך, בעתיד אנו צפויים לבחון עיצוב שיאבחן בין שני הקשיים האלה.

References

Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(2), 165-196.

Nagari Haddif, G. & Yerushalmy, M. (2015). Digital Interactive Assessment in Mathematics: The Case of Construction E-tasks. In *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Nagari-Haddif, G. (2017). Principles of redesigning an e-task based on a paper-and-pencil task: The case of parametric functions. In Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.)*, Proceedings of the Tenth Conference of the European Society for Research in* Mathematics *Education* (pp. 3691-3698). Dublin: CERME.

Pead, D. A. (2010). *On Computer-Based Assessment of Mathematics (Phd)*. University of Nottingham.

Taylor, P. D. (1992). *Calculus: The analysis of functions*. Wall & Emerson.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education*, 356-387.

בדרך להוראה: מה התכוונתי ללמד? מה לימדתי? מה התלמיד שמע? מה התלמיד הבין?

הגר גל, אינה קרמנצקי, אשירה בוגנים, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד ילין

מבוא

הסטודנטים בתכנית לתואר שני בהוראה (M.Teach) במכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד ילין משתתפים בקורס שכותרתו "יישומי מחקר הוראה". הקורס מהווה מסגרת לבחינה עצמית של הסטודנטים את תהליך הוראתם[1], תוך חקר של שאלות אותנטיות שעולות מתוך עבודתם. המחקר עושה שימוש במתודולוגיות איכותניות וכמותניות. הממצאים נדונים תוך שימוש בהיבטים מטה-קוגניטיביים של למידה והוראה. תפקיד המנחים בקורס הוא של "חבר ביקורתי" (Critical friend) תוך שיתוף המדריכים הדידקטיים של תחום הדעת.

באופן ספציפי הסטודנטים נדרשים לחקור שאלות העוסקות בהוראה ולימוד תחום הדעת שלהם בכיתתם:

1. מה אני, כמורה, רציתי לומר?
2. מה אני, כמורה, אמרתי?
3. מה התלמיד שמע?
4. מה התלמיד הבין?

המחקר מיועד להציף ולהביא למודעות המורה פערים הנוצרים במהלך ההוראה והלמידה והשפעותיהם על הבנת המושג אצל התלמיד.

סקירת ספרות. סקירת ספרות במחקרים אלה עוסקת בעיקר ב- (א) המושג הנלמד (ב) היבטים דידקטיים מן הספרות המקצועית, ובכלל זה תכונות קריטיות ולא קריטיות של המושג, תפישות שגויות, דימויי מושג, ועוד (ג) משמעות "שמיעה" במחקר זה וקריטריונים לבדיקת ה"שמיעה" (ד) "הבנה" על פי תאוריות שונות ובחירת היבטים של הבנה שישמשו את הסטודנט במחקרו.

השאלה "מה אני, כמורה, רציתי לומר?", נבחנת בגישה איכותנית. הסטודנטים בוחנים בעין ביקורתית את מערך השיעור של יחידת הלימוד בהקשר בו בוצע המחקר. הם מנסים לזהות מתוך הטקסט מה היו הדגשים שלהם בשלב התכנון, האם ניכרים עקבות דימוי המושג האישי להם ביחס לאותו מושג, וכד'. במקביל, כל סטודנט מנסה לבחון מהו דימוי המושג שלו ביחס לאותו מושג אותו הוא מתכונן ללמד.

השאלה "מה אני , כמורה, אמרתי?" נבחנת אף היא בגישה איכותנית. הסטודנטים מקליטים את השיעור בו לימדו אותו מושג, משקלטים אותו, ועורכים ניתוח טקסט שבמרכזו בירור עיקרי הדברים שהודגשו או לא הודגשו בשיעור. כל סטודנט מגדיר לעצמו את קריטריונים לניתוח הטקסט. גם כאן נבחנים עקבות דימוי המושג של המורה.

השאלה "מה התלמיד שמע?" נבחנת בעיקרה בכלים כמותניים. הסטודנטים משתמשים בכלי של "מבחן שמיעה": הם יוצרים אוסף של מילים והיגדים שאמורים להיאמר /לא להיאמר במהלך השיעור, ובסיום אותו שיעור מעבירים את השאלון לכלל הכיתה, כשהתלמידים נדרשים לציין מה מהדברים נאמר/לא נאמר בשיעור. התשובות עוברות עיבוד סטטיסטי, לאחר שהתשובות עוברות השוואה להקלטת השיעור.

השאלה "מה התלמיד הבין?" נבחנת אף היא בגישה כמותנית. לאחר שהסטודנטים הגדירו בעזרת תיאוריות שונות מהי הבנה וקבעו לעצמם קריטריונים ומשתנים אופרציונלים, הם מפתחים שאלון הבודק הבנה של המושג, ומעבירים אותו לכיתה לאחר שיעור או שניים. ניתוח סטטיסטי של הממצאים כולל מדדים שונים וביניהם מהימנות השאלון.

המקרה של הוראת מושג המשוואה

נדגים את הדברים באמצעות מחקרה של אשירה, שעסק בהוראת מושג המשוואה.

בסקירת הספרות אשירה התייחסה להיבטים הבאים: הגדרת מושג המשוואה, חשיבותה של הבנה רלציונית של סימן השוויון (Herscovics & Kieran, 1980; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006;), תפיסות שונות של מושג השוויון – הוראה לביצוע לעומת סמל של שקילות (Kieran, 1992), מושג המשתנה וההיררכיה הקיימת

בתפיסתו (Tabach & Friedlander, 2017; Kieran, 1992) וכן חשיבותה של התפיסה המבנית ביחס לתפיסה התהליכית (Arcavi, 1994; Sfard, 1991; Kieran, 1992)

האוכלוסיה והמדגם הוגדרו באופן הבא:

אוכלוסיית המחקר היא מורים למתמטיקה המלמדים אלגברה ותלמידי כיתות ז הלומדים את מושג המשוואה.

המדגם כולל שישה עשר תלמידים מכיתה ז בבית ספר במרכז הארץ והמורה שלהם לאלגברה, המשמשת כחוקרת במחקר זה. המורה הינה סטודנטית במסלול ה-M.Teach בהתמחות מתמטיקה, ומלמדת בכיתה זו במסגרת אימוני ההוראה שלה.

ביחס למהלך המחקר כתבה החוקרת בין השאר:

איסוף הנתונים נעשה בשלבים. תחילה רואיינה תלמידה במטרה לברר את דימוי המושג שלה על משוואה.

לאחר כשלושה חודשי עיסוק במושג המשוואה, הוקלט שיעור העוסק במושג זה בכלל ובפרט בהפעלת שיקולים בעריכת מניפולציות לצורך מציאת פתרון המשוואה, תוך מתן דגש לשמירה על יחס השוויון. בעשר הדקות האחרונות של השיעור חולק שאלון אשר מטרתו לברר האם התלמידים אכן "שמעו" את מה שהמורה אמרה בשיעור לגבי משוואה. בחודש שלאחר מכן, חולקו 2-3 שאלות מתוך השאלון שחובר לצורך בדיקת ההבנה והובהר לתלמידים ששאלות אלו הן עבור המורה ואינן ניתנות לצורך מתן ציון.

בירור דימוי המושג משוואה של המורה נעשה לאחר כארבעה חודשים מאז תחילת עיסוקה במושג זה.

להלן תמצית הממצאים:

הראיון עם המורה בנוגע לדימוי המושג שלה על משוואה, מעלה את המאפיינים הבאים (א) מבנה חזותי של משוואה: סימן השוויון ומשני צדדיו סימונים מתמטיים, (ב) המבנה כאמור יהיה משוואה רק בתנאי שניתן "לעבוד" עליו ולערוך עליו מניפולציות שונות כדי להגיע לפתרון המשוואה. (ג) במשוואה, כמו שהיא, אין בעצם שום דבר שווה: המשוואה מייצגת דרישה לשוויון.

1. *מה אני, כמורה, רציתי לומר? ניתוח איכותני של מערך השיעור* מעלה כי מטרה מרכזית של המורה היתה להביא את התלמידים למצב שבו יוכלו לענות על הבעיה ויבינו כי פתרון המשוואה הוא בעל תועלת בפתרון בעיות.

2. *מה אני, כמורה, אמרתי?* ניתוח איכותני של *ההוראה בפועל* מראה כי המורה הובילה את התלמידים לכך שכדי לענות על השאלה יש צורך להשתמש במשוואה.

   במהלך השיעור המורה שבה ומדגישה את יחס השוויון בין שני הביטויים האלגבריים במשוואה. לאחר כתיבת משוואה על הלוח, היא אומרת: "למה אנחנו יכולים לכתוב פה שווה ביניהם" . המורה מדגישה כי השוויון מתקיים כיוון ש"יש (ערך של) X מסוים" שעבורו המשוואה מתקיימת.

3. *מה התלמיד שמע?* בשתי השאלות הראשונות (מתן הסבר עצמאי למשוואה על סמך מה שהם שמעו את המורה אומרת בשיעור, והשלמת משפטים הקשורים למשוואה על סמך מה שהם שמעו שהמורה אמרה בהקשר זה), רוב התלמידים קיבלו ציון של עד 0.25 (סקלה שבין 0 – לא שמע כלל ל-1 – שמע הכל).

   לעומת זאת, בשאלה בה נדרשו לסמן מילים או ביטויים בהם המורה השתמשה לצורך תיאור המשוואה, 3 תלמידים קיבלו ציון של בין 0.75 ל 1, אך עדיין רב התלמידים קיבלו ציון הקטן מ0.5.

4. *מה התלמיד הבין?* מהימנות שאלון ה"הבנה" נמדד באמצעות אלפא קרונבך וקיבל ערך 0.75.

   הבנתם של התלמידים נבדקה בעזרת הקטגוריות הבאות: יכולת להסביר במילים שלהם את המושג, ליצור קשרים בין המושג למושגים אחרים והיכולת לערוך ביקורת. רוב התלמידים קיבלו ציונים הגבוהים מ0.5 בשלושת הקטגוריות ובשאלות הדורשות יצירת קשרים רובם אף קיבלו ציון הגבוה מ0.75.

דיון ומסקנות יוצגו במהלך הכנס.

כאן רק נציין כי רוב הסטודנטים ואשירה בתוכם (א) גילו פערים בין ממצאי ארבע שאלות המחקר (ב) נתנו את דעתם על הצורך בשיפור המהימנות של השאלונים שפיתחו כדי שיוכלו להגיע למסקנות ראויות (ג) בסיומו של התהליך הגיעו למסקנה שכדאי היה לעשות דברים אחרת, מה שיכול להעיד על תרומה משמעותית של תהליך החקר העצמי שעברו.

רשימת מקורות

Arcavi, A. (1994). Symbol sense. Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of mathematics, 14* (3). 24-35.

Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher, 73* (8), 572-580.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: D. A. Grouws (ed.). *Handbook of Research on mathematics teaching and learning.* pp. 390-419. New York: Macmillan.

Knuth, E., Stephens, A. McNeil, N. & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in mathematics education, 37* (4). 297-312.

Sfard, A. (1991). On The Dual Nature of Mathematical Conception: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Tabach, M. & Friedlander, A. (2017). Algebraic Procedures and Creative thinking. *ZDM Mathematics Education, 49,* 53-63.

---

[i] ההתנסות המעשית הנהוגה במסגרת התכנית לתואר שני בהוראה, היא הוראה עצמאית של שעתיים בשבוע לאורך כל השנה של כיתה בבית ספר. התכנים הם תכנים שוטפים מתוך תכנית הלימודים של אותה שכבת גיל. ההוראה העצמאית מלווה על ידי מדריך דידקטי של תחום הדעת, אשר מדריך מראש את הסטודנטים, בודק מערכי שיעור, מכוון ונותן משוב.

השפעת כניסתה של מערכת טרום אדפטיבית במתמטיקה על השינויים בתפקיד המורה

יניב ביטון, מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך מטח, המרכז לטכנולוגיה חינוכית
כרמית טל, מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך מטח, המרכז לטכנולוגיה חינוכית
רותי ברגר ברבן, מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

רקע תאורטי

יחד עם השתנות תוכניות הלימודים וההדגשים החינוכיים-תרבותיים הנדרשים במאה העשרים ואחת על פי צורכי החברה ועל פי התפתחות המחקר, הן החינוכי הכללי והן בתחומי התוכן השונים, השתנו גם רבות ממטרות ההוראה.

אנו עדים היום לרנסנס של הפרסונליזציה הנובע מכך שגישת ה-one-size-fits-all אינה מתאימה עוד ואי אפשר להביא את כל התלמידים אל סוף המסלול בדרך אחת. המהפכה הטכנולוגית נתפסת היום כמאַפְשר (enabler) ולא כחזות הכול, כלומר כאמצעי המאפשר את השינוי הפדגוגי שיעמיד סוף סוף את התלמיד במרכז ויספק לו את תוכני הלמידה והמסלולים המתאימים לו, או כהגדרתו של מייקל פוּלֶן (בתוך Fullan & Langworthy, 2014) – כ"מאיץ למידה" (learning accelerator).

כיום, בעזרת הטכנולוגיות החדשות אפשר לפתח למידה הכוללת שימוש בייצוגים (representations), עבודה על הייצוגים, חקירה של תופעות מתמטיות באמצעות יישומים טכנולוגיים דינמיים ומשוב מהמחשב בדרך של שיקוף תוצר הפעולה של התלמיד (intellectual mirror). המשוב מאפשר לתלמיד לפתור בעיות, לחקור ולבחון אפשרויות שונות ולהחליט אם קיבל את שתכנן, ומתוך ההתנסויות – להכליל רעיונות ותופעות (Schwartz, 1992). המשוב הופך מאישור על ידע קודם – feedback למפתח ידע חדש – feed forward.

נוסף על כך, הטכנולוגיה מאפשרת מצד אחד לבנות תוכן עשיר לפיתוח מושגים ורעיונות הנדרשים בתחום, יחד עם המטרות הדיסציפלינריות ומיומנויות הלמידה, ומצד אחר היא מאפשרת לבחון ולנתח את יכולות הלמידה של התלמיד באמצעות כלי ניתוח המופעלים על big data הנאסף ומנותח ברציפות, ועל בסיס ההתאמה בין השניים – לבנות תהליכי הוראה-למידה מותאמים לכל תלמיד (Steenbergen-Hu & Cooper, 2013).

בעולם הלמידה הדיגיטלי (K-12) יש היום יותר ויותר פתרונות מבוססי למידה אדפטיבית במודלים לסוגיהם – כמוצרים המקדמים פרסונליזציה ונותנים מענה שלם לתוכנית הלימודים (בעיקר במתמטיקה, אם כי לא רק בתחום זה) או מוצר משולב בסביבות ובמוצרים קיימים ומתן ערך מוסף בעל משמעות ללמידה ולמעבר לפרסונליזציה.

שימוש ההולך וגובר בניתוח נתוני הלמידה (learning analytics) מאפשר למורה לקבל תמונת מצב של כל תלמיד בכל זמן ולאורך זמן. התפיסה היא שהלמידה צריכה להיות רלוונטית ובעלת ערך ללומד ולמלמד ולכן צריכה להיות פעילה ולא פסיבית. מכאן נובעת ההבנה שהלמידה אפשרית בכל עת ובכל שעה ואינה מוגבלת למקום וזמן ייחודיים. כל אלה מסבירים את ההיצע הרחב ואת הפתרונות המגוונים שהלמידה האדפטיבית מתחילה להציע היום.

מהי מערכת למידה אדפטיבית

מערכות למידה טכנולוגיות נחשבות אדפטיביות כשהן משתנות בדינמיות לגבי כל תלמיד ותלמיד, בתגובה על מידע הנאסף במהלך הלמידה עצמה, לצורך התאמה טובה יותר ללמידה (Kara & Savim, 2013). המערכת משתמשת במידע המצטבר בשעה שהתלמיד עובד כדי לשנות, לדוגמה, את הדרך שבה מושג מיוצג, את רמת הקושי, את רצף

הבעיות או המטלות ואת אופי הרמזים או המשובים הניתנים לתלמיד. כך התלמידים מקבלים מסלול, קצב ופדגוגיה אישיים וגמישים, על פי הצרכים.

כדי ליצור מסלולי למידה, בשלב הראשון יש צורך באיסוף נתונים על התכנים, על ביצועי התלמידים, על קשיים ברמת התלמיד הבודד וברמת הכיתה כולה. בשלב זה התלמידים נדרשים לענות על כל השאלות והמערכת לומדת באילו שאלות יש שכיחות גבוהה של הצלחות/כישלונות, באילו שאלות תלמידים בחרו לבקש עזרה מהמורה, משך זמן הצפייה באותו מסך ונתונים אחרים. במאמר הנוכחי בחרנו לקרוא לשנת איסוף הנתונים **מערכת טרום אדפטיבית.**

מחקר זה שימש שלב ראשוני בפיתוחה של המערכת האדפטיבית והתמקד בשתי שאלות:

מהן עמדותיהם של המורים שלימדו את נושא השברים בכיתה ד' עם מערכת טרום אדפטיבית כלפי המערכת הטרום אדפטיבית בכלל ונושא השברים בפרט?

אילו שגיאות מוטעות זוהו בקרב התלמידים שהשתתפו בלמידת נושא השברים בכיתה ד' עם המערכת טרום אדפטיבית?

מתודולוגיה

במחקר הנוכחי ליווינו 12 מורים מ-10 בתי ספר, שהביעו את הסכמתם להשתתף בניסוי ללמד את כל נושא השברים בכיתה ד' באמצעות המערכת הטרום אדפטיבית. בפרק הזמן שחל בו הניסוי (שלושה חודשים), הוצמד מדריך (מורה מורים) לכל מורה שליווה אותו בהטמעת המערכת בכיתתו. המדריך ניהל יומן חוקר שבו תיעד את הליך ההטמעה, פעילות המורה והתלמידים בשיעורים שבהם שולבה המערכת, שיחות עם המורה בסיום כל שיעור, הצלחות וקשיים הקשורים לתכנים הדיגיטליים. בכל סוף שבוע במהלך הניסוי, נשלח שאלון מקוון למדריכים שבו נדרשו להעריך את שביעות הרצון של המורה והתלמידים מהלמידה במערכת ולציין את פעילות המורה והתלמידים שהתרחשה בכיתה.

כמו כן נבנה שאלון חצי סגור שפותח לצורכי המחקר והכיל שני חלקים:

החלק הראשון בחן את עמדותיהם של המורים כלפי מאפייני השימוש במערכת בהיבט התכנים הדיגיטליים והמענה לשונות.

החלק השני בחן את המוטיבציה של המורים לשוב וללמד באמצעות המערכת. המורים התבקשו לספר האם היו בוחרים להמשיך ללמד את פרק השברים באמצעות המערכת, מה למדו על הוראתם בעת השימוש במערכת ולציין נקודות לשימור ושיפור.

ממצאים

הנתונים שנאספו בשאלון מאפשרים ללמוד על עמדותיהם של המורים כלפי מודל ההוראה והלמידה עם המערכת הטרום אדפטיבית. המורים חשים סיפוק מהוראת פרק השברים בכיתה ד' בשילוב המערכת טרום אדפטיבית והם מאמינים שהם מצליחים להתמודד עם מענה לתלמידים מתקדמים וחלשים.

לדברי המורים, הסביבה הטכנולוגית ורכיביה (עזרים, סרטונים, המשוב) תורמים במידה ניכרת לתלמידים להבנת הנושא הנלמד. אפשר לראות כי המורים מעידים על שביעות רצון של התלמידים ממודל הוראה ייחודי זה. נוסף על כך, ההוראה בשילוב המערכת מזמנת למורה פרקטיקות למיניהן המאפשרות ללמוד על תפקודו של כל תלמיד בכיתה.

ניתוח הטקסטים מהשאלות הפתוחות בשאלון המורים ומיומני החוקר של המדריכים שליוו את המורים, זוהו קטגוריות משניות. מיינו אותן לשלוש קטגוריות ראשיות: (1) מענה לשונות בין התלמידים; (2) תפקיד המורה בכיתה המשלבת מערכת טרום אדפטיבית; (3) הטכנולוגיה.

דיון ומסקנות

כדי לפתח מערכת אדפטיבית שתאפשר לתלמיד ללמוד על פי צרכיו יש לבצע תחילה ניסויים (שימוש במערכת טרום אדפטיבית) שתפקידם לאסוף נתונים (data) על פריטי התוכן ותהליכי הלמידה, לתקף את המנגנונים האדפטיביים ולבנות רצפי ההוראה המתאימים לכל תלמיד.

למחקר הנוכחי היו שתי מטרות מרכזיות. ראשית, לבחון את מידת השפעת מערכת טרום אדפטיבית על שינויים בתפקיד המורה. שנית, לאתר שגיאות ותפיסות מוטעות בקרב התלמידים שהשתתפו בלמידת נושא השברים בכיתה ד' עם המערכת טרום אדפטיבית.

נמצא כי שילובה של המערכת אפשר למורים להתמודד עם השונות בקרב תלמידי כיתתם. המורים טענו כי בשיעורים אלו גם התלמידים המתקדמים קיבלו מענה וגם התלמידים המתקשים. המורים רואים במערכת בכלל ובתכניה הדיגיטליים בפרט (סרטונים, מעבדות, יישומונים, משחקים) ערך חשוב ותורם בהוראת נושא השברים ולמידתם. לטענתם, השימוש במערכת עודד את המוטיבציה ואת ההנעה ללמידה. המורים הופתעו לגלות למידה פעילה ושיתוף פעולה מלא בקרב תלמידים שאינם משתפים פעולה בדרך כלל בשיעורי המתמטיקה (ללא המערכת). עוד עולה כי השימוש במערכת מפנה למורים 'זמן מורה' להגיע לתלמידים הזקוקים לו. המורים הביעו שביעות רצון מן המערכת ורצון להמשיך וללמד באמצעותה.

רשימת מקורות

Fullan, M., & Langworthy, M. (2014). A rich seam: How new pedagogies find deep learning. London: Pearson. Retrieved from http://www.michaelfullan.ca/wp-content/uploads/2014/01/3897.Rich_Seam_web.pdf

Kara, N., & Sevim, N. (2013). Adaptive learning systems: Beyond teaching machines. *Contemporary Educational Technology, 4*(2), 108-120.

Schwartz, J. L., (1992). Can we solve the problem solving problem without posing the problem posing problem? In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (pp. 167-176). Berlin: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-642-58142-7_12

Steenbergen-Hu, S., & Cooper H. (2013). A meta-analysis of the effectiveness of Intelligent Tutoring Systems on K-12 students' mathematical Learning. *Journal of Educational Psychology, 105*(4), 970-987.

תרומתו של הכלי הדידקטי-רפלקטיבי "התכתבות עם הפרופסור" לשינוי תפיסותיהם של מורים למתמטיקה את תפקידם

אנה פרוסק, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך
עטרה שריקי, מכללת סמינר הקיבוצים

מבוא

לאחרונה, פרסם ארגון ה – OECD מסמך העוסק בעתיד החינוך (OECD, 2018). המסמך הינו תולדה של ההכרה בצורך לקבוע את מטרות החינוך, הידע, המיומנויות והערכים שיש להקנות לתלמידים הנכנסים בימים אלה למערכת חינוך שאותה יסיימו בשנת 2030. למעשה, מערכת החינוך של היום אמורה להכשיר את הלומדים לעולם עתידי שטיבו אינו ידוע, להתמודדות עם בעיות שאיש אינו יכול לחזות כיום ולספק לתלמידים כלים שיסייעו להם להתמודד בכוחות עצמם עם האתגרים שייזמנו להם החיים. כחלק ממאפייני ההכשרה הנדרשת לצורך זה, ממליץ הארגון על יצירת סביבות למידה המותאמות אישית לכל לומד, במטרה להניע באופן מיטבי את הלומדים ולספק להם הזדמנויות לקחת אחריות ולעצב בעצמם את תהליכי הלמידה שלהם, לקבוע יעדים ולהעריך את מידת השגתם. בנוסף, על התלמידים ללוות ברפלקציה מתמדת את תהליכי הלמידה שלהם. הררי (2018) אף הוא טוען שאין כל דרך לדעת כיצד ייראה העולם בעתיד, ולכן, מעבר למיומנויות טכניות, חיוני לפתח ללומדים של היום את המסוגלות להכיר את עצמם ויכולותיהם.

עקרונות אלה עולים בקנה אחד עם רעיונותיו של פאולו פריירה על אודות פדגוגיה ביקורתית (Freire, 1970) ועל אודות תפקידו של המורה (Freire, 1976). בהתאם לתפיסותיו של פריירה, המורה איננו הסמכות הבלעדית ועליו ללמוד עם תלמידיו ומתלמידיו בתהליך של דיאלוג רציף. בהשראת רעיונותיו של פריירה פותח הכלי הדידקטי-רפלקטיבי "התכתבות עם הפרופסור". הכלי נועד לאפשר למורים לסייע לתלמידיהם לפתח את היכולת שלהם לזהות את קשייהם הלימודיים והאישיים ואת מקורם ולהתוות לעצמם דרכי פעולה לצורך התמודדות עם הקשיים בכוחות עצמם. כחלק מיישום הכלי בכיתה, תלמידים כותבים מכתב לפרופסור דמיוני ובו תיאור של קשייהם הלימודיים והסבר בנוגע למקורם. לאחר מכן, התלמידים כותבים לעצמם מכתב תשובה בשמו של הפרופסור ובו הצעות אופרטיביות לדרכים אפשריות להתמודדות עם הקשיים. את כתיבת המכתבים מלווים התלמידים ברפלקציה (לפירוט אודות הכלי ר' Prusak & Shriki, 2017). המחקר שליווה את פיתוח הכלי עקב, בין השאר, אחר יישומו במגוון שכבות גיל ורמות לימוד ואחר תפיסותיהם של מורים ושל תלמידים מתרבויות שונות בנוגע לתרומתו. במאמר זה נתמקד בתפיסותיהם של מורים.

המחקר

במחקר לקחו חלק 77 מורים (56 מורים למתמטיקה ו-21 מורים המלמדים דיסציפלינות שונות) ולמעלה מ – 1000 תלמידים הלומדים בכיתות ה'-י"ב, מישראל וממדינות ברית המועצות לשעבר. המורים התנסו באופן אישי בשימוש בכלי והפיקו תובנות, ולאחר מכן יישמו אותו ארבע פעמים בכיתותיהם במשך שנת לימודים אחת. משימת ההתכתבות הראשונה עסקה בקשיים של תלמידים בהכנת שיעורי בית בתחום הדעת, המשימה השנייה עסקה בהתכוננות למבחנים והיבחנות, ושתי המשימות האחרות התייחסו לקשיים בנושאים ספציפיים בתחום הדעת.

המחקר אשר עקב אחר התנסות המורים ביישום הכלי "התכתבות עם הפרופסור" בכיתותיהם התמקד בזיהוי תפיסותיהם בנוגע ליתרונות ולמגבלות של יישום הכלי בכיתותיהם, בשינויים שחלו באופן שבו הם רואים את תלמידיהם ובשינויים בתפיסותיהם את תפקידם כמורים.

כדי להימנע מהשוואה בין כיתות, רמות ותרבויות, להלן נתמקד בשבעה מורים ישראלים אשר לימדו מתמטיקה בכיתה י' ברמה של 5 יח"ל (סה"כ 207 תלמידים).

המחקר נקט בגישה איכותנית, כמקובל במחקרים רבים בתחום החינוך (Atkins & Wallace, 2012), תוך שימוש בשלושה כלי מחקר:

1. שאלון פרה ופוסט שנועד לזהות את תפיסותיהם של המורים על אודות קשייהם הלימודיים של תלמידים והסיבות לקשיים, וכן את האופן שבו הם תופסים את תפקידם כמורים למתמטיקה;

2. יומנים רפלקטיביים של המורים, בהם תיארו את התנסויותיהם בכיתות ואת התובנות שלהם בעקבות ההתנסות;
3. ראיונות אישיים עם המורים בתום שנת הלימודים, במטרה להעמיק את התובנות על אודות התנסותם ועל שינויים שחלו בעקבות יישום הכלי בכיתותיהם.

ניתוח המידע התבצע באמצעות קידוד פתוח וקידוד צירי, במטרה ליצור את קטגוריות הניתוח ולזהות את התימות העיקריות, כבסיס לתיאוריה המעוגנת בשדה (Strauss & Corbin, 1998).

ממצאים ודיון

בשל מגבלות מקום, להלן יוצגו אמירות המורים מתוך שאלות שנשאלו במהלך הראיון האישי.

בתשובה לשאלה: "בעקבות השימוש בכלי, מהן התובנות שהתפתחו אצלך בנוגע לתלמידיך ולתפקידך כמורה למתמטיקה?", כל המורים ציינו שלפני ביצוע המשימה הראשונה הם היו ספקניים בנוגע לנכונות תלמידיהם לכתוב בכנות ובפתיחות, אולם "*המכתבים שהתלמידים כתבו לפרופסור הראו שהם ממש רצו לספר לי על קשייהם*". כתוצאה מכך, מורים הבינו ש"*למעשה, אלה מתבגרים עם מודעות-עצמית גבוהה, שחושבים ברצינות על הבעיות שלהם ועל העתיד*". לפיכך "*די ברור לי עכשיו שאני לא יכולה להסתפק בהוראת משוואות ונוסחאות...אני צריכה גם להיות מחנכת, מישהי שתהיה אדם חשוב ומשמעותי בחיי התלמידים*". אולם האמירה המרכזית של המורים נגעה להפתעתם ממאפייני הקשיים שחווים התלמידים: "*על פניו נראה שאם אתה תלמיד ב-5 יח"ל, אז אין לך קשיים מהותיים עם המתמטיקה, או שאתה מסתיר את זה כדי שלא להיחשב כ"טיפש"...להפתעתי, גיליתי למשל שיש תלמידים שלא מכינים את שיעורי הבית מתוך פחד מכישלון ומירידה בדימוי-העצמי שלהם כלומדי מתמטיקה, ולא בגלל עצלנות. זה ממש שינה את הגישה שלי לשיעורי הבית. הבנתי שזה לא סתם תירגול עבור התלמידים, והיום אני מוודאת מראש שהבינו את המטלות*"; "*מאד הופתעתי מהלחץ הגדול סביב נושא המבחנים וגם משאר הקשיים שהתלמידים ציינו...אפילו המצטיינים של 5 יח"ל... גיליתי שרוב הקשיים של התלמידים הם בכלל קשיים רגשיים, כמו בעיות של תחושת-מסוגלות במתמטיקה, ובעיות רגשיות של גיל ההתבגרות...דברנו על הנושא, ותלמידים העלו רעיונות איך ללמוד כדי לווסת את הלחץ שלהם*".

עוד ציינו המורים שלאחר שקראו את המכתבים שהתלמידים כתבו לעצמם בשמו של הפרופסור, הבינו את ציפיות התלמידים מהם ואת אופי התמיכה הרגשית שהם זקוקים לה: "*המילים שבהם הם השתמשו, כמו- חשוב שתוריד את הלחץ, זה הכל בראש, הצלחה גוררת הצלחה, וכד', גרמו לי להבין איך הם רוצים שאדבר אליהם*". מורים ציינו גם ש"*תלמידים כתבו שאף פעם לא חשבו שאני מתעניינת בקשיים שלהם...אני שמחה שעכשיו יש לי כלי שיאפשר לי להיות אנושית יותר. ללא ספק זה ייתן להם מוטיבציה להצליח במתמטיקה*".

באשר לשאלה בנוגע ליתרונות השימוש בכלי, מורים הדגישו במיוחד את פשטות יישומו ("*דורש רק עט ונייר*") ואת התאמתו לכל גיל, לכל רמת לימוד ולכל תחום דעת, כמו גם העובדה שהכלי מסייע לקבל מידע ישיר על כל תלמיד ותוצאות מהירות שהן פועל יוצא של התייחסות המורה לדברים: "*עלויות הכניסה הן מינימאליות- לחלק דפים. אבל ביציאה– גיליתי עולם שלם. עולם של כל ילד*"; "*ההתייחסות המיידית שלי למה שכתבו, והשינויים שהחלטנו עליהם ביחד, ממש הביאו לרוגע מיידי בכיתה*"; "*לגמרי יכולתי לראות את השינוי שחל בתלמידים...לאט-לאט הם למדו לקחת אחריות אישית על הלמידה שלהם את המתמטיקה במקום להאשים את כל העולם. כי אם ה'פרופסור' אומר להם שזה תלוי רק בהם, אז זאת באמת התובנה שלהם*". יתירה מכך, לדעת המרואיינים, "*הכלי מספק למורים אמצעי פשוט וגישה נהדרת ללמד את התלמידים לעזור לעצמם. לא רק איך להתמודד עם הקשיים שלהם במתמטיקה, אלא גם כדי להכין אותם להתמודדות עם קשיים בחיים בכלל*".

לאור האמור לעיל, נראה שהכלי הדידקטי-רפלקטיבי "התכתבות עם הפרופסור" עולה בקנה אחד עם מסמך ה- OECD (2018) ועם רעיונותיו החינוכיים של פריירה (Freire, 1970; 1976). בפרט, לדעת המורים הכלי מאפשר להם להיחשף לקשיי התלמידים בלימודי המתמטיקה, קשיים שאותם מסיבות שונות תלמידים אינם מבטאים באופן מפורש בשיחות אישיות על אף שיש להם עניין לשתף את מוריהם, כמו גם לתת מענה לצרכי התלמידים. עוד עולה מאמירות המורים שהם תופסים את הכלי כיעיל לתלמידים, שכן הוא מאפשר להם לקחת אחריות על הלמידה שלהם את המתמטיקה ולהיות במרכז תהליך הלמידה.

מחקרי מעקב צריכים להתמקד באופן שבו מורים למתמטיקה משנים את הפדגוגיה שלהם ומתאימים אותה לצרכים הרגשיים של תלמידיהם ולאתגרי העתיד.

רשימת מקורות

הררי, י. נ. (2018). *21 מחשבות על המאה ה-21*. הוצאת דביר.

Atkins. L., & Wallace, S. (2012). *Qualitative research in education*. SAGE Publications, Ltd.

Freire, P. (1970). *Pedagogy of the oppressed*. New York, NY: Continuum.

Freire, P. (1976). *Education, the practice of freedom*. London, Writers and Readers Publishing Cooperative.

OECD (2018). *The future of education and skills: Education 2030*. Retrieved from https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf

Prusak, A., & Shriki, A. (2017). "Corresponding with the Professor": A didactic tool for fostering students' ability to identify scholastic difficulties and ways of coping with them. *Creative Education, 8,* 1702-1719. Retrieved from https://file.scirp.org/pdf/CE_2017081815240222.pdf

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd edition). Sage Publications: London. Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

הבניית מושג ההתכנסות של סדרות

דפנה אליאס, אוניברסיטת תל אביב
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

מבוא

אופייה של המתמטיקה הנלמדת בבית הספר התיכון משתנה עם המעבר ללימודים אקדמיים (למשל, Rach and Heinze, 2016). בעוד שבתיכון המיקוד הוא לעיתים קרובות על הפעלת טכניקות מתמטיות, באקדמיה המתמטיקה הופכת תיאורטית יותר ומכוונת הוכחות. המעבר עלול להיות שינוי גדול עבור התלמידים אשר יקשה על הצלחתם כסטודנטים ויפחית את המוטיבציה להעמיק ולהמשיך בלימודים אקדמיים בתחומי STEM.

המושג של גבול הוא בבסיס האנליזה באוניברסיטה. סיוע לתלמידי תיכון בביצוע צעדים ראשונים בפיתוח הבנה עמוקה יותר של מושג הגבול יכול להיות גורם משמעותי להצלחתם כסטודנטים בשנתם הראשונה באקדמיה. מטרת מחקר זה היא לבחון האם תלמידי תיכון הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יחידות לימוד מסוגלים להבנות ידע באופן שיוביל לתפיסת הגבול בהתבסס על המונח "קרוב כרצוננו".

מתודולוגיה

מחקר זה בנוי משני חלקים. החלק הראשון הינו מחקר מקדים שמטרתו קביעת יעדים ברי השגה לחלק הארי של המחקר - תהליך ההבניה.

החלק הראשון כלל שלושה שלבים. בשלב הראשון, מתוך מטרה לבדוק האם אכן יש בעיה של הבנה שטחית של סדרות אינסופיות, נותחו שאלונים שמולאו ע"י תלמידי י"ב. בשלב השני עוצב והועבר לשתי כיתות י"א שיעור אשר עסק בהתכנסות סדרות. בשלב השלישי הועבר השאלון שעוצב עבור תלמידי י"ב לתלמידי י"א.

לאור המחקר המקדים, סוכמו אספקטים בהתכנסות אשר לגביהם ניתן לצפות שתלמידי י"א יהיו מסוגלים לפתח הבנה משמעותית:

1. בהינתן סדרה אינסופית, קיימות שתי אפשרויות: האחת היא שקיים ערך מסוים אליו הסדרה מתכנסת. במקרים אחרים, לא נראה שהסדרה מתכנסת לערך מסוים.
2. בהינתן סדרה אינסופית, קיימות שתי אפשרויות: ייתכן שהסדרה חסומה וייתכן שהיא אינה חסומה. אם הסדרה אינה חסומה היא לא תוכל להתכנס לערך מסוים. אם הסדרה אכן חסומה, ייתכן שהיא תתכנס וייתכן שלא.
3. אם מאינדקס מסוים כל איברי הסדרה קרובים כרצוננו לערך מסוים L, הסדרה מתכנסת לערך L.

בהתאם לגישה של הפשטה בהקשר (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015) כל אספקט כזה נחשב כרכיב ידע, ולגבי כל רכיב ידע הוגרו תתי רכיבים המרכיבים אותו והגדרות אופרטיביות המצביעות על כך שתלמיד אכן היבנה את אותו תת-רכיב.

עבור חלקו המרכזי של המחקר, תוכננה פעילות להבניית מרכיבי ידע אלה:

א. בקטע הראשון התלמידים חוקרים ארבע סדרות, שתיים מהן מתכנסות ושתיים מתבדרות. לגבי כל סדרה התלמידים מחשבים ומשרטטים על מערכת צירים את עשרת האיברים הראשונים, מוצאים חסמים לסדרה (אם קיימים) ונשאלים האם לדעתם היא שואפת לערך מסוים. בהמשך מתבקשים התלמידים לשרטט פסים שונים ולמנות או להעריך כמה איברים יש בתוך הפס ומחוצה לו. חלק זה של הפעילות מיועד לזמן לתלמידים את האפשרות להבנות את כל רכיבי הידע, עם דגש על רכיב הידע הראשון לעיל.

ב. בקטע השני מסווגים התלמידים את הסדרות עימם עבדו בהתאם לשני מאפיינים – האם הסדרה מתכנסת או מתבדרת? חסומה או לא חסומה? לאחר המיון נשאלים התלמידים האם לדעתם קיימת סדרה שאינה חסומה אך מתכנסת, ואם אין כזאת – מדוע אין. חלק זה של הפעילות מאפשר הזדמנות להבנות את רכיב הידע השני לעיל.

ג. בקטע השלישי, עובדים התלמידים עם אפליקציה על מנת לחקור פסים סביב הערך אליו מתכנסת סדרה. חלק זה של הפעילות מדגיש את הבניית רכיב הידע השלישי לעיל.

ד. בקטע הרביעי התלמידים מתבקשים לנסח מה מאפיין סדרות מתכנסות ואת גבולן.

ה. בקטע החמישי התלמידים חוקרים סדרה מתבדרת ונדרשים לנמק בעזרת מאפיינים הקשורים במונח "קרוב כרצוננו" את התבדרות הסדרה.

הפעילות הועברה לשני זוגות תלמידים. הראיונות נותחו באמצעות מודל RBC של הפשטה בהקשר (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015).

ממצאים

ניתוח הנתונים הצביע על הקשיים הבאים בתהליך ההבנייה:

1. **כל הסדרות המתכנסות הן סדרות חסומות** – שני אתגרים מרכזיים נצפו בהבניית תת-רכיב זה:

א. נצפה בלבול בין הביטוי "כל הסדרות המתכנסות הן חסומות" (ביטוי נכון), "כל הסדרות החסומות מתכנסות" (ביטוי שאינו נכון) ו"סדרות שאינן מתכנסות אינן חסומות" (ביטוי שאינו נכון). בלבול זה יכול לנבוע מחוסר אבחנה בין ביטוי לבין היפוכו (לדוגמה - Küchemann and Hoyles, 2002).

ב. בשני הראיונות התלמידים טענו בשלב מסוים שאם n שואף לאינסוף אז הסדרה אינה חסומה. אמירה כזאת יכולה להיות ביטוי לאמונה שצוינה ע"י Sierpinska (1990) שמה שהוא אינסופי הוא בהכרח לא חסום. התלמידים טרם הסיטו את תשומת ליבם מהמספר האינסופי של האיברים לערכם הסופי של אותם איברים.

2. **אם מאינדקס מסוים כל איברי הסדרה קרובים כרצוננו לערך מסוים L, הסדרה מתכנסת לערך L** – רכיב ידע זה הוא שילוב של סופי ואינסופי: פסים אינסופיים משורטטים בערכים סופיים כך שאינסוף איברים מקוטלגים כנמצאים בתוך הפס או מחוצה לו. למונח אינסוף נלווים קשיים אשר נצפו במהלך הראיונות:

א. התייחסות לאינסוף כערך – תלמידים עושים שימוש בביטויים כמו "חמישית אינסוף" או "אחד חלקי אינסוף". התייחסות זאת עלולה לגרום לזיהוי סדרה המתבדרת לאינסוף כסדרה שמתכנסת לערך אינסוף, לדוגמה.

ב. האינסוף "קטן" אך נשאר אותו הדבר – במהלך הפעילות תלמידים שמים לב שככל שפס סביב גבולה של סדרה נהיה צר יותר, איברים רבים יותר "עוזבים" את הפס. באופן אינטואיטיבי המשמעות היא שמספר האיברים בתוך הפס קטן. מאידך, מספר האיברים בפס הצר יותר נשאר אינסוף. קונפליקט זה קשור קשר למעבר מהשוואת גדלים סופיים להשוואת גדלים אינסופיים, תחום הנחקר באופן נרחב ע"י Tsamir (1999).

אחד הגורמים שנצפו כמסייעים לתלמידים בהליך ההבניה היא שרטוט הסדרות. מחקרים קודמים הראו ששרטוט מסייע לתלמידים לתפוס טוב יותר את "התנהגות" הסדרה (לדוגמה, Przenioslo, 2005) וכך היה המקרה גם במחקר זה. גורם נוסף שסייע היה השימוש בטכנולוגיה אשר אפשר לתלמידים לעבוד בנוחות עם מספר גדול של פסים סביב גבולה של סדרה מתכנסת. אחד הגורמים המעכבים שנצפו הינו תפיסות פשטניות שיש לתלמידים, כמו "האיברים הולכים ומתקרבים לגבול אבל לא משיגים אותו". תפיסה זאת עלתה, לדוגמה, במהלך העבודה על הסדרה $a_n = 2 + (-1)^n$ כשתלמידה טענה שהסדרה מתבדרת ואמרה "הסדרה לא מתכנסת לערכים האלה (1 ו-3) כי היא מגיעה אליהם".

נצפו קשרים הדוקים בין סדרות לפונקציות ובין גבול לאסימפטוטה. לדוגמה, כשנשאלו לקראת סיום הפעילות על מאפייני הערך אליו מתכנסת סדרה, ענתה תלמידה "מה שמאפיין ערך שסדרה מתכנסת אליו? שהוא אסימפטוטה", ותלמיד השיב "שהוא האסימפטוטה של הפונקציה". קשר זה היווה גם גורם מסייע משום שהידע בנושא אסימפטוטות הקל על התלמידים במציאת גבולות, אך גם הקשה עליהם. דוגמה אחת לקושי שהעלה הקשר הנ"ל הוא במעבר מהמקרה הרציף למקרה הבדיד. בדוגמה של הסדרה $a_n = 1 + \frac{3}{n}$, טענו התלמידים שכאשר n מתקרב לאפס הסדרה אינה חסומה מלעיל.

מסקנות

בהתבסס על המדגם המאוד מוגבל של מחקר זה, הרושם הראשוני המתקבל הוא שהעמקת ידע של תלמידים במונחים כמו גבול, אינסוף והתכנסות היא אפשרית. פעילויות העוסקות בחקר סדרות יכולות לסייע לתלמידים להתחבר

לאינטואיציה שלהם ועשויות להיות מועילות עבורם בפיתוח הבנה מעמיקה של גבולות. שיעורים מסוג זה צריכים להיות מתוכננים בתשומת לב זהירה לבחירת הסדרות אליהן ייחשפו התלמידים.

רשימת מקורות

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context - Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 185-217). Dordrecht: Springer, Advances in Mathematics Education series.

Küchemann, D., & Hoyles, C. (2002). Students' understanding of a logical implication and its converse. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 241-248). Norwich, UK: University of East Anglia.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 71-93.

Rach, S., & Heinze, A. (2016). The transition from school to university in mathematics: Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15,* 1343–1363.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics, 10(*3), 24–36.

Tsamir, P. (1999). The transition from the comparison of finite sets to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 209–234.

"סקיצה אלגברית": אתגר בהערכה ממוחשבת

גלית נגרי חדיף, אוניברסיטת חיפה

תקציר

מחקר זה הינו חלק ממחקר העוסק בסוגיות עיצוב של משימות הערכה ממוחשבות הנבדקות אוטומטית בחדו"א לתלמידי תיכון. במסגרת זו, כאשר התלמידים התבקשו להגיש את התשובה ע"י ביטוי אלגברי או סקיצה יד חופשית, נתקלנו בייצור כלאיים שאותו אנו מכנים "סקיצה אלגברית" (symbolic sketching). במאמר זה נדגים כיצד הסקיצה האלגברית באה לידי ביטוי במחקרנו: נתאר ביטויים אלגבריים שהוגשו על ידי התלמידים ואשר אינם נכונים, על אף שהגרף המתאר אותם מבטא את המאפיינים העיקריים של הפיתרון.

רציונל ומטרות

שרטוט פונקציה באמצעות סקיצה יד חופשית נתפסת כבלתי-אמצעית וטבעית יותר מבניית ביטוי אלגברי וככזו- מאפשרת להעריך את תפיסות התלמידים בנוגע למושגים מתמטיים שונים. כאשר התלמידים התבקשו לבחור באיזה מבין שני הייצוגים- ביטוי אלגברי או סקיצה יד חופשית- להגיש את התשובה, נתקלנו בייצור כלאיים שאותו אנו מכנים "סקיצה אלגברית" (symbolic sketching). נמחיש ביטוי זה באמצעות הדוגמא הבאה:

תרגיל: בנה (באמצעות ביטוי אלגברי או סקיצה יד חופשית) דוגמא של פונקציה בעלת נקודת אי רציפות סליקה בנקודה שבה x=1.

ניתן לצפות לתשובות שונות: (1) סקיצה טהורה: התלמיד ישרטט סקיצה ביד חופשית של פונקציה כלשהי שנראית כמו $f_1(x)=x$ ויסמן "חור" בנקודה (1,1) באמצעות כלי ייעודי (2) "ביטוי טהור": התלמיד יקליד את הביטוי $f_2(x)=x\cdot\frac{x-1}{x-1}$ (ניתן לאתר את נקודת אי הרציפות מתוך הביטוי); (3) "סקיצה אלגברית": התלמיד יקליד את הביטוי $f_1(x)=x$ ויסמן נקודת "חור" בנקודה שבה x=1.

שתי ההגשות (2), (3) מתארות גרפים דומים ויזואלית; אפשרות (2) מאפשרת אימות אלגברי של התשובה; אפשרויות (1) ו-(3) מתארות אותו רעיון של נקודת אי רציפות סליקה. שלוש האפשרויות מייצגות תהליכי חשיבה שונים (Zaslavsky and Zodik, 2014), שאנחנו מנסים להעריך דרך ניתוח אוטומטי של המאפיינים של כל הגשה.

מחקר זה הינו חלק ממחקר העוסק בסוגיות עיצוב של משימות הערכה ממוחשבות הנבדקות אוטומטית בחדו"א לתלמידי תיכון.

במסגרת המחקר[1] זה, אנחנו מאפשרים לתלמידים לבנות דוגמאות בסביבת רב ייצוג דינמית. מערכת ההערכה שבה השתמשנו (STEP) מאפשרת לתלמידים להגיש דוגמאות של עצמים מתמטיים מתוך דיאגרמות אינטראקטיביות (Naftaliev and Yerushalmy (2017)). המערכת מאפשרת שימוש בכלים ייעודיים (כגון סימון אסימפטוטה, משיק, נקודת אי רציפות). הכלים הייעודיים אמורים לתמוך בהבנה סמנטית ופיתוח חוש בלתי פורמלי של בניית ביטויים (Yerushalmy (1997), Gafni and Yerushalmy (1992), Arcavi (1994)).

[1] מחקר זה הוא חלק מעבודת דוקטורט של המחברת בהנחייתה של פרופ' מיכל ירושלמי.

מחקרנו עוסק בסוגיות עיצוב פריטי הערכה ממוחשבים חדשניים, הדורשים תהליך איטראטיבי של עיצוב, ולכן המתודולוגיה שבה נקטנו היא מחקר עיצוב[2]. במאמר זה נדגים כיצד שילוב של סוגי ההגשות ובפרט כיצד "סקיצה אלגברית" באה לידי ביטוי במחקרנו. אנו טוענים שכאשר במשימה ממוחשבת דורשים להגיש ביטויים וסקיצות יד חופשית עם כלים ייעודיים, יש לקחת בחשבון תשובות משולבות כגון אפשרות (3) שהודגמה למעלה. תשובות אלה לעיתים ניתנות לפרשנויות שונות, הקשורות לערבוב של אופני ההגשה.

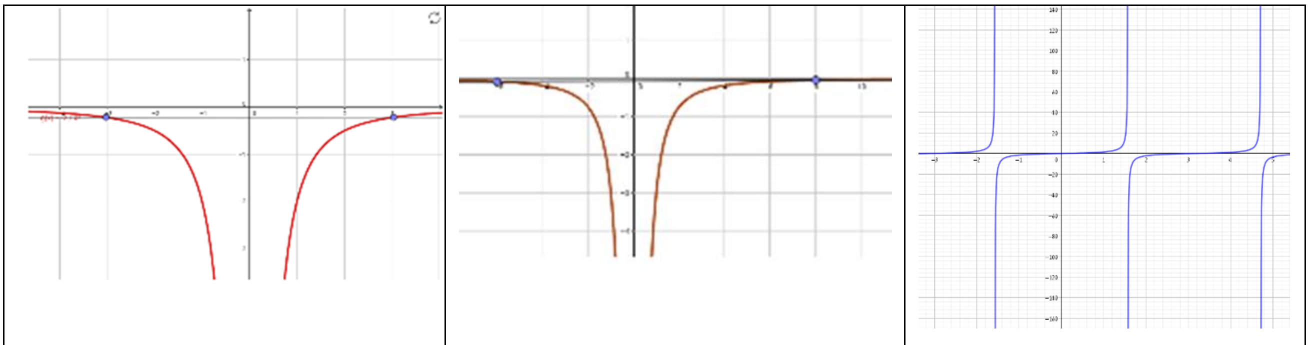
המידע עליו אנחנו מדווחים במאמר זה מקורו בהגשות של 86 תלמידי י"א 5 יח"ל, שהתנדבו לפתור את המשימות. התלמידים למדו אצל מורים שונים את אותה תכנית לימודים רגילה, ללא מיקוד בטכנולוגיה. לפני הניסוי התלמידים עברו פגישת הכנה על מנת להכיר את המערכת הממוחשבת שעבדנו איתה (STEP).

STEP מאפשרת לתלמידים להגיש דוגמאות של עצמים מתמטיים שנבנו בדיאגרמות אינטראקטיביות בסביבת רב ייצוג דינמי. לתלמידים ניתנה אפשרות להגיש סקיצה יד חופשית או ביטוי אלגברי של פונקציה שיש לה משיק בשתי נקודות שונות שעל הגרף שלה. המערכת STEP מסוגלת לזהות ולאפיין אוטומטית את דרך ההגשה ואת המאפיינים המתמטיים של הפונקציה שהוגשה, כגון תחומי רציפות, קעירות וכו' (Yerushalmy, Nagari-Haddif, and Olsher, 2017).

ממצאים

כאשר תלמידים התבקשו להגיש סקיצה או ביטוי של פונקציה שיש לה משיק בשתי נקודות שונות, חלקם הגישו ביטוי אלגברי של פונקציות כגון: $h(x) = \tan(x)$, $g(x) = \frac{-2}{x^2}$, $f(x) = \frac{-3}{x^2}$ והוסיפו באמצעות כלי ייעודי ישר אופקי שמייצג את המשיק בשתי נקודות (תרשים 1). הגשות אלה לא מקיימות את דרישות השאלה כי הנגזרת של כל אחת מהפונקציות שונה מאפס לכל x בתחום הגדרתה: $f'(x) = \frac{6}{x^3} \neq 0;\ g'(x) = \frac{4}{x^3} \neq 0;\ h'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2} > 0$. יתכן שהתלמידים GH15, GH21 (תרשים 1) התבלבלו ויזואלית או קונספטואלית בין אסימפטוטה אופקית ומשיק אופקי.

תרשים 1 מדגים כיצד למקם תרשימים בטקסט – שימו לב למסגרת המקיפה את התרשים ולמיקום הכותרת שלו.



GH15: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{-3}{x^2}$	GH21: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{-2}{x^2}$	P10: $h(x) = \tan(x)$

תרשים 1. הגשות של ביטויים של פונקציות שאין להן משיק בשתי נקודות אך "נראה" שיש להן משיק בשתי נקודות (הגשות אמיתיות)

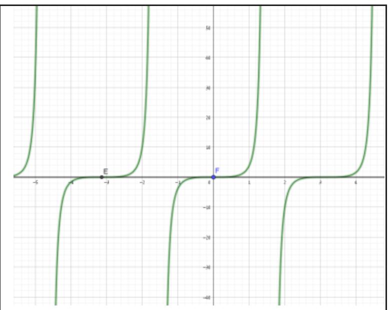
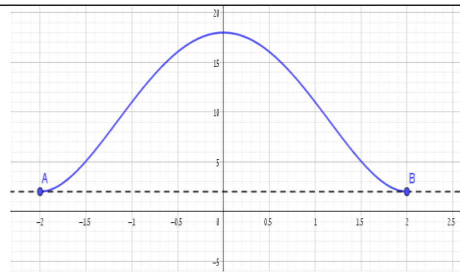
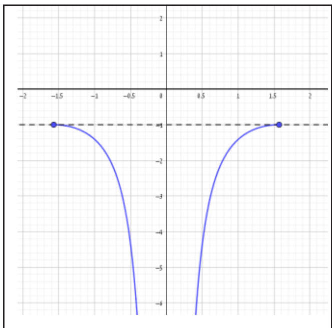
יתכן, שהם התייחסו לאסימפטוטה האופקית כ"משיקה באינסוף" ויתכן שזה קשור לאינסוף תיאורטי וממשי: יש פונקציות שמוגדרות באינטרוול ויש להן ישר אופקי המשיק להן בקצות תחום ההגדרה, כפי שמודגם בתרשים 2.

לפונקציה $m(x) = \tan^3 x$ יש משיק שמתלכד עם ציר ה-x בנקודות שבהן $x = \pi k$, מכיוון ש

---

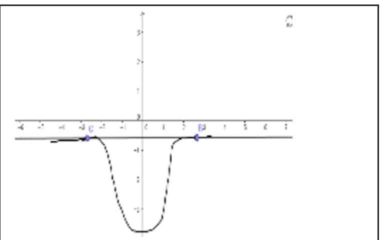
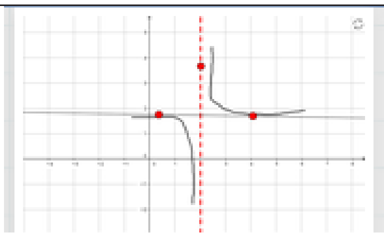
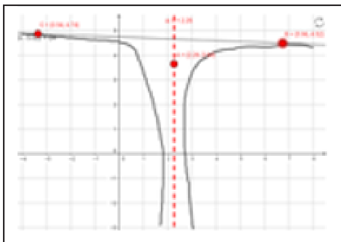
[2] במסגרת מחקר העיצוב, סוגים שונים של המשימה שתוצג במאמר זה עוצבו ומתוארים במאמרים אחרים (Yerushalmy et al., 2017; Nagari-Haddif & Yerushalmy, 2018). ולא כאן על מנת למקד את הדיון בסקיצה האלגברית.

$m'(\pi k)=\frac{3\tan^2\pi k}{\cos^2\pi k}=0$. התלמיד P10 הגיש את הפונקציה $h(x)=\tan(x)$, שנראית דומה מאוד ל- $h(x)=\tan(x)$ אך בניגוד ל-m(x), הנגזרת של הפונקציה h(x) שווה לפחות ל-1 בכל תחום הגדרתה $h'(\pi k)=\frac{1}{\cos^2\pi k}=1$. התלמיד P10 כנראה שינה את קנה המידה של הצירים, כך שגרף הפונקציה ייראה משיק לציר ה-x, כמו $m(x)=\tan^3 x$, ולפיכך ייתכן שתשובתו כן יכולה לקיים את תנאי השאלה. כלומר, יתכן שהוא התכוון להשתמש בגרף שמתאר הביטוי האלגברי כדי להציג רעיון מתמטי שלא קשור לביטוי שבאמצעותו בנה את הגרף. כלומר, ייתכן שהביטוי משמש ככלי לשרטוט סקיצה.

		
$m(x)=\tan^3 x$	$t(x)=((x-2)(x+2))^2+2$ $for\ -2\le x\le 2$	$k(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$ for $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

תרשים 2. הגשות נכונות אפשריות (תיאורטיות) של ביטויים של פונקציות (בתחום מסויים) שיש להן משיק בשתי נקודות בקצות תחום ההגדרה

סקיצות יד חופשית לא אמורות להיות מדוייקות, ולכן לפונקציות שונות יהיה אותו ייצוג. במקרים כאלה, יהיה קשה לדעת מהן כוונותיהם של התלמידים ולהעריך את תשובותיהם. זה מעלה שאלה בהערכה: תלמידים עשויים להגיש ביטוי אלגברי לא נכון, מתוך כוונה לשרטט סקיצה כללית, שלא קשורה לביטוי. האם התכוונו להגיש גרף מדוייק שניתן לנתח אנליטית, או שהתכוונו ליצור ייצוג גרפי שמתאר רעיון שניתן לנתח ויזואלית, ללא התייחסות לביטוי, בדומה להגשות המוצגות בתרשים 3.

		
GH2	GH13	GYA10

תרשים 3. הגשות של סקיצות של פונקציות שיש להן משיק בשתי נקודות (הגשות אמיתיות)

דיון

כאשר מאפשרים להגיש תשובה באמצעות סקיצה חופשית או ביטוי, ניתן לצפות למגוון רחב של תשובות שצריך לנתח על פי קריטריונים שונים. בקצה אחד ביטוי טהור ובקצה השני סקיצה טהורה. ובין שני הקצוות האלה יש מה שנקרא לו "הסקיצה האלגברית". בסוג כזה של הגשה, גרף הפונקציה נבנה על ידי הביטוי האלגברי שלו, אך יתכן שהניתוח הדרוש לו הוא ניתוח של סקיצה, מכיוון שתלמידים רצו להביע רעיון מתמטי ופחות התייחסו לדיוק של הביטוי האלגברי.

הצגנו דוגמאות של גרפים מדוייקים (שנבנו על ידי ביטוי), שאם היינו מנתחים את הביטוי האלגברי שמייצג אותם, אז היה נחשב ללא נכון, אך ייתכן שהתלמידים שהגישו דוגמאות כאלה לא התכוונו שננתח את הביטוי האלגברי אלא נתייחס לגרף המתואר על ידיו כסקיצה.

הממצאים שהועלו כאן מדגישים את הצורך בפיתוח נורמות של כיתה: מה מאפיין סקיצה ומהן הדרכים לבנות אותה? מהן המגבלות שיש על ביטויים אלגבריים שמתפקדים כסקיצות?

מקורות

Arcavi, A. (1994). “Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics” For the Learning of Mathematics. 14(3), 24-35.

Nagari-Haddif G., Yerushalmy M. (2018) Supporting Online E-Assessment of Problem Solving: Resources and Constraints. In: Thompson D., Burton M., Cusi A., Wright D. (eds) Classroom Assessment in Mathematics. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Naftaliev E., Yerushalmy M. (2017) Engagement with Interactive Diagrams: The Role Played by Resources and Constraints. In: Leung A., Baccaglini-Frank A. (eds) Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks. Mathematics Education in the Digital Era, vol 8. Springer, Cham.

Yerushalmy, M. (1997). Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of Asymptotes. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 2(1), 1-25.

Yerushalmy, M., & Gafni, R. (1992). Syntactic manipulations and semantic interpretations in algebra: The effect of graphic representation. *Learning and Instruction*, *2*(4), 303-319.

Yerushalmy, M., Nagari-Haddif, G., & Olsher, S. (2017). Design of tasks for online assessment that supports understanding of students’ conceptions. *ZDM Mathematics Education*. doi: 10.1007/s11858-017-0871-7.

Zaslavsky O., Zodik I. (2014) Example-Generation as Indicator and Catalyst of Mathematical and Pedagogical Understandings. In: Li Y., Silver E., Li S. (eds) Transforming Mathematics Instruction. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham.

ה"מתח" בהוראת שיעור מתמטיקה קוהרנטי בכיתת תיכון בחינוך המיוחד

דינה אל מלם, מכללת ירושלים
תקוה עובדיה, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך ומכללת ירושלים

מבוא

לפי שוינפלד (Schoenfeld, 2017), יש היבטים בפתרון בעיות שלא ניתן להגיע אליהם ללא צפייה בסרטוני וידאו. מתוך הנחת יסוד זו, החוקרות במחקר הנוכחי, התמקדו בניתוח סרטי הווידאו של שיעורי מתמטיקה בכיתה י"א מקדמת רגשית ולימודית.

הוראת מתמטיקה בקרב אוכלוסיות תלמידים המתקשים ללמוד אותה, היא אתגר למורה. המתמטיקה מטבעה היא תחום דעת הכולל רבדים של ידע, מגוון מיומנויות קוגניטיביות שיש ליישם, ומזמנת חשיבה לוגית ברמות שונות במטרה לפתור משימות או בעיות. כתוצאה מעובדה זו החוקרות ניסו ליישם שני עקרונות התערבות שנמצאו במחקר אחר (עובדיה, 2018) בכיתת תיכון המאוכלסת בתלמידים בעלי פערי ידע לימודי מתמטי, ושחשיבה לוגית ואפילו בסיסית, היא חשיבה מורכבת עבורם. את התהליך הן תיעדו בווידאו על מנת ללמוד ממנו על ההזדמנויות והאתגרים שיש בסביבת הלמידה.

מצפיה קבוצתית בווידאו המתעד את השיעורים למדנו כי האתגר שבהוראת מתמטיקה בכיתות תיכון הטרוגניות, מביא את המורה שלא בידיעתו, להוראה שיש בה לעיתים איבוד של רעיונות מתמטיים, או צמצום פרקטיקות הוראה חיוניות כגון דיון או חקר לצורך הצדקה מתמטית. כתוצאה מעובדה זו מיקדנו את הצפייה בווידאו וניתוח האירועים במאפיינים של שיעור מתמטיקה קוהרנטי, כפי שהספרות התיאורטית מגדירה אותו.

קוהרנטיות בהוראת מתמטיקה

בספרות המקצועית, שיעור מתמטיקה קוהרנטי מתאפיין בדגשים שונים, ויתרונותיו מתייחסים לתמיכה בזיכרון העבודה לטווח הארוך, לפיתוח יכולת והעברת למידה, ולהתפתחות הרמה הקוגניטיבית של השיעור. מאפייני השיעור הקוהרנטי אותם שילבה המורה בשעוריה: קישור בין פיסות מידע והכללתם, התייחסות לתפיסות שגויות (Santagata &Bray, 2016), יצירת אתגר חשיבה, תכנון קפדני לצד שימת לב לדברים שעולים (Cai, Ding & Wang, 2014), הסכמה לסטות מנושא והתייחסות לשאלות תלמידים (Kintch,1986) ודיוק בשיח ובמושגים (Brown, 2009)**.**

מתודולוגיה

מטרת המחקר הנוכחי הייתה לאפיין ולזהות את הוראת המתמטיקה בכיתת חינוך מיוחד תיכונית, כאשר המורה החליטה ליישם עקרונות התערבות שנמצאו במחקרים אחרים, וחדשים לה בהוראתה.

שאלות המחקר: כיצד התפתחה מקצועית מורה המלמדת מתמטיקה בקרב כיתות תיכון בחינוך המיוחד כתוצאה משיח רפלקטיבי בקבוצת עמיתים סביב צילומי שיעורי מתמטיקה בווידאו?" והאם וכיצד הועלתה "תקרת הזכוכית" של התכנים המתמטיים בעקבות ניסיון לשים דגש על שיעור הכולל פעולות הוראה המוגדרות כ"הוראת מתמטיקה קוהרנטית"?

שיטת המחקר

המורה בנתה שיעורי מתמטיקה בהתאם לעקרונות התערבות שנמצאו במחקר (עובדיה, 2018). שיעורי המתמטיקה תועדו בווידאו לאורך מספר חודשים ונותחו במספר שלבים, המתייחסים להכנה לשיעור, להוראה ולרפלקציה. השלבים היו: כתיבת תסריט היפותטי לשיעור, ביצוע הוראה ותיעודה, כתיבת רפלקציה לשיעור מזיכרון ללא צפייה בווידאו, בחירת אירועים משמעותיים למורה מקטעי הווידאו, צפייה

בקטעי שיעור נבחרים ודיון עם המנחה בשיתוף העמיתות לקבוצת הלימוד במכללה, כתיבת קטגוריות מאחדות לאירועים באמצעות זיהוי אירועים בעלי מאפייני ניתוח דומים והשלב האחרון- בחירה בקטגוריה אחת והתעמקות בה: הבנת הרעיון של ה"מתח" שבין הרצון של המורה להיות קוהרנטית מתמטית לבין המציאות בכיתה בה התלמידים מתקשים להבין מתמטיקה מופשטת.

הממצאים

ההתעמקות בקטגוריית ה"מתח" שבין מבנה הדעת הקוהרנטי של המתמטיקה ובין האתגר של המורה להורות את המתמטיקה על מורכבותה התבטא באופנים שונים: דיוק הגדרות מתמטיות, הסבר מתמטי למהות של אלגוריתמים שגרתיים, התעלמות מהצעה לפתרון אחר לבעיה, ו"בריחה" מדיונים לוגיים.

דיוק הגדרות מתמטיות- אחד ההיבטים הבולטים בשעורים הוא הצורך בדיוק בהגדרת מושגים ובשיח הכיתתי אדוותם. נמצא, כי גם לגבי מושגים שנלמדו בגילאים צעירים קיימות תפיסות שגויות. בחלק מהשיעורים היה דיון סוער ותלמידים לא הבינו את הסבריה החוזרים של המורה. צפייה משותפת ודיון עם העמיתות והמנחה העלה למודעות המורה את הפער בין איך שהיא תפסה מושג, לאייך שהתלמידים שלה תפסו אותו על סמך זיכרון העבר. רק כשהמורה חזרה להגדרות הבסיסיות של מושגי היסוד של השיעור, והרחיבה את השיח על משמעותם הרחבה התלמידים הבינו ונוצר בסיס איתן "ליצוק" לתוכו את המשך הלמידה, כפי שחקרו ומצאו סטיגלר ופרי (Stigler & Perry, 1988), כי הגורם לאי הבנה בשיעור מסוים היה הגדרה לא מדויקת.

הסבר מתמטי לאלגוריתם- כשתלמיד שואל, הוא מנסה דרך השאלה להשלים את פיסות המידע החסרות לו ולקשרן למעין "מארג" קוהרנטי שלם במוחו. החומר החדש "מתכתב" עם החומר הקודם וההבנה נבנית נדבך על גבי נדבך. ולהיפך, כאשר המורה מתעלמת משאלות, כפי שראינו באחד השיעורים, המחשבה של התלמיד לא מאורגנת ונוצר אי שקט. רק חזרה להוראה קוהרנטית, הנותנת מקום לשאלות תלמידים הורידה את ה"מתח" הקיים בין המתמטיקה ובין התלמידים. אמנם התייחסות לשאלות התלמידים גורמת למורה להספיק פחות, אך זוהי המתמטיקה ה"אמתית" ממבט קוהרנטי.

התעלמות מהצעה לפתרון אחר- על מורה לתכנן שיעור במדויק, אך עם זאת, אל לו להיצמד ב"עיוורון" לתוכנית המקורית, אלא להקשיב לקולות העולים מהתלמידים ולהתאים את הלמידה אליהם בזמן אמת (שם ,Cai et al). באחד השיעורים, המורה תכננה להסביר בדרך אחת, והתלמידים לעומת זאת, נתנו הסבר אחר. היא המשיכה להסביר בדרך שתכננה, למרות שהתלמידים כבר הבינו בדרכם. ברפלקציה אישית מצפייה על השיעור, המורה הגיעה לתובנה שהמשך דיון כיתתי לפי קו חשיבה שעולה מהתלמידים עדיפה כי מתחברת להיגיון שלהם ולכן בונה נדבך נוסף בהבנתם (Liang, 2013).

בריחה מדיונים לוגיים - יצירת אתגר בחינוך המיוחד היא ענין שמרתיע מורים. הנטייה הטבעית היא לקרב את המתמטיקה לתלמיד על ידי שימוש בשפה פשוטה, בהסרת האתגר ובבחירת אלגוריתם טכני המשחרר מהצורך להפעיל את ההיגיון. הממצא העיקרי של המחקר הוא, שבניגוד לאינטואיציה שמחפשת להצליח ללמד מתמטיקה דרך הורדת הדרישות למינימום, מניתוח האירועים במחקר עולה, כי ההיפך הוא הנכון: הוראה קוהרנטית אינה מרתיעה את תלמידי החינוך המיוחד אלא מסדרת להם את החשיבה, בונה אותה נדבך על גבי נדבך ומייצבת אותה לכדי סכמה תפיסתית הגיונית. כך, עם התקדמות תהליך הלמידה הקוהרנטית, הוראה זו משפיעה על הורדת המתח הקיים בכיתה ומעלה את "תקרת הזכוכית" של הבנת התלמיד, המאפשרת לו התמודדות עם אתגר גבוה משהתמודד אתו עד כה. לעומת זאת, דווקא ניסיונות לוותר על הקוהרנטיות הגבירו את המתח!

סיכום

במחקר עלה הצורך בהוראה קוהרנטית גם בכיתות החינוך המיוחד. המורה חקרה מהם מאפייני שיעורי קוהרנטי וערכה רפלקציה אישית וקבוצתית עם המנחה והעמיתות על צילומיי שיעוריה. הרפלקציות סייעו לה לעקוב אחר התקדמותה המקצועית והשפעתו של שיעור קוהרנטי על המתח בהוראת המתמטיקה בכיתה מקדמת. כמו כן חלה התקדמות ביכולת הרפלקטיבית של המורה והיא הפיקה תועלת כבר משלב הצפייה האישית. מחקר זה עשוי לתרום להרחבת הידע התיאורטי והמתודולוגי בתחום החינוך המתמטי, ולהשפיע

גם בהיבט הפרקטי בתכנון ובביצוע מהלכי מורה בכיתות מקדמות. מומלץ להרחיב את המחקר הנוכחי ולבדוק במדגם גדול יותר.

רשימת מקורות

עובדיה, ת. (2018). עקרונות התערבות לקידום תהליכי פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, *6*. מכללת שאנן.

Brown, M. W. (2011). The teacher–tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In *Mathematics teachers at work* (pp. 37-56). Routledge.

Cai, J., Ding, M., & Wang, T. (2014). How do exemplary Chinese and U.S. mathematics teachers view instructional coherence? *Educational Studies in Mathematics,85*(2), 265-280. doi:10.1007/s10649-013-9513-3.

Kintsch, W. (1986). Learning from text. Cognition and Instruction, 3, 87–108

Liang, S. (2013). An Example of Coherent Mathematics Lesson. *Universal Journal of Educational Research*, *1*(2), 57-64.

Santagata, R., & Bray, W. (2016). Professional development processes that promote teacher change: the case of a video-based program focused on leveraging students' mathematical errors. *Professional development in education*, *42*(4), 547-568.

Schoenfeld, A. H. (2017). Uses of video in understanding and improving mathematical thinking and teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20* (5), 415-432. doi:10.1007/s10857-017-9381-3.

Stigler, J. W., & Perry, M. (1988). Mathematics learning in Japanese, Chinese, and American classrooms. New Directions for Child Development, 41, 27–54.

קוהרנטיות מתמטית כפי שהיא מתבטאת בשיעורי מתמטיקה: ניתוח קטעי וידאו בחמישה רבדי ניתוח

אשרית אטקינס, מכללת ירושלים ואולפנת אור תורה אוריה
תקוה עובדיה, מכללת אורנים ומכללת ירושלים

במחקר הנוכחי בחרה מורה למתמטיקה ליישם עקרונות הוראה שנמצאו במחקר אחר (עובדיה, 2018) בהוראתה. המטרה הראשונית של המחקר היתה להתמקד בניתוח שיעורי מתמטיקה מתועדים בווידאו במטרה לאפיין את האופן שבו יושמה ההתערבות החדשה על ידי המורה ולבחון התאמתה לסביבת הלמידה. תוך כדי ניתוח נתוני המחקר נמצא כי יישום עקרונות ההתערבות, כרוך בכלל מאפייני ההוראה, וכהגדרת החוקרים, בקוהרנטיות של הוראת השיעור בשלמותו. אי לכך, המחקר שיתואר להלן מתמקד באפיון מרכיבי הקוהרנטיות של שיעור מתמטיקה, ובהתפתחות ההוראה הקוהרנטית בעקבות ניתוח חמש רבדי של שיעורים מתועדים בווידאו, לאורך שנת הוראה.

רקע תיאורטי למחקר

אבן שושן מגדיר את המושג קוהרנטי כ"עקבי, סביר, הגיוני". בעשור האחרון, הרעיון של קוהרנטיות "כעקביות הגיונית של רעיון או פעולה" משך תשומת לב בתחום החינוך המתמטי. חוקרים רבים אימצו מסגרות ושיטות מחקר מתחומים אחרים על מנת להגדיר הוראה קוהרנטית בשיעורי מתמטיקה, תוך התמקדות במבני השיעור ופרקטיקות המיושמות בו.

קוהרנטיות במתמטיקה הוגדרה ע"י הוו (Wu, 2011):

"המתמטיקה היא קוהרנטית. היא מארג שבו כל המושגים והכישורים שזורים לוגית לשלם אחד."

במחקרים שונים מובאים מספר עקרונות להוראת מתמטיקה קוהרנטית, כגון : מיקוד השיעור בנושא אחד (Wang & Murphy, 2004; Hiebert et al., 2003), תכנון השיעור לפי הספרים הקיימים ובהתאם לרמה ולידע הקודם של התלמידים (Brown, 2009; Cai, Ding & Wang, 2014), מבנה השיעור צריך לכלול התחלה ,אמצע וסוף (BME- beginning, middle, and end), כל מושג המובא בשיעור נדרש להיות מוגדר במדויק (Brown, 2009), ארגון הרעיונות המתמטיים באופן רציף וספירלי (Cai, Ding & Wang, 2014), עיבוד השיח בכיתה וביצוע ההסקות על ידי המורה והתלמידים (Wang &Murphy, 2004; Sekiguchi, 2006) , שימוש בשיח מתמטי מדויק (Chen & Li, 2010) ושימוש בשפת מעבר(Wang &Murphy ,2004; Shimizu, 2007) .

לסיכום, הוראה קוהרנטית במתמטיקה כוללת מרכיבים הקשורים במבנה השיעור וניהולו על פי מבנה, ובארגון הרעיונות המתמטיים (Cai, Kaiser, Perry, & Wong, 2009; Stigler & Hiebert, 1999). כתוצאה מהוראה קוהרנטית התלמיד מסוגל להבנות ידע חדש על-גבי הידע המתמטי הקודם שלו, ובכך לגרום להבנה מתמטית עמוקה יותר, לטווח זמן ארוך יותר ולביצוע פעולות ברמה גבוהה יותר (Pitkäniemi & Häkkinen, 2012).

החל משנות ה-60 של המאה העשרים, תכניות רבות להכשרה ולהתפתחות מקצועית של מורים עושות שימוש בשיעורים מוסרטים לשם למידה, דיון ורפלקציה (נוריק, 2015). ישנה הסכמה סביב החשיבות הרבה בפיתוח מורים באמצעות ניתוח עצמאי ביקורתי של שיעוריהם (Little & Horn, 2007).

המחקר הנוכחי מתמקד בהערכת הקוהרנטיות של הוראת המתמטיקה כפי שהיא באה לידי ביטוי בניתוח חמש רבדי של סרטי וידאו משיעורי מתמטיקה לאורך שנת לימודים אחת.

מערך המחקר

מטרת המחקר הנוכחי הייתה לזהות האם וכיצד נתרמת מורה מצפייה בווידאו תוך ניתוח קטעי הווידאו בחמשה רבדים, ולאפיין את ההתפתחות המקצועית שלה להוראה קוהרנטית כתהליך הכרוך בניתוח.

המחקר עונה על שאלות המחקר: האם וכיצד נתרמת מורה מהצפייה בווידאו בשיעורים בהם היא משנה את שיטת ההוראה שלה מהוראה פרונטלית להוראה באמצעות דוגמא פתורה סטטית או אינטראקטיבית? האם וכיצד מתפתחת מקצועית מורה למתמטיקה כתוצאה של ניתוח חמש רבדי המבוצע על וידאו המתעד את שיעוריה?

סביבת המחקר: המחקר בוצע בבית ספר תיכון ארבע- שנתי לאורך שנת לימודים אחת. נושא השיעורים שנצפו היה חדו"א. אוכלוסיית המחקר הייתה הטרוגנית, וכללה תלמידות המסווגות לרמת 4 יח"ל.

מבנה המחקר

במחקר הפעולה הנוכחי המורה בחרה לשנות את שיטת ההוראה, כך שהיא תתמקד יותר בהפעלת התלמידות ופיתוח עצמאותן, וזאת באמצעות הוראה המבוססת על למידה מדוגמאות פתורות סטטיות או אינטראקטיביות.

כלי המחקר: המחקר כלל יומן חוקרת בו תועדו תכנוני השיעורים, תיעוד רפלקציה מזיכרון, תיעוד מפגשי הנחיה עם המנחה ותיעוד דיוני עמיתות אודות קטעי שיעורים מהווידאו. בנוסף, ליומן נאספו נתונים בווידאו מהשיעורים, ממפגשי ההנחיה וממפגשי העמיתות.

השיעורים שתועדו בשני כלים שכללו שלוש תקופות זמן, ושלושה הרכבים שונים של מפגשי ניתוח נותחו בהתאם לחמשה רבדים (רפלקציה מזיכרון, רפלקציה באמצעות צפייה אישית מווידאו, רפלקציה תוך כדי צפייה עם המנחה בווידאו, רפלקציה תוך כדי צפייה עם עמיתות בווידאו וניתוח כל החומרים על פי הספרות המתייחסת להוראה קוהרנטית של מתמטיקה). ניתוח של היומן על כל זמניו, והשוואה בין הניתוחים, ניתוח הצפיות והשוואה בניהן, והתבוננות בקטגוריות שנוצרו באמצעות הרעיונות המיצגים שיעור מתמטי קוהרנטי הובילו לשני היבטים מרכזיים של שינוי שחל בקוהרנטיות: קוהרנטיות בהוראת מתמטיקה ייצוגית, וקוהרנטיות בניהול דיונים.

להלן דוגמא לניתוח נתונים מהשיעור באמצעות ספרות:

טבלה 1. ניתוח נתונים משיעור לדוגמא באמצעות הספרות.

1. מיקוד השיעור בנושא אחד	הכרה וויזואלית של פונקציה זוגית לעומת אי זוגית.
2. תכנון השיעור לפי הספרים הקיימים ובהתאם לרמה ולידע הקודם של התלמידים	המשך לחקירה של פונקציות פולינומיאליות, והוא מעין המשך לחקירה.
3. מבנה השיעור: התחלה אמצע וסוף	השיעור נפתח בלמידה עצמאית של דפי הדוגמא הפתורה לאחריה נערך דיון והסתיים בסיכום התובנות שנלמדו לגבי הסימטריה של הפונקציה הזוגית ואי הסימטריה של הפונקציה האי זוגית.
4. דיוק המשפטים ההגדרות והמושגים	בדפי הדוגמא הפתורה הופיעו הגדרות מדויקות לפונקציה זוגית $f(x)=f(-x)$ ולפונקציה אי זוגית $-f(x)= f(-x)$. בשיח ובדיון היה חסר.
5. ארגון הרעיונות המתמטיים בצורה רציפה וספירלית	יחידת החומר תוכננה להילמד בשני שיעורים כאשר בשיעור הראשון המיקוד הוא על הוויזואליות של הגרפים לפונקציה זוגית לעומת אי זוגית, ובשיעור השני על הזיהוי וההוכחה האלגברית של פונקציה זוגית לעומת אי זוגית.
6. עיבוד השיח בכיתה וביצוע ההסקות בין קטעי הידע הנלמדים	נערך דיון בכיתה המשתף את כלל התלמידות. עניין קיפולי הנייר והנגזרות ממנו עובדו עם תלמידות הכיתה עד להבנתן.
7. שימוש בשיח מתמטי מדויק	השיח לא היה מדויק בגלל התאמתו לשפה המדוברת, אך היה מובן לתלמידות בכלל ולתלמידות החלשות בפרט. יש מקום למצוא את ה"תרגום" משפה דבורה ופשוטה לשפה מתמטית הולמת.
8. שימוש בשפת מעבר	מאחר והשפה לא הייתה מתמטית, אז גם לא הייתה שפת מעבר. המורה הייתה צריכה לחבר בין רעיונות קודמים שנלמדו בהקשר של ערכי הפונקציה בנקודות מסוימות, לערכי פונקציות זוגיות ואי זוגיות.

תיאור הממצאים

קוהרנטיות של הוראת ייצוגים

הבנת האנליזה כוללת את המיומנות הקוגניטיבית לבצע מעבר בין הייצוגים, הייצוג האלגברי לעומת הייצוג הגרפי והייצוג המילולי מול שניהם. ההבנה של נושא האנליזה כולו מושתת על המעבר הנ"ל, משוואת הפונקציה לעומת הגרף הפונקציה, גרף הפונקציה לעומת גרף הנגזרת וכו'. בקטגוריה זו נמצא תהליך התפתחותי של המורה שבו היא מתקדמת ממצב שבו היא לא מודעת לתהליך הלמידה המורכב של מעבר בין ייצוגים, ואינה ממקדת את התלמידים למהות הייצוג. למשל, כאשר היא מלמדת מושג כגון "חיוביות ושליליות" של פונקציה באמצעות שרטוט, היא לא מודעת לכך שעליה להתנסח פורמאלית מתמטית ואת הניסוח להתאים לייצוג הגרפי. המיקוד בהגדרה הוויזואלית של תחומי החיוביות והשליליות ללא הצגתו לצד ההגדרה האלגברית המדויקת גרמו לחוסר קוהרנטיות בשיח בכיתה, ולאי הבנה של המושג בריבוי ייצוגיו. בהמשך ההוראה לאחר ניתוח חמש רבדי של האירוע הקודם המורה מלמדת את ההגדרה של המושגים "פונקציה זוגית ואי זוגית". תוך התמקדות בהצגה הוויזואלית דרך הצגת קיפולי נייר של פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית. השיעור בתכנונו נבנה ותוכנן קוהרנטית בהתאם להגדרות. המיקוד בהגדרה הוויזואלית דרך קיפולי הנייר ללא תרגומו לשפה מתמטית הולמת גרמו לחוסר קוהרנטיות בשיח בכיתה, ולחוסר שפת מעבר, כפי שנדרש במחקרים (Chen & Li, 2010 ;Wang &Murphy ,2004; Shimizu, 2007).

קוהרנטיות בניהול דיונים

קטגוריה זו מתייחסת להתפתחות של המורה בניהול דיונים קוהרנטיים.

בתחילת התהליך נצפה בווידאו כי המורה הקשיבה לשאלות והגיבה להן, אך לא ליכדה את התשובות בעצמה וכתוצאה מכך נוצר שיח ארוך ובלתי ממוקד למשתתף או למקשיב מהצד. מאירוע זה למדנו בניתוח החמש רבדי את חשיבות הליכוד בין כל הרעיונות הנאמרים בדיון, והצורך של התלמידות לשמוע מהמורה סיכום של משפטי הקנייה מובנים וקוהרנטיים. כפי שמדגישים קאי דינג וואנג במחקרם (Cai, Ding & Wang, 2014) בהמשך המחקר התוודענו לדיון שהיה ממוקד ולפי מבנה התקשורת והשיח בו התלמידות הבינו את הנלמד.

שתי קטגוריות קריטיות אלה בהוראה, האחת מתייחסת לפרקטיקת תלוית תוכן של הוראת ייצוגים במתמטיקה והשנייה מתמקדת לפרקטיקת ליבה של הוראה באמצעות ניהול דיונים התפתחו בהוראת המורה בהתאם לניתוח החמש רבדי. ההתפתחות כללה שינוי בדרך ההוראה ובבניית וביצוע שיעורים קוהרנטיים יותר.

דיון ומסקנות

מחקר הפעולה הנוכחי בחן את השינוי בדרכי ההוראה שהמורה ניסתה לסגל להוראתה, וזיהה התפתחות ניהול שיעור מתמטיקה קוהרנטי בשני היבטים: היבט הוראת הייצוגים והיבט ניהול הדיונים. תוך כדי ניתוח חמש רבדי של שיעורי המתמטיקה נמצא כי המורה צריכה לארגן את ההוראה באופן קוהרנטי יותר בהתאם לתבחינים שהוצגו בספרות על הוראת מתמטיקה קוהרנטית.

הוראת ייצוגים קוהרנטית: כל מושג המובא בשיעור נדרש להיות מוגדר במדויק (Brown, 2009). המיומנות הקוגניטיבית לביצוע מעבר בין ייצוגים חשובה בהוראת החדו"א ועל המורה ללמדה בצורה קוהרנטית ולכן כשמגדירים ייצוג מתמטי בשיעור יש צורך להתייחס גם לייצוגו הוויזואלי וגם לייצוגו האלגברי. קוהרנטיות כוללת התפתחות ורצף של מושגים מהיגיון פשוט למורכב יותר, מטרת המורה במהלך הלמידה היא לקשר בין המושגים הנלמדים לבין הרצף הלוגי (Wu, 2011).

ניהול דיונים קוהרנטיים: על המורה לעודד את התלמידים להשתתף באופן פעיל בשיעור. המורה נדרש ללכוד תפיסות עכשוויות של התלמיד ולסייע לו לעבד את החומר ולהבנות לעצמו תפיסות נכונות שיעזרו לו להתמודד עם פתרון בעיות בהמשך. עיבוד השיח בכיתה וביצוע ההסקות על ידי המורה והתלמידים הם המפתח להבנה, למידה ופתרון בעיות (Wang &Murphy, 2004; Sekiguchi, 2006). בנוסף, מורה המשתמש בשפה מדויקת מסייע לתלמידיו

לבצע קשרים בין בעיות מתמטיות שונות ובכך לשפר את הבנתם. השיח צריך להשלים את מבנה השיעור הקוהרנטי ובלעדיו לא תהיה הבנה מוצלחת (Chen & Li, 2010).

רשימת מקורות

אבן-שושן, א' (עורך). (1988).המילון העברי המרוכז. ירושלים: קרית ספר בע"מ.

עובדיה, ת' (2018). עקרונות התערבות לקידום תהליכי פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות. מחקר ועיון בחינוך מתמטי מס' 6. מכללת שאנן. נוריק, י' (2015). התגבשות הידע המתמטי להוראה של מורים בעקבות צפייה מונחית ודיון עמיתים בשיעורי מתמטיקה מוסריים. חיבור לשם קבלת תואר מוסמך, מכון ויצמן למדע.

Brown, M. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. Remillard, G. Lloyd, & B. Herbel-Eisenmann (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17–36). New York: Routledge.

Cai, J., Kaiser, G., Perry, R., & Wong, N. Y. (2009). Effective mathematics teaching from teachers' perspectives: National and international studies. Rotterdam: Sense Publishing.

Cai, J., Ding, M., & Wang, T. (2014). How do exemplary Chinese and U.S. mathematics teachers view instructional coherence? *Educational Studies in Mathematics*,85(2), 265-280. doi:10.1007/s10649-013-9513-3

Chen, X., & Li, Y. (2010). Instructional Coherence In Chinese Mathematics Classroom—A Case Study Of Lessons On Fraction Division. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(4), 711-735. doi:10.1007/s10763-009-9182-y

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Giwin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington: U. S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Hollingsworth, H., & Kusznirczuk, J. (2014). *Using video and a structured observation instrument to generate co-constructed observation feedback for teachers*. Paper presented at the ECER Conference, Oporto, Portugal, September, 2014.

Little, J. W., & Horn, I. S. (2007). 'Normalizing' problems of practice: Converting routine conversation into a resource for learning in professional communities. In L. Stoll, & K. S. Louis (Eds*.), Professional learning communities: Divergence, detail and difficulties* (pp. 79-92). Maidenhead, UK: Open University Press.

Pitkäniemi, H., & Häkkinen, K. (2012). Koherenssi, kognitiivinen aktivointi ja emotionaalinen tuki matematiikan luokkahuoneopetuksen laatutekijöinä (in Finnish). (Instructional coherence, cognitive activation and emotional support as factors of instructional quality in mathematics). In P. Atjonen (Ed.), Oppiminen ajassa – kasvatus tulevaisuuteen (pp.36–49). Jyväskylä: *The Finnish Educational Research Association.*

Segiguchi, Y. (2006). Coherence of mathematics lessons in Japanese eighth-grade classrooms. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 81–88. Prague, Czech Republic: PME.

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education*, 60(1), 20-37.

Shimizu, Y. (2007). Explicit linking in the sequence of consecutive lessons in mathematics classroom in Japan. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 177–184. Seoul, South Korea: PME.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.

Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the AMS*, 58(3), 372–384.

Wang, T., & Murphy, J. (2004). An examination of coherence in a Chinese mathematics classroom. In L. Fan, N. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics* (pp. 107–123). Singapore: World Scientific Publishing.

שימוש בטכנולוגית AR כמקדמת תפיסה של ההגדרה הקריטית של המושג מנסרה

תקוה עובדיה, מכללת אורנים ומכללת ירושלים
יניב ביטון, מט"ח ומכללת שאנן

תקציר

במחקר הנוכחי יושמה טכנולוגיה רבודה (*AUGMENTED REALITY* ובקיצור *AR*) לצורכי למידה של תלמידי כיתה ו' בנושא מנסרות (גאומטריה במרחב). לצורך זה נעשה שימוש באפליקציה SHAPEAPP שמסייעת בפיתוח חשיבה חזותית במרחב. האפליקציה מלווה את למידת נושא ה"גופים" בספר הלימוד ומסייעת בהמחשה תלת-ממדית של הגופים שנלמדים. האפליקציה מיישמת את טכנולוגית המציאות הרבודה, כך שכאשר מתבוננים במצג באמצעות מסך הסמארטפון נראה שכבות דיגיטליות למיניהן, כאילו הן קיימות במציאות. התלמיד או התלמידה יכולים להזיז את הגופים, לסובב, לפרוס אותם, למדוד, לחתוך גוף ולחבר מספר גופים יחד ובתוך כך לפתח תובנות על אודות תכונות הגוף וצורתו ובאמצעותן לפתור בעיות בנושא. המחקר הנוכחי מתאר ממצאי ניסוי של הוראה בשלבים באמצעות האפליקציה.

רקע תאורטי

בשנים האחרונות חוקרים רבים עומדים על הקשר בין הבנת הגאומטריה ובין למידת מתמטיקה (Sinclair & Bruce, 2015). למעשה, טהטה (Tahta, 1980) מסביר כיצד הגאומטריה היא חלק בלתי נפרד מהבנה מתמטית וכיצד הפרדה מלאכותית בין לימודי המתמטיקה ללימודי הגאומטריה מביאה לידי קשיים שאפשר למנוע אותם. כאן נמצא כי תלמידים רבים רואים בלמידת גאומטריה מקצוע קשה (Clements, 1998; Mulligan, 2011; Verdine, Lucca, Golinkoff, Hirsh-Pasek, & Newcombe, 2016).

בתוך כך נמצא כי יש קשר הדוק בין שיפור מיומנויות בראייה מרחבית ובין הבנה טובה יותר של תפיסות וידע בגאומטריה (Casey et al., 2008), וכי שימוש בטכנולוגיות דיגיטליות מאפשר חיזוק הקשר בין תנועה וראייה מרחבית מצד אחד ובין למידת הגאומטריה מצד אחר (Battista, 2001). הקשר החזק בין שימוש בטכנולוגיות דיגיטליות ללימוד הגאומטריה הביא לידי פיתוחים חדשניים המאפשרים ללומדים לחדד את הראייה המרחבית שלהם באמצעות למידה המערבת תנועה במהלך חקירת גופים גאומטריים. במאמר זה נתמקד בשימוש בטכנולוגיית המציאות הרבודה ללמידת מנסרות.

התפתחות היישומים של טכנולוגיית AR בהוראת הגאומטריה

התפיסה המרחבית בגאומטריה כוללת חמישה רכיבים: תפיסה מרחבית, ויזואליזציה מרחבית, סיבובים והנפשות, יחסים מרחביים ואוריינטציה מרחבית (Clements, 1998). המטרה העיקרית של הוראת הגאומטריה היא פיתוח רכיבים אלה. מחקרים מציעים כי למידת גאומטריה באמצעות מציאות וירטואלית מקדמת חשיבה ותפיסה מרחבית. לדוגמה קאופמן ושמלסטיג (Kaufmann & Schmalstieg, 2003) פיתחו סביבת למידה לגאומטריה במרחב הכוללת טכניקה של AR. מטרתם הייתה להמחיש את הגופים ואת תכונותיהם הגאומטריות במרחב, וכך להקל על התלמידים ללמוד על הגופים לא רק ויזואלית, אלא גם על פי תכונותיהם הייחודיות.

קאופמן (Kaufmann, 2006) הציג מחקר המתאר יותר מ-300 משתמשים בסביבה של גאומטריה דינמית תלת-ממדית המשלבת AR בלימודי גאומטריה ברמות למיניהן, והוכיח כי ההזדמנות לסובב עצמים גאומטריים במרחב גם מסייעת למורים בהבנת הכשלים של החשיבה המרחבית, וגם מקדמת את התפיסה המרחבית באמצעות עיצוב בעיות מתאימות לסביבה וללומד. רדו ועמיתיו (Radu et al., 2015) פיתחו משחק לילדים צעירים הכולל רמות התפתחות של תפיסה גאומטרית במרחב. במהלך פיתוח המשחק הם שיפרו ביצועים בכלי המשתמש במציאות הרבודה וגם במשימות על פי תגובת המשתמשים בזמן הלמידה. במסקנותיהם הם כתבו כי כדי להכין יישום וירטואלי מסוג מציאות רבודה, יש לערוך הערכה מעצבת לכלי וגם למשימות במהלך יישום בפועל של שניהם בו בזמן.

שיטה

מטרת המחקר

מטרת המחקר הנוכחי היא לאפיין את תהליך פתרון הבעיות של תלמידי כיתה ו' בנושא מנסרות בעת השימוש באפליקציה (AR) לעומת אפיון התפיסה והראייה המרחבית של התלמידים בפתרון בעיות בנושא ללא יישום האפליקציה. מחקרים קודמים שנעשו באמצעות טכנולוגיה רבודה לא דנו ביתרון היחסי של האפליקציה על פי מדדים פדגוגיים ספציפיים לתכנים גיאומטריים כגון מישור לעומת מרחב.

שאלת המחקר

האם שילוב אפליקציית AR מקדם פתרון בעיות בנושא גופים במרחב בקרב תלמידי כיתה ו', ואם כן, כיצד? מה מאפיין תהליך פתרון בעיות המלווה באפליקציה לעומת תהליך פתרון בעיות שאינו מיישם אותה?

מהלך המחקר

המחקר בוצע בשלושה שלבים: ממבחן מסכם לשכבת כיתה ו' בנים ובנות, מיון ציוני התלמידים וחלוקת ההישגים לרבעונים, בחירת 3 תלמידים מכל רבעון לצורך ראיון.

ניתוח נתונים

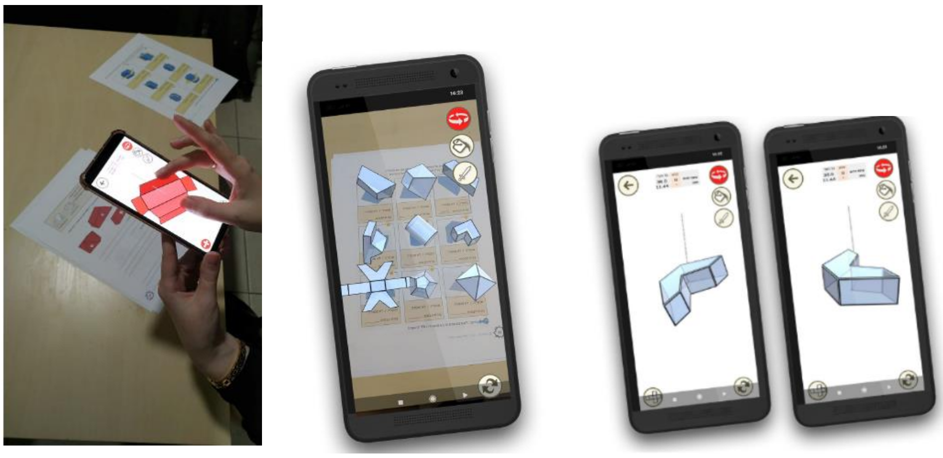
המבחן נותח ומופה לפי מענה נכון או שגוי לשאלה ולפי מיון מגדרי של העונים לשאלה, הראיונות נותחו ניתוחי תוכן, לפי משימה כלומר ניתוח רוחב של תובנות של כל 13 התלמידים לאותה משימה, וניתוח תוכן לפי מאפיינים ייחודים של התלמיד המרואיין. נמצאו קטגוריות מאחדות לכל התלמידים, שמיפינו אותן לפי הספרות המתייחסת למרכיבי התפיסה המרחבית: תפיסה מרחבית, ויזואליזציה מרחבית, סיבובים והנפשות, יחסים מרחביים ואוריינטציה מרחבית (Clements, 1998).

ממצאים

נמצאו ארבעה ממצאים שאין להם עדות בספרות מחקרית ותיאורטית שבצעה מחקרים דומים קרובים:

א. כל התלמידים העדיפו לענות על בעיות באמצעות חקר הגוף ולא הפריסה, באמצעות סיבוב ופעולות דומות.

להלן תמונות לתיאור סיבוב ופריסה של גוף:



ב. תלמידים שעברו למצב פריסה חיפשו בראש ובראשונה את הבסיסים של הגוף ורק אח"כ התייחסו לשאר חלקי הפריסה.

ג. למרות שמצאנו ארבע רמות של תלמידים, כאשר ביצענו את הראיונות לא מצאנו הבדלי תפקוד בפתרון הבעיות בין ארבעת רמות התלמידים, בזמן שהם פתרו את הבעיה באמצעות היישומון.

ד. ככל שהתלמידים התרגלו ליישומון (והשתמשו בו לאחר פתרון עם עיפרון ודף) הם בצעו מינימום פעולות חקר באמצעותו, ונטו להצהיר עליהן. (לא כיוונו לכך, ומצאנו זאת לאחר ניתוח התנהגות דומה שנמצאה בקרב התלמידים)

דיון

עבודות קודמות עם מציאות רבודה (Martín-Gutierrez, Trujillo, & Acosta-Gonzalez, 2013; Young & Santoso, 2018) נוגעות לפיתוח יכולת הראייה המרחבית בגאומטריה ולאו דווקא זו העוסקת בתמרון בממד

השלישי. עבודה זו מאירה שלושה חידושים עיקריים: החידוש הראשון הוא ההבנה כי המוטיבציה של התלמיד היא להבין גוף במרחב באמצעות המרחב ולכן הפעולות הראשונות של פתרון בעיה באמצעות היישומון, כוללות הזזה במרחב "ויזואליזציה מרחבית". החידוש השני נוגע לניסיון להבין את פעולות התלמידים, את התהליך ורצף הפעולות שמבצע תלמיד בזמן פתרון בעיה כדי לרכוש תפיסה של גוף במרחב (לפי פרק הממצאים אפשר לראות כי הפעולות כוללות סדרה קבועה של פעולות וסדר לוגי לביצוען) שזו רמת הסיבובים וההנפשות. החידוש השלישי נוגע לממצא שמבחינת הלומדים פעולות של סיבוב והזזה של גופים קודמות לפריסה של תלת-ממד שזו הרמה המתייחסת ליחסים מרחביים ואוריינטציה מרחבית. פעולה שמלמדת שהתלמידים ניסו קודם להבין את שלושת הממדים ורק כאשר לא הבינו הפכו גוף לפריסה. (את ממצא החסכנות אנו מתכוונים להמשיך ולבחון).

הממצאים של המחקר הנוכחי עולים בקנה אחד עם מחקרים אחרים (Ibáñez, Di-Serio, Villarán-Molina, & Delgado-Kloos, 2015) המעודדים להעריך ולעצב את תוכניות הלימוד באמצעות המציאות הרבודה במהלך יישום הוראה באמצעותם באופן שעונה על הבדלים תפיסתיים בין תלמידים.

רשימת מקורות

Battista, M. T. (2001). Shape makers: A computer environment that engenders students' construction of geometric ideas and reasoning. Computers in the Schools, 17(1-2), 105-120. doi:10.1300/J025v17n01_09

Casey, B. M., Andrews, N., Schindler, H., Kersh, J. E., Samper, A., & Copley, J. (2008). The development of spatial skills through interventions involving block building activities. Cognition and Instruction, 26(3), 269-309. doi:10.1080/07370000802177177

Clements, D. H. (1998). Geometric and spatial thinking in young children. Arlington, VA: National Science Foundation.

Ibáñez, M. B., Di-Serio, Á., Villarán-Molina, D., & Delgado-Kloos, C. (2015). Augmented reality-based simulators as discovery learning tools: An empirical study. IEEE Transactions on Education, 58(3), 208-213. doi:10.1109/TE.2014.2379712

Kaufmann, H. (2003). Collaborative augmented reality in education. In Proceeding of Imagina 2003 Conference (pp. 1-4). Monte Carlo, Monaco.

Kaufmann, H. (2006, August). The potential of augmented reality in dynamic geometry education. In 12th International Conference on Geometry and Graphics (pp. 1-14). Salvador, Brazil: ISGG.

Kaufmann, H., & Schmalstieg, D. (2003). Mathematics and geometry education with collaborative augmented reality. Computers & Graphics, 27(3), 339-345. doi:10.1016/S0097-8493(03)00028-1

Merrill, E. C., Yang, Y., Roskos, B., & Steele, S. (2016). Sex differences in using spatial and verbal abilities influence route learning performance in a virtual environment: A comparison of 6- to 12-year old boys and girls. Frontiers in Psychology, 7(Article 258), 1-17. doi:10.3389/fpsyg.2016.00258. eCollection 2016

Mulligan, J. (2011). Towards understanding the origins of children's difficulties in mathematics learning. Australian Journal of Learning Difficulties, 16(1), 19-39. doi:10.1080/19404158.2011.563476

Radu, I., Doherty, E., DiQuollo, K., McCarthy, B., & Tiu, M. (2015, June). Cyberchase shape quest: pushing geometry education boundaries with augmented reality. In Proceedings of the 14th International Conference on Interaction Design and Children (pp. 430-433). ACM. doi:10.1145/2771839.2771871

Sinclair, N., & Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. ZDM, 47(3), 319-329. doi:10.1007/s11858-015-0693-4

Tahta, D. (1980). About geometry. For the Learning of Mathematics, 1(1), 2-9.

Verdine, B. N., Lucca, K. R., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., & Newcombe, N. S. (2016). The shape of things: The origin of young children's knowledge of the names and properties of geometric forms. Journal of Cognition and Development, 17(1), 142-161. doi:10.1080/15248372.2015.1016610

Yılmaz, H. B. (2009). On the development and measurement of spatial ability. International Electronic .Journal of Elementary Education, 1(2), 83-96

Young, J. C., & Santoso, H. B. (2018). Preliminary study of JunoBlock: Marker-based augmented reality for geometry educational tool. In N. Abdullah, W. Wan Adnan, M. Foth (Eds.), Communications in computer and information science: User Science and Engineering (Vol. 886, pp. 219-230). Singapore: Springer. doi:10.1007/978-981-13-1628-9_20

הכשרת מורים למתמטיקה באמצעות סימולציות הוראה עם שחקנים

איריס שרייבר, אוניברסיטת בר אילן וסמינר הקיבוצים

מבוא

בשנים האחרונות הוקמו מרכזי סימולציה במוסדות הכשרת מורים, בהם ניתן לדמות אירועי הוראה בעזרת שחקנים. במסגרת הסימולציה (clinical simulation) הסטודנט מקבל את תפקיד המורה והשחקנים מקבלים תפקיד של תלמידים בכיתה, של הורים או של בעל תפקיד בבית הספר. כל סימולציה מתנהלת סביב תרחיש שפותח מראש, המדמה אירוע בכיתה (לימודי או משמעתי), שיחה עם הורה או בעל תפקיד וכד'. במסגרת סימולציה הסטודנט חווה את האירוע בסביבה בטוחה ויכול להתנסות בהתמודדויות שונות. בהתייחס להוראת מתמטיקה, במסגרת הסימולציה הסטודנט יכול לחוות אירוע הוראה הכולל, למשל, טיפול בשגיאות של תלמידים, ניהול דיון מתמטי סביב פתרון בעיה, מתן דרכי פתרון מגוונות לאותה בעיה מתמטית, פתרון בדרכים לא שגרתיות, וכדומה.

במסגרות הכשרת בעלי מקצוע שונים, למשל במסגרות הכשרה של מקצועות הרפואה (Blum, Borglund & Parcell, 2011; Bambini, Roshburn & Donald, 2009) השימוש בסימולציות רווח ומקובל ונעשו מחקרים המוכיחים את יעילות הסימולציות על פני הכשרה תיאורטית הן בהקשר לידע המקצועי והן בהקשר לביטחון העצמי. במסגרות הכשרת מורים נעשו מחקרים לגבי שימוש בסימולציות, למשל מחקרים שעסקו באירועי משמעת בכיתה או ביחסי הורה-מורה (Dotger, 2010; Walker & Dotger, 2011).

במסגרת מחקר זה בחרתי לבדוק שני גורמים, המוזכרים בספרות המקצועית כמשמעותיים לתהליכי הוראה-למידה, והם ידע המורים (ידע תוכני וידע פדגוגי-תוכני) ותחושת החוללות העצמית שלהם. מוסדות הכשרת מורים עוסקים בין היתר גם בפיתוח מקצועי הכולל גורמים אלה. ידע מורים וחוללות עצמית של מורים לגבי הידע שלהם לא נחקרו, למיטב ידיעתי, על ידי שימוש בסימולציות הוראה עם שחקנים. על כן חשוב לבצע מחקר שיבדוק השפעת סימולציות עם שחקנים על גורמים אלו.

רקע

קבוצת חוקרים בראשות דבורה בול, הגדירו ארבעה מרכיבים של ידע הנדרש למורים למתמטיקה (Ball, Thames & Phelps, 2008), וסיווגו שני מרכיבים של ידע תוכני (ידע תוכן שגרתי וידע תוכן ייחודי) ושני מרכיבים של ידע פדגוגי תוכני (ידע של תוכן ותלמידים וידע של תוכן והוראה):

ידע תוכן שגרתי (CCK, Common Content Knowledge), למשל, ידע לפתור או לחשב.

ידע תוכן ייחודי (SCK, Specialized Content Knowledge), למשל, פתרון בעיה בכמה דרכים או בחינת דרך פתרון לא שגרתית לבעיה.

ידע של תוכן והוראה (KCT, Knowledge of Content and Teaching), למשל, אילו דוגמאות מתאימות להצגת נושא או היכרות עם דרכי ייצוג שונות לבעיות.

ידע של תוכן ותלמידים (KCS, Knowledge of Content and Students), למשל, שגיאות נפוצות של תלמידים וסיבות אפשריות לשגיאות אלו.

מחקרים שבדקו ידע תוכן של מורים וידע פדגוגי מצאו כי ככל שלמורים היה ידע תוכני ופדגוגי רחב יותר, התלמידים הפגינו ידע רחב יותר והצליחו יותר (Tchoshanov,2011). כמו כן נמצא כי איכות ההוראה של המורים קשורה בידע התוכני והפדגוגי שיש להם בתחום הדעת: ככל שלמורים היה ידע רחב יותר, הם הצליחו לתת מענה טוב יותר לקשיי התלמידים, הכינו תכניות הוראה טובות יותר ותלמידיהם הצליחו יותר (Van-Inger, Eskelson & Allsopp, 2016).

גורם נוסף משמעותי לאיכות ההוראה של מורים הוא גורם מתחום הרגש: חוללות עצמית (self-efficacy). המונח חוללות עצמית הוגדר לראשונה על ידי בנדורה (Bandura, 1977) כאמונה של האדם ביכולתו לארגן ולבצע בהצלחה סדרת פעולות הדרושות לשם השגת תוצאה רצויה. לשם ביצוע אפקטיבי של מטלה דרושים לאדם הן הכישורים המתאימים והן האמונה והביטחון ביכולתו להפעילם באופן הנדרש. על פי בנדורה ועמיתיו (Bandura et al. 2003). תפקוד המורה והתלמיד בכיתה יכולים להיות קשורים ברמת הביטחון של כל אחד מהם למלא את תפקידו בהצלחה (Dellinger, Bobbett, Olivier, & Ellett,

(2008. תחושת מסוגלות נמצאה כגורם משמעותי בתפקוד המורה: מחקרים מראים שככל שתחושת המסוגלות של המורה גבוהה יותר, כך משתפר תפקודו ואיכות ההוראה שלו עולה (Skaalvik & Skaalvik, 2010).

מחקרים שעסקו בהכשרת מורים באמצעות סימולציה מצאו כי למידה בדרך זו חיזקה את תחושת הביטחון של המורה, שיפרה את המודעות ואת האמפתיה שלו לבעיות שונות כמו קשיים של הורים באוכלוסיות רב-תרבותיות, ונתנה לו כלים להתמודדות עם מצבי עימות מול הורים (Dotger, 2010; Walker & Dotger, 2011). לא נמצאו, למיטב ידיעתי מחקרים הקשורים לשימוש בסימולציות להכשרת מורים למתמטיקה הבודקים את ידע המורים ואת תחושת החוללות העצמית שלהם לגבי ידע זה.

במחקר זה ברצוני לבדוק את מרכיבי הידע השונים כפי שהם באים לידי ביטוי בתרחיש מתמטי בסימולציה עם שחקנים. כמו כן, ברצוני לבדוק את רמת החוללות העצמית של הסטודנט ביחס למרכיבי הידע שהוזכרו לעיל. כלומר עד כמה הוא בטוח בידע שלו וביכולתו להביאו לידי ביטוי.

מטרות המחקר:

1. להשוות את רמת החוללות העצמית של הסטודנטים לפני הסימולציות ואחריהן ולבדוק האם הסימולציה הובילה לשינוי (לטובה או לרעה) במידת הביטחון?
2. להשוות את רמת הידע הפדגוגי שמפגין הסטודנט בכל אחד ממרכיבי הידע, האם קיים הבדל ברמת הידע במרכיבים השונים?
3. האם קיים קשר בין רמת ידע לבין רמת חוללות עצמית?

מתודולוגיה

מחקר מקדים בוצע ובו השתתפו 15 סטודנטים. במחקר נבדקו תרחישי סימולציה שונים בנושאים מתמטיים מגוונים. בכל תרחיש נבדקו שני מרכיבי ידע: מרכיב אחד של ידע תוכני ומרכיב אחד של ידע פדגוגי.

אוכלוסיית המחקר הנוכחי: 15 פרחי הוראה במסלול מתמטיקה.

מהלך המחקר: כל הסטודנטים משתתפים בסימולציה מול שחקנים, על פי תרחיש הוראה שנבנה במיוחד. כל הסטודנטים ישתתפו באותו תרחיש באותו שבוע.

כלי המחקר:

1. תרחיש מתמטי שפותח לצורך הסימולציה בו השחקנים "התלמידים" פתרו בעיה מתמטית והסטודנט "המורה" אמור לדון בפתרונות שלהם. בתרחיש יציגו השחקנים (כתלמידים בכיתה) כמה דרכי פתרון לבעיה מסוימת כאשר דרך אחת היא הדרך השגרתית, דרך שניה היא דרך שגויה ודרך שלישית היא דרך לא שגרתית לפתרון הבעיה. מטרת כלי זה: הסטודנט צריך להפגין ידע מתמטי ולדעת לפתור נכון, הוא צריך להפגין ידע לא שגרתי ולדעת לפתור בדרך נוספת (או להבין את הדרך הנוספת), הוא צריך להפגין ידע לגבי הוראה ולבחון את דרכי הפתרון השונות ונכונותן ולהסביר אותן לתלמידים האחרים, הוא צריך להפגין ידע לגבי תלמידים ולאתר שגיאה של תלמיד, להבין את המקור לשגיאה ולהסביר אותה לתלמיד.
2. שאלוני עמדות לבדיקת רמת החוללות העצמית (על פי מדריך לבניית שאלוני חוללות עצמית של בנדורה).
3. ראיון אישי עם כל סטודנט- האם מודע להפגנת ידע או חוסר ידע שלו? מה הוביל לתגובתו בכל שלב בתרחיש? מה הוביל לשינוי בחוללות עצמית?
4. הסימולציות והראיונות עם הסטודנטים יצולמו. צילומי הסימולציות יתומללו ויקודדו, וכך גם צילומי הראיונות. ייבדקו דרכי ההסבר וההוראה של הסטודנט המשתתף והאם הוא מפגין ידע נדרש. ייבדקו המילים שבשימוש הסטודנט במהלך הראיון: אילו אמירות מביעות ידע וחוללות ואילו לא.

נושאים לדיון

1. דיון בחשיבות הנושא ובאפשרויות שונות לשימוש בכלי הסימולציה להכשרת מורים.
2. דיון במתודולוגיה ובשאלות המחקר ודיון ברעיונות לשיפורים או לשינויים נדרשים
2. דיון בנושא מתמטי שכדאי לטפל בו ולפתח לו תרחיש סימולציה

3. דיון במגבלות אפשריות של הקבוצה ושל כלי הסימולציה שיכולות להטות את הממצאים, כיצד לעקוף אותן ו/או כיצד לברר אותן בראיונות עם הסטודנטים

מילות מפתח

סימולציה, ידע מורים, חוללות עצמית

מקורות

Ball, D.L., Thames M.H., & Phelps G. (2008). Content knowledge for teaching- What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389-407.

Bambini, D., Washburn, J., & Perkins, R. (2009). Outcome for clinical simulation for novice nursing students: communication, confidence, clinical judgment. *Nursing Education Perspectives, 30,* 79-82.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. Psychological review, 84, 191-215.

Bandura, A., Caprara G. V., Barbaraneli C., Gerbino M., & Pastorelli C. (2003). Role of affective self-regulatory efficacy in diverse spheres of psychosocial functioning. Child Development, 74, 769-782.

Blum, C. A., Borglund, S., & Parcells D. (2011). High fidelity nursing simulation: impact on student self-confident and clinical competence. *International Journal of Nursing Education Scholarship, 7,* ISSN (Online) 1548-923X, DOI: https://doi.org/10.2202/1548-923X.2035

Dellinger, A., Bobbett, J., Olivier, D., & Ellett, c. (2008). Measuring teachers' self-efficacy beliefs: Development and use of the TEBS- Self. *Teaching and Teacher Education,* 24, 751-766.

Dotger, B. H. (2010). ''I had no idea'': Developing dispositional awareness and sensitivity through a cross-professional pedagogy. *Teaching and Teacher Education 26,* 805–812.

Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2010). Teacher self-efficacy and teacher burnout: a study of relations. Teacher and Teacher Education, 26, 1059-1069.

Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76,* 141-164.

Walker, J. M. T., & Dotger, B. H. (2012). Teacher Candidates' Readiness for Family-School Partnership Because Wisdom Can't Be Told: Using Comparison of Simulated Parent−Teacher Conferences to Assess. *Journal of Teacher Education, 63,* 62-75.

פתרון משימות אריתמטיות על ידי קבוצה של פרחי הוראה: תהליך למידה כדה ריטואליזציה

טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

הקדמה ורקע תאורטי

מחקר זה מתמקד בתהליכי למידה של סטודנטים להוראת המתמטיקה במסגרת פתרון משימות של חישובי סדרות. למחקר זה אימצנו את הגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) כמסגרת מושגית ומתודולוגית, שעל פיה למידה היא שינוי בשיח של הלומד, כשאחד המאפיינים של השיח הינו הרוטינות שהלומד מבצע. רוטינות הן דפוסים החוזרים על עצמם כתגובה לסיטואציה מוכרת.

לאחרונה, לביא, שטיינר וספרד (Lavie, Steiner & Sfard, 2019) המשיגו למידה כתהליך של רוטיניזציה של פעולות הלומד, כלומר תהליך של אימוץ והתאמה של רוטינות שאחרים מבצעים. הן הציעו שתהליך הדה-ריטואליזציה הינו מרכזי להסבר תהליכי למידת מתמטיקה: בשלבים הראשונים של הלמידה הלומד מחקה באופן ריטואלי את פעולות המומחה, ועם הניסיון, ביצועיו של הלומד הופכים לגמישים (flexible), מקושרים (bonded), ישימים (applicable) ומנומקים (substantiated). בנוסף, השיח של הלומד נהיה מועצם (objectified) והלומד מפגין סוכנות (agentivity) גבוהה יותר.

במחקר זה אנו בוחנות את היישומיות של המשגה זו בהקשר של תהליכי למידה של סטודנטים להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי. נתמקד בתהליכי למידה של משימות אריתמטיות. תהליכים כאלה הם שכיחים בבית הספר: המורה מציג משימה ואת רוטינת הפתרון שלה. התלמידים מצופים להפעיל את הרוטינה ולהתאים אותה כדי לפתור אוסף של משימות דומות ברמת קושי עולה. מטרתנו היא לפרק ולהפוך למפורש תהליך זה בעזרת ההמשגה של תהליך הדה-ריטואליזציה.

מתודולוגיה

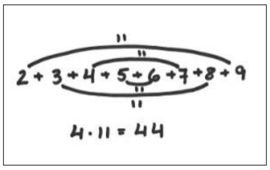
המשימות בהן מתמקד המחקר הן **ח**ישובי **ס**כומים של **ס**דרות (חס"ס) שהן סדרות חשבוניות או כאלה אותן ניתן לפרק לסדרות חשבוניות (איור 1). תהליך הפתרון כולל פיתוח של רוטינות חדשות מרוטינות יסוד שהן רוטינות "קטנות יותר".

חשבו את הסכומים של הסדרות הבאות:
1. $1+3+5+7+9+ \ldots\ldots + 997 + 999$
2. $1000-999+998-997+996-995+\ldots +4-3+2-1$
3. $1+2-3-4+5+6-7-8+\ldots. +2010-2011-2012+2013$
4. מצא את סכום הספרות של המספרים הטבעיים בין 1 ל 10
5. מצא את סכום הספרות של המספרים הטבעיים בין 1 ל 20
6. מצא את סכום הספרות של המספרים הטבעיים בין 1 ל 100

איור 1: שש משימות משיעורים 2 - 4

במחקר זה עקבנו אחר התהליך בו מליאת הכיתה התאימה רוטינות לפתרון משימות חס"ס. שאלות המחקר: *מהו התהליך שבו מליאת הכיתה לומדת לפתור משימות חס"ס? האם ניתן לתאר תהליך זה כתהליך של דה-ריטואליזציה? אם כן, כיצד?*

הנתונים נאספו מקורס אשר תוכנן ועוצב סביב פתרון בעיות מתמטיות. ארבעת השיעורים הראשונים התמקדו במשימות מסוג חס"ס (איור 1). במהלך השיעור הראשון הסטודנטים נתבקשו לפתור את השאלה – כמה נרות נדרשים כדי להדליק את החנוכיה במהלך שמונת ימי החג? משימה זו אפשרה להציג את "רוטינת גאוס" (איור 2) שנחשבה, בקורס זה, כרוטינת יסוד לפתרון משימות חס"ס.



איור 2: "רוטינת גאוס"

הנתונים כוללים צילומי וידאו של שיעורים 2-4 בקורס ואת התמלולים שלהם. הנתונים כוללים 23 פתרונות שהציעו הסטודנטים לשש המשימות המופיעות באיור 1.

טבלה 1 מציגה את הכלי האופרציונלי לניתוח הנתונים. שתי העמודות השמאליות כוללות ניתוח של אפיזודות 1.1 ו–3.1 המוצגות למטה. הערה: שיח הסטודנטים בהתייחס למספרים שלמים מועצם, ולכן לא התייחסנו למרכיב זה בניתוח. בנוסף, רכיב הישימות אינו רלוונטי מכיון שהיה ברור לסטודנטים שהרוטינה של גאוס תהיה ישימה לפתרון משימות חס"ס.

	אופרציונליזציה	ניתוח אפיזודה 1.1	ניתוח אפיזודה 3.1
גמישות	(1) האם הליכים שונים מיושמים כדי לפתור את אותה משימת חס"ס? (2) האם "רוטינת גאוס" מותאמת כדי לפתור משימת חס"ס?	1. לא רלוונטי 2. לא	1. לא רלוונטי 2. כן
קישוריות	האם הלומדים משתמשים בתוצאה של שלב בפתרון כקלט לשלב הבא של הפתרון?	חלקי	כן
הנמקה	האם הלומדים מצדיקים את הקשר בין המשימה וההליך אותו בחרו כדי לפתור את המשימה? (ההצדקה יכולה להיות של הרוטינה לפתרון ושל כל אחד מהשלבים) – (1) בעצמם? (2) כתגובה לאחרים?	לא לא	כן לא
סוכנות	האם הלומדים מספקים ביוזמתם פתרון מלא? האם הלומדים מגיבים לשאלות של לומדים אחרים לגבי הפתרון המוצג?	לא לא	כן לא נשאלו

טבלה 1: הכלי האופרציונלי לניתוח הנתונים

ממצאים

כדי לתת טעימה מהנתונים והניתוח, נציג שתי אפיזודות. אפיזודה 1.1 כוללת את הניסיון הראשון שהציעו הסטודנטים לפתור את משימה 1: 1+3+5+7+…+997+999. אפיזודה 3.1 היא הניסיון הראשון של הסטודנטים לפתור את משימה 3: 1+2-3-4+5+6-7-8+…..+2010-2011-2012+2013.

אפיזודה 1.1

17. מאיה: אני זוכרת שיש איזשהו משהו, יש נוסחה, אני לא זוכרת אותה עכשיו. למצוא את המספר האמצעי.

18. מרצה: למצוא, נוסחה למצוא את המספר האמצעי?

.19 מאיה: לא, לא, יש נוסחה.

.20 מרצה: אוקי, מאיה אומרת, יש נוסחה למצוא את המספר האמצעי

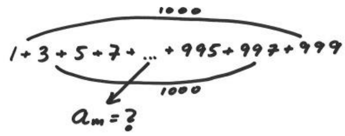
....

.24 מאיה: לא, ואז נמצא דרכו את הזוגות שיש, ואז נחבר אלף כל פעם. אלף כפול מספר הזוגות, ועוד המספר האמצעי.

.25 מרצה: מאיפה האלף הגיע?

...

.27 מאיה: תשע מאות תשעים ותשע ועוד אחד, ה...גאוס.

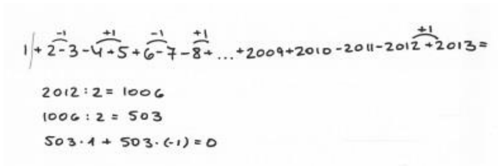


...

.36 מרצה: אתם אומרים, אם יש פה זוגות, אז יש אחד באמצע... במקרה הזה יהיה אחד באמצע? אני שואלת. כמה מחוברים יש כאן –

אפיזודה 3.1

.56 נטלי: טוב, אז שמתי בצד את האחד, וראיתי שכל שני זוגות – הזוג הראשון כאן נותן לי מינוס, והזוג השני נותן לי פלוס אחד, כשבעצם נשארים לי פה אלפיים ושתים-עשרה מספרים, ואז אם אני מחלקת את זה לזוגות זה אלף ושש זוגות. אז חצי מאלה נותנים לי אחד, סך הכל חמש מאות ושלוש, והחצי השני נותנים לי מינוס, אז זה מינוס חמש מאות ושלוש ואז זה מתבטל, ואז נשאר לי אחד.



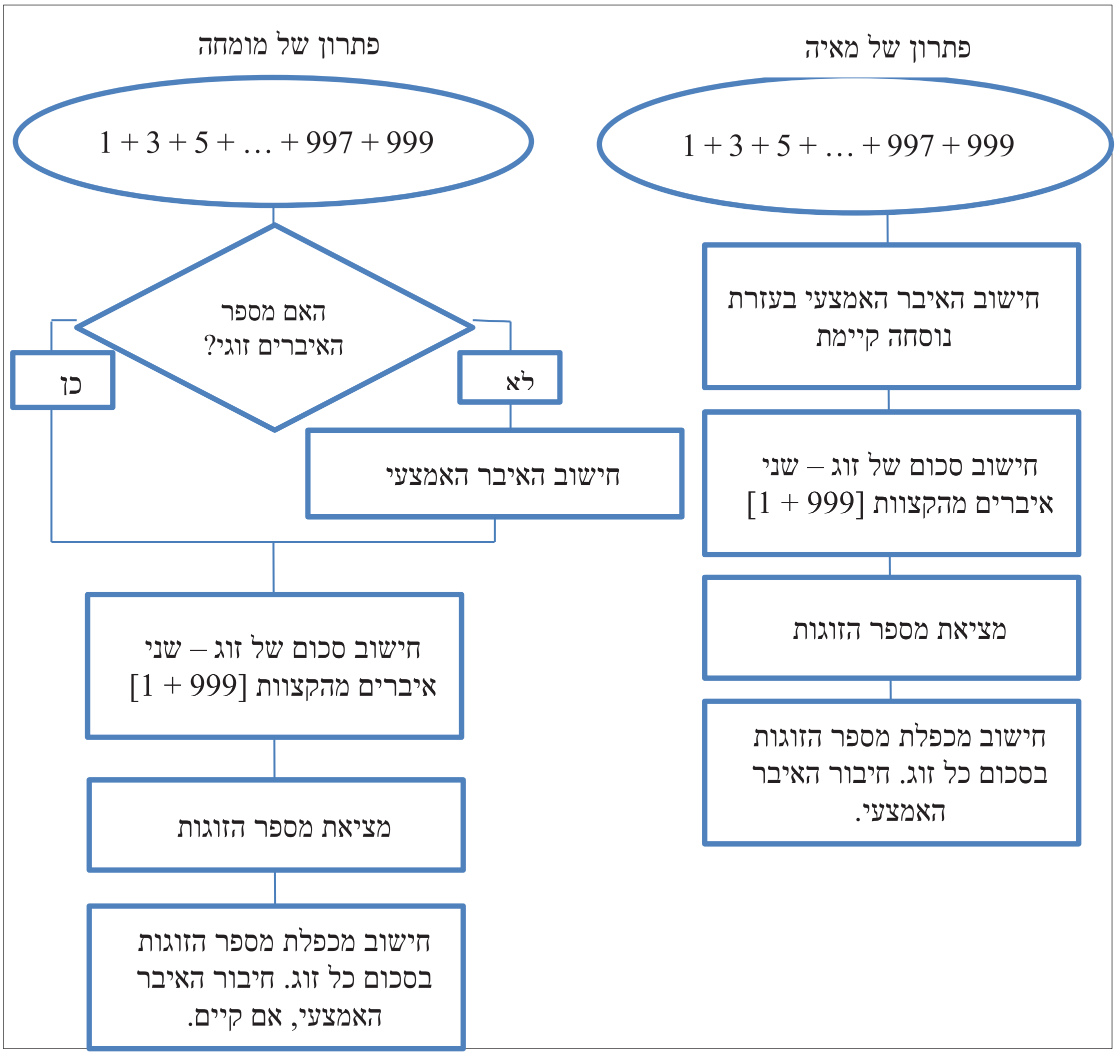
.57 מרצה: אוקי, שאלות?

מאיה ונטלי השתמשו רוטינת גאוס כרוטינה בסיסית לפתרון משימות חס"ס. ועדיין, ניתן לזהות הבדלים בכל אחד מהמאפיינים של תהליך הדה-ריטואליזציה (טבלה 1). זיהוי הבדלים אלה והתהליך המעורב בלמידה של יישום הרוטינה המוכרת כדי לפתור משימת חס"ס חדשה, עומדים בלב הרצאה זו.

את הממצאים נציג גם בעזרת דיאגרמות (איור 3). כאן אנו מציגות זה לצד זה פתרון של מומחה ואת הפתרון של מאיה לאפיזודה 1.1. העדר נקודת ההחלטה מדגים את חוסר הגמישות וההנמקה של רוטינת הפתרון שמאיה הפעילה.

דיון

הממצאים שלנו כוללים פרוט ותאור של תהליך הדה-ריטואליזציה הכיתתי במקרה של פתרון בעיות חס"ס. המחקר שלנו מרחיב את ההמשגה והממצאים בנושא של למידה כתהליך של דה-ריטואליזציה (Lavie, Steiner & Sfard, 2019) במספר היבטים: קבוצת גיל (סטודנטים להוראה לעומת ילדים בגילי 2-4), בתחום מתמטי שונה (בעיות חס"ס לעומת בעיות מסוג "איפה יש יותר?"); תהליך של קבוצה ולא של היחיד (דיונים במליאה לעומת עבודה עם ילד אחד); תהליכים הנתמכים גם על ידי חברי הקבוצה ולא רק על ידי המרצה. בנוסף, למחקר זה תרומה מתודולוגית הכוללת אופרציונליזציה של מאפייני הדה-ריטואליזציה, וכן זיהוי מאפיינים התומכים התהליך הדה-ריטואליזציה: עיצוב משימות ועיצוב הקורס.



מקרא: אליפסה – משימות; מעוין – החלטה; מלבן - הליך

איור 3: פתרון של מומחה לצד פתרון של מאיה

מקורות

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

מושג הממוצע בפעילויות מודלינג

ג'והיינה עוואדה שחברי, אקדמיית אלקאסמי –מכללה אקדמית לחינוך
מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

מבוא

מושג הממוצע נחשב למושג ליבה בסטטיסטיקה וביישומים רבים בחיי היומיום (Makar, 2014). עם זאת, הבנתם של ילדים ומבוגרים רבים למושג הממוצע קשורה יותר לביצוע פרוצדוראלי ופחות להבנה משמעותית (Kristanto, 2018). לכן, יש צורך לספק ללומדים הזדמנות להתמודד עם מושג הממוצע באופן משמעותי. גישת המודלינג עשויה לספק הזדמנויות פוריות כאלה. מודלינג הוא תהליך תרגום דו כיווני מהמתמטיקה לחיי יום-יום וההפך. הגישה מציעה פעילויות מודלינג הכוללות מידע חלקי לגבי סיטואציה מציאותית. המתמודדים צריכים לתת מענה לסיטואציה תוך שימוש בידע המתמטי שלהם (Vorhölter, Kaiser & Borromeo-Ferri, 2014). תהליך ההתמודדות מאפשר ללומדים לזהות מבנים ומושגים מתמטיים וליישם אותם, דבר התורם להעשרת הידע המתמטי של הלומדים והרחבת דרכי השימוש במושגים (Gravemeijer, Stephan, Julie, Lin & Ohtani, 2017).

כדי לעקוב אחרי השימושים והפרשנויות השונות של מושג הממוצע בתהליך המודלינג, אמצנו את הגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008). זוהי פרספקטיבה סוציו-תרבותית לחקר תהליך הלמידה, שלפיה למידת מתמטיקה היא שינוי בשיח המתמטי של הלומד. ספרד מציעה ארבעה מאפיינים של שיח מתמטי: 1) מילים והשימוש בהן: כל שיח מאופיין במילות מפתח משלו. 2) מתווכים חזותיים: המתמטיקה עוסקת באובייקטים מופשטים, ומתווכים וויזואליים מסייעים לתקשר לגביהם. 3) נרטיבים: הם רצפים של משפטים המתייחסים לאובייקטים, יחסים או תהליכים בין אובייקטים שניתן לאשר או לדחות. 4) רוטינות: הן דפוסי פעולה חוזרים שמאפיינים שיח מסוים.

מטרת המחקר הנוכחי, היא לבחון האם העיסוק בפעילות מודלינג מעניק הזדמנות למשתתפים להרחיב את השיח שלהם לגבי המילה ממוצע. אנו שואלות: אילו שינויים ניתן לזהות בשיח המשתתפים בשימוש במילה ממוצע במהלך התמודדותם ברצף של שתי פעילויות מודלינג?

שיטָה

המחקר נערך בשיטה איכותנית, עקבנו אחרי ארבע קבוצות של סטודנטים להוראת מתמטיקה, הלומדים במכללה לחינוך ללא ניסיון קודם במודלינג. המחברים עיצבו שתי פעילויות: הפעילות *מחנה הקיץ* כוללת נתונים המוצגים בארבע טבלאות לגבי ששה מחנות, והפעילות *המורה הטוב* כוללת נתונים המיוצגים בארבע טבלאות לגבי עשרה מועמדים למשרת מורה. המשתתפים עבדו תחילה בפעילות מחנה הקיץ, ובשבוע העוקב עבדו בפעילות המורה הטוב. בשתי הפעילויות נדרש לחבר מכתב שיכלול הסבר כיצד לבחור מחנה\מורה מתאים ולהציע מודל לבחירה עתידית. מקור הנתונים היה הקלטות וידאו בזמן ההתמודדות בפעילויות, אשר תמללו במלואן. ניתוח הנתונים התבסס על הפרספקטיבה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008). בפרט, עקבנו אחרי המלה ממוצע והשימוש בה בפעילויות בקרב ארבע הקבוצות.

ממצאים

ניתוח שיח המשתתפים בקרב ארבע הקבוצות בשתי הפעילויות, מעיד שבמהלך ההתמודדות בפעילויות זוהו חמישה שימושים שונים למילה ממוצע: 1) ממוצע חשבוני, ערך המייצג סכום ערכים חלקי מספרם. 2) נקודת התייחסות, ממוצע ערכים מסוימים מייצג נקודת התייחסות להשוואתם. 3) ערך לשקלול שווה, כל ערך בחישוב הממוצע יש לו אותו משקל בתוצאה. 4) ערך סביר, ממוצע ערכים מייצג ערך סטנדרטי וסביר בין הערכים. 5) ערך אמצעי, ממוצע הערכים יכול לייצג הערך האמצעי של הערכים. במהלך הפעילות הראשונה זוהו שני שימושים ובמהלך הפעילות השנייה זוהו ארבעה. טבלה 1 מתארת את השימושים בממוצע בקרב ארבע הקבוצות.

טבלה 1: השימוש בממוצע בשתי הפעילויות בקרב ארבע הקבוצות

	פעילות מחנה הקיץ				פעילות המורה הטוב			
קבוצה	א	ב	ג	ד	א	ב	ג	ד
משמעות								
ממוצע חשבוני	√	√	√	√	√		√	√
נקודת התייחסות					√			√
ערך לשקלול שווה					√	√	√	
ערך סביר				√				
נקודה אמצעית						√		

ממגבלת המיקום, נדגים את ההתפתחות השימוש במילה ממוצע כערך סביר וכערך לשקלול שווה.

הממוצע כערך סביר- המשתתפים התמודדו בפעילות הראשונה בדירוג המחנות, היו צריכים לתת ניקוד לכל מחנה לפי העלות שלו. לכן, הם השתמשו בממוצע העליות של ששת המחנות כערך סביר: מחנה שעלותו יותר מהממוצע נחשב ליקר, ופחות מהממוצע נחשב לזול. כמו שמראה האפיזודה להלן:

[92] דני: מי יודע אם המחירים כאן יקרים או זולים?

[93] דינה: אני לא יודעת, אנחנו יכולים לחפש בגוגל

[95] דניאל: אנחנו יכולים לחשב את הממוצע וזה יהיה הסטנדרט שלנו

[96] דני: איך?

[101] דניאל: לאחר שנחשב את העלות ליום, אנו נחשב ממוצע העלויות, ואז מה שנקבל יהיה המחיר הסטנדרטי. יותר ממחיר זה יהיה יקר ופחות יהיה זול.

דני [92] שאל איך ניתן לזהות אם העלות של מחנה היא יקרה או זולה. דניאל [95, 101] הציע שניתן לחשב ממוצע העלויות של כל המחנות, ואז הממוצע יהווה ערך נורמלי- סביר לעלות של מחנה, ולפי זה ניתן לקבוע אם מחנה אחר יקר או זול.

הממוצע כערך לשקלול שווה – במהלך הפעילות השנייה, המשתתפים עסקו בדירוג מרכיבים לפי חשיבותם במטרה להקצות אחוז מסוים לכל מרכיב ולחשב הערך הכללי של כל המרכיבים. הם קבעו שלמרכיבים מסוימים יש אותה חשיבות, לכן הם השתמשו בממוצע כערך המשקף הקצאת ערך שווה למרכיבים האלה. כלומר ממוצע הערכים במרכיבים שונים מרמז שהמרכיבים הללו יש אותו משקל חשיבות. כפי שמוצג אפיזודה להלן:

[42] אדם: מי [קריטריונים] חשוב יותר?

[43] אדים: כולם

[44] איה: ישנם חמישה קריטריונים

[45]אדים : נחשב את הממוצע

[74] אדם: אם מחשבים את הממוצע, פירוש הדבר שיש להם [קריטריונים] אותה חשיבות...

[81] איה: אם אתה משתמש בממוצע זה אומר שלכולם [קריטריונים] תהיה אותה חשיבות

אדם [42] מברר מי מהקריטריונים חשובים יותר, אדים [45,43] מצהירה שכל קריטריונים חשובים ויש לחשב את הממוצע. אדם [74] איה [81] שניהם הצהירו במידה ומחשבים ממוצע של כל הקריטריונים זה מסמן שלכל קריטריון יש אותה חשיבות.

במהלך ההרצאה נציג את התפתחות הפרשנויות השונות של מושג הממוצע בקרב ארבע הקבוצות.

סיכום

הממצאים מצביעים על כך שהתמודדות בפעילויות המודלינג אכן מספק הזדמנות למשתתפים להרחיב את השימושים שלהם במילה ממוצע, כאשר בפעילות השנייה התפתחו שימושים נוספים. לאור זאת, אנו ממליצות לשלב פעילויות מודלינג בלמידת המושג ממוצע, שתורם לשימוש במילה ממוצע כרעיון סטטיסטי לתיאור, השוואה והבנה של מערכי נתונים, בנוסף להיותו אלגוריתם חישובי לפתרון בעיות קונטקסטואליות.

מקורות

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future?. International Journal of Science and Mathematics Education, 15(1), 105-123.

Kristanto, Y. D. (2018). Pre-service mathematics teachers’ statistical reasoning about mean. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 296(1), 012037. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/296/1/012037/pdf

Makar, K. (2014). Young children's explorations of average through informal inferential reasoning. Educational Studies in Mathematics, 86(1), 61-78.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University Press.

Vorhölter, K., Kaiser, G., & Borromeo-Ferri, R. (2014). Modelling in Mathematics Classroom Instruction: An Innovative Approach for Transforming Mathematics Education. In Y. Li, E. A. Silver & S. Li (Eds.), Transforming Mathematics Instruction (pp. 21-36). Cham, Switzerland: Springer.

תפיסות מורי חטיבת-ביניים לגבי ארגומנטציה בהוראת המתמטיקה

סמאהר נעמה ומיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

רציונל

במהלך העשורים האחרונים יש עליה בהערכה לחשיבות של שילוב ארגומנטציה בכיתות המתמטיקה. בכל העולם החשיבות המיוחסת לעיסוק התלמידים בארגומנטציה באה לידי ביטוי ברפורמות החינוכיות האחרונות (למשל CCSSI, 2010; משרד החינוך, 2013). עם זאת, העיסוק בארגומנטציה בכיתת המתמטיקה הוא נדיר (Bieda, 2010) והמחקר מצביע על קושי של מורים לשלב ארגומנטציה בכיתה (Ayalon & Even, 2016). לאחרונה הוקדש חלק ניכר מהמחקר לארגומנטציה, ולמרות זאת מעטים התמקדו, באופן פרטני, בפרקטיקה ובתפיסות של מורים למתמטיקה ביחס לארגומנטציה. בהתחשב בהשפעה של תפיסות המורים על הוראתם בפועל (Conner et al., 2014), חשוב מאוד ללמוד ולהבין מה מאפיין אותן. המחקר הנוכחי עונה על צורך זה באמצעות בחינת תפיסותיהם של מורים לגבי ארגומנטציה בהוראת המתמטיקה.

פרספקטיבה תאורטית

הגדרה מקובלת של ארגומנטציה היא זו של van Eemeren ו-Grootendorst (2004), לפיה ארגומנטציה היא "פעילות מילולית, חברתית והגיונית, שמטרתה לשכנע מבקר סביר את קבילותה של עמדה על ידי הצבת אוסף של הצעות הצדקה או הפרכה של ההצעה" (עמ' 1). הגדרה זו מהווה את הבסיס לתיאורים של ארגומנטציה 'פורה' ללמידה כ-"איזון בין הנמקה ביקורתית ובניית ידע שיתופי" (Asterhan & Schwarz, 2016, עמ' 167). המחקר הנוכחי רואה בארגומנטציה שתי משמעויות חשובות - מבנית ודיאלוגית (McNeill & Pimentel, 2010). המשמעות המבנית נבחרה בעקבות Means ו-Voss (1996) שטענו כי טיעון מובנה משני יסודות בסיסיים: טענה והצדקתה. המשמעות הדיאלוגית מתייחסת לארגומנטציה כאינטראקציות בין יחידים כשהם מנסים לייצר ולבקר זה את רעיונותיו של זה (Mueller, Yankelewitz, & Maher, 2012). הוראת מתמטיקה המעודדת ארגומנטציה מעניקה לתלמידים הזדמנויות לקחת חלק פעיל במשמעויות המבניות והדיאלוגיות כאחד לבניית טיעונים, לשיתוף, ולהערכה של רעיונות של אחרים בצורה ביקורתית (Ball & Bass, 2003). הוראה כזו מחייבת את המורה לקבוע נורמות וסטנדרטים לטיעון מתמטי בכיתה (Ayalon & Even, 2016; Yackel & Hanna, 2003).

לתפיסות של מורים יש השפעה על הוראתם בפועל (Leikin & Levav-Waynberg, 2009). לכן ההבנה של המאפיינים של תפיסות מורים ביחס לארגומנטציה חשובה. מחקר זה הולך בעקבות Thompson (1992) המתייחסת לתפיסות של מורים כשילוב של ידע ואמונות. הנחת יסוד למחקר זה היא שכדי לפתח את מומחיות המורים בקידום ארגומנטציה, עלינו להבין טוב יותר את תפיסותיהם.

מטרת המחקר

מטרת המחקר הכללית היא לבנות מודל שניתן יהיה להשתמש בו לניתוח ולאפיון תפיסות של מורים ביחס לארגומנטציה בהוראת מתמטיקה. שאלת המחקר היא: *מהם המאפיינים העיקריים של תפיסות מורים לגבי ארגומנטציה בהוראת המתמטיקה כפי שבאות לידי ביטוי בשיח שלהם על שימוש שלהם בארגומנטציה בכיתותיהם?*

מתודולוגיה

משתתפים

תשעה מורים למתמטיקה בחטיבת הביניים מחמישה בתי ספר, בעלי חמש שנות ניסיון ומעלה בהוראה, כולם בעלי תואר ראשון במתמטיקה.

איסוף נתונים

המחקר הנוכחי[1] השתמש בראיונות אישיים מובנים למחצה. במהלך הראיונות הוצג בפני המורים ציטוט מתכנית הלימודים המשקף את החשיבות המיוחסת למעורבות התלמידים בפעילות ארגומנטטיבית בכיתה. השאלות העיקריות שהועלו היו: מה דעתך על הנושא? האם אתה מסכים עם הציטוט או לא? למה? האם אתה מנסה ליישם זאת בכיתה שלך? אם כן, איך? אם לא, מדוע לא? האם אתה יכול לתת דוגמאות לפעילויות שאתה עושה בשיעור בהקשר זה? לאחר מכן הוצגו למורים ארבע משימות מתמטיות והם התבקשו לבחור משימה ולכתוב תסריט ליישום היפותטי שלה בכיתה במטרה לעודד ארגומנטציה. המורים נדרשו לספק תשובות מפורטות ודוגמאות מכיתותיהם.

ניתוח נתונים

נכללו שני שלבים עיקריים:

1. בניית המודל: שילבנו ניתוח תוכן מכוון וניתוח תוכן אינדוקטיבי (Patton, 2002). ניתוח תוכן מכוון כלל סיווג של אמירות המורים על ארגומנטציה בהוראת המתמטיקה לאחד משני ההיבטים של ארגומנטציה: מבני או דיאלוגי. ניתוח תוכן אינדוקטיבי בוצע לבנייה של קטגוריות לשני הממדים.

2. הפעלת המודל: ניתוח מכוון של הראיונות בעזרת המודל בוצע לאפיון תפיסות של כל מורה.

ממצאים ודיון

המודל

הניתוח הוביל לבניית מודל הכולל חמש קטגוריות של תפיסות: (1) מה זה ארגומנטציה?, (2) אסטרטגיות הוראה לשימוש בארגומנטציה, (3) מאפייני משימה מתמטית, (4) מאפייני תלמידים, (5) מאפיינים סוציו-תרבותיים. כל קטגוריה כללה מספר תת-קטגוריות, ביחס לשני ממדים - מבני ודיאלוגי. המודל מוצג בצורה מצומצמת בטבלה 1. מחוסר מקום, מצד אחד, ומתוך רצון להמחיש את אופי תת-הקטגוריות, מצד שני, הוספנו מספר מצומצם של דוגמאות. בכנס נרחיב על תהליך בניית המודל תוך הבאת דוגמאות נוספות.

טבלה 1. מודל של תפיסות מורים לגבי ארגומנטציה בהוראת המתמטיקה

קטגוריה	היבט מבני	היבט דיאלוגי
מהי ארגומנטציה? **(מ.א.)**	1. כוללת בנייה של טענות והצדקותיהן 2. יש הצדקות מתמטיות מקובלות ויש שאינן מקובלות (מתוך 4 תת-קטגוריות)	1. התלמידים מעלים נקודות מבט שונות 2. התלמידים מעריכים ומקשיבים בצורה ביקורתית לטיעונים זה של זה (מתוך 7 תת-קטגוריות)
אסטרטגיות הוראה **(א.ה.)**	1. עידוד של הצדקות התלמידים 2. להסביר לתלמידים על הצדקה מתמטית (מתוך 6 תת-קטגוריות)	1. עידוד התלמידים להציג נקודות מבט שונות 2. עידוד התלמידים להעריך ולהגיב בצורה ביקורתית על טיעונים אחד לשני (מתוך 7 תת-קטגוריות)
מאפיינים של המשימה **(מ.מ.)**	1. משימה שמבקשת הצדקה 2. משימה שמבקשת הערכה של טיעונים שונים (מתוך 5 תת-קטגוריות)	1. משימות פתוחה המזמנת פתרונות שונים 2. משימות המזמנות דיון בטעויות נפוצות (מתוך 4 תת-קטגוריות)
מאפיינים של התלמידים **(מ.ת.)**	1. דרכי החשיבה המתמטית (למשל נטייה להשתמש בהצדקה אמפירית) 2. מיומנויות התלמידים בבניית טיעונים (מתוך 4 תת-קטגוריות)	1. כישורי התלמידים להגיב לרעיונות של אחרים 2. רגשות של ביטחון עצמי ו/א ומבוכה (מתוך 8 תת-קטגוריות)
נורמות חברתיות-תרבותיות **(מ.ח.ת.)**	1. נורמה של כתיבת טיעונים בצורה ברורה (מתוך 3 תת-קטגוריות)	1. נורמה של שיתוף פעולה ביצירה והערכה ביקורתית לטיעונים 2. נורמה של דיאלוג מכבד (מתוך 5 תת-קטגוריות)

[1] המחקר הנוכחי הינו חלק ממחקר גדול יותר שכלל גם תצפיות בכיתות.

מרכיבי המודל מלמדים אותנו על משמעותה של ארגומנטציה עבור המורים ומה הם לוקחים בחשבון כשחושבים על עידוד ארגומנטציה בכיתותיהם. אוסף הקטגוריות הללו משקף את התהליך המורכב של שילוב ארגומנטציה בכיתת המתמטיקה כפי שמופיע בספרות (למשל, Ayalon & Even, 2016; Ayalon & Hershkowitz, 2018) ומבטא תפיסות של ארגומנטציה 'פורייה' המקדמת למידה (Asterhan & Schwarz, 2016).

1. יישום המודל

המודל שימש לניתוח ולאפיון תפיסותיהם של כל המורים כפי שנחשפו בראיונותיהם (ראו טבלה 2). נצביע בקצרה על כמה סוגיות העולות מניתוח צולב של הצהרות המורים.

טבלה 2. תפיסות מורים לגבי ארגומנטציה

	קטיגוריות	תת-קטיגוריות מבניים						תת-קטיגוריות דיאלוגים							
אדם	מ.א.	**1**	2	**3**	**4**			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	7	
	א.ה.	**1**	**2**	3	**4**	**5**	6	**1**	2	**3**	4	5	6	**7**	
	מ.מ.	**1**	2	3	**4**	5		**1**	2	3	4				
	מ.ת.	**1**	**2**	**3**	**4**			1	2	3	4	**5**	**6**	**7**	**8**
	נ.ה.ת.	**1**	**2**	3				**1**	**2**	**3**	**4**	5			
אמיר	מ.א.	**1**	2	3	4			**1**	**2**	3	4	5	6	7	
	א.ה.	1	**2**	3	4	5	6	**1**	**2**	3	4	**5**	**6**	**7**	
	מ.מ.	1	2	3	4	5		1	2	**3**	4				
	מ.ת.	1	2	3	4			**1**	2	3	4	**5**	6	**7**	8
	נ.ה.ת.	1	**2**	3				1	**2**	**3**	**4**	5			
אסיל	מ.א.	**1**	**2**	**3**	4			**1**	**2**	3	4	5	**6**	**7**	
	א.ה.	**1**	2	**3**	4	**5**	**6**	**1**	**2**	**3**	4	**5**	6	7	
	מ.מ	**1**	**2**	**3**	**4**	5		**1**	**2**	**3**	**4**				
	מ.ת.	**1**	2	3	4			1	2	**3**	**4**	**5**	6	7	8
	נ.ה.ת.	1	2	**3**				1	2	3	**4**	5			
האלה	מ.א.	**1**	2	**3**	4			**1**	**2**	3	4	5	6	7	
	א.ה.	1	2	3	4	5	6	**1**	**2**	**3**	4	5	6	7	
	מ.מ	**1**	2	3	**4**	**5**		**1**	2	**3**	4				
	מ.ת.	1	2	3	4			1	2	**3**	4	5	6	7	8
	נ.ה.ת.	1	2	3				1	2	**3**	4	5			
מואל	מ.א.	**1**	2	**3**	4			**1**	2	3	4	5	6	7	
	א.ה.	**1**	**2**	**3**	4	5	6	**1**	**2**	3	4	5	6	7	
	מ.מ.	**1**	2	3	**4**	5		1	2	3	4				
	מ.ת.	1	2	**3**	4			1	2	3	4	5	6	**7**	8
	נ.ה.ת.	**1**	**2**	**3**				1	2	**3**	4	5			
סוהיר	מ.א.	**1**	**2**	3	4			**1**	**2**	3	4	5	**6**	7	
	א.ה.	**1**	2	3	4	5	6	**1**	**2**	**3**	4	5	**6**	7	
	מ.מ	**1**	2	3	**4**	**5**		**1**	2	3	4				
	מ.ת.	**1**	2	**3**	4			1	2	**3**	4	**5**	6	7	8
	נ.ה.ת.	1	2	**3**				1	2	3	4	5			
מיסאן	מ.א.	**1**	2	3	4			**1**	2	**3**	4	5	6	7	
	א.ה.	1	2	3	4	5	6	**1**	2	3	4	5	6	7	
	מ.מ.	**1**	2	3	**4**	5		**1**	2	3	4				
	מ.ת.	**1**	2	3	4			1	2	3	4	5	6	7	8
	נ.ה.ת.	1	2	3				1	2	3	4	5			
היבה	מ.א.	**1**	2	3	4			**1**	**2**	3	**4**	5	**6**	7	
	א.ה.	1	**2**	3	4	5	6	**1**	2	**3**	4	5	**6**	**7**	
	מ.מ.	1	2	3	4	5		1	2	3	4				
	מ.ת.	1	2	3	4			1	2	3	4	**5**	6	7	8
	נ.ה.ת.	1	2	3				1	2	3	4	5			
קאתיא	מ.א.	**1**	2	**3**	4			**1**	**2**	3	**4**	5	**6**	7	
	א.ה.	**1**	**2**	**3**	4	5	**6**	**1**	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
	מ.מ.	1	2	3	4	**5**		1	2	3	4				
	מ.ת.	**1**	2	3	**4**			**1**	**2**	3	4	**5**	**6**	7	8
	נ.ה.ת.	1	2	3				1	2	3	4	**5**			

הערה: הקטגוריות שהופיעו בשיח המורים הן מודגשות ובגופן גדול יותר.

כפי שמוצג בטבלה 2, באופן כללי, מרבית המורים העלו את חמש הקטגוריות הנכללות במודל. ישנן גם מספר תת-קטגוריות המשותפות למורים או אחרות הייחודיות למורה מסוים. הניתוח העלה כי תפיסותיהם של חלק מהמורים היו "עשירות" יותר מאחרות מבחינת הופעת הקטגוריות ותת-הקטגוריות בשיח שלהם על ארגומנטציה (ראו, למשל, אדם בטבלה 2). בפרט, יישום המודל גילה שישנם מורים שהחזיקו בתפיסות ממוקדות-מבנה (למשל מנאל) והיו מורים שהחזיקו בתפיסות ממוקדות-דיאלוג עם פחות התייחסות להיבטים מבניים (למשל אמיר). היו גם מורים שתפיסותיהם היו מגוונות יותר והכילו היבטים מבניים ודיאלוגיים כאחד (למשל אדם). הממצאים מציעים שישנם מורים המתייחסים לבנייה ולהערכה של טיעונים והצדקות (ההיבט המבני) וגם להיבטים דיאלוגים של הבנייה המשותפת וההערכה הביקורתית של טיעונים. לעומת זאת, ישנם מורים שתשומת ליבם מופנית רק (או בעיקר) לפן אחד - מבני או דיאלוגי. מחקרים מראים שתפיסות מורים יכולות להוות מרכיב חשוב בהוראת המתמטיקה והן עשויות להשפיע על איכות הוראתם (Potari & Jaworski, 2002). בהתבסס על כך, עולה השאלה האם מורה, המתמקד יותר בהיבט המבני, עשוי להתקשות לתווך דיאלוג ארגומנטטיבי בכיתה (למשל, Ayalon & Even, 2016) לעומת זאת, מורה המתמקד יותר בהיבט הדיאלוגי, עשוי להתקשות לנהל משא ומתן על ההיבטים המבניים של ארגומנטציה. בהתחשב בכך שהיבטים מבניים ודיאלוגיים כאחד הם המפתח לארגומנטציה פורה בכיתה (Asterhan & Schwarz, 2016), תפיסות "מוגבלות" של מורים למתמטיקה עשויות לעכב את קידום ההבנה והחשיבה של תלמידיהם (למשל, Weber, Maher, Powell & Lee, 2008).

יישום המודל לאפיון תפיסות המורים, אם כי באופן ראשוני, מצביע על הפוטנציאל שיש למודל בלמידה על תפיסות של מורים לגבי ארגומנטציה בהוראת המתמטיקה, שצריך להמשיך ולהיחקר. המודל עשוי לשמש גם כלי פדגוגי יעיל לקדם ולהעריך את התפתחות מיומנותם של מורי המתמטיקה. אנו מודעות לכך שהמודל המוצע אינו שלם ודורש לימוד נוסף עם אוכלוסיית מחקר גדולה יותר של מורים ובמגוון הקשרים מחקריים.

רשימת מקורות

Asterhan, C. S. C., & Schwarz, B. B. (2016). Argumentation for Learning: Well-trodden paths and unexplored territories. Educational Psychologist, 51(2), 164-187.

Ayalon, M., & Even, R. (2016). Factors shaping students’ opportunities to engage in argumentative activity. International Journal of Science and Mathematics Education, 14, 575-601.

Ayalon, M., & Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. Journal of Mathematical Behavior. 49, 163-173.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. Journal for Research in Mathematics Education, 41(4), 351–382.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Retrieved from http://corestandards.org/asserts/CCSSI_Math%20Standards.pdf.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. Educational Studies in Mathematics, 86, 401-429.

Israel Ministry of Education (2013). *Mathematics Curriculum for Grades 7-9*. Retrieved from http://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/matematika/mavo.pdf (in Hebrew).

Leikin, R., & Levav-Weynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: The meaning and potential of multiple-solution tasks. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9(4), 203-223.

McNeill, K. L., & Pimentel, D. S. (2010). Scientific discourse in three urban classrooms: The role of the teacher in engaging high school students in argumentation. Science Education, 94(2), 203-229.

Means, L. M., & Voss, J. F. (1996). Who reasons well? Two studies of informal reasoning among children of different grade, ability, and knowledge levels. Cognition and Instruction, 14(2), 139–178.

Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2012). A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. Educational Studies in Mathematics, 80, 369-387.

Patton, M. Q. (2002). Qualitative Research and Evaluation Methods. Thousand Oaks: Sage.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. Journal of Mathematics Teacher Education, 5(4), 351-380.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. In D. A. Grouws (Org.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

Van Eemeren, F. H., & Grootendorst, R. (2004). A systematic theory of argumentation. Cambridge, UK : Cambridge University Press.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. Educational Studies in Mathematics, 68(3), 247–261.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

מאפיינים של הערכה של תלמידים טיעונים המבוססים על חשיבה אינדוקטיבית: זיהוי נקודות חולשה וחוזק

רנין דביה, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

מיומנות של הערכת טיעונים מתמטיים על-ידי תלמידים, הכוללת זיהוי נקודות חולשה וחוזק של טיעון היא חשובה (Bieda & Lepak, 2014; Weber, Maher, Powell, & Lee, 2008). מחקר זה מתמקד בבחינה של מאפיינים של הערכה של טיעונים בקרב תלמידי כיתה י'. בפרט, המחקר מתמקד בהערכה של טיעונים המבוססים על חשיבה אינדוקטיבית, והמאופיינים בפוטנציאל שונה לפיתוח הוכחה דדוקטיבית.

רקע תיאורטי

בקהילה המתמטית הטיעון הדדוקטיבי, המובנה על הסקת מסקנות ממידע נתון באמצעות כלים לוגיים, נחשב לטיעון המועדף להוכחה. טיעון המבוסס על חשיבה אינדוקטיבית תוך בדיקה של מקרים פרטיים אינו נחשב כתקף. עם זאת, ישנה תועלת בבדיקה של מקרים פרטיים כדי לפתח "חוש" ביחס לנכונות הטענה (Conner et al., 2014), משם ניתן להתקדם להוכחה הכללית.

טיעונים אינדוקטיביים אינם מהווים מקשה אחת: יש כאלה המבטאים "רעיונות-מפתח" (Raman, 2002) המתארים תובנה שיכולה לסלול את הדרך לחשיבה הנדרשת עבור הוכחה דדוקטיבית, ויש שלא. נתבונן לדוגמה בטענה:

כל מספר שלם אי זוגי הוא סכום של שני מספרים שלמים עוקבים.

איור 1 מציג שלושה טיעונים המתייחסים לטענה.

טיעון א'	**טיעון ב'**	**טיעון ג'**
$1 = 0 + 1$ $3 = 1 + 2$ $5 = 2 + 3$ $7 = 3 + 4$ $9 = 4 + 5$ ניסיתי את חמשת המספרים הראשונים וזה בהחלט עבד!	קחו מספר אי-זוגי כלשהו, למשל, 17. מכיוון ש-17 הוא אי-זוגי זה אומר שהוא מספר זוגי + 1. $17 = 16 + 1 =$ $8 + 8 + 1 =$ $8 + 9$	$0 + 1 = 1$ $1 + 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ $3 + 4 = 7$ $4 + 5 = 9$ כאשר ממשיכים את הדפוס, רואים שכל מספר אי-זוגי שלם יהיה הסכום של שני מספרים שלמים עוקבים.

איור 1: טיעונים המתייחסים לאותה הטענה (מתוך Yopp, 2010).

שלושת הטיעונים באיור 1 הינם אינדוקטיביים, אך שונים ברעיונות המבוטאים בהם. טיעון א' מבוסס רק על התנסות; טיעונים ב' ו-ג' מבטאים רעיונות-מפתח. טיעון ב' מבטא רעיון-מפתח לפיו כל מספר אי-זוגי הוא מספר זוגי + 1. מספר זוגי ניתן להצגה כסכום של שני מחוברים שווים. אם נוסיף 1 לאחד המחוברים, מקבלים סכום של מספרים עוקבים. טיעון זה הוא קונסטרוקטיבי המראה כיצד לבנות את המספרים העוקבים. טיעון ג' מבטא גם הוא רעיון-מפתח, לפיו אם נבחר מספר אי-זוגי כלשהו, נוכל להמשיך את הדפוס שהתחלנו, עד שנקבל מספר אי-זוגי זה. תהליך זה מפתח דרך שיטתית ליצירה של מספר אי-זוגי כלשהו, וניתן לפיתוח לטיעון כללי יותר.

כדי לפתח טיעון אינדוקטיבי המבוסס על רעיון-מפתח ולהרחיבו להוכחה דדוקטיבית יש להראות שהוא עובד בכל המקרים, ולא רק עבור אלה שנבדקו (Yopp, 2010). על-פי הספרות, ניתוח של טיעונים אינדוקטיביים, תוך מחשבה כיצד ניתן להרחיבם לטיעונים כלליים פורמליים יותר, יכול לסייע בהבנת המושג של רעיון-מפתח, ובכך לעזור בזיהוי ההבדל בין טיעונים אינדוקטיביים המכילים רעיונות-מפתח לבין כאלה שלא. אם כך, הערכה של טיעונים אינדוקטיביים ביחס לחוזקות שלהם (רעיון-המפתח המובע בטיעון, אם יש כזה) ולחולשתם (אינם מתייחסים למקרה הכללי) חשובה הן להבנה של 'מה נחשב' כטיעון מתמטי מקובל והן לפיתוח היכולת להרחיב טיעון אינדוקטיבי המבוסס על רעיון-מפתח לטיעון כללי.

הספרות עושה גם הבחנה בין טיעונים "מסבירים" לבין כאלה שלא, ומצביעה על הערך הפדגוגי שיש לטיעונים המסבירים מדוע הטענה נכונה (Hanna, 1990). לא כל הטיעונים האינדוקטיביים הכוללים רעיונות-מפתח הם גם מסבירים וחשוב לעשות הבחנה ביניהם (Yopp, 2010). טיעון ב' מסביר מדוע כל מספר אי-זוגי הוא סכום של שני מספרים שלמים עוקבים. ההסבר נמצא בתהליך הבנייה: ניתן לרשום כל מספר אי-זוגי כפעמיים מספר טבעי ועוד אחד. טיעון ג' אינו מסביר מדוע הטענה נכונה: הטיעון מציג את החשיבה שיכולה להוביל לטיעון כללי, אך אינו נותן תובנה מדוע התכונה נכונה.

המחקר מצביע על החשיבות שיש במיומנות של הערכה של טיעונים (Bieda & Lepak, 2014) ועל הקושי הטמון בכך (Kuhn & Udell, 2007). המחקר הנוכחי מצטרף למחקרים אלה, ומתמקד בהערכה של טיעונים אינדוקטיביים מסוגים שונים, שכמעט ולא נחקרה. המחקר מתבסס על ההבחנה של יופ (Yopp, 2010) בין חשיבה אינדוקטיבית המצליחה ליצור בסיס לטיעונים פורמליים, לבין כזו שלא עושה זאת, ומבקש ללמוד על מאפיינים של הערכת תלמידים נקודות חוזק/חולשה של טיעונים אינדוקטיביים.

מתודולוגיה

המחקר כלל 95 תלמידים מכיתה י' הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יח"ל.

נעשה שימוש בשאלון שבו הוצגה טענה מתמטית ובעקבותיה שלושה טיעונים המוצעים על-ידי תלמידים דמיוניים (איור 1). כל טיעון כלל קביעה האם הטענה נכונה או לא, והנמקה לקביעתו. הטיעונים מאופיינים בנקודות חוזק וחולשה. לכולם אותה נקודת חולשה: מתבססים על חשיבה אינדוקטיבית המסתמכת על דוגמאות בלבד ואינם מהווים הוכחה קבילה. הטיעונים שונים בנקודות החוזק: טיעונים ב' ו-ג' מביעים רעיונות-מפתח שניתן לפתחם להוכחה כללית, כשהרעיונות שונים: הרעיון בטיעון ב' מתאר תהליך למציאת מספרים עוקבים, וייצוג אלגברי של הרעיון מאפשר הרחבה שלו לטיעון דדוקטיבי. הרעיון בטיעון ג' מראה לנו *כיצד להגיע* אל המספר שנבחר, וכדי להרחיבו לטיעון כללי צריך להשתמש באינדוקציה מתמטית. טיעון א' אינו מבטא רעיון-מפתח ולא ניתן לפתחו להוכחה כללית, אך מביע מרכיב חשוב בעשייה מתמטית: בדיקה של מקרים פרטיים יכולה לסייע בפיתוח חוש לגבי נכונות טיעון. המשתתפים התבקשו לכתוב מכתבים לתלמידים הדמיוניים ולהתייחס לנקודות החולשה/חוזק של הטיעון ולהציע המלצות לשיפור. השאלון ניתן בזמן שיעור (שעה).

הניתוח בחן את מידת ההתאמה לנקודות החוזק/החולשה שתוארו לעיל, כמוצג בהמשך.

ממצאים ודיון

נקודות חוזק

ניתוח תשובות התלמידים מצא שלוש רמות של זיהוי רעיון-מפתח בטיעונים ב' ו-ג'. טבלה 1 מציגה את רמות הזיהוי בליווי דוגמאות ואחוזי תלמידים המתאימים לכל רמה.

טבלה 1: רמות זיהוי נקודת חוזק בטיעונים שהכילו רעיון מפתח

זיהוי רעיון מפתח בטיעון?	**טיעון ב**		**טיעון ג**	
	דוגמה	**אחוז תלמידים (n=95)**	**דוגמה**	**אחוז תלמידים (n=95)**
כן	*הסברת את הטענה בצורה מדויקת והשתמשת בשיטה, שלדעתי היא שיטה טובה לניתוח ובדיקת טענה. היה טוב אם היית מנסה לנתח את מה שעשית בעזרת משתנים על מנת שזה יהיה נכון לכל שני מספרים.* [תלמיד #78]	22%	*וודאות לנכונות הטענה באופן קבוע ומתמיד, מראה את ההמשכיות, שאפילו אם ימשיכו לחבר שני מספרים עוקבים חוץ הנתונים, תמשיך ותתקיים הטענה.* [תלמיד #51]	10%
לא, אבל... (הרגישו בייחודיות הטיעון, אך לא הצליחו לשים את האצבע על רעיון המפתח)	*התייחסת לנושא והוכחת טענת פריד בשיטה חכמה מאד, כל הכבוד.* [תלמיד #25]	50%	*יכולות ניתוח והסבר גבוהים וחשיבה.* [תלמיד #31]	27%
לא		28%		63%

ניתן לראות שנקודת החוזק זוהתה בקרב יותר תלמידים במקרה של הטיעון האינדוקטיבי שביטא רעיון-מפתח מסביר, באופן מלא או חלקי (72% ו- 37% ביחס לטיעונם ב' ו-ג', בהתאמה). ממצא זה מצביע על יתרון אפשרי שיש לטיעון אינדוקטיבי המבטא רעיון-מפתח שגם מסביר מדוע הטענה נכונה. לגבי טיעון א', 24% מהתלמידים ציינו שבדיקת מקרים פרטיים עוזרת בפתרון; השאר לא ציינו נקודת חוזק של הטיעון.

נקודות חולשה

הניתוח מצא שלוש רמות ביחס לקבלת הטיעון האינדוקטיבי כהוכחה. טבלה 2 מציגה את רמות הזיהוי בליווי דוגמאות ואחוזי תלמידים המתאימים לכל רמה.

טבלה 2: רמות זיהוי נקודת חולשה[1]

טיעון אינדוקטיבי מספיק כהוכחה?	טיעון א		טיעון ב		טיעון ג	
	דוגמה	אחוז תלמידים (n=95)	דוגמה	אחוז תלמידים (n=95)	דוגמה	אחוז תלמידים (n=95)
לא	*הניסיון עם מספרים ובדיקת מספר אפשרויות אינה הוכחה, יכול להיות שהתמזל מזלנו עם המספרים האלה.* [תלמיד #15]	42%	*לא השתמשת בנתונים אלגבריים והשימוש בנתונים ספציפיים לא מובטח לכל המספרים.* [תלמיד #8]	11%	*אם הצלחת בבניית המספרים האי-זוגיים הראשונים על-ידי חיבור שני מספרים עוקבים זה לא אומר שהטענה נכונה. צריך להיות הוכחה שתוכיח את זה לכל המספרים באופן ברור.* [תלמיד #15]	31%
כן, אבל...	*אין חולשה. אבל צריך להרחיב את תחום המספרים שהצגת.* [תלמיד #34]	13%	*תזכיר יותר מדוגמה אחת לתמוך בהוכחתך בצורה מלאה.* [תלמיד #25]	15%	*היה צריך יותר הסבר, למרות שהוכחתך נכונה וחכמה..* [תלמיד #31]	14%
כן	*בדקת מספר אפשרויות ולא רק דוגמה אחת, ואז הוכחת את הטענה על-ידי בדיקת מספר אפשרויות וזו דרך חשיבה נכונה. אין חולשה.* [תלמיד #38]	25%	*שיטת חשיבה נכונה לא מכילה אף שגיאה, ואפשר להפעיל אותה על כל המספרים האי-זוגיים, כלומר הטענה נכונה.* אין חולשה. [תלמיד #4]	51%	*ניתות הגיוני ונכון, מתן דוגמאות נכונות לתמיכה בטענת פריד. אין חולשה.* [תלמיד #54]	28%

ניתן לראות כי במקרה של טיעונים שביטאו רעיונות-מפתח (ב' ו-ג'), אחוז תלמידים קטן יותר הצביע על נקודת החולשה מאשר במקרה של הטיעון שלא ביטא רעיון-מפתח (א'). מחקרים מראים שתלמידים נוטים לקבל הצדקה אמפירית כהוכחה כללית (Bieda & Lepak, 2014). המחקר הנוכחי מציע שקבלת התלמיד טיעון אמפירי כהוכחה כללית קשור בסוג הטיעון, כאשר הנטייה לקבל טיעון אמפירי כהוכחה מתחזקת כאשר הוא מבטא רעיון-מפתח, שניתן לפתחו להוכחה. הנטייה התחזקה כאשר הטיעון ביטא רעיון-מפתח בצורה המסבירה מדוע הטענה נכונה (טיעון ב').

הממצאים מציעים שתלמידים תופסים את הטיעונים האינדוקטיביים המבטאים רעיונות-מפתח – בעיקר כשאלה מסבירים מדוע הטענה נכונה – כטיעונים "איכותיים". מצד אחד, מעודד למצוא שתלמידים מקנים ערך לטיעונים אינדוקטיביים המבטאים רעיונות-מפתח. מצד שני, חשובה ההבנה שטיעון אינדוקטיבי אינו מבטיח את נכונות הטענה למקרה הכללי, ויש לפתחו לטיעון דדוקטיבי (Bieda & Lepak, 2014). בכך הממצאים מצביעים על הדגש שיש לשים בשיעורי המתמטיקה על כך שטיעונים אינדוקטיביים, מכל סוג שהוא, אינם מהווים הוכחה תקפה. המחקר גם הצביע על נטייה של תלמידים לזהות את רעיון-המפתח כאשר הטיעון גם מסביר, ובכך מדגיש את החשיבות שיש

[1] סכום האחוזים בעמודה אינו מסתכם ל-100%: היו תשובות לא רלוונטיות

בשימוש בטיעונים אינדוקטיביים המבטאים רעיונות-מפתח המסבירים מדוע הטענה נכונה. מחקר עתידי ימשיך לבחון מאפיינים של הערכה של תלמידים טיעונים אינדוקטיביים נוספים, הן בכתב והן בשיח המתמטי הכיתתי.

רשימת מקורות

Bieda, K., & Lepak, J. (2014). Are you convinced? Middle school students' evaluation of mathematical arguments. *School Science and Mathematics, 114*, 166-177.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401–429.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6–13.

Kuhn, D., & Udell, W. (2007). Coordinating own and other perspectives in argument. *Thinking and Reasoning, 13*, 90 – 104.

Raman, M. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus* (Unpublished Ph.D. dissertation). University of California, Berkeley.

Yopp, D. A. (2010). From inductive reasoning to proof. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(5), 286-291.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 247-261.

רמת המוכנות של בוגרי 4 ו- 5 יחידות במתמטיקה להתמודדות עם הגדרות והוכחות מתמטיות, עם תחילת לימודיהם האקדמיים במדעים מדויקים והנדסה.

איריס גבר, המכללה האקדמית ת"א-יפו
אריה לב, המכללה האקדמית ת"א-יפו, בית ברל
רומינה זיגדון, המכללה האקדמית ת"א-יפו, מכללת עזריאלי
יניב דביר, המכללה האקדמית ת"א-יפו, אוניברסיטת ת"א
כרמית בנבנישתי, המכללה האקדמית ת"א-יפו, מכללת סמינר הקיבוצים

הצעת המחקר

סטודנטים רבים למדעים ולהנדסה נתקלים בקשיים בלימודי המתמטיקה.

אחד המרכזיים שבהם, כפי שעולה ממחקרים רבים, הינו הקושי בכתיבת הוכחות מתמטיות ריגורוזיות. בין השנים 1990 – 1999 נכתבו מעל למאה מאמרים בנושא (לסקירה ראו [Hanna, 2000]). למרות המאמצים שהושקעו בשיפור המצב במסגרות האקדמיות, הבעיה עדיין נמשכת והשיפור איטי וחלקי בלבד. מסיבה זו, תפיסת הסטודנטים את מושג ההוכחה, ואופן חשיבתם ממשיכים להיות נושאים למחקרים רבים (לסקירה ראו [Reid and Knipping, 2011]).

נסיוננו כמרצים למתמטיקה ומדעי המחשב במספר מוסדות אקדמיים, מלמד שחלק משמעותי מהקושי טמון ביכולת להתמודד עם חשיבה והתנסחות ריגורוזיים : היכולת להבין ולהשתמש כראוי בהגדרות והוכחות, והיכולת להתנסח באופן מדויק וברור.

אבחנה זו אף היא מגובה במחקרים, למשל:

[Selden and Selden 2003], [Harel and Sowder, 1998], [Harel and Sowder, 2007]

שמצביעים על כך שכאשר הסטודנטים כותבים הוכחות, הם לא בהכרח מבינים את ההגדרות הרלוונטיות ואת הדרכים הראויות לשימוש בהן. אחת המסקנות העולה מהמחקרים היא שרוב הסטודנטים לא מבינים את חשיבות ההגדרות במתמטיקה.

(ראו גם: [Tall and Vinner, 1981], [Edwards and Ward,2004] ו-[Dreyfus, 1999])

במחקר זה אנו רוצים להתחקות אחרי שרשי הבעיה. ולהעלות את השאלות הבאות:

1. מה היקף הבעיה וחומרתה.
2. האם הלימודים ל-4 ו-5 יחידות מכינים את התלמידים להתמודד עם הנושאים המדוברים?
3. האם בהשכלה הגבוהה קיימת הנחה סמויה שהסטודנטים מגיעים עם מיומנויות שאין להם?
4. כיצד ראוי להתמודד עם הבעיה, והאם יש צורך לבצע שינויים:

א. בתכנית הלימודים בבתי הספר

ב. בתכניות להכשרת מורים.

ג. בלימודים האקדמיים: בניית תכניות שיגשרו על הפערים בין רמת הדרישות שמעמידים המוסדות להשכלה גבוהה לבין היכולות והמיומנויות אתן מגיעים הסטודנטים לשערי המוסדות

המחקר שלנו רחב ומקיף ובנוי בשלבים, ומבוסס על מסקנות שנאספו לאורך השנים מניסיוננו בהוראת המתמטיקה למדעים מדויקים והנדסה. בהמשך המחקר נבחן גם את הסוגיות הבאות:

1. האם אחוז גדול של סטודנטים אינו מפנים באמת את לימודי המתמטיקה ורק חוזר על תבניות?

2. האם כתוצאה מכך המרצים מתרשמים באופן מוטעה מהבנת הסטודנטים? טועים בין היכולת לאמץ תבניות לבין ההבנה וההפנמה של הנלמד?

3. ואם זה אכן כך, כיצד מאפיינים ומודדים את הבעיה (מבחינות שונות – קיומה, היקפה, אפיון רמות שונות של הבנה וכו').

שאלות המחקר הן שאלות גדולות אשר, להערכתנו, המענה עליהן ידרוש ביצוע של מספר מחקרים. בכנס אנו מתמקדים בשאלה הראשונה – היקף הבעיה וחומרתה.

כשלב ראשון במחקר, אנחנו עומדים להעביר שאלונים אחידים שיועברו לסטודנטים עם תחילת לימודיהם במספר מוסדות לימוד אקדמיים למדעים מדויקים והנדסה והכשרת מורים. הכוונה היא להעביר שאלות פשוטות ובסיסיות, שאיתן הסטודנטים אמורים לדעת להתמודד.

בניגוד למחקרים קודמים שעסקו בקושי של סטודנטים להבין ולהשתמש נכון בהגדרות מורכבות כגון גבול, קבוצה בלתי תלוי לינארית וכן הלאה ([Edwards and Ward,2004] ואחרים), אנו מתמקדים ביכולת של הסטודנטים להתמודד עם הגדרות בסיסיות ביותר, כגון הגדרה של מספר זוגי, ערך מוחלט, חלוקה ללא שארית, וכדומה. בהמשך, נעלה בהדרגה את רמת הקושי ונבדוק כל פעם את התוצאות, על מנת לזהות באיזה שלב מתחילים הקשיים.

בשלב השני, תתבצע בדיקה של השאלונים ברמה ובאיכות בדיקה המקובלות במוסדות אלו.

- נבדוק כמה מהסטודנטים ענו באופן טוב/ בינוני/ לא מספק.
- נבצע הערכה לאיכות תשובות הסטודנטים על ידי משאל שנעביר בין המרצים, בו נציג בפניהם את השאלות ונבדוק מה מידת ההצלחה לה הם מצפים מהסטודנטים, זאת במטרה לזהות את הפער בין הציפיות למצב בפועל.
- ננתח את תשובות הסטודנטים לקבלת מאפייני השגיאות הנפוצות, תוך ניסיון לאפיון מכנים משותפים למשל: סטודנטים לא מבינים כיצד לבנות הוכחה; לא יודעים לנסח טיעון; כותבים באופן לא מדויק וחסר ועוד.
- נבדוק מתאם בין תוצאות סטודנטים בשאלונים לבין נתוני הקבלה שלהם

הסוגיות לדיון בשיח מחקרים בכנס:

1. השאלות שאנו מעוניינים להציג לסטודנטים
2. המשך המחקר בעקבות הממצאים

הרקע למחקר

מבדיקות שעשינו, גם במעקב אחרי קורסים בהם אנו מלמדים וגם בקורס מיוחד שפיתחנו לצורך שיפור הטיפול בהגדרות, הבנה ובניה של היסקים, כתיבה ראויה וכדומה, ושניתן כבר במשך מספר שנים, התרשמנו שקיימת התופעה הבאה. כאשר מוצגות בעיות "מסוג חדש" לסטודנטים, גם אם הן פשוטות ביותר, אחוז לא קטן (גבוה בהרבה ממה שציפינו) כושל באופן יסודי בבעיות אלו.

הכשל מתבטא, בין היתר, ביכולת מוגבלת בהתנסחות בשפה פורמלית ובהירה, קושי בהסתמכות על הנחות בסיס והגדרות, הוכחות שאינן אלא טאוטולוגיות, ועוד. כל אלו קורים בבעיות שלדעתנו לפחות, קלות במידה רבה ומורכבות הרבה פחות מהטיעונים וההגדרות בהן אנו עוסקים בהרצאות.

מקובלת ההנחה שכתיבה נכונה של הוכחה מתחילה בהבנה יסודית ובהירה של כל המושגים וההגדרות בהם נעשה שימוש, והבנה בהירה של משמעות השאלות הנדונות והטיעונים המוצגים. הקנייה לסטודנטים חשיבה המבוססת על אותה הבנה בהירה היא אחד האתגרים בהוראת המתמטיקה.

לאורך שנים של התמודדות עם אתגר זה נוכחנו לגלות שהוא אינו טריוויאלי כלל ועיקר. אנו סבורים שהיכולת לעצור, ולהבין דברים לאשורם "באופן בהיר", אינה בהכרח "טבע שני" לרוב האנשים. מסתבר כי המלצות כמו "קראו הבעיה", "עצרו לשיפוט" רחוקות מלהספיק. משום שאנו, בני האדם, נוטים לפעול באופן ספונטני ואינטואיטיבי. ([לב, 2015]).

אנו סבורים שמדובר בתופעה כללית שמאפיינת גם נושאים ודיסציפלינות אחרות (ב-[Kahneman,2011] נטען שאכן זה כך). לדעתנו מדובר בתופעה חשובה שמן הראוי שתעלה על פני השטח ותזכה להתייחסות משמעותית יותר מהקיים היום גם מהפן התיאורטי והמחקרי, וגם מהפן המעשי.

סטטוס המחקר

שלבים ראשונים (לימוד הנושא, סקירת ספרות, הכנת שאלונים ראשונים לסטודנטים ולמרצים) בוצעו כבר בשנת תשע"ט.

רשימת מקורות

לב א. (2015). על חינוך, חשיבה מסדר גבוה וחשיבה בהירה. *קתרסיס (22)*, 48-107.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics. 38*, 85-109.

Edwards, B.S. and Ward, M.B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly. 111(5)*, 411-424.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics 44*, 5-23.

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from Exploratory Studies. *in E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld and J. J. Kaput (eds.), Research on Collegiate Mathematics Education American Mathematical Society, Providence, RI, USA Vol. III*, 234-283.

Harel, G. and Sowder, L. (2007). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *in Lester FK.Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning Charlotte, NC: Information Age*, 805-842.

Kahneman, D. (2011). Thinking Fast and Slow. New York: Farrar, Straus and Giroux.

Reid, D. A., Knipping, C. (2011). Proof in mathematics education: Research, learning and teaching. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Selden, A. and Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *J. Research in Math. Education 34*, 4-36.

Tall, D. and Vinner, S. Concept Image and Concept Definition. (1981). *in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics. 12 C (2)*, 151-169.

דיווח על
ממצאי מחקר

טעות לעולם עוזרת - למידה המשלבת תפיסות שגויות, טעויות ואסטרטגיות פתרון בנושא שברים פשוטים

אילנית איטון, בית הספר ע"ש יהודה בכר אבן-יהודה
רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות

מבוא

השברים הפשוטים הוא אחד מהנושאים המורכבים והחיוניים בהוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי. לנושא זה השפעה על בסיס הידע המתמטי של התלמידים ובהמשך על לימוד נושא האלגברה (Aksoy & Yazlik, 2017). שברים הוא נושא בסיסי שחשיבותו היא קריטית לתלמידים והוא חיוני להמשך לימוד של נושאים מתמטיים מתקדמים כמו: מספרים עשרוניים, מספרים רציונליים ויחס (Van De Walle, Karp & Bay-Williams, 2012). מחקרים ברחבי העולם מראים שההחולשה בהבנת התלמידים את נושא השברים מובילה לקשיים במספרים עשרוניים, אחוזים, יחס, מדידות בשברים והשימוש בהם באלגברה. תלמידים מתקשים בתפיסת מושג השבר ובנימוקיהם מתגלות תפיסות שגויות וטעויות. יחד עם זאת נושא השברים מביא אתו עניין רב, הנאה ואתגר לתלמידים ולמורים (Stafylidou & Vosniado, 2004; Aliustaoglu, Tuna & Cagri Biber, 2018).
"תפיסה שגויה"(Misconception) מוגדרת כפרשנות הניתנת למושג שאותו מתקשה התלמיד להבין (Aliustaoglu, Tuna & Cagri Biber, 2018). לעומת זאת "טעות" (Mistake) מוגדרת כבחירה בדרך נכונה כאשר במהלך הפתרון קיימת טעות חישוב, או טעות אחרת הנובעת מרשלנות או פיזור דעת (מילון השפה העברית). פישביין טען שאחת הסיבות לטעויות הוא המרכיב האינטואיטיבי שנמצא בבסיס הידע המתמטי- הידע הסובייקטיבי של הפרט לגבי מושג, משפט או פתרון בעיה. לטענתו לאינטואיציה השפעה רבה (חיובית ושלילית) על החשיבה המתמטית ולכן לא ניתן להתעלם ממנה במהלך הוראת המתמטיקה. הוא התייחס לאינטואיציות הראשוניות כסוג של אמונה המתקבלת על ידי הלומד באופן מיידי ללא צורך בהצדקה כלשהי וטען שלאמונות האינטואיטיביות השפעה כפייתית על הפרשנות ועל אסטרטגיות החשיבה שלנו למשל, 'השלם גדול מחלקיו' (Fischbein, 1987; 1993).
פרדיגר מצא שתלמידים שוגים עקב תפיסה שגויה שכפל מגדיל ובנוסף שלא ניתן כלל לכפול שבר בשבר. תפיסות שגויות אלו נבעו מהשפעת הידע הקודם בתחום של קבוצת המספרים הטבעיים (Prediger, 2006).
תלמידים רבים לא מסוגלים כלל לבצע פעולות עם שברים מפאת בלבול עם פעולות במספרים טבעיים, הם מתייחסים למכנה ולמונה של השבר כאל שתי ישויות נפרדות. הסיבות לקשיים אלו הם חוסר בהבנה של יישום תהליכים מתאימים בפתרון בעיות, מורכבות המשימות והכללת יתר של תהליכים ממספרים טבעיים לשברים (Ndalichako, 2013). תלמידים טועים בחיבור שברים. הסיבות לכך נובעות מהבנה מועטה במושג השבר ומשימוש לא נכון בחוקים ואלגוריתמים שנלמדו במערכת המספרים השלמים אך אינם מתאימים לשברים. התלמידים מבצעים הכללות יתר ואלו גורמות להם לטעויות בהבנה של מבנה השברים (Lukhele , Murray & Olivier,1999). הסיבות לטעויות נפוצות של תלמידים בפתרון משימות בשברים הם: השפעה שלילית של ידע קודם במספרים שלמים על הבנת שברים ופעולות ביניהם, חוסר בידע בסיסי ומיומנויות לבצע פעולות עם שברים (Yusof & Malon, 2015).
המועצה הלאומית של מורי המתמטיקה בארה"ב הציעה לבצע שינוי בדרך בה מלמדים שברים פשוטים, על מנת לשפר הבנת תלמידים וביצועים בנושא למשל, להתייחס לטעויות של תלמידים ולדון בהן כדי לשפר את תהליך ההוראה והלמידה (NCTM, 2000) . הטענה היא, שלמידה והבנה מעמיקה במתמטיקה מתרחשת כאשר התלמידים מתבקשים לשפוט ולהצדיק מה מוטעה ושגוי בפתרון (Adams, McLaren, Durkin, Mayer, Johnson, Isotani & Velsen, 2014). חקירת טעויות נחשבת כמקור פוטנציאלי לרכישת ידע ומיומנויות קוגניטיביות (Siegler, 2002 as sited at Adams at al., 2014), ומכאן שהצגת מסגרת תיאורטית ודוגמאות המתייחסות לטעויות כאל בסיס לדיון שירחיב ויעמיק את עולמו המתמטי של הלומד, מדגישים כי לחקר הטעויות בהוראת המתמטיקה יש ערך רב מעבר לאבחון ולטיפול. הוראת מתמטיקה מבוססת טעויות מעודדת את הלומדים לחקור, מסייעת בפיתוח השיח המתמטי ובהמללת ביטויים ורעיונות, יוצרת מודעות לחשיבותה של החשיבה והנמקת הידע, ומפתחת בלומדים ביטחון לגבי יכולתם המתמטית (Borasi, 1994). רפלקציה וחקירה על דוגמאות שגויות יש בה השפעה על הידע ועל רכישת מיומנויות (Grobe & Renkl, 2007).

מטרת מחקר

לבחון את השפעתה של פעילות המבוססת על למידה מטעויות על הישגיהם של תלמידי כיתות ה' בנושא השוואה ופעולות בשברים פשוטים.

שאלות מחקר

1. באלו אסטרטגיות משתמשים תלמידים בפתרון משימות השוואה ופעולות בשברים פשוטים?
2. אלו טעויות נפוצות או תפיסות שגויות קיימות אצל תלמידים בפתרון משימות בשברים פשוטים?
3. מהי ההשפעה של למידה מטעויות על קידום יכולות התלמידים בפתרון משימות בשברים פשוטים ותרומתה לתלמידים עצמם?

אוכלוסיית מחקר

במחקר השתתפו 105 תלמידים בגילאי 10-11 משלוש כיתות ה' 35 תלמידים בכיתה, הלומדים בבית ספר יסודי ממלכתי שש שנתי במרכז הארץ מרקע סוציואקונומי בינוני-גבוה. מתוך 105 המשתתפים נבחרו 15 תלמידים שעברו הוראה המבוססת על למידה מטעויות. לאחר ההוראה רואיינו 10 תלמידים לגבי הלמידה, השפעתה ותרומתה ללומדים.

כלי מחקר

כלים כמותניים: שאלון מקדים (Pre-Test) ושאלון מסכם (Post-Test) זהים ומשימות הוראה ולמידה המשלבות טעויות ותפיסות שגויות בשברים פשוטים שכללו: כתיבת סימן השוואה ונימוק, ניתוח תשובות-משימות פתורות הדורשות בחירת תשובה נכונה, משימות בנייה- משימות הדורשות מהתלמידים להשתמש בנתונים הקיימים והצגת פתרון. **כלים איכותניים:** ראיונות חצי מובנים לעשרה מהמשתתפים בהוראת הלמידה מטעויות במטרה לבדוק את ההשפעה על התלמידים והתרומה גם מעבר להיבט הלימודי.

הליך המחקר

בשלב הראשון, הועבר שאלון מקדים לכל 105 התלמידים, שמטרתו לבחון באלו אסטרטגיות משתמשים התלמידים בפתרון משימות בהשוואת שברים ובפעולות חיבור וחיסור שברים ובנוסף לבדוק טעויות נפוצות ותפיסות שגויות בפתרון משימות אלו. בשלב השני למדו והתנסו 15 תלמידים בפעילות מבוססת טעויות בנושא השוואת שברים ופעולות חיבור וחיסור בשברים. בשלב השלישי הועבר שאלון ל- 15 תלמידים שלמדו בדרך של חקר וגילוי טעויות ובשלב הרביעי נערכו ראיונות ל- 10 תלמידים שהשתתפו בפעילות.

ממצאים ודיון

מממצאי המחקר ניתן לראות שפעילות המבוססת על למידה מטעויות תרמה לקידום יכולות והישגים בקרב רוב הנחקרים שהשתתפו בפעילות. בעקבות הפעילות, חלק ניכר מהנחקרים כ- 80%, גילו שיפור ושינוי באסטרטגיות הפתרון בהשוואת שברים ובפעולות בשברים. במשימת כתיבת סימן השוואה ונימוק מרבית המשתתפים 80% ענו נכון על כל הפריטים. במשימות ניתוח התשובות מעל 80% מהמשתתפים הצליחו בפתרון ובמשימות הבנייה חלה עלייה משמעותית באחוז התלמידים שהצליחו בפתרון כל הפריטים (0% ל- 73.3%). כמו כן מעל מחצית המשתתפים בפעילות גילו שביעות רצון מהלמידה, שינוי בתחושת המסוגלות ללמוד ואף חל שינוי בתפיסתם לגבי שימוש בטעויות כמקדמות ותורמות להבנת התוכן הנלמד. הממצאים מחזקים ומדגישים את הפוטנציאל הגלום בפעילויות המבוססות על למידה מטעויות לקידום תהליכי הוראה ולמידה בנושא השברים. מהמחקר עולה כי שיטת הוראה כזו יכולה לסייע לתלמידים להתמודד עם חששות מפני טעויות. הוראה מסוג זה מעצימה את התלמיד ומשנה תפיסתו למושג טעות, ומביאה אותו להכרה כי טעות לעיתים הינה מקור ללמידה. למידה זו מאפשרת ללומדים לשנות גישה לאפשרות לטעות והופכת את הטעות למנוף ללמידה, לשיפור והתפתחות בתחום הידע ולמניעת טעויות בעתיד.

ביבליוגרפיה

מילון השפה העברית. (ה"ת). אוחזר ב-7 בספטמבר, 2019 מ
https://www.safa-ivrit.org/synonyms/taut.php

Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S., & Van Velsen, M. (2014). Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. *Computers in Human Behavior*, 36, 401-411.

Aksoy, N. C., & Yazlik, D. O. (2017). Students Errors in Fractions and Possible Causes of these Errors. *Journal of Education and Training Studies, 5(11),* 219-233.

Aliustaoglu, F., Tuna, A., & Biber, A. C. (2018). Misconceptions of sixth Grade Secondary School Students on Fractions. *International electronic journal of elementary education, 10(5), 591-599.* doi:10.26822/iejee.2018541308

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 166-208.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straser, & B.

Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Große, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes?. *Learning and Instruction*, 17, 612–634.

Lukhele, R. B., Murray, H., & Olivier, A. (1999). Learner's understanding of the addition of fractions. *Proceedings of the Fifth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa*, *1*, 87-97. Port Elizabeth: Port Elizabeth Technikon

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia, NCTM.

Ndalichako, J. L. (2013). Analysis of pupils' difficulties in solving questions related to Fractions: the case of primary school leaving examination in Tanzania. *Creative Education*, *4*(9),69-73.

Prediger, S. (2006). Continuities and discontinuities for fractions a proposal for analysing in different levels. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 377-384.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2012). *Elementary and secondary school mathematics: Teaching with developmental approach.* (S. Durmuş, Trans.) Ankara: Nobel Academic Publishing.

Yusof, J., & Malone, J. (2015). Mathematical errors in fractions: a Bruneian primary 5 pupils. *Mathematics education research group of Australasia, 2, 783-790.*

שיח מתמטי כמנוף לפיתוח הבנה של המושגים "שטח" ו-"היקף" במצולעים בקרב תלמידי כיתה ה'

סעידה היבא, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך
רותי סגל, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך

מבוא

הגאומטריה מהווה חלק חשוב מהעולם והתרבות האנושית שלנו (לבנברג ופטקין, 2018). אין ספק, כי השגתה של הבנה משמעותית למושגים הנלמדים תסייע לתלמידים להבין נושאים שונים במתמטיקה. עם זאת, מחקרים בחינוך המתמטי מצביעים על חוסר הבנה של התלמידים במושגים גאומטריים, במיוחד שטח והיקף (קלמר, 1992; צימר ותירוש, 2016). כאשר רובם המכריע רואים בגישת ההוראה שמורים נוקטים במהלך הוראתם בבית הספר, גורם משמעותי המשפיע על מומחיותם של התלמידים ועל ביצועיהם (פישר, 2015; עבד אלכרים, 2011; רגב ומרגולין, 2013; Duval, 2002).

אחת הגישות שנבחרתי לחקור במסגרת המחקר הנוכחי היא גישת השיח של Sfard (2008). גישת השיח מבוססת על הגישה התקשורתית של Vygotsky (2006). מתוך טענה כי אינטראקציה חברתית היא מרכיב משמעותי להשגת הבנה (ענאבוסי וטבח, 2016; Sfard, 2008). הסבר אפשרי לטענה הזו היא שתהליך הכרוך בפעילות אקטיבית במסגרת שיח בקהילה תומך בתהליך ההבנה (עבד אלכרים, 2011; טבח ונחליאלי, 2016), כמו גם בפיתוח השפה המתמטית (ספרד, 2011). לטענותיהם של חוקרים (כמו: טבח ונחליאלי, 2016; ענאבוסי וטבח, 2016; **עבד** אל-כרים, 2011) **השיח בין תלמידים הוא הזדמנות טובה ללמידה משום שתלמידים מעורבים באופן פעיל בשיעורים.**

זאת כי, מילון עשיר במושגים מתמטיים יכול לנבא את רמת הביצוע וההצלחה העתידית בלימודי מתמטיקה כמו: השגת רהיטות חישובית, יישום מונחים מתמטיים לפתרון בעיות, שימוש בטיעונים לוגיים ומעורבות במתמטיקה (Riccomini, Smith, Hughes, & Fries, 2015). דרך אפקטיבית לפיתוח השפה הוא ניהול שיח בין תלמידים ודיונים בקבוצות קטנות. משום שהם תורמים להבנה עמוקה יותר של התלמידים ולתיקון טעויות אפשריות בתפיסת המושגים "שטח" ו"היקף". בנוסף, התפתחות בתהליכי השיח והשפה מעידה על התפתחותם של תהליכים מטה קוגניטיביים ורפלקטיביים, המסייעים לתלמידים לבחון את תהליכי החשיבה והפעולה שלהם (רגב ושמעוני, 2000). זאת, משום ששיח מתמטי מקפיד על דיבור עקבי וברור, וכן על השתתפות אשר מגבירה את המודעות לבעיית "הרב משמעויות". תלמידים לעיתים משתמשים באותה מילה לציון דברים שונים (ספרד, 2011),

באופן דומה, ה-NCTM (2000) מדגישים את חשיבותה של האינטראקציה החברתית בלימוד מתמטיקה. תלמידים לומדים באופן משמעותי אם נותנים להם הזדמנות, עידוד ותמיכה לדבר, לקרוא, לכתוב ולהקשיב בשיעורי מתמטיקה. באמצעות השיח התלמידים משתמשים במושגים המתמטיים, דבר המסייע להם להשיג הצלחה בלימודיהם. בנוסף, פיתוח מיומנויות השיח בין תלמידים עשוי לסייע להם בבניית קשרים בין המושגים האינטואיטיביים הלא פורמאליים, ובין השפה המופשטת המדויקת של המתמטיקה, ורעיונות מתמטיים, איוריים, גרפיים, מילוליים, מנטליים ועוד.

במקביל, אנשי חינוך ממליצים לאפשר לתלמידים להסתמך על החשיבה שלהם עצמם. זאת, דרך שיחה המעשירה את השפה המתמטית (Sfard, 2008; ענאבוסי וטבח, 2016), מעלה את הישגיהם בפתרון בעיות ומחדדת את הבנתם המושגית. הוראה של אוצר מילים המתפתחת על ידי ניהול שיח בין חברי הקבוצה חשובה להבנת הנקרא. לפיכך, כיום חלק גדול מהוראת המתמטיקה מתבסס על פתרון בעיות מילוליות ולא מצפים מהתלמידים לפתור רק תרגילים (Kazemi, 1998).

מטרת המחקר ושאלותיו

המחקר של בחן את תרומתו של השיח הקבוצתי בקרב תלמידי כיתות ה' להבנת המושגים "שטח" ו"היקף "של מצולעים.

- האם השיח הקבוצתי בכיתה ה 'תורם להבנתם את המושגים "שטח" ו"היקף "של צורות שונות?
- האם ובאיזה אופן גישת השיח הקבוצתי מזמנת מענה לקשיים של תלמידים בהבנת המושגים "שטח" ו"היקף "של מצולעים?

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו תשעה תלמידים בכיתה ה'. התלמידים נבחרו מתוך חמישה כפרים בדואים-ערבים מצפון הארץ, ובתי ספר יסודיים שונים. לצורך המחקר, התלמידים חולקו לשלוש קבוצות כך שבכל קבוצה היו שלושה תלמידים. הבחירה הייתה לפי אזור מגורים קרוב על מנת הפגישה. ציוני התלמידים במקצוע המתמטיקה בטווח של 60 – 70. במהלך המחקר כל קבוצה התמודדה עם שלוש משימות גיאומטריות פתוחות בנושא שטח והיקף של מצולעים. הועברו לתלמידים אותן משימות. כל פגישה הייתה עם קבוצה אחת שהתמודדה עם משימה אחת. לכל פגישה נערכה תצפית ובסך הכל היו תשעה תצפיות.

כלי המחקר

סוג המחקר הוא מחקר איכותני המבוסס על ניתוח תמות מרכזיות שחזרו על עצמן במהלך התצפיות. סעאידה (2018) השתמשה בתצפיות ושלוש משימות בגיאומטריה. הניתוח של תשעת התצפיות התבסס על הכלי שהופיע במחקרם של טבח וענאבוסי (2016), אשר משלב את גישת השיח של Sfard (2008) ואת הגישה הלשונית של Halliday & Matthiessen (2004).

עיקרי הממצאים

ממצאי המחקר מצביעים על תרומתו של השיח בין תלמידים להבנתם של המושגים שטח והיקף. ניתן לסכם את ממצאי המחקר בשלוש המשימות לפי התמות המרכזיות שזוהו, כדלקמן:

- משימה ראשונה

בלבול בין, מושג שטח והיקף, שגיאות חישוב ותפיסות שגויות, אי דיוק במושג שטח והיקף, רק קבוצה אחת פתרונות נכונים, מריבה בין חברי הקבוצה, חוסר סבלנות, מנהיג, חלוקת תפקידים, תיעוד פתרון , יצירת קשר עם הצופה/ החוקר.

- משימה שנייה:

דיוק, שימוש בתרגילי חישוב לצורך הוכחה או נימוק לתלמידים אחרים, תפיסות שגויות, הכללות, תיקון טעויות, שאילת שאלות, חלוקת תפקידים, תיעוד פתרון, יצירת קשר עם הצופה/ החוקר.

- משימה שלישית:

דיוק, נימוק על ידי הגדרות ותכונות של משולשים, תפיסות מוטעות, הכללות, תיקון טעויות, שאילת שאלות, מתן נימוקים גם ללא בקשתו של חבר קבוצה, שכנוע, האזנה, התייחסות לחברי הקבוצה, חלוקת תפקידים או עבודה, תיעוד פתרון.

דיון ומסקנות

השיח בין תלמידי כתה ה' שהתנהל במהלך התמודדותם עם משימות גיאומטריות בנושא שטח והיקף סייע לקדם ולחלץ תובנות בנושאים שנלמדים. ההתייחסות לשיח ככלי המקדם את תהליך הלמידה בקרב התלמידים זוהה בתחומים כמו: לימודי, רגשי וחברתי. דהיינו, התחום הלימודי מראה יכולתם של התלמידים ליישום מיומנויות מסדר גבוה תוך רכישת ידע אודות שטח והיקף של מצולעים, דייקנות במושגים שטח והיקף. התחומים רגשי וחברתי הראו שהשיח מעודד אמון, הערכה והעצמה בקרב כלל התלמידים תוך לקיחת אחריות להשלמת המשימה.

מקורות

לבנברג, א' ופטקין, ד' (2018). *גיאומטריה פנים רבות לה: מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה*. תל אביב: מכון מופ"ת.

נחליאלי, ט' וטבח, מ' (2016). למידה והוראה בראי הגישה התקשורתית. *מחקר ועיון בחינוך המתמטי*, *4*, 13-21.

ספרד, א' (2011). אוריינות לשונית ואוריינות מתמטית – מה הקשר?. אוניברסיטת חיפה.

עבד אלכרים, ל' (2011). הוראה דיאלוגית בלימודי גיאומטריה. (עבודת גמר לקבלת תואר מוסמך לחינוך המתמטי). הפקולטה ללימודים מתקדמים M.Ed הוראת המדעים בביה"ס העל יסודי. המכללה האקדמית לחינוך אורנים: אורנים, טבעון.

ענאבוסי, א' וטבח, מ' (2016). ניתוח שיח לימודי כיתתי בנושא המעגל דרך שתי עדשות: קומוגניציה של Sfard ו-SEF של Halliday. *מחקר ועיון בחינוך המתמטי*, *4*, 69-97.

צימר, פ' ותירוש, ד' (2016). *ללמוד מתמטיקה מטעויות: מאגר מקוון של שגיאות אופייניות בלמידת מתמטיקה*. תל אביב: מכון מופ"ת.

קלמר, ע' (1992). תפיסת השטח ומדידת שטחים על ידי ילדים בני 9-10, תוך שימוש בעולם זוטא ממוחשב. (עבודת גמר לקבלת תואר מוסמך לחינוך המתמטי). החוג לחינוך. אוניברסיטת חיפה: חיפה.

רגב, ח' ומרגולין, א' (2013). שיח מתמטי בסביבות משתנות: תלמידים מפתחים מושגים מתמטיים בקבוצה. *מספר חזק 2000*, *23*, 37-25.

רגב, ח' ושמעוני, ש' (2000). לשוחח מתמטיקה: מדוע? למה? ואיך?. *על"ה*, *25*, 77-89.

Duval, R. (2002). Proof understanding in Mathematics: what ways for Students?. *Proceedings of 2002 International Conference on Mathematics-Understanding proving and proving to understand.* (61-77)

Halliday, M. A. K., & Matthiessen, C. M. I. M. (2004). *An introduction to functional grammar (3rd Ed.)*. London: Arnold.

Kazemi, E. (1998). Discourse that promotes conceptual understanding. *Teaching Children Mathematics, 4(7)*, 410

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics (1)*. National Council of Teachers.

Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly, 31(3),* 235-252.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the learning sciences, 16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press.

רפלקציה על הפרקטיקה והזדמנויות לפיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה במרחבים שונים

יעל נוריק, מכון ויצמן למדע
רוני קרסנטי, מכון ויצמן למדע
אברהם הרכבי, מכון ויצמן למדע

מבוא תיאורטי

בעשורים האחרונים, הספרות המחקרית בתחום החינוך, ובכלל זה החינוך המתמטי, מתייחסת לידע הרב והמגוון שנדרש למורים ולהשפעת ידע זה על תהליכי קבלת ההחלטות שלהם. לצד זאת, המחקר בתחום עוסק בסביבות וכלים שמאפשרים תמיכה במורים, במסגרת תוכניות להכשרה ולפיתוח מקצועי, ומדגיש את חשיבותם של תהליכי רפלקציה של המורים על עבודתם. המחקר המתואר בהצעה זו מתייחס למרחבים המציעים למורים כלים לביצוע רפלקציה והעמקה של ידע מתמטי להוראה.

קיימים מספר מודלים תיאורטיים לתיאור וייצוג של היבטים שונים המשפיעים על הפרקטיקה של הוראת המתמטיקה. למשל, מודל הידע המתמטי להוראה של בול וחובריה (Ball, Themes & Phelps, 2008), מתייחס לסוגי הידע הנדרשים למורה, הנחלקים לידע תוכן-מתמטי ולידע תוכן-פדגוגי; המודל לניתוח החלטות הוראה של שונפלד (Schoenfeld, 2010), מתייחס למשאבים, למטרות ולאמונות המורה; מודל ה-Practical Rationality של חזן וחובריו (Chazan et al., 2016), מרחיב את ההסתכלות על מקצוע ההוראה ומוסיף הקשרים רגשיים, חברתיים ומערכתיים שמורים מתייחסים אליהם במערך השיקולים שלהם.

מחקר ענף מתייחס גם למושג הרפלקציה. רפלקציה על ההוראה מכוונת לפיתוח חשיבה ביקורתית של מורים על פעולות שהם מבצעים במטרה להפוך את הפרקטיקה שלהם לפעולה שקולה. המחקר מייחס לתהליכים רפלקטיביים חשיבות רבה בפיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה, ומקשר בין תהליכים אלו לשיפור ההוראה (רן, 2016). עם זאת, ההגדרות הקיימות למושג הרפלקציה הן עמומות ואינן מציעות דרכי יישום ברורות לביצוע תהליך רפלקטיבי, ובפועל, ביצוע רפלקציה הוא אתגר עבור מורים רבים (רן, 2016). ההגדרה העומדת בבסיס מחקר זה היא של קרסנטי והרכבי (Karsenty & Arcavi, 2017), שמגדירים רפלקציה כהתבוננות זהירה, מפורטת ואנליטית ודיון מפורש ב'מה שנעשה', במטרה להבין ולבחון מחדש כוונות, מטרות, החלטות ואת יישומיהן של אלו.

השינויים בתפיסות לגבי הידע והכלים הדרושים למורי המתמטיקה וההיבטים המגוונים אליהם הם נדרשים להתייחס הובילו לשינוי גם בתוכניות להכשרה ולפיתוח מקצועי של מורים. תוכניות ופרויקטים רבים מתמקדים כיום בפיתוח כלים לרפלקציה על הפרקטיקה לצד פיתוח ידע מתמטי להוראה. עם זאת, קיימים גם אתגרים רבים בתוכניות ופרויקטים אלו, שאינם מתייחסים תמיד לכלל ההיבטים איתם מתמודדים המורים בפועל בעבודתם (Chazan et al., 2016).

המחקר המוצג כאן מבקש לתאר את המורכבות של מקצוע הוראת המתמטיקה, ושל הפיתוח המקצועי והתמיכה במורים, בדגש על פיתוח כלים לרפלקציה. על אף הספרות הרבה העוסקת בתרומה ובחשיבות של תוכניות שונות לפיתוח מקצועי למורי מתמטיקה, מחקרים מועטים משווים בין מרחבים שונים בהם מתקיים הפיתוח המקצועי, כלומר סביבות או כלים שונים המציעים למורים אפשרות לבצע רפלקציה על הפרקטיקה של ההוראה לצד הזדמנות להרחיב את הידע המתמטי להוראה שלהם.

מתודולוגיה

במחקר זה, מורות למתמטיקה התנסו בשלושה מרחבים לפיתוח מקצועי בעלי מאפיינים שונים: כתיבת יומנים אישיים, ראיון במהלכו המורות צפו בשיעור מצולם של עצמן, ומפגשי השתלמות של פרויקט עדש"ה (פרויקט מבוסס-וידאו לפיתוח מקצועי של מורי מתמטיקה, ראו אצל: Karsenty & Arcavi, 2017). מטרת המחקר היא לאפיין מרחבים אלה: לבדוק מה המרחבים השונים מאפשרים למורות, לבחון אילו נושאים מעסיקים את המורות במהלך עבודתן

היומיומית עולים במרחבים הללו, וכיצד המרחבים השונים תומכים בפיתוח כלים לביצוע רפלקציה ובהעמקת הידע המתמטי להוראה.

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו 11 מורות ומורים למתמטיקה מרחבי הארץ המלמדים בבתי ספר על-יסודיים, אשר השתתפו בעבר באחת ההשתלמויות של פרויקט עדש"ה. ההצגה תתמקד בשני חקרי מקרה: דפנה ונועה, שתיהן מורות בחטיבה העליונה. דפנה היא מורה ותיקה המלמדת ברמות הגבוהות, ואילו נועה היא מורה צעירה המלמדת בעיקר ברמות הנמוכות.

איסוף הנתונים

נתוני המחקר נאספו בשלושה מרחבים שונים:

יומני רפלקציה שבועיים: יומנים אישיים שהמורות כתבו על בסיס שבועי במשך חמישה חודשים. המשימה השבועית למורות היתה להתייחס למאורע המשמעותי ביותר עבורן בשבוע החולף בעת תכנון ההוראה או בהוראה בכיתה.

ראיון מבוסס-וידאו על בסיס שיעור מצולם: ראיון אישי שהתקיים עם כל אחת מהמורות, במהלכו צפינו יחד בשיעור שצולם בכיתתן. במהלך הראיון, המורות התבקשו לעצור את הווידאו בנקודות עליהן היו רוצות לשוחח. הראיונות צולמו ותומללו במלואם.

מפגשי השתלמות של פרויקט עדש"ה: מדובר בהשתלמויות בהיקף של 30 שעות, הנפרסות על פני 7-10 מפגשים. בהשתלמויות, המורים צופים בשיעורי מתמטיקה מוסרטים כבסיס לדיונים המתמקדים בהיבטים שונים של הוראת המתמטיקה, תוך שימוש במסגרת ניתוח בת שש עדשות שפותחה לשם כך. קטעים נבחרים מתוך המפגשים, בהם דפנה ונועה היו שותפות לדיון באופן פעיל, תומללו.

ניתוח הנתונים

בשלב הראשון של ניתוח הנתונים התייחסנו לשני מימדים: הנושאים אליהן מתייחסות המורות כשהן מתבטאות בקשר להוראה שלהן, והפעולות הרפלקטיביות שהן מבצעות כאשר הן עושות זאת (כגון התבוננות אחורה וניתוח מה שנעשה או הצעת מהלכים לעתיד). נבנו קטגוריות למימדים אלו בהתאם לעולה מן הנתונים ותוך חיבור לקטגוריות שעולות מהספרות המחקרית. בשלב השני, הנתונים מכל אחד מהמרחבים קודדו כדי לזהות את הנושאים והפעולות הרפלקטיביות שבאו לידי ביטוי בכל אחד מהמרחבים. לבסוף חיפשנו בכל מרחב אפיזודות המבטאות הזדמנויות שמאפשר המרחב לפיתוח מקצועי: אפיזודות בהן המורות התבוננו, חשבו או ניתחו את הפרקטיקות שלהן באופן שאינו מתאפשר במהלך עבודתן היומיומית.

ממצאים ודיון

הממצאים יוצגו בשלושה שלבים.

ראשית, הניתוח מעלה חמש קטגוריות-על לאפיון נושאים שמעסיקים את המורות: (1) נושאים מתמטיים-תוכניים, (2) נושאים מתמטיים-פדגוגיים, (3) נושאים פדגוגיים-ארגוניים (כלליים/גנריים), (4) נושאים בין-אישיים ורגשיים ו- (5) נושאים מערכתיים, המתייחסים לגורמים החיצוניים לכאורה לעבודת המורה בתוך כיתתה. קטגוריות אלו נמצאות בהלימה לתיאוריות קיימות, המתייחסות למגוון ההיבטים שמורים למתמטיקה מתייחסים אליהם בפועל.

הניתוח מתייחס גם לפעולות רפלקטיביות שהמורות ביצעו כשהתבטאו לגבי פרקטיקת ההוראה. הקטגוריות שעולות מהניתוח תואמות בחלקן להגדרת מושג הרפלקציה של קרסנטי והרכבי (2017), לצד פעולות נוספות שעלו מתוך הנתונים. הממצאים מחדדים כי ההגדרות הקיימות כיום למושג הרפלקציה אינן מציעות הבנה מספקת בדבר המשמעות בפועל של ביצוע רפלקציה. קיים פער בין תהליך הרפלקציה הרצוי המוגדר בספרות לבין מה שמורים מבצעים בפועל כשהם מתבטאים אודות הפרקטיקה שלהם. המורות במחקר התמקדו ב"פעולות רפלקטיביות" – פעולות שהן חלק מתהליך הרפלקציה אך לא משלימות את התהליך כולו, כגון ניתוח של הסיטואציה מבלי לשקול חלופות.

בהצגה יובאו דוגמאות מתוך הנתונים לקטגוריות של שני המימדים: הנושאים והפעולות הרפלקטיביות.

השלב האחרון של הניתוח נועד לאפיין את המרחבים השונים בהם מורים התבטאו לגבי הפרקטיקה שלהם. לפי חקרי המקרה שנותחו, נראה ששלושת המרחבים מאפשרים לבצע פעולות רפלקטיביות מגוונות אודות מרבית הנושאים שצוינו. יחד עם זאת, הניתוח מצביע על הבדלים בין המרחבים, ומאפשר לפיכך לאפיין את ההזדמנויות לפיתוח מקצועי הגלומות בכל אחד מהם. בהצגה נרחיב לגבי ההזדמנויות השונות: מפגשי ההשתלמות כמרחב המציע מקום

להרחבת הידע המתמטי, יחד עם עמיתים; היומנים השבועיים כמרחב המאפשר הזדמנות להעלות קשיים בהוראה ולנתחם; ראיונות מבוססי-וידאו כמרחב בו ניתן להתבונן על היבטים מגוונים של הוראת המתמטיקה.

רשימת מקורות

רן, ע. (2016). רפלקציה: חשיבה מהרהרת ומערערת בחינוך. ל' יוספסברג בן יהושע (עורכת). ת"א: הוצאת מכון מופ"ת. אוחזר מ: http://library.macam.ac.il/study/pdf_files/d12284.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Chazan, D., Herbst, P., & Clark, L. (2016). Research on the teaching of mathematics: A call to theorize the role of society and schooling in mathematics instruction. In D. H. Gitomer & C. A. Bell (Eds.), *Handbook of Research on Teaching* (pp.1039-1097). Washington, DC: American Educational Research Association.

Karsenty, R., & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(5), 433-455.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. NY: Routledge.

האם התנסות של מורים למתמטיקה כמעצבי פרק בספר לימוד דיגיטלי, תורמת להתפתחותם וצמיחתם המקצועית?

אוסאמה סוידאן, אוניברסיטת בן גוריון בנגב
אסמעיל אלמחדי, אוניברסיטת בן גוריון בנגב

האינטראקציה בין מורים למשאבי הוראה בכלל ומשאבים דיגיטליים בפרט, נמצאת במרכז המחקר בחינוך המתמטי (Fan, et al .2018). בשנים האחרונות מתגברים הדרישות לאמץ משאבי הוראה בדגש על חדשנות, בעקבות כך, מורים בבתי הספר התחילו להשתמש בספר לימוד דיגיטלי במקום ספר לימוד מודפס (Choppin & Borys, 2017; Yerushalmy, 2015). ישנו מעבר הדרגתי- מספרי לימוד מודפסים לספרי לימוד דיגיטליים. לאור השימוש הגובר בספר לימוד דיגיטלי עולות שאלות כגון: כיצד ניתן להיעזר בספר לימוד דיגיטלי על מנת להשביח את איכות הוראת המתמטיקה? שכן על מנת לנצל את הספר הדיגיטלי רצוי שתהיה למורים יותר אוטונומיה בעיצוב התכנים הלימודיים (Jang, YI & Shin, 2016). היום, בעידן ספר הלימוד הדיגיטלי, התאמת תוכן נהיית יותר אפשרית, ובעת האחרונה, מתגברים הטיעונים המדגישים שרצוי להציב את המורים במרכז תהליך העיצוב (Pepin, Gueudet & Trouche, 2013). כנראה, למורים לא נשאר הרבה ברירה אלא לאמץ ולהשתמש ולעצב ספרי לימוד דיגיטליים, ולכן, כדאי להיערך מבעוד מועד לקראת עיצוב ספרי לימוד דיגיטליים, כך שהתהליך יתרחש מרצון ולא מאילוץ. לאור זאת, נערך מחקר אשר התמקד בקבוצת מורים (4 מורים) המלמדים מתמטיקה בבתי הספר העל יסודי במטרה ללמוד על דרך העיצוב שלהם לפרק בספר לימוד דיגיטלי המזמן למידת חקר. המחקר נערך במסגרת השתלמות של 30 שעות. במהלך ההשתלמות המורים נחשפו והשתמשו במגוון של משאבים. ניתן להניח שתהליך שביצעו המורים, במובן של בחירת, ארגון, התאמה של משאבי הוראה לצורכי עיצוב אשר התרחש בסביבה טכנולוגית עשוי לתרום להתפתחותם וצמיחתם המקצועית. מטרת המחקר, אם כן, הינה חשיפת הזדמנויות למידה ורכישת הבנה אודות תהליך התפתחותם וצמיחתם המקצועית של המורים בעקבות התנסותם בעיצוב פרק בספר לימוד דיגיטלי.

מכאן, שאלות המחקר הן:

א. כיצד התהליך שעברו המורים במהלך ההכשרה וההתנסות שלהם כמעצבים פרק בספר לימוד דיגיטלי תורם להתפתחותם וצמיחתם המקצועית?

ב. האם ניתן לקדם צמיחה מקצועית של מורים על ידי מתן ההזדמנות להם לעסוק בפועל בעיצוב משימות בסביבה טכנולוגית?.

צמיחה מקצועית של מורים

צמיחה מקצועית הינה תהליך שינוי של מורים אשר ממשיכים ליישם את מה שלמדו במסגרת ההשתלמות גם לטווח הארוך במהלך ההוראה שלהם בבית הספר. הדבר עשוי להתבטא בכך: המורה עובר שינוי באחד מארבעת מרחבי שינוי: חיצוני, אישי, פרקטיקה והשלכות, אשר עשוי להשפיע על

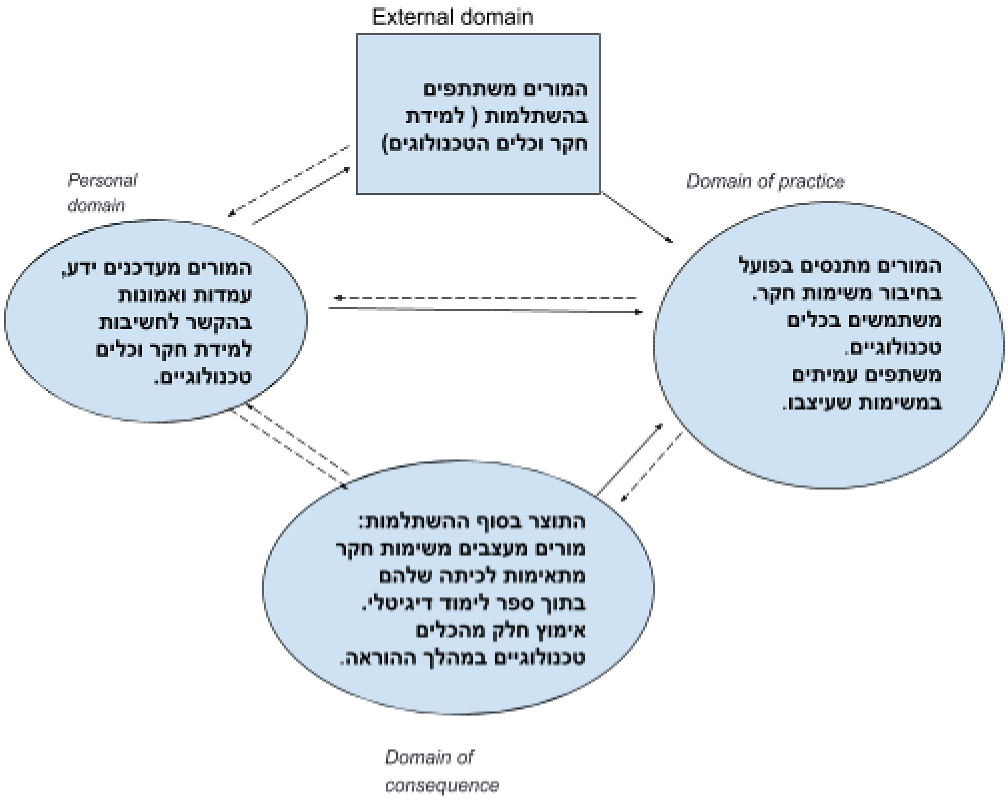
מרחבים האחרים (Hollingsworth & Clarke, 2002). השינוי מתרחש באמצעות שני תהליכים מתווכים בין המרחבים, הפעלה (Enactment) ורפלקציה (Reflection) . הפעלה הינה מה עושים המורים בידע או עמדות שלהם, ורפלקציה היא על התהליכים והתוצרים תוך כדי ההתנסות וחשיבה של המורה. במחקר זה אנו מאמצים את המודל המתואר כדי לעקוב אחר התפתחותם וצמיחתם המקצועית של מורים בהקשר של שינוי שעברו בארבעת מרחבי שינוי הבאים: חיצוני, אישי, פרקטיקה והשלכות (Hollingsworth & Clarke ,2002).

מתודולוגיה

המחקר בוצע בשיטת מחקר איכותני בגישת חקר מקרה שהתמקד בארבעה מורים אשר השתתפו בהשתלמות ייחודית שתוכננה על ידי החוקרים, המחקר נערך במשך שני חודשים ובוצע במסגרת השתלמות של 30 שעות ומטרתה הייתה להכשיר את המורים בשני תחומים: למידת חקר וכלים טכנולוגיים (Geogebra, Goformative) ולאחר מכן מעקב אחר המורים כאשר הם מתנסים כמעצבי פרק בספר לימוד דיגיטלי המזמן למידת חקר., במהלך המחקר החוקרים ערכו דיונים עם המשתתפים לאורך ההשתלמות, ואספו מידע באמצעות תצפיות ותיעוד ביומן חוקר ואסיפת מסמכים ותוצרים וראיונות. הנתונים שנאספו במהלך המחקר נותחו לאור המודל הבין הקשרי לצמיחה מקצועית (Hollingsworth & Clarke, 2002)

ממצאים:

ממצאים לגבי התפתחות מקצועית וצמיחה של המורים לפי המודל הבין הקשרי לצמיחה מקצועית (Hollingsworth, 2002 & Clarke).



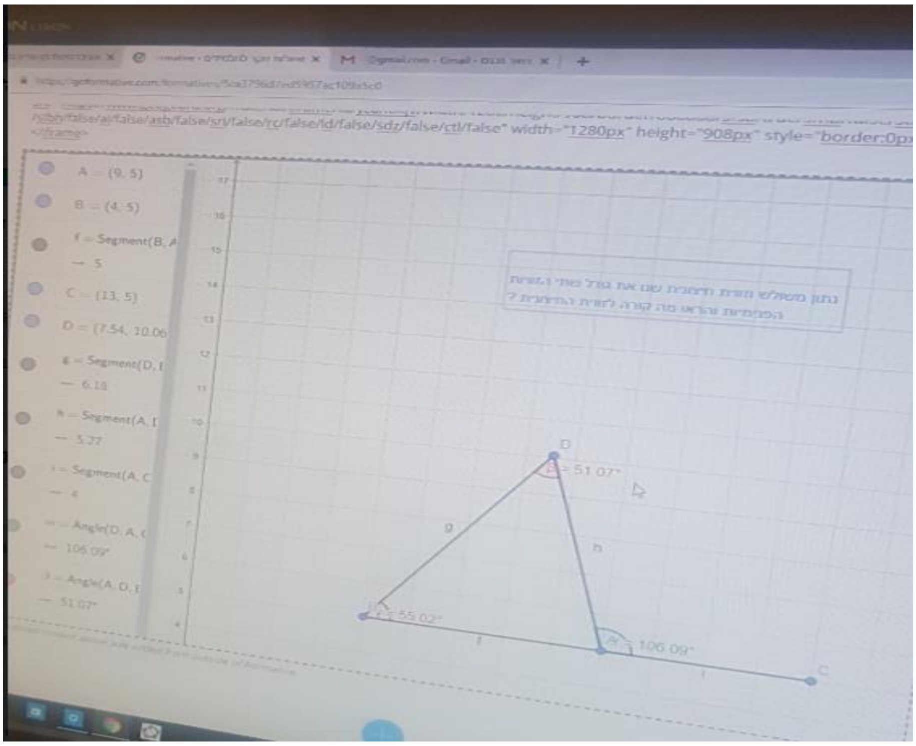
1. מרחב חיצוני- External Domain- מקור חיצוני של מידע כתוצאה מגירוי ותמיכה חיצונית, כמו השתלמות הכשרה בלמידת חקר, ובשני כלים טכנולוגיים: Geogebra, Goformative שלושה מתוך ארבעת המורים הדגישו את העניין שהיה חוסר ידע בשימוש בתוכנת Geogebra.

2. מרחב אישי- Personal Domain- המורים רכשו ידע ומיומנויות בהקשר לתוכנת Geogebra הם הביעו דעה שזה כלי תורם לתהליך הוראת המתמטיקה. שינוי נוסף בהקשר לשינוי באמונות לגבי ספר לימוד דיגיטלי, בעקבות החשיפה ליתרונות שלו. מ' טוענת" אני כרגע נחשפת שלספר הדיגיטלי יש יתרונות רבים".

3. מרחב הפרקטיקה -Domain of Practice- התנסות מקצועית- יישום ידע חדש, שימוש המורים בתוכנת Geogebra. כל המורים חיברו משימות חקר מתאימות לנושא מסוים באופן אינדיבידואלי וגם בזוגות, ערכו דיון וניתוח למשימות שחיברו בצורה קולקטיבית עם משתתפי המחקר.

4. מרחב ההשלכות- Domain of Consequence- שני מורים הדגישו את ההתנסות שלהם בשימוש בתוכנת Geogebra במהלך השיעורים שהעבירו בבתי הספר ואף המליצו לשאר הקבוצה לנצל את המשאב הזה. בנוסף, חלק מהם במהלך ההשתלמות הורידו את האפליקציה שלGeogebra לטאבלט האישי שלהם, והדריכו אחד את השני. הופעת משימות החקר בספר לימוד דיגיטלי הינו תהליך שבו המורים בחרו בסט של משאבים, ומשתפים אותה עם עמיתים ואז מציגים אותה לתלמידים, דוגמה לכך כפי המתואר באיור 1:

איור 1: משימה שעיצב המורה ע' אשר הופיעה בפלטפורמה Goformative.



דיון:

שימוש המורים במשאבים הכולל בחירה, עריכה, התאמה, ועיצוב מחדש של תוכן הינו תהליך מורכב (Remillard, 2016) עם זאת, ממצאי המחקר מראים שכל ארבעת המורים התנסו בחיפוש ובחירה של משאבי הוראה שונים לצורך עיצוב משימות חקר המתאימות לרמת הכיתה שהם מלמדים. סביר להניח שניצול יעיל של משאבים עשוי להשפיע על הפרקטיקה של המורים גם בטווח הארוך. בהתחשב בכך שהם חיזקו את המודעות לגבי האפשרויות החדשות שהציעו הכלים טכנולוגיים, אשר אפשרו למורים להציג את משימות החקר באמצעות משאב זמין וחדשני. משאב הוראה חדש עשוי לחולל שינוי בדרכי החשיבה של המורים על הוראת המתמטיקה וכיצד ללמוד אותה (Remillard, 2016). במרחב הפרקטיקה כל המורים התנסו בעיצוב המשימות והציגו אותן בפני שאר משתתפי המחקר דבר שהתאפשר באמצעות התהליך המתווך הפעלה בין מרחב אישי ומרחב הפרקטיקה. השינוי במרחב ההשלכות בא לידי ביטוי בכך שכל המורים עיצבו משימות חקר אשר הופיעו בפלטפורמה ספר הלימוד הדיגיטלי (Goformative). מכאן, אנו משערים ששינוי במרחב ההשלכות עשוי להמשיך לטווח הארוך, בהסתמך על כך שמעורבות המורים בעיצוב עשוי להשפיע באופן חיובי על היישום בהמשך (Kenny & McDaniel, 2011). כנראה ישנו זיקה בין המידה בה מורים מעצבים משימות מכוונות מטרה, לבין ההכרה במידת השפעת המשאבים על הפרקטיקה שלהם.

התנסות המורים במהלך ההשתלמות לאורך זמן, תמכה וחזקה את ניסיון אישי שלהם, דבר העשוי להשפיע באופן חיובי על מרחב ההשלכות. בעקבות כך כל המורים הביע רצון להשתמש יותר בתוכנה Geogebra ואף לשלב יותר שאלות חקר במהלך ההוראה. מכיוון שהתוצרים של המורים בסוף ההשתלמות, התאפיינו בכך שהן משימות מתאימות לרמת הכיתה שלהם, סביר להניח, שהן נועדו למטרת שימוש עתידי. בנוסף, המשאבים הטכנולוגיים היוו עבור המורים כהזדמנות לקידום מטרות חינוכיות וחדשנות ושינוי.

לסיכום, המחקר עסק בקבוצה של ארבעה מורים אשר השתתפו מיוזמתם והתעניינו בהתפתחותם המקצועית. שילוב המורים כמעצבים במהלך ההשתלמות אפשר להם לתכנן ולשתף חומרי הוראה פרי עיצובם, אפשריות אלה עבור המורים הן חדשות ושונות מתהליך ההתפתחות המקצועית המוכר להם מעבר, דבר העשוי לתרום לצמיחתם המקצועית.

מקורות:

Choppin, J., & Borys, Z. (2017). Trends in the design, development, and use of digital curriculum materials. *ZDM*, *49*(5), 663-674.

Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and teacher education*, *18*(8), 947-967.

Fan, Lianghuo, Luc Trouche, Chunxia Qi, Sebastian Rezat, and Jana Visnovska. "Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources." *ICME 13* (2018).

Jang, D. H., Yi, P., & Shin, I. S. (2016). Examining the Effectiveness of Digital Textbook use on Students' Learning Outcomes in South Korea: A Meta-analysis. *The Asia-Pacific Education Researcher*, *25*(1), 57-68.

Kenny, R. F., & McDaniel, R. (2011). The role teachers' expectations and value assessments of video games play in their adopting and integrating them into their classrooms. *British Journal of Educational Technology*, *42*(2), 197-213.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teacher work and interaction: new perspectives on resource design, use and teacher collaboration. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 929-943.

Remillard, J. T. (2016). Keeping an eye on the teacher in the digital curriculum race. In M. Bates & Z. Usiskin (Eds.), *Digital curricula in School Mathematics* (pp. 195–204). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Yerushalmy, M. (2015). E-textbooks for mathematical guided inquiry: Design of tasks and task sequences. In *Task Design In Mathematics Education* (pp. 229-247). Springer International Publishing.

מה מורים לומדים על "מה זה מתמטיקה" בקורסי מתמטיקה אקדמיים? איך ידע זה תורם לעבודתם?

אנה הופמן, מכון ויצמן למדע
רוחמה אבן, מכון ויצמן למדע

מטרת המחקר

ללמוד על: (1) התרומה והרלוונטיות של לימודי מתמטיקה אקדמיים, הניתנים על ידי מתמטיקאים, לידע של מורים למתמטיקה בבית הספר העל-יסודי על "מה זה מתמטיקה", ו-(2) איך ידע זה תורם לעבודתם.

רקע

במדינות רבות הכשרת מורים למתמטיקה בבית הספר העל-יסודי כוללת מרכיב נכבד של קורסים אקדמיים במתמטיקה, הניתנים על ידי מתמטיקאים. זאת מתוך הנחה שלימודים אלה תורמים לידע של המורים, ובכך לאיכות ההוראה שלהם. מהספרות עולה, כי ללימודי מתמטיקה אקדמיים יש פוטנציאל לתרום לידע של מורים על "מה זה מתמטיקה" (Beswick, 2012; Even, 2011; Murray, Baldinger, Wasserman, Broderick, & White, 2017; Zazkis & Leikin, 2010). עם זאת, לספרות הקיימת כמה מגבלות. ראשית, חסרה מסגרת מושגית שמתארת ידע של מורים על "מה זה מתמטיקה" – קיימות תשובות מגוונות לשאלה מה מורים צריכים לדעת על המתמטיקה, הנשענות, בין השאר, על גישות פילוסופיות שונות (Leder, Pehkonen, & Törner, 2002). שנית, המחקר הקיים לא קושר בצורה ברורה בין לימודי מתמטיקה אקדמיים ובין שינויים בתפיסות של מורים על המתמטיקה – המורים שהשתתפו במחקרים למדו בתכניות אקדמיות מגוונות ולא נבדק מה המרצים בקורסים השונים רצו ללמד על המתמטיקה. שלישית, כמעט ולא נבדקה תרומה של לימודי מתמטיקה אקדמית, לא רק לידע, כי אם להוראה בפועל. מחקר זה נותן מענה לבעייתיות הקיימת בספרות.

נקודת המוצא למחקר זה היא ממצאי מחקר (Hoffmann & Even, 2018) שבדק מה מתמטיקאים המלמדים קורסים אקדמיים למורים למתמטיקה בבית הספר העל-יסודי, היו רוצים ללמד מורים על המתמטיקה. נמצא, שהמתמטיקאים היו רוצים להרחיב, להעמיק ולהעשיר את הידע של מורים בשלושה היבטים מרכזיים: (1) מהות המתמטיקה, (2) עשיית מתמטיקה, ו-(3) הערך של המתמטיקה. בכל אחד מהיבטים אלה נמצאו 2-4 נושאים, שמהם בנינו מסגרת מושגית. במחקר הנוכחי התמקדנו בהיבט *מהות המתמטיקה*, העוסק במענה לשאלה: "*מה זה תחום הדעת מתמטיקה?*" היבט זה כולל ארבעה נושאים: א) רחב ומגוון, ב) חי ומתפתח, ג) רוויי בקשרים, ו-ד) בעל מבנה דדוקטיבי. במחקר הנוכחי התמקדנו במורים שהשתתפו באותה התכנית כמו המתמטיקאים שרואיינו. שאלת המחקר היא: מה מורים למתמטיקה בבית הספר העל-יסודי, אשר השתתפו בקורסי מתמטיקה אקדמיים למדו על "מה זה מתמטיקה", ומהי התרומה של ידע זה לעבודתם כמורים?

מתודולוגיה

נערכו ראיונות עם 11 מורים בבתי ספר על-יסודיים, שסיימו בהצלחה תכנית לתואר שני בחינוך מתמטי (MSc) הכוללת, בין השאר, תשעה קורסי מתמטיקה אקדמיים מתקדמים, שלימדו מתמטיקאים. מטרת הריאיון הייתה לברר מה המורים למדו על המתמטיקה במהלך לימודי המתמטיקה האקדמיים, ואיך, לדעתם, ידע זה תרם להוראה שלהם.

הראיונות תוכתבו ונותחו בשיטה של ניתוח תוכן (Hsieh & Shannon, 2005). ראשית, סומנו קטעי טקסט שהתייחסו לתרומת לימודי המתמטיקה האקדמיים לידע על המתמטיקה ולשינויים הקשורים בהוראה. הקטעים קודדו לפי המסגרת המושגית, עם אפשרות להוספת היבטים ונושאים במידת הצורך. הניתוח היה איטרטיבי והשוואתי, וכלל שיפוט עמיתים. הדגש שניתן לקטגוריה מסוימת נקבע, בנוסף לניתוח איכותני של תוכן הטקסט, על ידי ספירת המילים שקודדו להיבטים ולנושאים השונים, וחישוב, בכל ראיון, של החלק היחסי של מספר המילים בכל קטגוריה (Morgan, 1993).

ממצאים

כמחצית מהמילים בתכתוב (22,776 מתוך 48,709) הופיעו בקטעי טקסט שעסקו בתרומת לימודי מתמטיקה אקדמיים לידע על המתמטיקה ולתרומת ידע זה להוראה. 40% ממלל זה קודד בהקשר של ההיבט *מהות המתמטיקה*, שבו מתמקד דיווח זה. כל ארבעת הנושאים בהיבט זה הוזכרו בראיונות, ולא הועלו נושאים אחרים. טבלה 1 מציגה,

לכל ראיון, את מספר ואחוז המילים (מתוך המלל שקודד), שנספרו לכל אחד מארבעת הנושאים של *מהות המתמטיקה* ובסה"כ להיבט זה. רקע כהה מסמן שהדיווח כלל, בנוסף לתרומה לידע, גם שינויים הקשורים בהוראה.

טבלה 1: מספר (ואחוז) המילים בנושאים השונים של ההיבט *מהות המתמטיקה*

מורה	רחב ומגוון	חי ומתפתח	רווי בקשרים	בעל מבנה דדוקטיבי	סה״כ מהות המתמטיקה	סה״כ מלל מקודד (100%)
א	-	(48%)567	-	(3%)31	(51%)598	1,175
ב	(16%)325	(18%)368	(3%)58	(4%)93	(41%)844	2,073
ג	-	(7%)203	(25%)700	-	(32%)903	2,761
ד	-	-	-	-	-	336
ה	-	(3%) 116	(14%)575	-	(17%)691	4,041
ו	(14%)110	-	-	(42%)338	(56%)448	800
ז	(17%)312	-	-	-	(17%)312	1,794
ח	(14%)135	-	(55%) 546	-	(69%)681	991
ט	-	(9%)229	(21%)523	(26%)648	(56%)1400	2,529
י	(20%)484	(9%)214	(8%)186	-	(37%)884	2,395
כ	(35%)1,342	(8%)317	(11%)443	(8%)294	(62%)2,396	3,881
סה״כ					(40%)9,086	22,776

כמחצית מהמרואיינים (חמישה) הקדישו ל*מהות המתמטיקה* למעלה ממחצית הטקסט שהתמקד בידע על המתמטיקה, בעוד שמורה אחד (ד') לא התייחס כלל להיבט זה. מורים שונים התייחסו לנושאים שונים, למספר שונה של נושאים, ובמידה שונה של דגש. לדוגמה, מורה כ׳ התייחסה לכל ארבעת הנושאים בהיבט *מהות המתמטיקה*, כאשר הדגש הרב ביותר ניתן לנושא *רחב ומגוון* בעוד ששאר הנושאים זכו להתייחסות מועטה. לעומתה, מורה ו׳ התייחסה לשני נושאים בלבד, כאשר הדגש הרב ביותר ניתן לנושא *בעל מבנה דדוקטיבי* לעומת התייחסות מועטה לנושא *רחב ומגוון*. עם זאת, לכל אחד מארבעת הנושאים התייחסו מספר דומה של מורים (5-7). להלן מאפייני התרומה עליה דיווחו המורים בכל נושא.

רחב ומגוון

שישה מורים התייחסו לנושא זה, כאשר בעבור שלושה מורים (ז',י',כ') היה זה הנושא העיקרי שאליו התייחסו בהיבט *מהות המתמטיקה*, ומורה נוסף (ב') נתן לו דגש רב, בדומה לדגש שנתן לנושא *חי ומתפתח*. מהראיונות עלה שהמורים למדו שהמתמטיקה הרבה יותר רחבה ומגוונת ממה שהם חשבו בעבר; וכי המתמטיקה שהם מכירים היא רק קצה הקרחון של הידע המתמטי הקיים, הן מבחינת מגוון התחומים והנושאים והן מבחינת כמות הדברים שיודעים או חוקרים במתמטיקה. חמישה מהמורים דיווחו כי ההבנה החדשה גרמה לשינוי בדרך ההוראה שלהם, ושהם משתדלים לפתוח צוהר לתלמידים לשאלות מתמטיות ותחומי מחקר מתמטיים שנושקים לתכנים הנלמדים בבית הספר.

חי ומתפתח

שבעה מורים התייחסו לנושא זה, כאשר שני מורים (א',ב') הדגישו אותו במיוחד; אחד מהם (ב') בדגש דומה לזה שנתן לנושא *רחב ומגוון*. המורים דיווחו שהם למדו כיצד ומדוע המתמטיקה של ימינו התפתחה, ושהמתמטיקה הוא תחום מדעי שנחקר באופן אינטנסיבי גם היום. למשל, ״זה מאוד משמעותי איך המתמטיקה התפתחה... יש משהו בתפיסה הזאת שהוא מסדר לי את הראש... אני מצליחה להבין הרבה יותר עמוק״ (מורה ב'). שישה מהמורים דיווחו על תרומה להוראה בנושא זה, וסיפרו שהחלו להציג בפני התלמידים את הרקע להתפתחות הנושאים המתמטיים הנלמדים כדי לא ״להנחית״ דברים על התלמידים ולהעמיק את ההבנה שלהם.

רווי בקשרים

שבעה מורים התייחסו לנושא זה, כאשר בעבור שלושה מורים (ג',ה',ח') היה זה הנושא העיקרי, ומורה נוסף (ט') נתן לו דגש רב, בדומה לדגש שנתן לנושא *בעל מבנה דדוקטיבי*. המורים דיווחו על תרומה להבנתם באשר לקיומם וחשיבותם של קשרים בין תחומים מתמטיים שונים ובין נושאים מתמטיים שונים בתוך אותו תחום. חמישה מהמורים דיווחו על תרומה להוראה, וסיפרו שהם מחפשים קשרים בין נושאים שונים בתכנית הלימודים, ושהם שואפים להציג מושגים מתמטיים בהקשרים שונים. למשל: "*כשאני מלמדת משהו אני מנסה לקשור אותו לקודם ולאחר כך ולתחומים אחרים*" (מורה ג').

בעל מבנה דדוקטיבי

חמישה מורים התייחסו לנושא זה, כאשר שני מורים (ו',ט') הדגישו אותו במיוחד; אחד מהם בדומה לדגש שנתן לנושא *רווי בקשרים*. המורים דיווחו על תרומה לידע שלהם אודות המבנה הדדוקטיבי של המתמטיקה, ועל הבנה טובה יותר באשר לתפקידם וחשיבותם של אקסיומות, הגדרות והוכחות. שלושה מהמורים דיווחו על תרומה להוראה, וסיפרו שכיום הם מדברים באופן מפורש עם התלמידים אודות תפקידם וחשיבותם של אלמנטים אלה במתמטיקה.

לסיום

מהממצאים עולה שללימודי מתמטיקה אקדמיים יש פוטנציאל לתרום הן לידע של מורים בבית הספר העל-יסודי והן להוראה בפועל. עם זאת, המחקר מראה גם, כי מורים שונים מעשירים את הידע שלהם בנושאים שונים הקשורים להיבט *מהות המתמטיקה* והתרומה להוראה אצל מורים שונים גם היא מגוונת. לממצאים אלה חשיבות בתכנון הכשרת והשתלמויות מורים ובאפיון והמשגה של דרכי הוראת המתמטיקה.

רשימת מקורות

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 127–147.

Even, R. (2011). The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: Practitioners' views. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43*(6–7), 941–950.

Hoffmann, A., & Even, R. (2018). What do mathematicians wish to teach teachers in secondary school about mathematics? *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 99–107. Umea, Sweden.

Hsieh, H.-F., & Shannon, S. E. (2005). Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research*, *15*(9), 1277–1288. https://doi.org/10.1177/1049732305276687

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.). (2002). Part 2: Teachers' beliefs. In *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 127–246). Springer Netherlands.

Morgan, D. L. (1993). Qualitative content analysis: A guide to paths not taken. *Qualitative Health Research*, *3*(1), 112–121.

Murray, E., Baldinger, E., Wasserman, N., Broderick, S., & White, D. (2017). Connecting Advanced and Secondary Mathematics. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, *1*.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 263–281. https://doi.org/10.1080/10986061003786349

שיעורי מתמטיקה של מתרגלים ושינויים שחלו בהם במהלך הוראה תוך כדי הוראה בבית ספר וירטואלי

שולה וייסמן, אוניברסיטת חיפה, האקדמית גורדון
רוזה לייקין, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

במהלך שני העשורים האחרונים התרבו בתי הספר הווירטואליים בעולם. לבית ספר כזה יש פוטנציאל ליצירת הזדמנויות שוות עבור תלמידי הפריפריה, כמו לתלמידים העירוניים; ולצמצום ההבדלים באיכות המורים, בהיצע של המקצועות הנלמדים ובהכנת התלמידים ללימודים גבוהים (Barbour & Reeves, 2009; Cavanaugh, 2001). בשנת 2012 הוקם בישראל בית ספר וירטואלי המנוהל על ידי המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח[1]) המיועד לתלמידים מהפריפריה, בעלי פוטנציאל גבוה אשר בבית ספרם אין אפשרות ללמוד מתמטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד. צוות בית הספר כולל מפתחים של חומרי לימוד, מורים ומתרגלים. המתרגלים הינם סטודנטים מצטיינים שאין להם ידע או ניסיון בהוראה ובפדגוגיה.

המחקר התבצע בבית הספר הווירטואלי של מטח שבו תלמידים ממקומות שונים בארץ לומדים מתמטיקה ופיסיקה בסביבת למידה וירטואלית-סינכרונית[2]. ההתמקדות הייתה בשיעורי התרגול, ובמסגרתם נבדקו השיעורים של המתרגלים, דרכי ההוראה שלהם והשינויים שהתרחשו לאורך השנה בשיעורים שלהם בסביבת הלמידה הווירטואלית. במחקר התייחסנו למורכבות היחסים בין התפיסות של המתרגלים לבין הניסיון המעשי בהוראה וניתחנו את ההתפתחות של המתרגלים בתקופה שבה הם מלמדים (craft mode).

המחקר הוא ייחודי מכיוון שהתבצעה בו התבוננות מעמיקה בעבודת המתרגלים הממלאים תפקיד שאינו קיים בדרך כלל בשיעורי המתמטיקה בבתי הספר, ושלא הוכשרו באופן פורמלי להוראת מתמטיקה.

המחקר תוכנן כדי לנסות למצוא מענה לסוגיה שלא נחקרה בעבר: התפתחות מקצועית של מתרגלים למתמטיקה בסביבה וירטואלית מההיבטים של שינוי בתפיסותיהם, שינוי בפרקטיקה בשיעורים שלהם והקשר בין תפיסותיהם המוצהרות לבין פרקטיקת ההוראה שלהם.

מטרת המחקר

מטרת המחקר היא לנתח את ההוראה בכיתה בבית ספר וירטואלי כסביבה להתפתחות המומחיות של מתרגלים למתמטיקה. החלק המוצג יתמקד בשיעורים של המתרגלים ובשינויים שחלו בהם תוך כדי הוראה.

---

[1] המרכז לטכנולוגיה חינוכית - חברה לתועלת הציבור הפועלת לקידום מערכת החינוך בישראל ומתמקדת בשילוב טכנולוגיה ופדגוגיה.

[2] שיעור וירטואלי-סינכרוני הוא שיעור שבו מתקיימת אינטראקציה מקוונת בין המורה לבין התלמידים באמצעות רשת האינטרנט באותו זמן.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו שלושה מתרגלים המלמדים מתמטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד בכיתות י' וי"א בסביבה וירטואלית. המתרגלים הם סטודנטים מצטיינים במקצועות עתירי מתמטיקה שנבחרו בקפידה והם חסרי השכלה רשמית בהוראה.

המחקר התבצע בפרדיגמה איכותנית על פי התיאוריה המעוגנת בשדה (Glaser & Strauss, 1967). איסוף הנתונים נעשה על פי תוצרי הניתוח ותוצאותיו, ותוצרי הניתוח כיוונו את המשך איסוף הנתונים. ניתוח הנתונים כלל שילוב של ניתוח אינדוקטיבי וניתוח מכוון (Patton, 2002).

על מנת לאמת את הממצאים נעשה שימוש בשלושה כלי מחקר לפי שיטת הטריאנגולציה: (א) ראיונות אישיים עם המתרגלים; (ב) תצפיות בשיעורי המורים ובשיעורי המתרגלים; (ג) תצפיות במפגשי פנים אל פנים ובמפגשים וירטואליים בין המתרגלים לבין המורים ובמפגשי הצוות של בית הספר. הראיונות והשיעורים נותחו בעזרת מודלים שנבנו.

ניתחנו את הקונספציות של המתרגלים והשינויים שחלו בהן, השיעורים של המתרגלים והשינויים שחלו בהם והקשרים בין הקונספציות המוצהרות (בראיונות) לבין הקונספציות המופעלות (כפי שבאו לידי ביטוי בשיעורים).

השיעורים של המתרגלים והשינויים בהוראה נותחו ברמת המקרו וברמת המיקרו (Leikin & Rota, 2006; Robinson & Leikin, 2012). מאפייני השיעורים של המתרגלים והשינויים שחלו בהם נבדקו בהתייחס למבנה השיעורים (ניתוח מקרו) ולשאלות שנשאלו בשיעורים (ניתוח מיקרו). השיעורים נבחרו על סמך צפייה בשלוש סדרות של שיעורים במהלך שלוש תקופות של השנה - תחילת השנה, אמצע השנה ולקראת סוף השנה.

ממצאים ודיון

שני הממצאים העיקריים של מחקר זה הם שני המודלים שפותחו על בסיס הניתוח: מודל לניתוח קונספציות ומודל לניתוח השיעורים.

הקונספציות נבחנו משני היבטים: מטרות הוראת המתמטיקה והאמצעים להשגת מטרות אלו. ניתוח השיעורים התבצע בשני היבטים - ניתוח מקרו שבחן את ארגון השיעור וניתוח מיקרו שהתמקד בסוגי שאלות שנשאלו בשיעור על ידי המתרגלים ועל ידי התלמידים.

מן הממצאים מסתמן כי אצל כל אחד מהמתרגלים חל שינוי המרמז על למידה תוך כדי הוראה.

השינויים התבטאו בשינוי בתפיסת התפקיד, בהוספת מטרות ובשימוש במגוון רחב יותר של אמצעים להשגתן.

בשיעורים נמצא שבקרב שלושת המתרגלים השאלות הנפוצות ביותר היו, מצד אחד, שאלות ניהול שכוונו בעיקר לפיצוי על היעדר קשר העין עם התלמידים; ומצד שני, שאלות פיגומים שמטרתן לסייע לתלמידים להתקדם בפתרון. לעומת זאת, שאלות הבנה ושאלות הרחבה שיכולות להיחשב שאלות "מסדר גבוה" נשאלו בתדירות נמוכה. נמצא כי בכל השיעורים של כל המתרגלים רוב השאלות ששאלו התלמידים היו מסוג שאלות אימות, ורק לעיתים נדירות התלמידים שאלו גם שאלות הבנה או שאלות הרחבה.

התייחסות לסביבת ההוראה הווירטואלית

התייחסות המתרגלים להתמודדות עם הוראה בסביבה וירטואלית הייתה דואלית. מצד אחד הם ציינו את הסביבה כמיוחדת ומאתגרת ומנו את יתרונותיה (נגישות, גמישות, מתן הזדמנות, ייחודיות קבוצת התרגול); ומצד שני דיברו על הקשיים (בדידות התלמיד, היעדר קשר עין עם התלמידים).התייחסותם לסביבה הווירטואלית התבטאה בשיעורים בשימוש בכלים להתמודדות עם היעדר קשר עין עם התלמידים בעיקר בשאלות הניהול ששימשו עבורם בקר לנוכחות התלמידים בשיעור הן מבחינת הימצאותם ליד המחשב והן לווידוא שהם עוקבים אחר הנעשה בשיעור. השימוש בטכנולוגיה לא בא לידי מימוש בשימוש בתוכנות.

לסיכום

שיעורי התרגול מציבים בפני המתרגלים משימה מורכבת ומאתגרת. בשיעורים אלו המתרגלים נדרשים להביא לידי ביטוי מגוון רחב של מיומנויות, סוגי ידע ואמונות בנוגע להוראת המתמטיקה. תוצאות המחקר יכולות לשמש בסיס להכשרה מקצועית עתידית של מתרגלים לפני תחילת עבודתם שתוכל לגשר על הפער בין הכוונה ברמה המוצהרת לבין היישום הממשי בסביבת הלמידה.

כיום, עם התפתחות טכנולוגיות המידע והתקשוב, והכנסתם למערכת החינוך צפויה להיות למחקר תרומה רבה לתחום שמתרחב עם השנים.

רשימת מקורות

Barbour, M. K., & Reeves, T. C. (2009). The reality of virtual schools: *A review of the literature. Computers and Education, 52*(2), 402–416.

Cavanaugh, C. (2001). The effectiveness of interactive distance education technologies in K-12 learning: A meta-analysis. *International Journal of Educational Telecommunications, 7*(1), 73–88.

Glaser. B., & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory. Chicago, IL: Aldine.

Leikin, R., & Rota, S. (2006). A case study on the development of teacher's proficiency through teaching. *Mathematics Education Research Journal*, *18(3)*, 44–68.

Patton, M. Q. (2002). Qualitative research and evaluation methods. Thousand Oaks, CA: Sage.

Robinson, N., & Leikin, R. (2012). One teacher, two lessons: The lesson study process. *International Journal of Science and Mathematics Education, 1*(1), 139-161.

מה ניתן ללמוד על דימוי מושג האינסוף מיצירות מתכשרים להוראת מתמטיקה בבתי הספר היסודיים

ליאורה נוטוב, האקדמית גורדון, חיפה
אריאלה לונברג, האקדמית גורדון, חיפה

מבוא וסקירת ספרות

אינסוף הוא אחד המושגים החשובים במתמטיקה המאתגר את האנושות מבחינה קוגניטיבית כמו גם פילוסופית (Kolar & Čadež, 2012) מכיוון שהוא סותר את החוויה הקיומית שלנו הנתפסת כסופית מול תפיסתנו את האינסוף (Falk, 2010). במילים אחרות, חסרה לנו התנסות ממשית עם אינסוף בחיי היומיום. עם זאת, אינסוף הוא אחד ממושגי הליבה שתלמידים צריכים להתחיל להבנות כבר בבית הספר היסודי בסיוע מוריהם. על מנת ליצור חוויות חינוכיות ראויות עבור תלמידיהם, על המורים לפתח תחילה הבנה מעמיקה של מושג זה בעצמם. כלומר, דימוי המושג של אינסוף צריך להיות תואם להגדרת המושג (Tall & Vinner, 1981).

בהקשר לתחום המספרי, קיימת הבחנה בין אינסוף פוטנציאלי לאינסוף בפועל. אינסוף פוטנציאלי מייצג תהליך שנמשך לנצח, כמו ספירת מספרים טבעיים; ואילו אינסוף בפועל מייצג את הקרדינליות של קבוצות מספרים אינסופיות (Tall, 1981). ספציפית, אינסוף בפועל מייצג אובייקט, למשל את קבוצת המספרים הטבעיים, אינו מושג אינטואיטיבי והבנתו מורכבת יותר בהשוואה לאינסוף פוטנציאלי (Hannula et al., 2006). להגדרות אלה של אינסוף, פולק (Falk, 2010) מוסיפה הגדרה נוספת בה אינסוף מוגדר כפער בין קבוצה סופית לקבוצה אינסופית. לטענתה, יש כאלה שתופסים סדרה אינסופית (אינסוף בפועל) ועדיין להאמין שהיא גדולה רק מעט מסדרה סופית מאוד גדולה. בעלי תפיסה יציבה של אינסוף בפועל מבינים שהמרחק בין סדרה אינסופית לבין כל קבוצה סופית הוא אינסופי.

הבנת מושג אינסוף בקרב מתכשרים להוראת מתמטיקה ומורים בפועל עמדה במוקד מחקרים רבים שגילו שרוב המשתתפים מחזיקים בידע חלקי המסתכם בציטוט של כללים ומתן הסברים מעורפלים לאותם כללים (Kuntze, et al., 2011); נותנים פירוש של האינסוף כתהליך רציף ומתמשך (כלומר זיהוי של אינסוף פוטנציאלי); מתמודדים עם תפיסות שגויות (למשל Kattou et al., 2009). לא מצאנו מחקרים שמטרתם אפיון הדימוי האינטואיטיבי של האינסוף שנעשה ללא הקשר מתמטי כלשהו ובכך, תרומת מחקר זה לגוף הידע בתחום.

מטרות המחקר: היו אפיון דימויי המושג האינטואיטיבי של מושג האינסוף והרחבת הידע אודות תפיסות של המושג על ידי יצירת אמנות מקורית.

שיטת המחקר: השיטה התיאורית הנהוגה במחקרים חינוכיים, שאפשרה לחקור את איכות המשגת האינסוף בקרב הסטודנטים (Giorgi, 2012).

אוכלוסיית המחקר: ארבעים ושבעה מתכשרים להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי, שנה ב'

הנתונים: 47 עבודות אמנות בנושא אינסוף שנעשו במסגרת קורס אסינכרוני מקוון "כשמתמטיקה פוגשת אמנות" שבו היו שישה נושאים שונים של למידה ויישום של מושגים מתמטיים על ידי יצירה והצגה של יצירות אמנות.

ניתוח הנתונים התבסס על שיטתו של Imdahl שתוארה על ידי כריסטמן (Christmann, 2008). לשיטה זו שלושה שלבים: (1) רישום שיטתי של כל פרט בתמונה; (2) פירוש התמונה על פי ידע שמגיע ממקורות נוספים - תמונות אחרות דומות, ידע על הפקת התמונה והשימוש בה. במקרה הנוכחי, ידע נוסף הגיע משמות והסברים שהסטודנטים נתנו ליצירותיהם ומהידע שלנו את תכנית הלימודים האקדמית והפרה-אקדמית שלהם

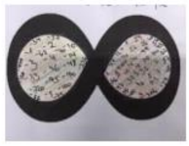
; (3) פרשנות לתמונה.

תוצאות ודיון

יצירות אמנות אלה מייצגות את התפיסות האינטואיטיביות של האינסוף בקרב הסטודנטים מאחר שלא ניתנה להם כל הנחייה לקשר אותו לתחום מתמטי כלשהו, מספרי או גיאומטרי. עבודות האמנות יצרו פסיפס של דימויי מושג אינסוף בתחום המספרי (34% מהיצירות), והרחיבו אותו מעבר לתחום זה (66% מהיצירות) על ידי שיוך האינסוף לתופעות

טבע, רגשות, חושים והיבטים פילוסופיים. נמצאו גם דימויים המצביעים על תפיסות שגויות של הסטודנטים. עבודות האמנות יוצרות ארבע קטגוריות: דימוי מושג עם תוכן מתמטי נכון, עם תוכן מתמטי לא נכון, עם תוכן לא-מתמטי נכון ועם תוכן לא-מתמטי לא נכון.

תוכן מתמטי נכון (13 יצירות): יצירות אמנות של תשעה סטודנטים ביטאו דימוי מושג של אינסוף פוטנציאלי כסדרה אינסופית; כקבוצת מספרים שלמים לא שליליים; כהשתקפות בין שני מראות; כדרך אינסופית מנקודת התחלה (אפס) לאינסוף (מעניין לציין שבכל היצירות של הסטודנטים האפס הוא זה ששואף לאינסוף). תוצאה זו תואמת את ספרות המחקר בה נמצא שאצל רוב הסטודנטים דימוי המושג אינסוף הוא של אינסוף פוטנציאלי (למשל Kolar & Čadež, 2012). רק עבודה אחת יכולה להיחשב כאינסוף בפועל: היא מתארת את קבוצת המספרים השלמים בתוך סמל האינסוף (איור 1א). כלומר, ביצירה זו קבוצת המספרים מתוארת כאובייקט ולא כתהליך. שלוש יצירות נוספות ביטאו דימוי מושג של הפער הבלתי ניתן לגישור, במקרה זה בין אינסוף לאפס ולא בין אינסוף לקבוצה סופית (Falk, 2010).



א. אינסוף מספרים

ב. אינסוף ציורים בשלג

ג. העולם האינסופי

ד. לכל אפס יש את האפס שלו לצעוד איתו לאינסוף

איור 1. עבודות האומנות של הסטודנטים

תוכן מתמטי שגוי (3 עבודות): העבודות בקטגוריה זו מייצגות תוכן מתמטי שגוי. אחת העבודות מתארת את האינסוף כקבוצה סופית - מספר אנשים. ממצא זה תואם את התוצאות המחקרים הקודמים בהם זוהה הקושי של הסטודנטים להבין קבוצות סופיות גדולות (למשל Kolar & Čadež, 2012). בשתי עבודות נוספות מתוארות תופעות שלא הוגדרו היטב: ציור בשלג ומידע, כאינסופיות (איור 1 ב). בשני המקרים, האלמנטים של הסדרה אינם מוגדרים מכיוון שחסרה מסגרת זמן: אם התהליך מתאר תמונת מצב ברגע נתון, שתי הקבוצות יהיו סופיות; לעומת זאת, אם מסגרת הזמן היא אינסופית אז בשתי הקבוצות יש מספר אינסופי של איברים.

תוכן לא-מתמטי נכון (23 יצירות): העבודות בקטגוריה זו מייצגות את האינסוף כיקום, כאופק, כמחשבות, כראיה, כאהבה - כל אלה הם ניסיונות הסטודנטים לבטא את האינסוף באמצעות החוויות היומיומיות שלהם (איור 1ג). זה עשוי לרמז על כך שכדי להתגבר על מורכבות המושג, הסטודנטים פנו למטאפורות. על פי לקוף וג'ונסון (Lakoff & Johnson, 2003) המטאפורות עוזרות לנו להבין מושגים מופשטים באמצעות אסוציאציות מילוליות של תופעות ידועות מחיי היומיום. גם דימויים אלה של אינסוף מייצגים אינסוף פוטנציאלי והם תואמים את ממצאי המחקרים הקודמים (למשל Medina Ibarra, Romo-Vázquez & Sánchez Aguilar, 2019).

תוכן לא-מתמטי שגוי (8 יצירות): העבודות בקטגוריה זו מייצגות קשר ויזואלי בין סמל האינסוף לבין אפס או ייצוג של מספר שמונה או קומפוזיציה של שני אפסים (איור 1ד). דימויי מושג אלה יכולים לייצג את חוסר ההבנה של הסטודנטים את דרישות המשימה, את חוסר ההבנה של המושג עצמו או את הקושי שלהם לבטא את הידע שלהם באופן אמנותי.

לסיכום, תפיסות הסטודנטים את האינסוף בדרך כלל באות לידי ביטוי כאשר הם מתמודדים עם משימות מתמטיות בהקשר מסוים (Medina Ibarra et al., 2019). במחקר הנוכחי, הסטודנטים לא קבלו הנחיה לפרש או להגדיר אינסוף בהקשר מתמטי כלשהו. לפיכך, נראה שהמחקר חושף את דימויי המושג האינטואיטיביים האמתיים שיש לסטודנטים לגבי האינסוף. תוצאות המחקר הנוכחי מרחיבות את הידע שלנו אודות תפיסת הסטודנטים את מושג האינסוף שעד כה נחקר ללא שילוב של עבודות אמנות. השיטה בה בחרנו לחקור במחקר זה, יצירת עבודות אמנות מקוריות המתארות מושגים מתמטיים, טומנת בחובה פוטנציאל רב לגילוי תפיסות אמתיות של מושגיים במתמטיים מופשטים, מכיוון שמחקר זה הינו מחקר חלוץ, יש צורך במחקרים נוספים בתחום.

רשימת מקורות

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52(3)*, 215-241.

Christmann, G. B. (2008). The power of photographs of buildings in the Dresden urban discourse. towards a visual discourse analysis. *Forum: Qualitative Social Research, 9(3), Art. 11*, http://nbnresolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0803115.

Falk, R. (2010). The infinite challenge: Levels of conceiving the endlessness of numbers. *Cognition and Instruction, 28(1)*, 1-38.

Giorgi, A. (2012). The descriptive phenomenological psychological method. *Journal of Phenomenological Psychology, 43(1)*, 3-12.

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., Soro,, & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science, 4(2)*, 317-337.

Kattou, M., Michael, T., Kontoyianni, K., Christou, C., & Philippou, G. (2009). Teachers' perceptions about infinity: A process or an object? In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello, *CERME 6 (working group 10)* (pp. 1771–1780). Lyon, France: ERME.

Kolar, V. M., & Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 80(3)*, 389-412.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H. S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics – an empirical study with preservice teachers. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda, *Proceeding of CERME 7* (pp. 2717–2726)). Rzeszów, Poland: ERME.

Lakoff, G., & Johnson, M. (2003). *Metaphors we live by.* Chicago: University of Chicago press.

Medina Ibarra, L., Romo-Vázquez, A., & Sánchez Aguilar, M. (2019). Using the work of Jorge Luis Borges to identify and confront students' misconceptions about infinity. *Journal of Mathematics and the Arts, 13(1-2)*, 48-59.

Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. *Mathematics in School, 10(3)*, 30-33.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2)*, 151-169.

הוראת גיאומטריה במרחב מנקודת המבט של מורי מתמטיקה המתקשים "לראות במרחב"

מירלה וידר, מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

מבוא ומסגרת תיאורטית

כישורים מרחביים מוכרים כגורם מפתח העומד בבסיס התפתחות תיאוריות מדעיות מרכזיות המבוססות על שימוש במודלים מרחביים לעיבוד מידע ולהדמיה של תהליכים מורכבים (Tuvi-Arad & Gorski, 2007). מתוך כך, תכנית הלימודים הישראלית במתמטיקה תיכונית כוללת את נושא הגיאומטריה במרחב בכל יחידות הלימוד (3-5 יחידות), וזאת במטרה לפתח את כישוריהם המרחביים של התלמידים. כפועל יוצא, נדרשים מורים למתמטיקה בתיכון להיות בעלי כישורים מרחביים מפותחים המתאימים להוראת נושא זה. עם זאת, מחקרים בפסיכולוגיה קוגניטיבית הראו כי יכולת הוויזואליזציה המרחבית והיכולת הלוגית-מתמטית אינן בהכרח יכולות חופפות זו לזו (Gardner, 1983; Mohler, 2008; Tuvi-Arad & Gorsky, 2007). לפיכך, לעיתים אפילו מורים מנוסים ומוכשרים למתמטיקה, מעידים על קשיים בראייה המרחבית שלהם.

המורה הינו דמות מפתח בהתקדמותם הלימודית והרגשית של התלמידים בכל תחומי הלימוד, ובפרט בתחום המתמטיקה. תפקודו המקצועי של מורה למתמטיקה מסתמך לא רק על ידע מקצועי, ידע דידקטי-פדגוגי וידע קוריקולרי, אלא גם על תחושת המסוגלות העצמית ועל הדימוי העצמי המקצועי שלו כמורה (Kahle, 2008). בנדורה (Bandura, 1997) הגדיר מסוגלות עצמית בהוראה כאמונה של המורה שברשותו הכישורים הנחוצים לקידום הישגים האקדמיים של תלמידיו. חוקרים קבעו כי מסוגלות עצמית קשורה להיבטי מפתח בהוראה, כגון מידת הדיוק, השפה המקצועית הנהוגה בכיתה, מידת האחריות של המורה להישגי תלמידיו ועוד (Schunk & DiBenedetto, 2016). מתוך כך, חשוב לבחון ולהבין כיצד תופסים מורים למתמטיקה, במיוחד אלה שקשה להם הראייה המרחבית, את הוראת הגיאומטריה המרחבית.

מטרת המחקר ושאלות המחקר

מחקר זה בוחן את המציאות בשיעורי גיאומטריה במרחב באמצעות "זכוכית מגדלת", על ידי חשיפת התפיסות והרגשות של שלוש מורות למתמטיקה בתיכון המעידות על עצמן כמתקשות בראייה המרחבית שלהן, החל מחוויותיהן כתלמידות, דרך התמודדותן עם הצורך בהוראת גיאומטריה מרחבית בכיתותיהן, וכלה במידת הנכונות שלהן להיעזר בטכנולוגיה להדמיה תלת-ממדית. מחקר איכותני זה אינו יוצא מתוך הנחות ברורות, אלא מנסה לבחון, לאפיין ולגבש תובנות לגבי המציאות באמצעות ראיונות עומק, יומנים מתמטיים, תצפיות ודיווחים רפלקטיביים של המורות עצמן. בהתאם לכך, חקר מקרה זה מבקש להתמקד בשאלות המחקר הבאות:

- כיצד תופסים מורים למתמטיקה את הקושי שלהם לראות במרחב, על סמך התנסותם בנושא הגאומטריה במרחב כתלמידים?
- כיצד תופסים מורים למתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את ההוראה העכשווית שלהם בגאומטריה במרחב?
- כיצד תופסים מורים למתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את חלקם בפיתוח כישורים מרחביים אצל תלמידיהם?
- כיצד תופסים מורים למתמטיקה, המעידים על עצמם שהם מתקשים לראות במרחב, את התנהלותם בסביבת למידה המכילה אמצעי המחשה טכנולוגיים?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו שלוש מורות מנוסות למתמטיקה בתיכון, שהעידו על עצמן כי הן מתקשות בראייה מרחבית (השמות בדויים): (1) **ניצה** בעלת תואר B.Sc. במתמטיקה ומשמשת כרכזת מקצוע וכמורה למתמטיקה בתיכון בכל רמות הלימוד במשך 30 שנה; (2) **סמדר** בעלת תואר שני בחינוך-מתמטי ומלמדת מתמטיקה בתיכון בכל רמות הלימוד במשך 21 שנה. סמדר היא גם מדריכת מורים למתמטיקה; (3) **ורד** בעלת תואר ראשון בחינוך-מתמטי ומלמדת מתמטיקה בתיכון במשך 31 שנה, בעיקר ברמה הנמוכה ביותר ללימודים. ורד גם מדריכה מורים חדשים למתמטיקה לאחר הסבה מקצועית.

תוך אימוץ גישה אינדוקטיבית איכותנית, גובשו תובנות על בסיס המציאות המאפיינת את שלוש המורות הללו.

ממצאים מרכזיים

הממצאים מראים כי התפיסה העצמית של שלוש המורות כמתקשות בראייה מרחבית נעוצה בחוויות העבר שלהן כתלמידות וקשורה לתחושות עכשוויות קשות מאוד של מצוקה, אי נוחות, חרדה, פחד, לחץ, תסכול, כעס, בושה, תשישות, חוסר ביטחון, חוסר אונים, וחוסר מקצועיות בכל פעם שהן ניצבות בפני משימה הכרוכה בשימוש בגיאומטריה מרחבית. תחושות אלו עולות בקנה אחד עם תחושת המסוגלות העצמית הנמוכה ודימוי העצמי המקצועי הנמוך שמשתקף בתגובות כגון: "...זה מרגישה כאילו "יש לך את זה" או "אין לך את זה" ובעצם, אין לי שליטה על זה..." או "...אני לא חושבת שאני תורמת לפיתוח מיומנויות מרחביות אצל התלמידים שלי, כי לי עצמי יש בעיה בנושא הזה...". מתוך ההתנסות והחוויה השלילית בעברן, אין זה מפליא כי שלוש המורות פיתחו תחושת מסוגלות עצמית נמוכה כלפי הוראת הגאומטריה במרחב (Ramey-Gassert & Shroyer, 1992).

יחד עם זאת, חוסר הביטחון המוצהר של המורות בהוראת הגיאומטריה המרחבית עומד בניגוד מוחלט לתחושת המסוגלות העצמית הגבוה שלהן לגבי הוראת נושאים מתמטיים אחרים. נראה כי דווקא ניגוד זה מציב את המורות המנוסות והמקצועיים במצב בלתי אפשרי, שכן הן אינן מאמינות ביכולתן ללמד גאומטריה מרחבית באותה דרך מובנית ומעמיקה בה הן נוהגות ללמד נושאים אחרים, והן חוששות ש-"חרפתן" תיחשף בכיתה: "...בכיתה חדשה, כשאני לא יודעת ... ואני נתקעת - אבוי, אימה! בושה! אני כל כך מתוסכלת וכועסת על עצמי. זועמת! זה הורס לי את היום!". מתוך כך, מעדיפות המורות להעמיד פנים, ולהשתמש בכישוריהן האנליטיים החזקים לאימוץ טקטיקות שונות: התייחסות לנושא הגיאומטריה במרחב רק לקראת סוף שנת הלימודים, כך שההוראה כרוכה בקושי בסיסי בלבד, ניסיון "לקנות זמן" בעת מתן תשובה לשאלות, תוך העברת האחריות ל ידע לתלמידים, במיוחד לקראת סוף הנושא, ואפילו העברת האחריות להוראה לעמיתים אחרים, עד כדי התחמקות מהנושא לחלוטין.

למרות ששלוש המורות התייחסו לטכנולוגיה כאל תרופת פלא, רק סמדר אימצה למעשה את ההזדמנות ללמוד ולהטמיע כלים להדמיה תלת-מימדית בשיעור הגיאומטריה המרחבית שלה. ניצה העבירה את האחריות לתפעול ההמחשות לחוקרת שהגיעה לצפות בשיעור, ואילו ורד, לאחר שדחתה את השיעור מספר פעמים, הודתה לבסוף שהיא מרגישה לא בנוח וביטלה את השיעור המתוכנן.

דיון

המורות חשפו פער מקצועי, אינטלקטואלי ורגשי עמוק בין חוויות ההוראה שלהן בגיאומטריה מרחבית לבין חוויות ההוראה שלהן בנושאים מתמטיים אחרים. הממצאים מראים כי המורות היו עסוקות למדי עם עצמן והתמודדותן עם הקושי שלהן, ופחות עם ההבנה וההישגים של התלמידים. ממצאים אלה עולים בקנה אחד עם ממצאים המצביעים על "בריחה מאחריות" להישגי התלמידים אצל מורים בעלי מסוגלות עצמית נמוכה (Friedman & Kass, 2002).

למרות הרצון שהביעו המורות לשנות ולשפר את אופן התמודדותן עם הוראת נושא הגאומטריה במרחב, רק אחת משלוש המורות יישמה את הטכנולוגיה להמחשת תלת-מימד בכיתתה. בהתחשב בכך שאף אחת מהמורות גם לא הזכירה שימוש בטכנולוגיה בהוראת נושאים מתמטיים אחרים, עולה המחשבה כי למעשה המורות תופסות את השימוש בטכנולוגיה בגאומטריה במרחב כאמצעי לשעת חירום, כקביים או כתרופת פלא העשויה לעזור להן עזרה מקומית בהוראת הנושא הבעייתי. התנהלותן בסביבה המכילה טכנולוגיה להמחשה תלת-ממדית ככל הנראה נגזרת מתוך חרדת המחשב שלהן (Hao & Lee, 2015).

בהיבט הפרקטי, לממצאים השלכות חשובות למעצבי התוכניות לפיתוח מקצועי. רצוי שהעוסקים בהכשרת מורים למתמטיקה יפתחו מודעות לתחושת המסוגלות הנמוכה של חלק מן המורים כלפי הוראת הגאומטריה במרחב, ויכוונו את תוכניות ההכשרה לשיפור תחושה זו באמצעות התמקדות מכוונת בפיתוח יכולות מרחביות של מורים למתמטיקה, ובהקנייה של כלים מתקדמים להמחשה.

רשימת מקורות

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: Freeman.

Friedman, I. A., & Kass, E. (2002). Teacher self-efficacy: A classroom-organization conceptualization. *Teaching and teacher education*, 18(6), 675-686. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00027-6

Gardner, H. (1983). Frames of mind: The theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Kahle, D. K. B. (2008). How elementary school teachers’ mathematical self-efficacy and mathematics teaching self-efficacy relate to conceptually and procedurally oriented teaching practices (Doctoral dissertation). Ohio State University. Retrieved from: https://etd.ohiolink.edu/pg_10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1211122861

Mohler, J. L., (2008). A review of spatial ability research. *Engineering Design Graphics Journal, 72*(3), 19-30.

Ramey-Gassert, L., & Shroyer, M. G. (1992) Enhancing science teaching self-efficacy in preservice elementary teachers. *Journal of Elementary Science Education*, *4*(1), 26-34. https://doi.org/10.1007/BF03173752

Hao, Y., & Lee, K. S. (2015). Teachers’ concern about integrating Web 2.0 technologies and its relationship with teacher characteristics. *Computers in Human Behavior*, *48*, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.chb.2015.01.028

Schunk, D. H., & DiBenedetto, M. K. (2016). Self-efficacy theory in education. *Handbook of motivation at school*, *2*, 34-54.

Tuvi-Arad, I., & Gorsky, P. (2007). New visualization tools for learning molecular symmetry: A preliminary evaluation. *Chemistry Education Research and Practice, 8*(1), 61-72. https://doi.org/10.1039/B6RP90020H

בין שפה טבעית לתפיסת מושגי יחס מתמטיים (=,<,>), בקרב גננות ופרחי הוראה לגיל הרך, בהיבט מספרי וכמותי.

דינה חסידוב, תלפיות המכללה האקדמית לחינוך בחולון
בת-שבע אילני, המכללה האקדמית לחינוך חמדת הדרום

רקע

מחקר זה מתייחס להבנת המושגים המהווים חלק מהחשיבה הסימבולית. מטרת המחקר הייתה להבין כיצד פרחי הוראה וגננות בגיל הרך מבינים ומשתמשים בסמלים המתמטיים > , < ו- = כאשר משווים בין מספרים, דמויות וצורות בגדלים ובעוביים שונים.

שפה מתמטית בגיל הרך היא שפה של סמלים, מושגים, הגדרות ומשפטים. שפה זו לא מתפתחת באופן טבעי כמו השפה הטבעית של הילד, אלא צריך ללמד אותה (מרגולין ואילני, 2007). ילדים עוסקים במתמטיקה בחיי היומיום החל מלידתם. המגמה העולמית כיום היא להתייחס למתמטיקה "פורמלית" ולטפח חשיבה מתמטית מגיל צעיר, ובכך לעצב את החשיבה המתמטית העתידית של הילד, חשיבה כללית ויכולות קוגניטיביות (Sarama & Clements , 2016).

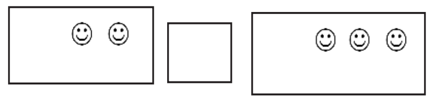
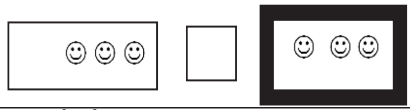
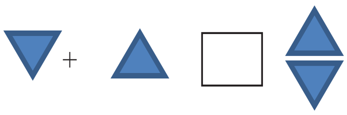
התפתחות תהליך ההסמלה של סמלי המספרים מתרחש בשתי רמות הבנה: ראשונה, ההכרה כי מערכת הייצוג של המספרים היא מערכת של סמלים שתפקידה להביע משמעות מסוימת ושאינה יכולה להשתנות על ידי גורמים אחרים אלא בשינוי הסמלים עצמם. הרמה השנייה היא הכרת מערכת החוקים באמצעותם המספרים המיוצגים (Bialystok, 2000). מחקרים שנערכו בשנים האחרונות מצביעים על כך שהגננות בגן מוצאות עצמן עומדות בפני קשיים וחוסר הבנה כאשר הן מלמדות מושגים מתמטיים בגיל הרך (Sarama et al., 2016; Hassidov & Ilany, 2018; Hassidov & Ilany, 2017).

מטרות המחקר

1. לבדוק כיצד ובאיזה אופן פרחי הוראה וגננות תופשים ומשתמשים בסימנים = ,>, <,
2. לבדוק מהם ההבדלים בין פרחי הוראה לגננות באופן בו הם תופשים ומשתמשים בסימנים = ,>, < .

מתודולוגיה

מאמר זה מציג חלק ממחקר רחב הבודק תפיסות ביחס לסימנים מתמטיים. המחקר הרחב עוסק בארבע קטגוריות: מספרים; כמות; כמות ומספרים; נפח, שטח וכמות. **אוכלוסיית** המחקר כללה 149 גננות, ו- 71 פרחי הוראה לחינוך בשנה ב או ג המשתתפים בקורס שנתי העוסק בהוראה ולמידת מתמטיקה בגיל הרך. **שיטת** המחקר שילבה בין מתודה כמותית לאיכותנית. כלי המחקר כוללים **שאלון** שמכיל 25 שאלות. הנבדקים נתבקשו להוסיף את אחד מסימני היחס הבאים: = , > , < ובמידה ולא נמצא סימן יחס מתאים, נתבקשו לסמן X . בנוסף נתבקשו לנמק את התשובה. באמצעות השאלון נאסף מידע כמותי ואיכותני ונתוני רקע. **הראיונות** היו מובנים למחצה, באמצעותם נאסף מידע איכותני.

שאלות		< גננות	< פרחי הוראה	> גננות	> פרחי הוראה	= גננות	= פרחי הוראה	X גננות	X פרחי הוראה
1		98	100	0	0	0	0	2	0
2		5	0	16	6	74	94	4	0
3		95.4	96	1.3	1	1.3	3	3	0
17		1.3	0	2.7	4	92	90	4	6
7	1/2 ☐ 1/4	14.1	0	*80.5	*97.2	0.7	0	4.7	2.8
9	5 ☐ 5	0	0	26.2	14.1	*70.5	*77.5	3.3	8.4
10	6 ☐ 4	17.4	2.8	*77.9	*91.6	0	0	4.7	5.6
61	2 × 3 ☐ 6	1.3	0	6	0	*86	*98.6	6.7	1.4

טבלה 1: שאלות כמותיות (1, 2, 3 ו – 17), שאלות מספריות (7, 9, 10 ו- 16) – ניתוח של תשובות פרחי ההוראה והגננות (כל הערכים מוצגים באחוזים, * תשובה נכונה).

הבדל בין תשובות נכונות: שאלה 7, p*=0.001 התפלגות נורמלית p=0.006

שאלה 10 , p*=0.01 התפלגות נורמלית p=0.01 ; שאלה 16 , p*=0.003התפלגות נורמלית p=0.032

הנמקה נכונה		אין תשובה*	כמות וגם גודל*	מספרי*	גראפי*		הנמקות לשאלה 1
0		14	0	56	1	N	פרחי הוראה
0		19.8	0	78.8	1.4	%	N=71
0		87	3	53	6	N	גננות
0		58.4	2	35.6	4	%	N=149
							הנמקות לשאלה 2
0		10	7	52	2	N	פרחי הוראה
0		14.1	9.9	73.2	2.8	%	N=71
0		86	4	41	18	N	גננות
0		57.7	2.7	27.5	12.1	%	N=149
							הנמקות לשאלה 3
0		12	1	57	1	N	פרחי הוראה
0		16.9	1.4	80.3	1.4	%	N=71
0		90	2	54	3	N	גננות
0		60.4	1.3	36.2	2.1	%	N=149
	תשובה אחרת X						הנמקות לשאלה 17
0	1	20	4	36	10	N	פרחי הוראה
0	1.4	28.2	5.6	50.7	14.1	%	N=71
0	1	99	1	44	4	N	גננות
0	0.7	66.4	0.7	29.5	2.7	%	N=149

טבלה 2: כמותי – ניתוח (ערכים באחוזים) של ההנמקות שניתנו על ידי הגננות ופרחי ההוראה לשאלות: 1, 2, 3, ו- 17 $p<0.001$ *

ממצאים

בהיבטים הכמותי:

כדוגמה נתייחס לממצאים לשאלה 17: 94% מפרחי ההוראה ו- 96% מהגננות ענה לא נכון, היה הבדל משמעותי ($p<0.001$) בין ההנמקות שנתנו הנבדקים (טבלה 2). גננת אחת שסימנה כתשובה סימן "<" אמרה: "יש שני משולשים והצד השמאלי גדול יותר מהצד הימני." אחרת סימנה כתשובה סימן "=" וכתבה, "עוד לא למדנו את זה." גננת אחרת נתנה תשובה שנראתה מבולבלת, "המשולשים שווים משני הצדדים. בכל צד משולש אחד עולה, ואחד יורד. אז הם יוצרים צורה של יהלום שווה צלעות". "מורה שסימנה " = " אמרה", "מיקום המשולשים אינו חשוב. מה שחשוב הוא הכמות שלהם. " סטודנטית אחת שסימנה כתשובה סימן " X " נימקה" "אין תשובה מכיוון שלא ידעתי באיזה סמל להשתמש. ישנם שני משולשים מכל צד, אך הם לא מסודרים זהה." חלק מה הסטודנטים ענו " X " מכיוון שהם לא ידעו באיזה סימן יחס מתמטי להשתמש (Hassidov & Ilany, 2018).

בהיבטים המספריים:

כדוגמה נתייחס לממצאים לשאלה 9 המראים ש- 45.1% מפרחי הוראה ו- 16.1% מהגננות שענו תשובה נכונה, נמקו זאת: בשל "סדרת המספרים". 13.4% מהגננות ו2.8% מפרחי הוראה ענו תשובה נכונה אבל כתבו הנמקה שגויה שבה התייחסו לצורה הגרפית של המספרים: צורה , גודל או עובי הקו. 12.7% מפרחי הוראה ו- 4.7% מהגננות שענו תשובה נכונה "X", כתבו נימוק שגוי שבו התייחסו לכמות הפריטים שבכל צד: "בכל צד קיים פריט אחד ולכן זה שווה". נימוק נוסף אצל הגננות הראה על התלבטות בין התייחסות גרפית לבין התייחסות למספרים: "תלוי על מה מסתכלים ואיך, לפי הצורה, אחד גדול מהשני ואם מסתכלים לפי ערך המספר אז הם שווים". 8.5% מפרחי הוראה ו- 1.3% מהגננות ענו תשובה שגויה ונימקו שלא ניתן לשים סימן בין שתי הספרות מאחר שיכולות לדעתן להיות מספר תשובות לדוגמה: "שני המספרים בעלי אותו ערך אבל לא אותו גודל ועובי". 11.3% מפרחי הוראה ו- 11.4% מהגננות נימקו "שגודל המספר בצד שמאל גדול מהמספר בצד ימין". אחד מפרחי הוראה כתב: " בהסתכלות על המספרים אז הם שווים מבחינת כמות או ערך אבל הכתב יותר גדול וזה מבלבל".

נמצאו שלושה סוגי הבנות שגויות בקרב הנבדקים:

1. חוסר הבנה שהסימנים המתמטיים מתייחסים אך ורק למשמעות המספר.
2. חוסר הבנה שלא ניתן להתייחס למספר כאובייקט גרפי.
3. חוסר הבנה שההנמקה לתשובה נכונה חייבת להיות גם נכונה.

דיון ותרומת המחקר

ממחקר זה עולה כי הנבדקים משתמשים בסימני יחס מתמטיים בדרכים שונות, בהתאם להקשר: לעיתים בהקשר לכמות ולעיתים בהקשר לצורה או לגודל של התמונות ולעיתים הם מתייחסים להיבטים הגרפיים. הנבדקים לא התייחסו רק למשמעות המתמטית של סימני היחס. ניתן להסיק מהמחקר שהנבדקים לא מבינים כראוי את אופן השימוש והמשמעות של הסימבולים המתמטיים: =, > , <. כתוצאה מכך ניתן להניח שהגננות לא מלמדות נכון את הנושא וניתן להניח שגם פרחי ההוראה לא ילמדו את המושגים הנ"ל כראוי לגיל הרך.

השימוש באותן מילים בחיי היומיום ובמתמטיקה מוביל לתפיסות שגויות ביחס למשמעות הסימנים המתמטיים. לפיכך, גננות לא רואה כטעות אם ילד כותב "5> **5**". בראיונות גננות אמרו "מלמדים את הילד להשתמש בסמל "<" בין שני עצמים, ויתכן כי במקרה מסוים הגודל חשוב, ובמקרה אחר האורך עשוי להיות חשוב. זה תלוי בהקשר. " גננות טענו "לפעמים במצבים מסוימים נכון להשתמש בשני סימני יחס שונים בו זמנית". נוצרה סיטואציה שהגננות לא היו מודעות לקונפליקט הקוגניטיבי שהסיטואציה של שימוש בשני סימנים מתמטיים יוצרת בקרב הילדים. על הגננות ופרחי ההוראה להבין שלא ניתן להתייחס למשפט מתמטי בהיבט גרפי ושלא ניתן להשתמש בו זמנית בשני סימני יחס שונים בין שני מספרים ושיש להשתמש בסימנים "<, > ,=" רק במובן המתמטי.

מקורות

מרגולין ב. ואילני ב.(2007). בין לשון ומתמטיקה - חינוך לחשיבה אוריינית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. דפים מס' 45 עמ' 114-139, הוצאת מכון מופ"ת.

Bialystok, E. (2000). Symbolic representation across domain in preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology, 76*, 173-189.

Hassidov, D., & Ilany, B. (2017). Between Natural Language and Mathematical Symbols (<, >, =): The Comprehension of Pre-Service and Preschool Teachers-Perspective of Numbers. *Creative Education, 8, 1903-1911.* https://doi.org/10.4236/ce.2017.812130

Hassidov, D: Ilany, B. (2018). Collaboration between Mathematics Facilitators and Preschool Teachers during the Innovative “Senso-Math” Preschool Program. *Mathematics Teacher Education and Development (MTED),* Australasia.

Sarama, J., Clements, D. H., Wolfe,C. B. & Spitler, M. E. (2016). Professional development in early mathematics: effects of an intervention based on learning trajectories on teachers’ practices. *Nordic Studies in Mathematics Education, 21(4), 29–55.*

מתמטיקה בגיל הרך התמודדות של ילדים צעירים עם מצבים מתמטיים מחיי – היומיום

צביה מרקוביץ, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאומנויות

מבוא

בשנים האחרונות גוברת ההבנה כי יש צורך להשקיע משאבים רבים יותר בגיל הרך. שותפים לדעה זו לא רק אנשי חינוך אלא גם כלכלנים הטוענים כי השקעה בחינוך בגיל הרך היא המפתח לחברה משגשגת (Barnett & Masse, 2007; OECD, 2011; The World Bank, 2008). העיסוק במתמטיקה בגיל הרך הוא צורך שנובע מפעילויותיהם היומיומיות של הילדים. ילדים עוסקים במגוון פעילויות מתמטיות הן בבית והן בגן כמו למשל, כשהם משווים אם קיבלו את אותו מספר פרוסות מלפפון בארוחת הערב כמו אחיהם או כשהם רוצים לחלק את החרוזים שעל השולחן שווה בשווה בין הילדים היושבים בקבוצה. עיסוק מיטבי במתמטיקה בגיל הרך מקדם את החשיבה המתמטית של הילדים ומניח את הבסיס להמשך פיתוח החשיבה המתמטית בבית הספר. מחקרים מראים כי כבר בגיל צעיר ילדים יכולים לבנות רעיונות מתמטיים ופעמים רבות הם מפתיעים אותנו ביכולות המתמטיות שהם מגלים (Baroody, Lai., & Mix, 2000; Hachey, 2013). למרות זאת, ישנן גננות המעדיפות לעסוק עם הילדים יותר בנושא השפה ופחות במתמטיקה (Coopley, 2000; Ginsburg, Lee,& Boyd, 2008), כשאחת הסיבות לכך היא שהן עצמן לא כך כך אוהבות מתמטיקה או פוחדות ממתמטיקה (מרקוביץ ופטקין, 2018; Gresham, 2007 Markovits, 2012). ג'ונג, קלוסטרמן ומקמולן (Jung, Kloosterman, & Mcmullen, 2007) מציינים כי לילדים צעירים יש אינטואיציות טבעיות לפתור מצבים מתמטיים וחשוב כי גננות יקשיבו לילדים בשעה שהם עוסקים בפתרון מצבים אלה במטרה להבין טוב יותר את דרכי החשיבה של הילדים.

מחקר זה מתאר את הדרכים בהן מתמודדים שמונה ילדים צעירים עם פתרון מצבים מתמטיים בחיי היומיום, הכוללים מצבים של חיבור, חיסור וחלוקה לקבוצות שוות.

המחקר

מטרת המחקר היא ללמוד על דרכי החשיבה של ילדים צעירים המתמודדים עם מצבים מתמטיים מחיי היומיום ולבדוק האם הם משתמשים באותה אסטרטגיה ובאותם אמצעי המחשה במצבים השונים המוצגים בפניהם, או שהם משנים אסטרטגיה ואמצעי המחשה עבור מצבים מתמטיים שונים.

במחקר השתתפו שמונה ילדים. ארבעה מהם ילדים צעירים בגילאי 3.6, 3.10, 4.2, 4.2 (המספרים מציינים גיל בשנים ובחודשים. כך למשל 3.6 מציין 3 שנים ו- 6 חודשים). ארבעה מהם בוגרים יותר בגילאי 5.2, 5.5, 6.3, 6.4. כל ילד רואיין בנפרד. המשימות הוצגו לילדים אחת אחרי השנייה והילדים התבקשו לתת תשובה ולהסביר כיצד הגיעו לתשובה זו. על השולחן היו אמצעי המחשה כמו פקקים, קוביות וחרוזים. לילדים נאמר שהם יכולים להשתמש בהם.

לילדים הוצגו תשע משימות העוסקות ב: א. מצבים של חיבור, לדוגמה: "לדניאל היו ארבע מכוניות. הוא קיבל עוד שתי מכוניות. כמה מכוניות יש לו עכשיו?" ב. מצבים של חיסור, לדוגמה: "לרונה היו 7 צבעים על השולחן. היא שמה שלושה צבעים בקלמר. כמה צבעים נשארו על השולחן?" ג. מצבים של חלוקה לקבוצות שוות, לדוגמה: "לאמא היו שמונה מדבקות. היא חילקה את המדבקות שווה בשווה בין שתי הילדות שלה. כמה מדבקות קיבלה כל ילדה?". בשתיים ממשימות החיבור הופיעו מספרים זהים. גם בשתיים ממשימות החיסור המספרים חזרו על עצמם. המטרה היתה לבדוק האם הילדים ישמו לב למספרים, יראו שהמספרים חוזרים על עצמם ויחליטו שאין צורך לפתור את המשימה השנייה, כיוון שהתשובה תהיה זהה לתשובה אותה נתנו במשימה הראשונה. בכל תשע המשימות ניתנו מספרים קטנים מעשר, אבל בשתיים ממשימות החיבור סכום המספרים עבר את המספר עשר (לאמה היו שבע סוכריות. היא קיבלה עוד חמש סוכריות. כמה סוכריות יש לה עכשיו? למיכאל היו שמונה בובות. הוא קיבל עוד ארבע בובות. כמה בובות יש לו עכשיו?).

ממצאים ודיון

הילדים השתמשו במגוון אסטרטגיות כשהתמודדו עם המצבים המתמטיים מחיי היום יום. הם הסבירו (ברוב המקרים) את מה שעשו, וכך אפשרו לנו להקשיב לדרכי החשיבה שלהם. הילדים גילו יכולות גבוהות בהתמודדות עם המשימות. כך למשל, שלושה מבין ארבעת הילדים הבוגרים יותר נתנו תשובות נכונות בכל תשע המשימות. אחת

הילדות מבין הבוגרים (6.3) התקשתה להתמודד עם משימות החלוקה לקבוצות שוות ועם משימות החיבור בהן הסכום עבר את המספר עשר. הילדים הצעירים הגיעו לתשובות נכונות בחלק ממשימות החיבור, החיסור והחלוקה לקבוצות שוות אך רובם התקשו להתמודד עם משימות החיבור עם המספרים שעוברים את המספר עשר. יהונתן רק בן 3.6 הגיע לתשובות נכונות בשבע מתוך תשע המשימות וליה (4.2) נתנה תשובות נכונות בכל תשע המשימות.

שלושת הילדים הבוגרים שהגיעו לתשובות נכונות בכל המשימות, שמו לב למספרים, וכשראו שהמספרים המעורבים במשימה זהים למספרים שניתנו להם במשימה הקודמת, לא פתרו מחדש ואמרו כי התשובה תהיה אותה תשובה כמו קודם. למשל: "שש. זה פשוט כמו בשאלה הקודמת" (יואב, 5.2). הילדים הצעירים שמו לב פחות למספרים החוזרים ונראה כי היו מאוד מרוכזים בכל פעם בהתמודדות עם המשימה שניתנה להם ולא התייחסו למשימה הקודמת איתה כבר התמודדו.

הילדים השתמשו במגוון אסטרטגיות כדי להתמודד עם המשימות: ספירה קדימה, ספירה אחורה, חלוקה לשתי קבוצות שוות באמצעות הנחת פקק בכל אחת משתי הקבוצות שיצרו או באמצעות סידור פקקים בשתי שורות. חלק מהילדים השתמשו באסטרטגיות שונות במצבים השונים שהוצגו להם. לעיתים הם עשו חישובים בראש, בעיקר במשימות בהן ניתנו מספרים קטנים. הם השתמשו באצבעות ובמגוון אמצעי המחשה שהיו על השולחן וכאשר האצבעות לא הספיקו הם הוסיפו לאצבעות אמצעי המחשה. נראה כי חלקם התאימו את דרך הפתרון למצבים שניתנו להם.

ליאור (5.5) הפתיע בתשובותיו לכל אורך הראיון וגילה רמה גבוהה של הבנה מתמטית. במשימה 8, משימת חיבור, הוא פתר נכון את התרגיל 5 + 7 ואמר כי התשובה היא 12. במשימה 9, גם היא משימת חיבור, המספרים שניתנו היו 8 ו-4. ליאור אמר שהוא לוקח 1 מה- 8 ונותן אותו ל- 4 וכך הוא מקבל את אותו התרגיל שפתר קודם , והתשובה תהיה גם כן 12. נראה, שבנוסף לידע מתמטי לליאור יש כבר חוש למספרים, והוא משתמש ב*שיטת הפיצוי* כדי לפתור את התרגיל.

מחקר זה מעמיק את הידע שלנו אודות יכולותיהם של ילדים צעירים בתחום המתמטיקה ומאפשר לעמוד על דרכי החשיבה שלהם. המחקר מראה כי ילדים צעירים יכולים להתמודד עם מצבים מתמטיים מחיי היומיום ואף לשים לב למספרים הנתונים. גננות יכולות ללמוד הרבה מהקשבה לילדי גן העוסקים במצבים כאלה, להתוודע לדרכי החשיבה שלהם, להתרשם מיכולותיהם, לאתגר את הילדים המגלים יכולות גבוהות, ולעזור לילדים שפחות נחשפו למצבים כאלה.

רשימת מקורות

מרקוביץ, צ' ופטקין, ד' (2018). יחס ואמונות כלפי גיאומטריה וידע תוכן לגבי צורות וגופים בקרב גננות. בתוך א' לבנברג וד' פטקין (עורכות), **גיאומטריה פנים רבות לה: מן המחקר אל המעשה** (עמ' 51–78). תל אביב: מופ"ת.

Barnett, S., & Masse, L. (2007). Comparative benefit–cost analysis of the Abecedarian program and its policy implications. *Economics of Education Review, 26*, 113–125.

Baroody, A. J., Lai, M., & Mix, K. S. (2010). The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In B. Spodek & O. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children* (Vol. 2, pp. 187-221). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. Reston, VA, and Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics and the National Association for the Education of Young Children.

Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Boyd, J. S. (2008). Mathematics Education for Young Children: What It Is and How to Promote It. *Social Policy Report*. *22*(1), 1-22.

Gresham, G. (2007). A study of mathematics anxiety in pre-service teachers. *Early Childhood Education Journal*, *35*(2), 181-188.

Hachey, A. C. (2013). The early childhood mathematics education revolution. *Early Education and Development, 24*, 419-430.

Jung, M., Kloosterman, P., & Mcmullen, M. B. (2007). Young children's intuitions for solving problems in mathematics. *Young Children, 62*(5), 50-57.

Markovits, Z. (2012). Beliefs hold by preschool prospective teachers towards mathematics and its teaching. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *11*, 117-121.

OECD - Organization for Economic Cooperation and Development (2011). *Investing in high quality childhood education and care*. Retrieved from http://www.oecd.org/edu/school/48980282.pdf

The World Bank (2008). *The road not traveled: Education reform in the Middle East and North Africa*. Washington, DC: The International Bank for Reconstruction and Development. Retrieved from http://siteresources.worldbank.org/INTMENA/Resources/EDU_Flagship_Full_ENG.pdf

מתמטיקה ומגדר בכיתה ד': אמונות בנות ובנים ומאפיינים של תפיסה עצמית אצל תלמידות מצטיינות במתמטיקה.

שרון שבת גדליהו, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ואומנויות
צביה מרקוביץ, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ואומנויות

רקע תאורטי

גם כיום, במאה ה- 21, מקצועות המתמטיקה וההנדסה נחשבים עדיין למקצועות גבריים, לעומת מקצועות פרא רפואיים ומקצוע ההוראה הנתפסים כנשיים. (גרינגרוז, 2008 ; הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה, 2018 ; 2015 ,OECD). מרבית המחקרים מהשנים האחרונות מצביעים בעיקר על הגורם החברתי סביבתי כמנציח את מיעוט הנשים במקצועות המתמטיקה באוניברסיטאות ואת הפערים בהישגים ובאמונות כלפי המקצוע בין המגדרים. המחקרים מצביעים כי קיימים הבדלים באמונות של תלמידי חטיבה, תיכון וסטודנטים כלפי מתמטיקה וכן באופן בו הם מעריכים את יכולתם במתמטיקה. לרוב התפיסה העצמית של הבנות לגבי יכולותיהן במתמטיקה נמוכה יותר מזו של הבנים, הן נוטות לדרג את כישוריהן במתמטיקה כנמוכים מאלה של הבנים ואינן רואות במתמטיקה כאפשרות תעסוקתית בעתיד (Bleeker, & Jacob, 2004 ; Brown, & Kanyongo, 2010).

בדוח ה- OECD משנת 2015 נמצא שאחוז הבנות שראו את עצמן בעתיד כמדעניות או מהנדסות היה קטן מאחוז הבנים (OECD, 2015). גם ממצאי מחקרה של דנטי (Dentith, 2008) מחזקים את הטענה כי ההערכה העצמית של הבנות במתמטיקה נמוכה משל הבנים. דנטי ערכה ראיונות ל - 22 בנות מכיתה י"ב, בעלות הישגים גבוהים במתמטיקה. מהראיונות עלה כי הבנות היו פחות בטוחות ביכולותיהן המתמטיות לעומת הבנים. מצד אחד הן הרגישו צורך לעבוד קשה יותר מהבנים בכדי להיתפס כחכמות ורציניות, ומצד שני הן היו מודאגות מאוד לגבי תדמיתן כבנות שלומדות קורסים מתקדמים, כלומר הן חששו להיתפס בעיני הבנים כחכמות מידי.

מתברר כי כבר בבית הספר היסודי ניתן למצוא תפיסות מגדריות בנוגע למתמטיקה בקרב הבנות והבנים. למשל במחקרם של פרנזל, פקרון וגוץ (Frenzel, Pekrun, & Goetz ,2007) עם תלמידי כיתות ה' ובמחקרן של מרקוביץ ופורגז (Markovits, & Forgasz ,2017) עם תלמידי כיתות ד' ו - ו', נמצא שלבנות יש תפיסה עצמית נמוכה יותר מאשר לבנים, והן פחות בטוחות ביכולתן המתמטית לעומת הבנים.

המחקר

מטרת המחקר הייתה לבדוק את האמונות של בנות ובנים בכיתה ד' כלפי מתמטיקה וכלפי מתמטיקה ומגדר ולבדוק מה מאפיין בנות מצטיינות בכיתה ד' עם הערכה עצמית גבוהה ובנות עם הערכה עצמית נמוכה.

המחקר התבצע בשני חלקים: החלק הראשון כלל שאלון אמונות שהועבר ל- 65 תלמידים משתי כיתות ד'. כיתה ד'1 מנתה 18 בנות ו- 14 בנים. כיתה ד'2 מנתה 18 בנות ו- 15 בנים. בכיתה ד'1 ממוצע הישגי הבנות במתמטיקה גבוה מממוצע הישגי הבנים, ובכיתה ד'2 ממוצע הישגי הבנים גבוה מממוצע הישגי הבנות. חלקו השני של המחקר, כלל ראיונות עומק עם 12 תלמידות, 6 מכל כיתה, ומצטיינות במתמטיקה, שממוצע הציונים שלהן הוא מעל 90. חלקן הראו בשאלון האמונות תפיסה עצמית נמוכה כלפי מתמטיקה וחלקן הראו תפיסה עצמית גבוהה. מטרת הראיונות הייתה לנסות ולהבין טוב יותר את אמונותיהן של הבנות המצטיינות כלפי מתמטיקה ואת הסיבות לתפיסה העצמית שלהן כלפי מקצוע זה.

ממצאי המחקר ומסקנות

מניתוח השאלונים נמצא כי בשתי הכיתות, הן הבנות והן הבנים, מייחסים חשיבות רבה למקצוע המתמטיקה, ואף סבורים כי הוריהם מייחסים חשיבות רבה למתמטיקה. יחד עם זאת, מתמטיקה הוא מקצוע לא כל כך אהוב על התלמידים. במחקר נמצאו הבדלים בין שתי הכיתות. בכיתה ד'2, בה הישגי הבנים גבוהים מהישגי הבנות, אמונות הבנים לגבי מקצוע המתמטיקה היו חיוביות יותר והתפיסה העצמית בנוגע ליכולות המתמטיות של הבנים הייתה גבוהה מזו של הבנות. בכיתה ד'1, בה הישגי הבנות גבוהים יותר מהישגי הבנים, אמונות הבנות כלפי מקצוע המתמטיקה היו חיוביות יותר משל הבנים, אך התפיסה העצמית לגבי יכולתן במתמטיקה הייתה דומה לזו של הבנים

שבכיתתן ודומה לתפיסה העצמית של הבנות בכיתה ד'2, אך נמוכה יותר מזו של הבנים בכיתה ד'2, וזאת למרות שממוצע הציונים שלהן היה גבוה גם מממוצע הבנים מכיתה ד'2.

חלק מהבנות המצטיינות, למרות ממוצע הציונים הגבוה, מעריכות את היכולות המתמטיות שלהן הרבה פחות מהיכולות האמיתיות ואף סבורות כי הסביבה - הורים, מורים וחברים לכיתה, מעריכים את יכולתן באופן נמוך יותר מהציון שלהן במקצוע. לדוגמא בשאלה "עד כמה את מצליחה במתמטיקה? ובשאלות "היכן ימקמו אותך החברים, ההורים והמורה מבחינת עד כמה את טובה במתמטיקה?" הן סימנו לרוב 3 או מספר נמוך יותר בסולם מ -1 עד 5. לעומתן, בנות מצטיינות אחרות כן מודעות ליכולתן במתמטיקה ומאמינות ביכולות אלו, ומודעות לכך שגם ההורים, החברים והמורים מזהים את היכולות הגבוהות שלהן. הן בחרו במספר 4 ובעיקר במספר 5 המציין במקום גבוה מאוד.

בראיונות נמצא, שכל הבנות, למרות התפיסה העצמית השונה, התייחסו למתמטיקה כפונקציונלית שמטרתה לעזור להן להסתדר בחיי היום יום, בעיקר בכל הקשור לנושא הכסף (עודף, תשלומים, משכורת וכדומה). ממצא נוסף שעלה מן המחקר, וזאת בדומה למחקרים אחרים, הוא כי הבנות, ללא קשר לתפיסתן העצמית בטוחות שללא ההשקעה וההתמדה הן לא היו טובות במתמטיקה (Soni, & Kumari ,2015; Mullis et al., 2016 ; Dentith, 2008).

מתוך הראיונות עולים גם הבדלים בין הבנות בעלות התפיסה העצמית הגבוהה והבנות בעלות התפיסה העצמית הנמוכה. הבנות בעלות התפיסה העצמית הגבוהה רואות בקושי מתמטי שהן נתקלות בו מניע חיובי ומאתגר ועצם ההתמודדות עם הקושי נותנת להן הרגשת סיפוק. לעומתן הבנות עם התפיסה העצמית הנמוכה, כשהן נתקלות בקושי מתמטי, הקושי מערער את תפיסתן החיובית כלפי המתמטיקה ויש להן רגשות אמביוולנטיים כלפי המקצוע. כמו כן נמצא שאצל הבנות בעלות תפיסה עצמית נמוכה, ההורים לוקחים חלק פעיל יותר בלמידה. הם יושבים ומתרגלים עם הבנות והחלקם דואגים להן לשיעורים פרטיים. לעומתם ההורים של הבנות בעלות התפיסה העצמית הגבוהה נותנים לבנות תחושה והרגשה שהן טובות בעיקר באמצעות חיזוקים מילוליים על יכולתן הטובה.

במהלך הראיונות עלו מספר פעמים סוגיות בדבר הפער בין הציונים של הבנות לבין התפיסה העצמית שלהן, תוך כדי הדגשה [של המראיינת] כי הן טובות במתמטיקה ותוך אזכור לממוצע הציונים הגבוה שלהן. בסיום הראיונות נשאלו הבנות בעלות התפיסה הנמוכה שוב את אותן שאלות לגבי תפיסתן העצמית. כבר בסיום הראיונות, הבנות העריכו את עצמן באופן גבוה יותר מאשר בתחילת הראיון ומאשר בשאלון והסבירו את השינוי כתוצאה מהחיזוקים שקיבלו במהלך הראיון.

הממצאים במחקר מראים כי כבר מגיל צעיר קיימים הבדלים באמונות של בנות ובנים לגבי מקצוע המתמטיקה. עוד מראים הממצאים כי האמונות של תלמידות מצטיינות במתמטיקה והתפיסה העצמית שלהן מושפעות מהסביבה הקרובה. אנו אנשי החינוך יכולים להשפיע על האמונות והתפיסות המתמטיות של הבנות באמצעות מתן חיזוקים ובחשיפתן לאפשרויות תעסוקתיות הקשורות במתמטיקה מעבר לשימושה הפונקציונלי בחיי היום יום.

רשימת מקורות

גרינגרוז, ג' (2008). שוויון בין נשים לגברים באקדמיה - בגלל הביולוגיה?. **Ynet**. אוחזר מתוך www.knesset.gov.il/mmm/data/docs/m00927.rtf

הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה, (2018). השכלה גבוהה בישראל – נתונים נבחרים לשנת הלימודים תשע"ט (2018/2019) לרגל פתיחת שנת הלימודים האקדמית. אוחזר מתוך https://www.cbs.gov.il/he/pages/default.aspx

Bleeker, M. M., & Jacobs, J.E. (2004). Achievement in math and science: Do mothers' beliefs matter 12 years later. *Journal for Education*, *96*(1), 97-109.

Brown, L. I., & Kanyongo, G. Y. (2010). Gender differences in mathematics performance in Trinidad and Tobago: Examining affective factors. *Journal of Mathematics Education*, *5*(3), 113-130.

Dentith, A. (2008). Smart girls, hard – working girls but not yet self-assured girls: The limits of gender equity politics. *Canadian Journal of Education*, *31*(1), 145-166.

Frenzel, A. C., Pekrun, R. & Goetz, T. (2007). Girls and mathematics – A "hopeless" issue? A control-value approach to gender differences in emotions towards mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, *22*(4), 497-514. http://dx.doi.org/10.1007/BF03173468

Markovits, Z. & Forgasz, H. (2017). "Mathematics is like a lion": Elementary students' beliefs about mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*, 49-64.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS 2015. *International Results in Mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

OECD. (2015). *The ABC of gender equality in education: Aptitude, behaviour, confidence.* Paris: PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264229945-en

Soni, A., & Kumari, S. (2017). The role of parental math anxiety and math attitude in their children's math achievement. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(2), 331-347. doi:10.1007/s10763-015-9687-5

זרימה של הוכחה יצירת בסיס הסכמה משותף -

מיקה גבל, אפקה – מכללה להנדסה בתל אביב
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

מבוא ורקע תיאורטי

חוקרים אחדים דנים ביחס בין מתמטיקה ורטוריקה. Davis and Hersh (1987), למשל, טוענים שבהוכחה מתמטית קיימים אלמנטים רטוריים הקשורים גם לקונטקסט. Ernest (1999) מתייחס לחשיבות השכנוע בהוראה כדוגמא לקשר מתמטיקה-רטוריקה. Aberdein (2016) סבור שהנמקה מתמטית לא שונה מהותית מהנמקה בתחומי-דעת אחרים ושטיעונים לוגיים לא מייצגים את כלל סוגי ההנמקות בהם משתמשים במתמטיקה. אכן, קיימים מודלים מתחום הארגומנטציה בהם משתמשים במחקר בחינוך מתמטי, כדוגמת המודל של Toulmin.

במחקר הנוכחי נעשה שימוש בתורת ארגומנטציה שנקראת "הרטוריקה החדשה", להלן **PNR** - Perelman's New Rhetoric (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1969). PNR מתארת את המנגנונים המשמשים דובר (speaker) להגברת ההסכמה (adherence) של קהל שומעים לטענות שמציג הדובר. לפי PNR, חשוב להתייחס לאמצעים הרטוריים בהם משתמש הדובר, בנוסף למבנה הפורמלי של הטיעון. PNR מייחסת חשיבות מרכזית לקהל ומתייחסת להנחות המוצא שדרושות לבסיס הסכמה משותף בין הדובר וקהלו, להיקף וארגון הטיעונים, לדרכי הנכחה של אלמנטים ולסכמות טיעון. לפי PNR הדובר חייב להתאים את הטיעון לקהל ולפיכך להיות מבוסס על הנחות מוצא (premises) מוסכמות. אם אין הסכמה לגבי הנחות המוצא, אזי נוצר פער בין הדובר ובין הקהל והדובר מבצע טעות טיעונית (אך לא בהכרח טעות לוגית).

קיימים שני סוגי הנחות מוצא:

א. הנחות המתייחסות למציאות (real): עובדות (facts), אמיתות (truths), דרכי פעולה משוערות (presumptions)

ב. הנחות המתייחסות לרצוי (preferable): ערכים (values) והיררכיות (hierarchies)

פערים בבסיס ההסכמה יכולים להיגרם בגלל אחת או יותר מהסיבות הבאות: סטטוס שונה (למשל הדובר תופס כעובדה משהו שהקהל זקוק עבורו להצדקה), בחירה לא מותאמת (למשל בחירת הנחה שהקהל תופס כלא רלבנטית) או ניסוח לא מותאם (למשל בחירת מילים בעלות קונוטציה שלילית).

ההיבטים שתוארו לעיל קשורים באופן הדוק למושג "**זרימה של הוכחה**" שמגלם בחובו היבטים מתמטיים, דידקטיים וקונטקסטואליים של הצגת הוכחות במתמטיקה (Gabel & Dreyfus, 2017). הזרימה כוללת התייחסות למבנה הלוגי ולמאפיינים לא פורמליים של ההוכחה והיא תוצאה של האופן בו בחר מרצה להציג הוכחה בכיתה, בחירה המושפעת גם משיקולים קונטקסטואליים (למשל סילבוס או ידע קודם). לאותה הוכחה יכולות להיות זרימות שונות, מאחר שסדר הטענות, היקפן, רמת הפירוט והמאפיינים הרטוריים של ההצגה תלויים בבחירות המרצה.

בעיית המחקר

המחקר עוסק בכללותו באפיון וניתוח זרימה של הוכחה, בפרט המאפיינים הרטוריים של הזרימה שתוארו לעיל, במסגרת התיאורטית של PNR. בנוסף, נבחנה השפעת הזרימה על הלמידה. במאמר זה נתמקד ביצירת בסיס הסכמה משותף בין המרצה והתלמידים ובהדגמת פערים שעלולים להיווצר בבסיס ההסכמה.

שיטת המחקר

המחקר נערך במסגרת קורס בתורת המספרים לפרחי הוראה, שלימד אותו מרצה במהלך שנתיים עוקבות. בכל שנה, נצפו והוקלטו שלושה שיעורים נבחרים; אחריהם התקיימו ראיונות עם המרצה ואחדים מהסטודנטים וחולקו שאלונים לסטודנטים. הראיונות שנערכו עם המרצה בשנה-1 נותחו, והתקבלו שתי

קבוצות שיקולים להוראת הוכחות: שיקולים כלליים ושיקולים הנוגעים להוכחה הספציפית. לפני שיעור-2 הוצגו למרצה ממצאים משיעור-1 והצעות לשינויים בהצגת ההוכחה.

המאמר עוסק בשיעורים בהם נלמד הנושא "משוואות דיאופנטיות ליניאריות" והוכח המשפט הבא:

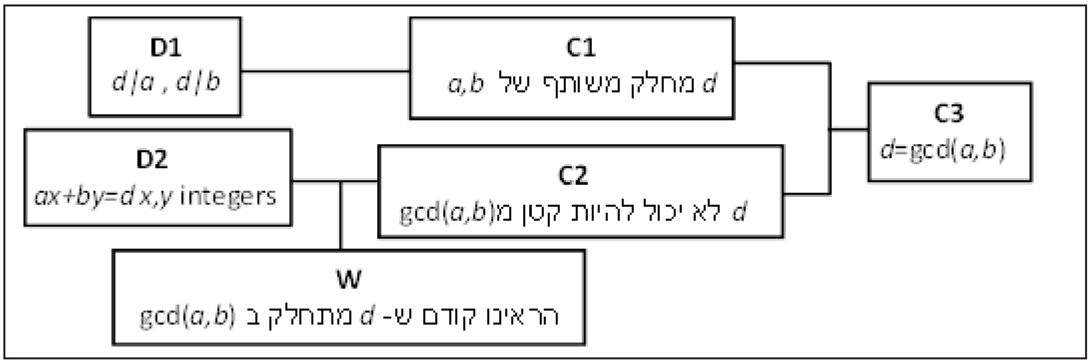
משפט: המחלק המשותף הגדול ביותר של שני מספרים שלמים a,b, לפחות אחד מהם שונה מאפס, שווה למספר הטבעי המינימלי שאפשר לרשום כצירוף ליניארי של a,b, כלומר:
$\gcd(a,b)=\min\{ma+nb>0: m,n\in Z\}$

מאפיינים רטוריים של זרימת ההוכחה בשני השיעורים הוצגו על ידי Gabel and Dreyfus (2017). במאמר הנוכחי נדגים ניתוח חלקי של הנחות מוצא של המרצה ושל פערים אפשריים שנוצרו בבסיס ההסכמה ונראה כיצד התייחס המרצה לפערים.

ממצאים

להלן שלושה משיקולי המרצה להוראת הוכחות באופן כללי, שהתקבלו מניתוח הראיונות בשנה-1: (1) הוכחה צריכה להיות מדויקת ושלמה מבחינה מתמטית; (2) צריך להשאיר חלקים בהוכחה כעבודה עצמית לסטודנטים; (3) מבנה ההוכחה צריך להיות ברור. אנו מתייחסים לשיקולים אלה כאל שלושה ערכים המנחים את המרצה בזמן הצגת ההוכחה ומשפיעים על הזרימה.

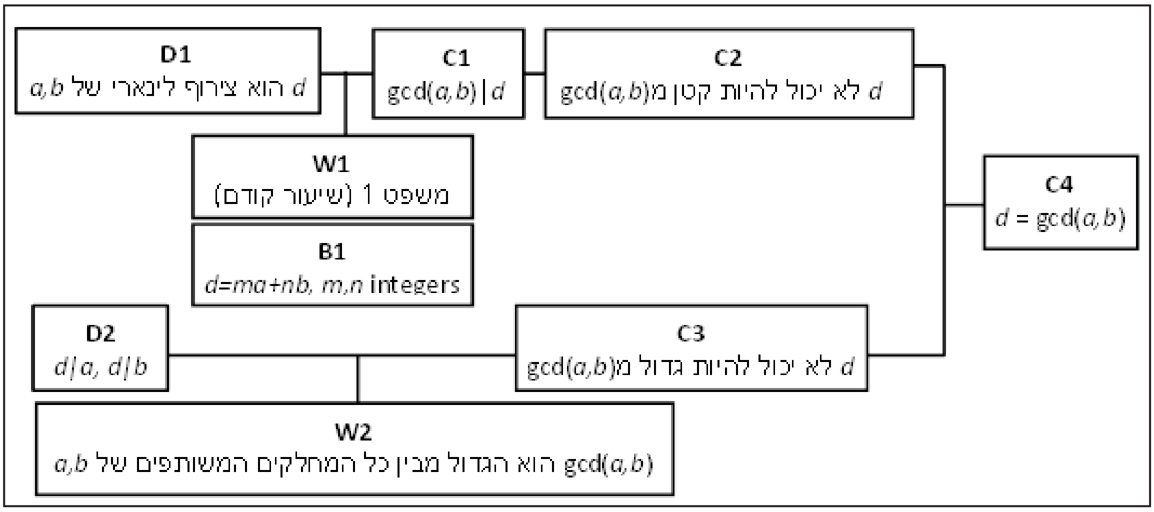
במהלך הוכחת המשפט בשיעור שניתן בשנה-1, לאחר שהמרצה הראה כי $d\mid a$ והשאיר את ההוכחה (הדומה) ש-$d\mid b$ לסטודנטים, סיים המרצה את ההוכחה כפי שמוצג בסכמת Toulmin בתרשים 1 (כיוון הטיעון משמאל לימין).



תרשים 1. סכמת Toulmin להסבר הראשון

להלן פירוש חלק מהנחות המוצא של המרצה המשתקפות בטיעון. עבור המרצה הטיעון כמעט ברור מאליו ולכן מוצג כשרשרת של עובדות שאין צורך להצדיק ומובילות באופן מיידי למסקנה (C3). עם זאת, המרצה בוחר בדרך פעולה משוערת (presumption) שאינה מוצגת מפורשות: להוכיח אי-שוויונים $d\ge\gcd(a,b), d\le\gcd(a,b)$ כדי להסיק ש-$d=\gcd(a,b)$. המרצה מאמין שהוא חולק הנחה זו עם הסטודנטים. בנוסף, הוא משאיר לסטודנטים להוכיח ש-$d\mid b$, כלומר היררכיית הערכים הנוכחית שלו ממקמת את ערך (2) מעל ערך (1) (ראו למעלה). עם זאת, הסטודנטים התקשו וביקשו לחזור על ההסבר. סיבה אפשרית היא שדרך הפעולה המשוערת - הוכחת אי-שוויונים - לא הייתה משותפת עם הסטודנטים ונדרש הסבר מפורש. בנוסף, ייתכן שהקפיצה מ-C1 ל-C3 (הנעזרת ב-C2) שהתבססה על כך שאם $d\mid a,\ d\mid b$ אזי $d\le\gcd(a,b)$ נתפסה כעובדה על ידי המרצה אך הסטודנטים הזדקקו להצדקה נוספת. בלשון PNR, הפערים בין המרצה והסטודנטים נבעו מבחירה של הנחות המוצא ומהסטטוס שלהן. לפיכך חזר המרצה על ההסבר, כמתואר בתרשים 2.

כעת הוסיף המרצה הצדקות (W1, B1 ,W2) כלומר שינה את הסטטוס של C1, C2, C3 מעובדות לאמיתות ותיקן פערים הנוגעים להנחות מוצא אלה. בחירת דרך הפעולה הקשורה לאי-שוויונים נשארה לא מפורשת.



תרשים 2. סכמת טולמין להסבר השני

לפני השיעור שניתן בשנה-2 תוארו למרצה קשיים שהסטודנטים חוו בהוכחה זו בשנה-1, ביניהם הקושי בהבנת השימוש בשני האי-שוויונים. לפיכך בחר המרצה להתייחס לכך בשנה-2:

מרצה: ...ופה אנחנו עושים דבר דומה למה שכבר היה לנו בעבר, שרצינו להוכיח שוויון בין שני מספרים

תלמיד: נגיד שהם לא שווים

מרצה: ...לא, זה להוכיח שני אי-שוויונים, כן?... מזכיר לכם, אנחנו כבר השתמשנו בזה כשרצינו להוכיח ששני מספרים הם שווים אז צריך להוכיח שלא יתכן ש- a קטן מ-b ולא יתכן ש-a גדול מ-b...

המרצה המשיך וחזר על ההסבר, מצדיק מפורשות את דרך הפעולה שבחר מול הסטודנטים, שסברו בתחילה שיש דרך פעולה אפשרית אחרת. כך הוא גם יוצר נוכחות לערך (3) לעיל העוסק בהבהרת מבנה ההוכחה.

סיכום ומסקנות

לסטודנטים ולמתמטיקאים יש השקפות שונות לגבי אחריות הסטודנטים בזמן קריאת הוכחה. הסטודנטים מאמינים שקריאת הוכחה היא תהליך פסיבי של מעקב אחרי מהלכים לוגיים, ומתמטיקאים מצפים מהסטודנטים להשלים בעצמם הצדקות וחלקי הוכחה (Weber & Mejia-Ramos, 2014). הבדלי השקפה אלה מיוצגים ב-PNR כהיררכיות ערכים שונות. מעבר לזיהוי הפער, בעזרת PNR ניתן גם להסביר את הסיבות לו וההשלכות שיש לפער על יעילות הטיעון המוצג, כלומר PNR היא מסגרת המספקת אמצעים לניתוח ושיפור הזרימה של ההוכחה, למשל על ידי יצירת בסיס הסכמה משותף.

לסיכום, PNR הינה תיאוריה מקיפה ועשירה שמאפשרת ניתוח מאפיינים רטוריים מגוונים של הזרימה של ההוכחה (Gabel & Dreyfus, 2017) ומספקת כלים שיכולים לסייע למרצים לשנות מאפיינים אלה. אחד מהמאפיינים, בסיס הסכמה משותף, הוא חיוני לתהליך השכנוע של הסטודנטים בנכונות הטיעונים המוצגים.

מקורות

Aberdein, A. (2016). Commentary on Andrzej Kisielewicz's: A new approach to argumentation and reasoning based on mathematical practice. In D. Mohammed & M. Lewinski (Eds.), *Proceedings of 1st European Conference on Argumentation (ECA 2015)*, Vol. 1 (pp. 287-292) Universidade Nova de Lisboa: College Publications.

Davis, P., & Hersh, R. (1987). Rhetoric and mathematics. In J. Nelson, A. Megill & D. McCloskey (Eds.), *The rhetoric of the human sciences: Language and argument in scholarship and public affairs* (pp. 54–68). Madison, WI: University of Wisconsin Press.

Ernest, P. (1999). Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: Philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 67–83.

Gabel, M., & Dreyfus, T. (2017). Affecting the flow of a proof by creating presence – a case study in Number Theory. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 187-205.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1969). *The new rhetoric: A treatise on argumentation* (J. Wilkinson & P. Weaver, Trans.). Notre Dame: University of Notre Dame Press.

Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). Mathematics majors' beliefs about proof reading. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(1), 89-103.

הבניית המושג דמיון-עצמי בקורס כאוס ופרקטלים: חקר מקרה

רנה הרשקוביץ, מכון ויצמן למדע
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

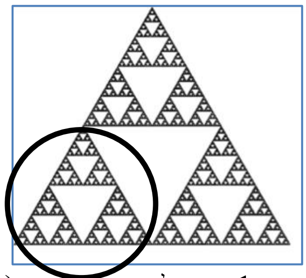
מבוא

המושג של דמיון-עצמי הופיע לראשונה במתמטיקה בעקבות מנדלברוט (Mandelbrot, 1983), אשר סקר פרקטלים טבעיים ומתמטיים, אך לא הגדיר פורמאלית את תכונת הדמיון-עצמי. לפיכך, המושג של פרקטלים ובפרט תכונת הדמיון-עצמי חדשים יחסית גם לחינוך מתמטי. בהתאמה לכך ההגדרות למושג דמיון-עצמי מגוונות מאד: מהגדרות הנשענות על הטבע והמראה של התופעה עצמה ועד להגדרות מתמטיות. בסקר של סינקלייר ושותפיה (Sinclair et al., 2016), על מחקר בהוראת גיאומטריה הם כותבים כי אין כמעט (או אין בכלל) מחקר על תכנים אלו. בחקר מקרה זה נעקוב אחר הבניית מושג הדמיון-עצמי בקרב סטודנטים לתואר שני באוניברסיטה.

מתודולוגיה

זהו חלק ממחקר מקיף העוקב אחרי סטודנטים הלומדים לתואר שני בהוראה, בקורס בנושא כאוס ופרקטלים בגישת חקר, בעלי רקע מתמטי בתואר הראשון. מטרת המחקר היא ללמוד כיצד הסטודנטים מבנים את מושג הדמיון-עצמי, בעבודה בקבוצות קטנות ובמסגרת מליאת הכיתה.

השיעורים תועדו בוידאו ותומללו. הניתוח התמקד בשיעור 11 בו עסקו במושג דמיון-עצמי בהקשר של משולש סירפינסקי (להלן מ״ס; איור 1). בקורס בחר המרצה להגדיר דמיון-עצמי באופן הבא: "*צורה נקראת בעלת דמיון עצמי אם היא דומה לעצמה, או מורכבת ממספר סופי של צורות הדומות לה.*" נציין כי החלק השני בהגדרה קשה להבנה, כיוון שעל הלומד להבין כי מצד אחד צריך להיות מספר *סופי* של צורות, ומצד שני כול אחת מהצורות צריכה להיות *אינסופית*. דיוני הקבוצה נותחו באמצעות הבניית ידע בהקשר (Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001). בחרנו להציג כאן את איה, בהיותה סטודנטית מובילה בקבוצתה ובמליאה.



איור 1: *משולש סירפינסקי* (העיגול אינו חלק מהמשולש, והוא מראה את החלק אליו מתייחסת ההגדרה)

ממצאים

בשיעורים הקודמים התלמידים שרטטו את משולש סירפינסקי בהתאם להנחיות הבאות. ראשית שרטטו משולש שווה צלעות גדול. חיברו את אמצעי הצלעות בקטעים, כך שהתקבלו 4 משולשים חופפים, שאורך צלעם מחצית מאורך הצלע המקורית. באופן איטרטיבי, המשיכו ופעלו כך על שלושת המשולשים שנוצרו (למעט המשולש האמצעי). התלמידים הבינו כי תהליך יצירת משולש סירפינסקי הוא אינסופי. נביא להלן את סיפור הבניית המושג דמיון עצמי על-ידי איה, שתחילתו קורית בתוך עבודת קבוצה של שלוש סטודנטיות בכיתה, והמשכו בעבודת מליאת הכיתה.

המרצה ביקש מהסטודנטים בקבוצות לבחון האם קיים דמיון בין הצורה כולה "עם כל החלקים שבתוכה", ובין חלק שלה [מסומן בעיגול באיור 1].

מיד עם תחילת עבודת הקבוצה (שכללה את איה, עדה ומיה), איה דבקה ברעיון כי כדי שיתקיים הדמיון, על התהליך של יצירת משולש סרפינסקי להיות אינסופי. היא מנמקת זאת בתחילה על-ידי הרגשה: *אני מרגישה כי, באופן היפותטי,*

אם תוכלי לעשות את זה (להמשיך לשרטט את משולש סירפינסקי) *באופן אינסופי, אז כן. זה רק, כמו אחד, כמו צעד אחד של zoom-out* (תור 3). נשים לב כי התייחסותה היא לתהליך – *לעשות, צעד אחד של zoom-out*. בהמשך היא מחפשת הדגמה שתחזק את טענתה. היא אומרת: *אם את מקפיאה את זה* (את התהליך האיטרטיבי של יצירת משולש סירפינסקי), *נקודה בזמן בתהליך, זה לא הולך להיות דומה. אבל, אם את יכולה באמת להמשיך "ללכת" באופן אינסופי, אני בטוחה שזה אומר...*(תור 49). אנחנו רואים כי איה מנגידה באופן ברור את המצבים של תהליך סופי-"נקודה בזמן" ותהליך אינסופי לקיום הדמיון של צורה.

עדה, חברת קבוצתה של איה, עוקבת אחרי איה ומסבירה כי *...כאשר את מסתכלת על זה ועושה zoom על זה, זה נראה אותו דבר* (58), ומוסיפה: *אבל זה נעשה רק על שני צעדים, אני יכולה לראות איפה זה לא, איפה זה לא יראה דומה* (61). בעוד שבתור 58 עדה מתייחסת לתהליך של יצירת משולש סירפינסקי עם 8 שלבים, בתור 61 היא מתייחסת לשרטוט שעשתה ובו שני שלבים. אם נסתכל על שתי אמירות אלו יחד נראה כי גם עדה, בעקבות איה, מתייחסת באופן שונה לתהליך הסופי והאינסופי.

רק בתור 93 איה מוסיפה הסברים:... *אם אנחנו באמת נחתוך זאת החוצה* (חלק של התהליך האינסופי), *נעביר את החלק, נעשה לו zoom-in – לא נוכל לומר מה ההבדל בין*... נראה כאילו איה רכשה כבר בטחון להסביר בדרך נוספת את הסיטואציה האינסופית.

בשיחה במליאת הכיתה, לאחר העבודה בקבוצות, איה מציגה את הטיעון הבא: *אני חושבת, אם אתה יכול, באמת, כאילו למשוך החוצה, את המשולש השמאלי התחתון הגדול* (מוקף בעיגול באיור 1), *ולבצע zoom-in, האם תקבל בדיוק את אותו דבר כמו כאן. כאילו תדפיס אותם, ותגיד מי מהם הוא המקורי. לא תוכל לזהות, והם דומים*. טיעון זה דומה לזה שהציגה בדיון הקבוצה, אך משוכלל יותר: הוא מציג מבחן אמפירי לקביעת קיום תכונת הדמיון.

בהמשך שיחת המליאה איה מגייסת טיעון מתחום השוואת העוצמות של קבוצות אינסופיות: *כאילו, אם יכולת לומר, המשולש הקטן והמשולש הגדול הם, טוב, אם תיצור התאמה חד-חד-ערכית בין כל המשולשים, ...אם נוכל לייצר את הזוגות, ונוכל לעשות זאת לנצח, זה באמת דומה.*

דיון

הקטעים שהבאנו מעבודת הקבוצה מצביעים על הופעת הבנת הקשר שבין תכונת הדמיון של צורה וקיומו של תהליך איטרטיבי אינסופי של יצירת הצורה. בנוסף מתגלה כיצד עולה רעיון זה על-ידי איה, ומאומץ ע"י חברתה באותה קבוצת עבודה (עדה). שיחת מליאת הכיתה נותנת לאיה הזדמנויות נוספות לגבש את הרעיון של דמיון במשולש סירפינסקי, תוך הישענות על מה שהציגה בקבוצה אך גם תוך גיוס משאבים נוספים מידע מתמטי קודם שלה. תלמידים נוספים עוקבים אחרי ההסברים של איה, והעובדה שערכו דיונים דומים בקבוצתם מאפשרת להם להתבטא באופן דומה בראיונות שנערכו עימם באמצע הקורס (Apkarian, Tabach, Rasmussen, & Dreyfus, 2019).

הקטעים שהבאנו מעידים על צעדים ראשונים לקראת הבניית מושג הדמיון העצמי. למעשה ההגדרה של דמיון עצמי הוצגה בכיתה רק בהמשך שיחת המליאה. צעדים ראשונים אלו התאפשרו לאור תכנון הפעילות על ידי המרצה, וכן לאור נורמות העבודה שהתפתחו בכיתת החקר בקורס זה.

רשימת מקורות

Apkarian, N., Tabach, M., Rasmussen, C., & Dreyfus, T. (2019). The Sierpinski smoothie: Blending area and perimeter? *Educational Studies in Mathematics, 101*(1), 19-34. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09889-4

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 195-222.

Mandelbrot, B. B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York, NY: Freeman.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., DeVilliers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 48*, 691-719.

מתמטיקה בגן הילדים - ידע של ילדים במטלת דגם צומח

איריס שרייבר- אוניברסיטת בר אילן וסמינר הקיבוצים

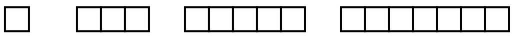
רקע תיאורטי

בעשורים האחרונים קיימת הסכמה רחבה בישראל (משרד החינוך 2010) ובקרב חוקרי חינוך מתמטי ברחבי העולם (Clements & Sarama, 2011; NCTM, 2000) כי חשוב לקדם ידע מתמטי של ילדים כבר מגיל הגן ומומלצות פעילויות שמטרתן פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך, ביסוס היסודות המתמטיים למגוון נושאים ומושגים אותם ילמדו הילדים בבית הספר, ופיתוח יצירתיות ודרכי חשיבה מגוונות.

הנושא המתמטי שנבחר למחקר זה, מתוך תכנית הלימודים, הינו נושא **הדגמים**. חוקרים רבים בתחום החינוך המתמטי טוענים כי העיסוק בדגמים חשוב כיוון שהוא מפתח היבטים של חשיבה מתמטית המסייעים ברכישת מושגים מתמטיים כגון משתנה, ביטוי אלגברי ועוד (Mulligan & Mitchelmore, 2018; Warren, 2005). **חשיבות נושא הדגמים** בגן הילדים מודגשת במסמכי מדיניות בהם מומלץ למורים לעשות שימוש בדגמים (NCTM, 1989) ובתוכנית הלימודים על פיה על הילדים מעורבים לזהות, לתאר וליצור דגמים (משה"ח, 2010).

במאמרים רבים מתוארים מחקרים העוסקים בדגמים בגן הילדים ובהם, בין היתר, עיסוק בידע של ילדים בפתרון מטלות דגמים. נמצא כי ילדים יוצרים דגמים חוזרים באופן ספונטאני, אולם, הם מתקשים בתיאור מילולי של הדגם ובזיהוי יחידת הבסיס החוזרת של הדגם (Fox, 2005; Garrick, Threlfall & Orton, 1999; Papic & Mulligan, 2007). במחקרים שונים ישנן התייחסויות לשגיאות ילדים בפתרון דגמים כמו המשך הדגם באופן אקראי, חזרה על האיבר האחרון בדגם בהתמדה (Clements & Sarama, 2007; Starkey, Klein & Wakeley, 2004), העתקת הדגם או חלק ממנו (גז-סנדלר, 2010) או העתקת הדגם כתמונת ראי (Fox, 2005; Garrick et al., 1999).

המחקר הנוכחי מתמקד בדגם צומח, (growing pattern) שהוא דגם הגדל (או קטן) באופן שיטתי. למשל הדגם הבא בו מספר הריבועים גדל באופן שיטתי:

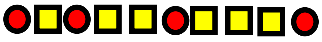


דגם צומח איננו כלול בתוכנית הלימודים של גני ילדים בישראל אך הוא חלק מתוכנית הלימודים במדינות אחרות (למשל באוסטרליה), והעיסוק בו מומלץ על ידי חוקרי חינוך מתמטי כיוון שהוא מזמן זיהוי חוקיות והכללה (Gibbs, 1999; Mulligan & Mitchelmore, 2018; Mulligan et al. 2011; Papic & Mulligan, 2007; Warren, 2005). ידע ילדי גן בדגם צומח לא נבדק מספיק בישראל ומפאת חשיבות העיסוק בו נבחר להיבדק במחקר זה. במחקר זה נבדק ידע ילדי גן בהקשר לנכונות תשובות ושגיאות ילדים בפתרון מטלת דגם צומח תוך השוואה בין אוכלוסיות ילדים על פי גיל.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 206 ילדים מגני ילדים ממלכתיים ביישוב במרכז הארץ: 99 ילדים בגן טרום חובה (בגילאי 4 עד 5), 107 ילדים בגן חובה (בגילאי 5 עד 6). בכל הגנים למדו יחד ילדים בגיל גן טרום חובה שעבורם זו השנה הראשונה בגן וילדים בגיל גן חובה שעבורם זו השנה השנייה בגן. כל הילדים שהשתתפו במחקר למדו דגם חוזר (ובו יחידה החוזרת על עצמה) ולא למדו כלל דגם צומח.

במחקר נבדקו תשובות ילדים שהתבקשו להמשיך את הדגם הצומח הבא :



המבדק בוצע מול צג מחשב באמצעות תוכנה שפותחה במיוחד לצורך המחקר. על צג המחשב הופיע הדגם הצומח מתחתיו הצורות (ריבועים צהובים ועיגולים אדומים) מהן יכול הנבדק לבחור את המתאימות להמשך הדגם.

ההמשך המצופה:

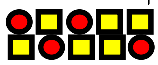
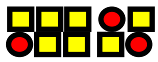
בחלק הראשון של המחקר הילדים פתרו מטלות של המשך והשלמת דגם חוזר (שרייבר, 2017). <u>כל</u> הילדים הבינו את ההוראות, השתמשו ללא קושי בתוכנה והמשיכו את הדגם על ידי דגם חוזר שיחידת החזרה בו היא נכונה: ריבוע צהוב ועיגול אדום אך לא בהכרח בחרו להתחיל בצורה הנכונה- 80.6% ענו נכון.

בחלק השני, שבו עוסק מאמר זה, קיבלו הילדים את מטלת הדגם הצומח.

ממצאי המחקר

במחקר נמצא כי אחוז הילדים שהמשיכו את הדגם כדגם צומח, הוא נמוך: כ- 5% מכלל הילדים ענו נכון. הילדים ששגו בפתרון המטלה הפיקו כמה סוגי המשכים. בטבלה 1 מובאים ההמשכים השונים שהילדים הפיקו לדגם הנתון.

טבלה 1 אחוז הילדים שהפיקו המשכים שונים לדגם הנתון

תשובת הילדים	כל המדגם N = 206	גיל טרום חובה N = 99	 חובה N = 107	מובהקות ההבדל על פי מבחן $\chi^2(1)$
המשך נכון 	5.3	3.0	7.5	-
העתקת הדגם או 	41.3	28.3	53.3	**
דגם חוזר 	30.6	40.4	21.5	**
העתקת ראי של הדגם או 	12.1	16.2	8.4	-

** $p<0.01$

התשובה השכיחה ביותר (כ- 40%) בתשובות הילדים הייתה העתקה של הדגם הנתון או חלקו משמאל לימין. המשך דגם באופן כזה דווח בספרות במטלת המשך דגם חוזר (גז-סנדלר, 2010) ובמחקר הנוכחי נצפה במטלת המשך דגם צומח. השגיאה אפיינה יותר ילדים בגיל חובה.

התשובה השנייה בשכיחותה (כ- 30%), גם היא שגויה, הייתה המשך עם דגם חוזר. השגיאה אפיינה יותר ילדים בגיל טרום חובה. המשך של דגם צומח על ידי דגם חוזר לא דווח (עד כמה שידוע לי) בספרות המחקרית.

התשובה השלישית בשכיחותה (כ- 12%) הייתה העתקה של הדגם מימין לשמאל כתמונת "ראי". לא נמצא הבדל מובהק בין ילדים בגיל טרום חובה לילדים בגיל גן חובה. המשך דגם באופן כזה דווח בספרות המחקרית במטלת המשך דגם חוזר (Fox, 2005; Threlfall, 1999; Garrik et al, 1999) ובמחקר הנוכחי נצפה במטלת המשך דגם צומח.

תשובות שגויות נוספות שהופיעו בשכיחות נמוכה:
המשך עם רצף ריבועים או רצף עיגולים: או .
המשך עם דגם חוזר אחר, למשל:  והמשכים אחרים כמו: .

סיכום ודיון בממצאים

למחקר זה ממצא מרכזי בולט: שתי שגיאות שכיחות שהופיעו באחוזים גבוהים היו שגיאות שבהן הילדים העתיקו את הדגם או את חלקו (או מימין לשמאל כתמונת ראי או משאל לימין). שגיאות אלה מרמזות על האופן בו הילדים מתייחסים אל הדגמים: הם אינם מחפשים את החוקיות אלא מעתיקים את הדגם הנתון וכך יוצרים את ההמשך שלו. ממצא זה מחזק ממצאים בספרות המקצועית בו נמצא כי ילדים מצליחים בפתרון דגמים כשהם פותרים בגישה פרוצדורלית ריתמית ללא גילוי החוקיות (Threlfall, 1999) . הממצא מרמז על האופן בו הדגם נלמד בגן: ללא שימת דגש על החוקיות שבה בנוי הדגם, אלא פתרון פרוצדורלי בלבד. לממצא השלכות על עבודת הגננת: הוא מדגיש כי על הגננת לחזק בהסבריה את ההיבט של החוקיות, להמליל אותה, ולתת מטלות בהן הילד מתבקש להסביר את החוקיות. דרך זו נכונה הן בדגמים חוזרים בהם יש להדגיש את המרכיב החוזר על עצמו והן בדגמים צומחים.

ממצא נוסף, התואם ממצאים המוצגים בספרות המחקרית (Warren, 2005), הוא שאחוז התשובות הנכונות למטלת המשך דגם צומח היה נמוך. ניתן לשער כי ממצא זה נובע מאחת הסיבות הבאות או משתיהן:

-בדגם הצומח ישנה התייחסות למשתנה הכמות בנוסף למשתנים צבע וצורה, דבר המעלה את רמת הקושי של המטלה.

-דגם צומח איננו חלק מתוכנית הלימודים לגן הילדים בישראל ולכן ההתנסות של הילדים עם דגם כזה הינה מועטה או כלל לא קיימת.

מאחר שבדגם החוזר אחוזי ההצלחה היו גבוהים, ומאחר שלא נמצאו הבדלים בין ביצוע ילדי גן חובה לבין ביצוע ילדי גן טרום חובה בהתייחס לנכונות התשובות, ניתן לשער כי תהליך הלימוד הינו גורם משמעותי ומכאן עולה הצעה ללמד דגם צומח בגן הילדים.

רשימת מקורות מידע

משרד החינוך והתרבות. (2010). תוכנית לימודים במתמטיקה לגני ילדים בישראל לחינוך הממלכתי והממלכתי דתי. ירושלים: ת"ל.

גז-סנדלר, ל. (2010). זיהוי דגמים חוזרים בגן הילדים, עבודת גמר לתואר מוסמך, אוניברסיטת תל אביב, ישראל.

שרייבר, א. (2017). מתמטיקה בגן ילדים- ידע ילדי גן במטלות העוסקות בדגמים שונים. מספר חזק 2000, 28, 4-13.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Summative research on the building blocks Project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*, 136-16.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood mathematics intervention. *Science, 333*, 968-970.

Fox, J. (2005). Connecting algebraic development to mathematical patterning in early childhood. In P. Grootenboer., R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Proceeding of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (v1, pp. 221-228). Canbara, Australia: MERGA.

Garrick, R., Threlfall, J., & Orton, A. (1999). Pattern in the nursery. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 1-17). Cassel, London & New-York.

Gibbs, W. (1999). Pattern in the classroom. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 207-221). Cassel, London & New-York.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2018). Promoting early mathematical structural development through an integrated assessment and pedagogical program. In I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank & C. Benz (Eds.), Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education.

Mulligan, J., English, L. D., Mitchelmore, M., Welsby, S. & Crevensten, N. (2011). An evaluation of the pattern and structure mathematics awareness program in the early school years. *Proceedings of the AAMT-MERGA conference 2011, The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. & Mathematics Education Research Group of Australasia, Alice Springs*, 548-556.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Virginia, USA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation for school mathematics. Reston, Virginia, USA: NCTM.

Papic, M., & Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: an intervention study. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceeding of the 30th Annual Conference of the Mathematical Education Research Group of Australia* (v2, pp. 591-600). Sydney: MERGA.

Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's Mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly, 19,* 99-120.

Threlfall, J.(1999). Repeating pattern in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp.18-29). Cassel, London & New-York.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing pattern. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceeding of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (v4, pp. 305-312). Melbourne: PME.

השתתפות חקירתית של תלמידים בהקבצות לימוד שונות

מרב וינגרדן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
עינת הד-מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

חלוקה להקבצות לימוד הינו אחד הנושאים השנויים ביותר במחלוקת בשדה המחקר החינוכי מזה למעלה מ-70 שנה (Gamoran, 1989; Slavin, 1990). באופן ספציפי במתמטיקה, מחקרים רבים שפורסמו בשנים האחרונות מראים שאין השפעה חיובית משמעותית של חלוקה להקבצות לימוד על הישגי התלמידים (Ireson, Hallam, & Hurley, 2005). נהפוך הוא, נמצא שהישגי תלמידים הלומדים בכיתות הטרוגניות גבוהים יותר מהישגי תלמידים הלומדים בהקבצות לימוד (Boaler, 2005; Schmidt, Burroughs, Zoido, & Houang, 2015) ושהישגי התלמידים החלשים יורדים בעקבות חלוקה להקבצות (Linchevski & Kutscher, 1998). שיעורי המתמטיקה בהקבצות החלשות מאופיינים בשאלות סגורות ופשוטות, בתרגול רב ובזמן יקר המוקדש לניהול כיתה (Boaler, 2014; Turner, Rubie-Davies, & Webber, 2015). אולם, פחות ידוע על החשיפה לתכנים מתמטיים הניתנים בהקבצות הלימוד השונות ועל השתתפותם של התלמידים סביב תכנים אלו. מטרת המחקר הנוכחי היא לבחון את השתתפותם של תלמידים הלומדים בהקבצות לימוד שונות בשיח המתמטי.

רקע תיאורטי

השתתפות חקירתית בשיעורי המתמטיקה כוללת פיתוח של נרטיבים על עצמים מתמטיים על יד התלמיד. זאת, בניגוד להשתתפות ריטואלית בה התלמיד בעיקר משחזר הליכים שהודגמו לו על ידי אדם אחר (לרוב המורה) ועיקר השתתפותו בשיח היא כדי לשמר את מעמדו החברתי (Lavie & Sfard, 2016).

כדי להשתתף באופן חקירתי בשיעור ולדבר על עצמים מתמטיים כמועצמים (objectified) – כקיימים בזכות עצמם ללא קשר לפעולות, לבני אדם ולזמן – על הלומד להַדְמות (to same), כלומר, לראות את המימושים השונים של העצם המתמטי כ"אותו דבר" (Sfard, 2008, p. 170). תהליך זה הנו רקורסיבי שכן המימושים של העצם המתמטי הם, בעצמם, עצמים מתמטיים. לעצם המתמטי "חצי" למשל, יש מימושים שונים: 1/2 , 0.5 , 50%, 8/16 , כמו גם מימושים ויזואליים, "ארבעה משולשי פיצה", "חצי עוגה", "3 משבצות צבועות מתוך 6" וכד'.

כלי ה-RTA (Realization Tree Assessment) שפיתחנו (Weingarden, Heyd-Metzuyanim, & Nachlieli, 2019) מאפשר מיפוי של השתתפות התלמידים ביצירת נרטיבים על עצמים בשיעור. חוזקתו היא בכך שהוא מראה ויזואלית ומספרית כמה מימושים של האובייקט המתמטי המרכזי נדונו בשיעור ועד כמה התלמידים היו שותפים ליצירת נרטיבים לגביו. במחקר הנוכחי אנו עושות שימוש ב-RTA בכדי לבחון האם קיימים הבדלים בתמונות ה-RTA של הקבצות לימוד שונות, כלומר, האם השתתפותם החקירתית של התלמידים שונה בין הקבצות נמוכות להקבצות גבוהות.

מתודולוגיה

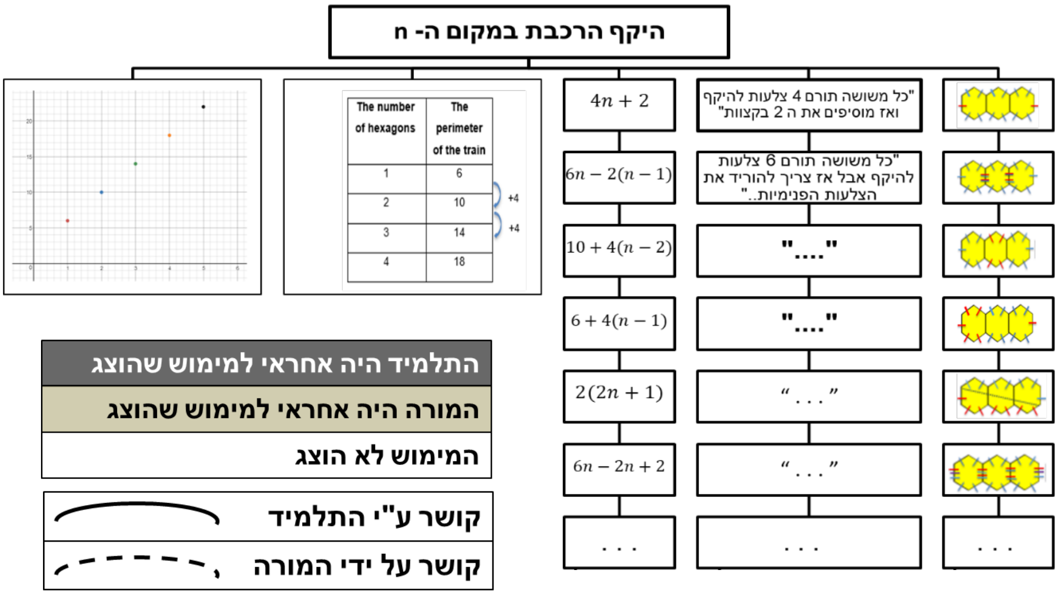
המחקר נערך כחלק מפרויקט מחשב"ה (מהלכים מעודדי חשיבה בהוראת המתמטיקה) שבו נערכו השתלמויות מורים בהן נחשפו המורים לפרקטיקות הוראה שונות המעודדות השתתפות חקירתית (Heyd-Metzuyanim, Nachlieli, Weingarden, & Baor, 2018). במחקר השתתפו 28 מורים המלמדים מתמטיקה בחטיבת הביניים (כתות ז'-ט') בקבוצות לימוד שונות [הקבצה נמוכה (N=11), הקבצה גבוהה (N=15), כיתה הטרוגנית- ללא הקבצות (N=2)]. קטגוריית ההקבצה (גבוהה מול נמוכה) נקבעה על פי כלל ההקבצות בשכבה והחציון שלהן. כלומר הקבוצות הלומדות מעל ההקבצה האמצעית (חציונית) הוגדרו כ 'הקבצה גבוהה' והאחרות כ'הקבצה נמוכה'.

כחלק מההשתלמות, המורים התבקשו ליישם בכיתותיהם את פרקטיקות ההוראה שנלמדו תוך שימוש במשימה מתמטית. אחת המשימות, שנדונה בהרחבה בהשתלמות, הייתה משימת המשושים (איור 1).

איור 1. *משימת המשושים.*

שיעורים אלו צולמו באמצעות מצלמת וידאו נייחת. מאמר זה מתמקד ב-28 שיעורים המבוססים על משימת המשושים וזאת כדי לאפשר השוואה של עצי ה-RTA בשיעורים השונים.

ה-RTA – כלי הערכת עצי מימושים (Weingarden et al., 2019) מנתח את מידת ההשתתפות החקירתית של תלמידים באמצעות ייצוג ויזואלי של המימושים שהוזכרו במהלך הדיון הכתתי. עץ המימושים למשימת המשושים מופיע באיור 2. בראש העץ מוצג העצם המתמטי הפוטנציאלי של המשימה: "היקף הרכבת במקום ה n" ומתחתיו מוצגים כל המימושים השונים שלו. עבור כל שיעור, נצבעו המימושים שהוזכרו בשיעור בהתאם למי שיצר את הנרטיבים אודות המימושים (התלמיד או המורה) וסומנו קשרים שנערכו בין מימושים שונים בהתאם למי שיצר את הקשרים (התלמיד או המורה).

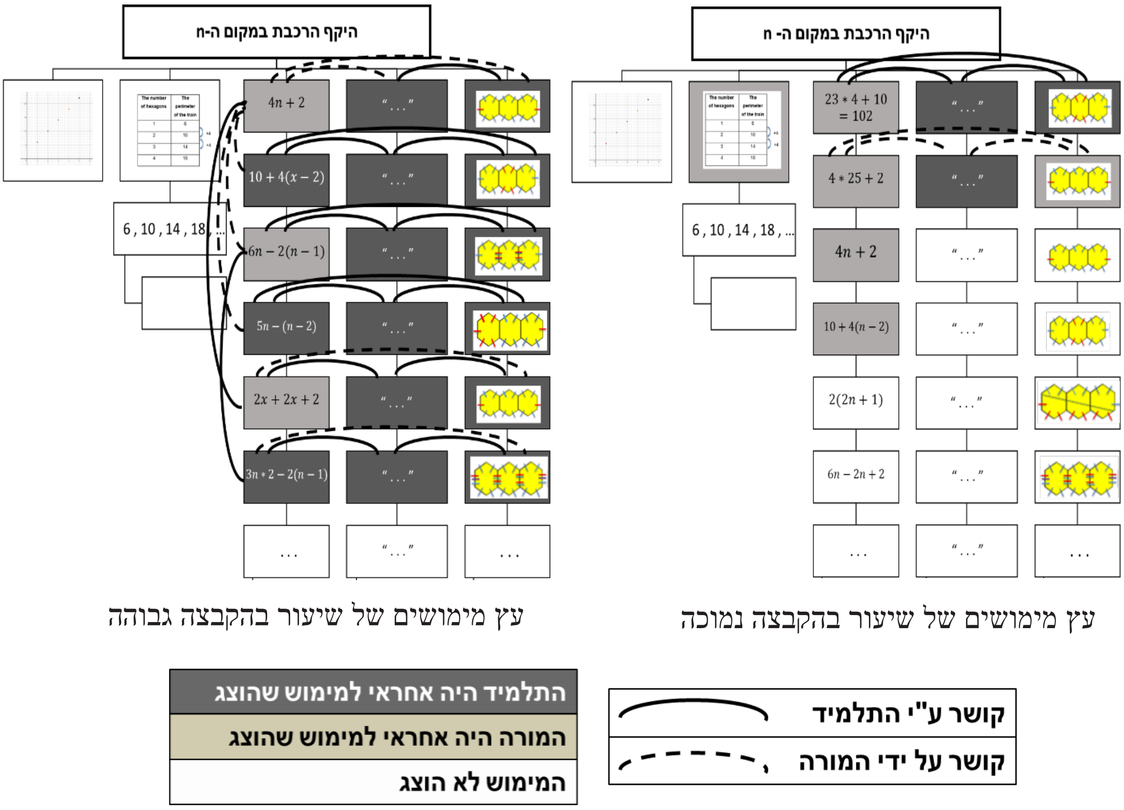


איור 2. *עץ המימושים למשימת המשושים.*

תהליך הכימות של דיאגרמות העצים נעשה באמצעות שני חישובים. הראשון, חישוב היחס בין הקשרים והמימושים שהופיעו בכל שיעור לבין המספר המקסימלי של קשרים ומימושים שהופיעו בשיעור כלשהו במדגם. השני, חישוב היחס בין מספר הקשרים והמימושים שהציגו התלמידים בכל שיעור לבין מספר הקשרים והמימושים שהוצגו באופן כללי בשיעור (Weingarden & Heyd-Metzuyanim, 2018). מהממוצע של שני חישובים אלו התקבל עבור כל שיעור מספר בין 0 ל-1 המתאר את השתתפותם החקירתית של התלמידים בשיעור (1 מתאר השתתפות חקירתית מקסימלית, ביחס לשיעורים שנצפו ו-0 מתאר השתתפות חקירתית מינימלית). כדי לבדוק האם קיימים הבדלים בהשתתפותם החקירתית של תלמידים בהקבצות הלימוד השונות, נערכו ניתוחי שונות Anova חד-כיוונית.

ממצאים מרכזיים

מדיאגרמות עצי המימושים עולה כי תלמידים הלומדים בהקבצות הגבוהות משתתפים באופן חקירתי יותר מאלו הלומדים בהקבצות החלשות. באיור 3 מתוארים שני עצי מימושים של שני שיעורים שונים כאשר העץ הימני מתאר שיעור בהקבצה נמוכה והעץ השמאלי מתאר שיעור בהקבצה גבוהה.



איור 3. דוגמא להשוואה בין עצי מימושים המתארים שיעורים בהקבצות לימוד שונות

בהשוואה להקבצה הגבוהה, בהקבצה הנמוכה הוצגו מספר קטן יותר של מימושים של העצם המתמטי ונעשו פחות קשרים בין המימושים. מכיוון שהתלמידים בהקבצה זו נחשפו לפחות מימושים, ההזדמנות שלהם להדמות בין מימושים שונים הייתה מוגבלת. מגמה דומה ניתן למצוא גם במידת הסמכות של התלמידים סביב יצירה ופיתוח של נרטיבים על עצמים מתמטיים. בהקבצה הנמוכה, התלמידים הציגו מספר קטן של מימושים וקשרים בהשוואה לאלו שהוצגו על ידי המורה. זאת, בשונה מההקבצה הגבוהה שם רוב הקשרים והמימושים הוצגו על ידי התלמידים.

מניתוח כמותי של עצי המימושים (טבלה 1) עולה תמונה דומה. ניתוחי שונות Anova חד-כיוונית הראו כי קיימים הבדלים מובהקים במדד ההשתתפות החקירתית של תלמידים בין הקבצות הלימוד השונות ($F(2,25)=10.98$, $p<0.001$). בניתוחי המשך מסוג Duncan ו-Scheffe נמצא כי מדד ההשתתפות החקירתית בהקבצות חלשות נמוך באופן מובהק ממדד זה בהקבצות גבוהות. אמנם לא נמצאו הבדלים מובהקים במדד ההשתתפות החקירתית בין הכיתה ההטרוגנית להקבצות הלימוד השונות אך ממוצע המדד היה גבוה יותר מההקבצות הנמוכות וייתכן שהיעדר מובהקות הוא תוצאה של עוצמה סטטיסטית נמוכה.

קבוצת לימוד	ממוצע	סטיית תקן	N
הקבצה נמוכה	0.35	0.12	11
כיתה הטרוגנית	0.51	0.16	2
הקבצה גבוהה	0.61	0.14	15

טבלה 1. מדד ההשתתפות החקירתית של תלמידים בהקבצות לימוד שונות

דיון

תוצאות המחקר הנוכחי מחזקות ממצאים קודמים אודות השוני במתמטיקה אליה נחשפים תלמידי הקבצות חזקות לעומת חלשות (Boaler, 2014; Turner et al., 2015). המחקר הנוכחי מראה שתלמידים הלומדים בהקבצות חזקות נחשפים ליותר מימושים וגם מקבלים (או לוקחים) יותר סמכות לייצר נרטיבים על עצמים מתמטיים מאשר בהקבצות נמוכות. המסקנה מכך היא שסביבות הלמידה בהקבצות החזקות מאפשרות יותר השתתפות חקירתית לעומת סביבות הלמידה בהקבצות נמוכות שמזמנות בעיקר השתתפות ריטואלית. חשוב לציין שמדגם השיעורים מצומצם ואיננו בהכרח מייצג. לפיכך, תוצאות מחקר זה ראשוניות ויש לגבש אותן במחקרי המשך.

מקורות

Boaler, J. (2005). The “psychological prisons” from which they never escaped: The role of ability grouping in reproducing social class inequalities. Forum, 47(2–3), 135–144.

Boaler, J. (2014). Ability Grouping in Mathematics Classrooms. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education (pp. 1–5). Springer Netherlands.

Gamoran, A. (1989). Measuring Curriculum Differentiation. American Journal of Education, 97(2), 129–143.

Heyd-Metzuyanim, E., Nachlieli, T., Weingarden, M., & Baor, R. (2018). The “TEAMS” Professional Development Program for Enhancing Explorative Instruction. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 5, p. 63). Umeå, Sweden: PME.

Ireson, J., Hallam, S., & Hurley, C. (2005). What are the effects of ability grouping on GCSE attainment? British Educational Research Journal, 31(4), 443–458.

Lavie, I., & Sfard, A. (2016). Objects from talking: how small children are Create numbers within a discourse. Israeli Journal for Research and Study in Mathematics Education, 4, 22–67.

Linchevski, L., & Kutscher, B. (1998). Tell Me With Whom You’re Learning, and I’ll Tell You How Much You’ve Learned: Mixed-Ability Versus Same-Ability Grouping in Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 29(5), 533–554.

Schmidt, W. H., Burroughs, N. A., Zoido, P., & Houang, R. T. (2015). The Role of Schooling in Perpetuating Educational Inequality: An International Perspective. Educational Researcher, 44(7), 371–386.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating. New York: Cambridge University Press.

Slavin, R. E. (1990). Achievement effects of ability grouping in secondary schools: A best-evidence synthesis. Review of Educational Research, 60(3), 471–499.

Turner, H., Rubie-Davies, C. M., & Webber, M. (2015). Teacher Expectations, Ethnicity and the Achievement Gap. New Zealand Journal of Educational Studies, 50(1), 55–69.

Weingarden, M., & Heyd-Metzuyanim, E. (2018). Examining Explorative Instruction According to the Realization Tree Assessment Tool. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 427–434). Umeå, Sweden: PME.

Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E., & Nachlieli, T. (2019). The realization tree assessment tool – examining explorative participation in mathematics lessons. Journal of Mathematical Behavior.

הערכה-עצמית של יצירתיות מתמטית והתפתחותה: סיפורם של שני תלמידים

עטרה שריקי, מכללת סמינר הקיבוצים
אילנה לביא, המכללה האקדמית עמק יזרעאל

מבוא

מזה למעלה ממאה שנה עוסקים חוקרים במורכבותה של היצירתיות, תוך התייחסות לתהליך היצירתי, האדם היצירתי, הסביבה היצירתית והתוצר היצירתי. נקודות מבט אלו הניבו מגוון גישות להערכת יצירתיות, ביניהן פסיכומטרית, קוגניטיבית, וחברתית-אישית (שריקי, 2015). בתחום החינוך המתמטי מקובל לפתח ולהעריך יצירתיות על בסיס היכולת של הלומד לפתור בעיות בדרכים שונות או מגוון השאלות שיש בכוחו להעלות (Silver, 1997). במאמר זה נציג ממצאים חלקיים מתוך התנסות של תלמידים בלמידה בסביבה שנועדה לטפח את היצירתיות המתמטית שלהם תוך עיסוק בהעלאת בעיות בהתאם לאסטרטגיה "מה אם לא?" (Brown & Walter, 1990) והערכה של התפתחות היצירתיות המתמטית באמצעות הגישה הפסיכומטרית של טורנס (Torrance, 1974), ובפרט הערכה-עצמית של התפתחותה.

סביבת הלמידה והבסיס התיאורטי שלה

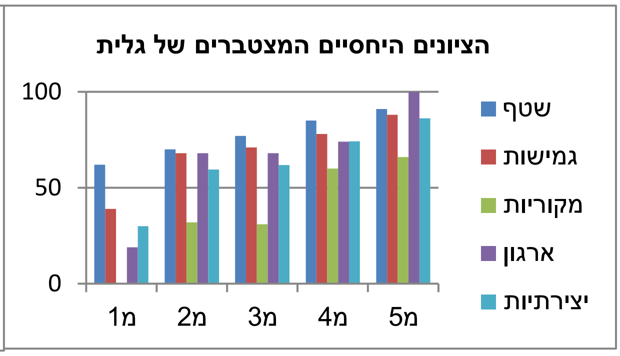
סביבת הלמידה שפיתחנו (Shriki & Lavy, 2014) נועדה לסייע למורים ליישם בכיתותיהם גישה שתתמוך בטיפוח היצירתיות המתמטית של תלמידיהם, תוך שמירה על מטרות תכנית הלימודים, ושימוש בדרכי הערכה קלות ליישום. בתוך כך, הושם דגש על פיתוח יכולת הלומדים להפיק תוצר יצירתי, כאשר התוצר הוא בעיות שאותן מעלים התלמידים באמצעות שימוש באסטרטגיה "מה אם לא?". הערכת התוצרים התבצעה על-ידי התאמת הגישה הפסיכומטרית של טורנס (Torrance, 1974), שהינה בעלת ארבעה מדדים – שטף, גמישות, מקוריות וארגון. בהקשר של העלאת בעיות: שטף נמדד בהתאם למספר הבעיות השונות שהועלו, גמישות בהתאם למספר הקטגוריות השונות של הבעיות, מקוריות בהתאם לשכיחות היחסית של הבעיות בקבוצת הייחוס של התלמידים, וארגון בהתאם למספר הבעיות המנוסחות כהכללה. בכל אחת מהמדדים הנ"ל מתקבלים עבור כל תלמיד הן ציונים אישיים והן ציונים יחסיים לחבריו לכיתה: ציון עבור כל אחד מארבעת הממדים, וציון כללי בגין יצירתיות (בשקלול כלשהו של כל מדד) (Shriki, 2013). בתום כל משימה, כל תלמיד מקבל תצוגה גרפית של הציונים היחסיים שלו. החל מהמשימה השנייה, התצוגה הגרפית כוללת ציונים מצטברים, כך שתלמיד יכול לעקוב אחר ההתקדמות/הנסיגה שלו ביחס לחבריו לכיתה. ההתנסות בהערכה-עצמית מבוססת על התפיסה לפיה הערכה-עצמית של יצירתיות כשלעצמה דורשת יצירתיות, ומאפשרת לתלמידים להשביח את תוצריהם בתהליך איטראטיבי (Chamberlin & Moon, 2005). תהליך זה מתבצע ללא התערבות המורה.

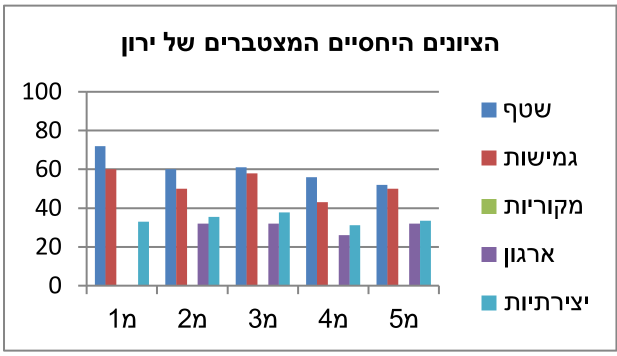
המחקר

במחקר השתתפו 190 תלמידים מ – 6 בתי ספר בצפון הארץ, מכיתות ט-י"ב. לאחר היכרות עם סביבת הלמידה, התנסו התלמידים בחמש משימות של העלאת בעיות. בעקבות כל משימה סיפקו המורים לכל תלמיד תצוגה גרפית של ציוניו היחסיים, והתלמידים התבקשו להשיב לשאלון שכלל שלוש בעיות פתוחות:
בהינתן התצוגה הגרפית שלך, מה דעתך על: 1. היצירתיות שלך בהקשר של העלאת בעיות מתמטיות?; 2. היכולת שלך להעלות שאלות מתמטיות? 3. התפתחות היצירתיות המתמטית שלך? יש לנסות להסביר שינויים או היעדר שינויים.
המחקר עקב אחר תפיסות של תלמידים על אודות ההשפעה של תהליכי ההערכה-העצמית של היצירתיות שלהם על הסוגיות המופיעות בשלש השאלות הללו. תשובות התלמידים נותחו בהתאם לגישה של אינדוקציה אנליטית, תוך שימוש בקידוד פתוח וקידוד צירי אשר הניב את קטגוריות הממצאים (Strauss & Corbin, 1990).

ממצאים ודיון

להלן נתמקד בגלית ובירון, שני תלמידים שלמדו מתמטיקה בכיתה י"א ברמה של 4 יח"ל. לפני תחילת הניסוי ממוצע הציונים שלהם במתמטיקה היה 86 ו- 82, בהתאמה. במהלך ההתנסות, בעוד שציוניה היחסיים של גלית עלו בהתמדה, ציוניו היחסיים של ירון נותרו כמעט ללא שינוי וחלקם אף ירד. באיור 1 ניתן לראות את הציונים המצטברים שלהם עבור 4 הממדים של יצירתיות, כמו גם עבור יצירתיות, לאורך 5 משימות של העלאת בעיות (מ1-מ5).





בניגוד לממצאיהם של צ'מברלין ומון (Chamberlin & Moon, 2005), נראה שלהערכה-עצמית של יצירתיות יש השפעה שונה על תלמידים שונים. מכאן עולה השאלה: מהם הגורמים, אשר בשילוב תהליכים של הערכה-עצמית, משפיעים על התפתחות היצירתיות המתמטית של תלמידים? על מנת להשיב לשאלה נבחן כמה מתשובותיהם של גלית וירון לשאלונים (בסוגריים מספר המשימה-השאלה).

גלית: "הציונים שלי היו מאכזבים...לא הקדשתי לזה מספיק זמן...אעבוד קשה יותר במשימה הבאה" (מ1-2); "אני לא מרוצה מהציון על מקוריות...אחשוב 'בגדול' בפעם הבאה" (מ2-1); "המאמצים שלי השתלמו...חוץ מאשר מקוריות. אני אדם די יצירתיות...ואני לא מוותרת" (מ3-3); "שיניתי את הטקטיקה שלי, וזה עבד! חשבתי שאם אעלה יותר בעיות, אגדיל את הסיכוי להיות יצירתית" (מ4-2); "המשימות...נתנו לי אפשרות לחשוב אחרת. בהתחלה, פחדתי לחשוב פרוע מדי...אבל כשראיתי את הציונים שלי...הבנתי שאם אגביל את עצמי לבעיות פשוטות, לא אגיע רחוק...הכללתי את הבעיות, וכמו שאת רואה [המורה], אני אחת מהתלמידות הכי יצירתיות בכיתה! יש!" (מ5-3).

ירון: "ניסיתי לחשוב על הרבה סוגים של בעיות, וחשבתי שזה יספיק...כשראיתי את הציון שלי על יצירתיות, הבנתי שזה לא מספיק...אז אני לא הכי מקורי ויצירתי" (מ1-1); "ניסיתי להוכיח לך [המורה] שאני יכול להיות מקורי, אבל עכשיו אני יודע שאני לא...רק נעשיתי יותר גרוע" (מ2-3); "אולי אני פשוט לא יודע להעלות שאלות. אף פעם לא עשינו את זה בכיתה" (מ3-1); "התלמידים האחרים הרבה יותר יצירתיים ממני, אז אני מוותר" (מ4-3); "אני מבין שעשינו מעין ניסוי כזה, אבל את [המורה] היית צריכה להסביר את זה יותר טוב, או להגיד לי מה אני לא עושה טוב. אם היית שואלת אותי לפני חודש אם אני יכול להעלות בעיות מתמטיות, הייתי אומר לך שכן, אבל התברר לי שאני לא כ"כ טוב בזה" (מ5-2).

את האמירות שלעיל ננתח לאור תיאוריית ההשקעה של שטרנברג ולוברט (Sternberg & Lubart, 1995). התיאוריה נמצאה מתאימה מכיוון שהיא מתמקדת בקשרים הפנימיים בין אישיות לבין תוצר, תוך התייחסות לשישה משאבים: יכולת אינטלקטואלית, ידע, סגנון חשיבה, אישיות, מוטיבציה וסביבה. על מנת להשתמש במשאבים אלה ביעילות, יש לנצל כל אחד מהם בנפרד ואת כולם ביחד, כאשר לעיתים משאבים "חזקים" מפצים על משאבים "חלשים".

משאבי **היכולת האינטלקטואלית** מתייחסים, בין השאר, להכרה ברעיונות שראוי לממש ובנכונות להקדיש לכך זמן. בעוד גלית לוקחת אחריות על ההישגים שלה, ומכירה בצורך להקדיש יותר זמן כדי לשפר את ציוניה היחסיים, הרי שירון אינו עושה כל מאמץ לנקוט בדרך שונה מזו אשר הוא מזהה כבלתי יעילה. משאבי **סגנונות החשיבה** מתייחסים לקבלת החלטות בנוגע לארגון המיומנויות **ומשאבי אישיות** קשורים לנכונות להתגבר על מכשולים, לנטילת סיכונים ולתחושת מסוגלות-עצמית. ניכר שגלית מצליחה לנתב את פעולותיה- הקדשת זמן רב יותר, ושינויי אסטרטגיה. היא בעלת תחושת מסוגלות-עצמית גבוהה באשר ליצירתיות שלה, ושילוב הדברים, כמו גם המוטיבציה הפנימית להשתפר הובילו להצלחה. ירון, לעומתה, ממהר "להרים ידיים", ונראה שחסרים לו משאבי האישיות שיאפשרו לו להתגבר על מכשולים ולקחת סיכונים. תחושת המסוגלות-העצמית המתמטית הנמוכה שלו באה לידי ביטוי כבר בתום מ1. ירון רואה בתהליך מעין תחרות בין התלמידים, מה שמחבל בהתפתחות היצירתיות שלו, פוגע בתחושת המסוגלות-העצמית

שלו ומדכא את המוטיבציה הפנימית שלו, ומדבריו עולה האשמה כלפי המורה על כך שלא סיפקה לו תנאים מספיקים להצלחה.

מסקנות

שני המקרים המתוארים מצביעים על כך שהערכה-עצמית של יצירתיות עשויה לקדם תלמידים שהם מלכתחילה בעלי תערובת אופטימלית של משאבים. אולם, תלמידים אשר חסרה להם רמת סף כלשהי של כמה מהמשאבים עלולים להיפגע מהתהליך. לפיכך, גישת ההערכה-העצמית שלעיל אינה טובה לכלל התלמידים. בעוד גלית מבטאת יכולת לפתור את ההתלבטויות שלה בכוחות עצמה, יתכן וירון יכול היה לנצל את הפוטנציאל היצירתי שלו אילו היה מקבל משוב והדרכה מהמורה, שכן ישנם אנשים המצוידים בכל המשאבים הפנימיים הדרושים כדי להפגין יצירתיות, אולם אם אינם מקבלים תמיכה מהסביבה או שמקבלים משוב שלילי על מאמצי היצירה שלהם, יתקשו בהפגנת יצירתיות (Sternberg, 2009). מחקר המשך צריך להתמקד בתרומה של הוספת מרכיב של משוב מורה או משוב עמיתים לתהליך ההערכה-העצמית המתואר, ולהתייחס גם להערכה-עצמית של ציונים אישיים מוחלטים ולא רק יחסיים.

רשימת מקורות

שריקי, ע. (2015). יצירתיות- פנים רבות לה. בתוך א. גזית, וד. פטקין (עורכים), **יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות** (עמ' 96-19). הוצאת מכון מופ"ת.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 37-47.

Shriki, A. (2013). A model for assessing the development of students' creativity in the context of problem posing. *Creative Education, 4*(7), 430-439.

Shriki, A., & Lavy, I. (2014). Students' self-assessment of creativity: Benefits and limitations. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 5*, pp. 177-184. Vancouver, Canada: PME.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 75-80.

Sternberg, R. J. (2009). The nature of creativity. In J. C. Kaufman, & E. L. Grigorenko (Eds.), *The essential Sternberg: Essays on intelligence, psychology and education* (pp. 103-118). Springer Publishing Company.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1995). *Defying the crowd: Cultivating creativity in a culture of conformity*. New York: Free Press.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage Publications, Inc.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

סיטואציות הוראה שמורים מנוסים מעצבים במטרה לטפח גמישות בפתרון בעיות מתמטיות

מנוחה פרבר, מכון ויצמן למדע
גליה גונן, מכון ויצמן למדע
לילך איילי, נסרין ג'אד באסילה, בלה כהן, ורדית כהן סנגייר, דורית ליקרמן, אנטולי פולונסקי, אלה צפלביץ', קהילת מש"ל חיפה
בוריס קויצ'ו, מכון ויצמן למדע

רקע

גמישות מחשבתית מוזכרת בדרך כלל לצד שטף ומקוריות כממדים המרכזיים של יצירתיות (Guilford, 1967; Torrance, 1974). בהקשר זה גמישות מתפרשת כיכולת למצוא דרכים שונות לפתרון בעיה. למרות שפעילות מתמטית אותנטית שזורה ביצירתיות, שיעורי המתמטיקה המסורתיים מספקים לתלמידים מעט הזדמנויות להתנסות בהיבט זה של המתמטיקה (Silver, 1997; Sriraman, 2005). עם זאת, התלמידים זקוקים לגמישות מחשבתית כמשאב לפתרון בעיות מתמטיות. במהלך הניסיון לפתור בעיות נדרשת יכולת בקרה המאפשרת לפותר לבחור אם להמשיך עם הגישה הנוכחית שלו, לשנות אותה או לנטוש אותה לחלוטין. במקרים האחרונים עליו לבצע מעגל חדש של תכנון, ביצוע ובקרה (Carlson & Bloom,2005; Schoenfeld, 1985). פותר שאינו גמיש יישאר 'תקוע' בגישה הראשונית שלו. פויה סבור שגם במקרה שהגישה הראשונה כן מובילה לפתרון הבעיה כדאי לחפש דרך נוספת לפתרון, שכן פתרון בדרכים שונות מאפשר להשתכנע יותר באמצעות הוכחות שונות או לבכר פתרון קצר ואינטואיטיבי על פני פתרון ארוך ומסורבל (Pólya, 1945).

סילבר (Silver, 1997) סוקר הצעות לפיתוח יצירתיות בכלל, וגמישות בפרט, בעזרת הוראה המבוססת על חיבור בעיות ועל פעילות חקר סביב בעיות פתוחות. אולם, מורים רבים נמנעים מפעילויות כאלה (Sriraman, 2005). גישה נוספת מציעה לפתח גמישות בעזרת השוואה בין דרכי פתרון של תלמידים שונים לבעיה (Yakes & Star, 2011). גישה זו מניחה שהצגת הדרכים השונות והדיון בהן בכיתה עשויה לשפר את יכולת התלמידים לגשת לבעיות בעתיד ביתר גמישות. אולם, בפתרון הבעיה הנוכחית התלמיד האינדיבידואלי אינו מתנסה בהכרח בגמישות, שכן כל תלמיד פותר את הבעיה רק בדרך אחת.

הנחת היסוד של המחקר המוצג היא שאם רוצים לגלות כיצד ליצור הזדמנויות שיאפשרו לתלמידים להתנסות בגמישות מחשבתית וייראו למורים מתאימות לשגרת ההוראה שלהם, כדאי לחקור שאלה זו בשיתוף פעולה עם מורים. בחירה זו נובעת מתפיסה שאינה רואה את התאוריה המחקרית כעומדת מעל פרקטיקת ההוראה ואת המורים כצרכנים של המחקר, אלא מדגישה את ההדדיות של יחסי הגומלין בין הפרקטיקה והמחקר, כאשר התאוריה נובעת מההוראה וחוזרת כדי להזין ולהדריך אותה (Cobb, 2000; Superfine,2019).

המסגרת התיאורטית מש"ל (מורים שותפים למחקר) התפתחה לאחרונה לשם תמיכה, שיפור והרחבה של שיתופי פעולה בין חוקרי חינוך מתמטי למורים (Koichu & Pinto, 2018). שיתוף הפעולה במש"ל מכוון ללמידה משותפת של החוקרים והמורים סביב נושאי עניין משותפים. מחקר זה בוצע בקהילת מורים הפועלת במסגרת מש"ל.

מטרת המחקר היא אפיון סיטואציות הוראה שמורים מנוסים למתמטיקה מעצבים, במסגרת מחקר משותף עם חוקרי חינוך מתמטי, במטרה לעודד גמישות מחשבתית של תלמידים בפתרון בעיות. סיטואציות הוראה אלה, בהשראת הסיטואציות הדידקטיות של ברוסו (Brousseau, 1997), כוללות את הבעיות שיוצגו לתלמידים כדי לזמן גמישות ופרקטיקות הוראה המתייחסות לדרכי הצגתן בכיתה, כדי שיעודדו גמישות אצל התלמידים.

מתודולוגיה

המחקר נערך בקהילת מש"ל בה השתתפו שבעה מורי תיכון מנוסים. עידוד גמישות מחשבתית של תלמידים נבחר על ידי הקהילה כנושא המחקר הקהילתי שבוצע במהלך שנת הלימודים תשע"ט. בשלב הראשון של המחקר המורים עיצבו סיטואציות הוראה במטרה לזמן ולעודד גמישות. הם פירטו למה לסיטואציות ההוראה שהציעו יש פוטנציאל לעשות זאת. תהליך העיצוב של סיטואציות ההוראה היה תהליך איטרטיבי של הצגת התוצרים בפני חברי הקהילה, קבלת משוב ועיצוב מחודש. כך התגבש הנוסח הסופי של סיטואציות ההוראה שנבחרו. בהמשך, המורים הפעילו ותיעדו את הסיטואציות בכיתות.

תהליכי עיצוב הסיטואציות תועדו במספר דרכים. מפגשי הקהילה תועדו בצילומי וידאו וביומני החוקרים, ותוצרי המורים תועדו בשלבים שונים של הפעילות ובסופה.

חברי הקהילה הגדירו גמישות מחשבתית כיכולת לעזוב גישה אחת לפתרון בעיה ולעבור לגישה אחרת. המורים עיצבו את סיטואציות ההוראה לאור הגדרה זו. בהתאם אליה נותחו סיטואציות ההוראה בגישה של תאוריה מעוגנת בשדה (Charmaz, 1996), כדי לזהות מאפיינים של סיטואציות הוראה שמורים מעצבים במטרה לעודד גמישות.

ממצאים ודיון

ברוסו (Brousseau, 1997) מתייחס למשימה ולאופן שבו המורה מתווך לתלמידים את העבודה עליה כשניים מהגורמים המרכזיים בסיטואציות המתרחשות בכיתה. ברוח זו אורגנו ממצאי המחקר הנוכחי לפי בעיות ופרקטיקות הוראה.

הבעיות

זוהו שלושה דפוסים של בעיות העשויות לזמן גמישות מחשבתית: (1) **בעיות המובילות למבוי סתום** – דרך הפתרון הסטנדרטית הצפויה אינה מובילה לפתרון. תלמיד שינסה שוב ושוב ליישם את כיוון החשיבה הראשוני ירגיש 'תקוע', ויש סיכוי שתחושה זו תאלץ אותו לחפש כיוון חשיבה חדש. (2) **דרכי פתרון מרובות** – בעיה שניתן לפתור בדרכים שונות. הציפיה לגמישות אינה מבוססת על העדפה של כיוון חשיבה אחד על פני אחר, אלא על כך שכל תלמיד יחפש דרכים נוספות לפתרון הבעיה. ככל שהבעיה ניתנת לפתרון ביותר דרכים שונות, כך יש לה פוטנציאל גדול יותר לעודד גמישות כשהתלמידים יחפשו דרכים רבות ככל האפשר לפתרונה. חשוב לציין כי אם תלמידים שונים יפתרו את הבעיה בדרכים שונות, זו לא תהיה בהכרח התנסות בגמישות, גם אם התלמידים ייחשפו לפתרונות השונים של עמיתיהם. רק תלמיד שיפתור את הבעיה בעצמו ביותר מדרך אחת יגלה גמישות בפתרון. (3) **חיפוש דרך אלטרנטיבית** – בעיה שהדרך הסטנדרטית הצפויה אמנם מובילה לפתרונה, אך ניתן להגיע לפתרון גם בדרך 'אלגנטית' יותר. למרות שפותר שבחר בגישה הסטנדרטית אינו אמור להרגיש 'תקוע', פתרון בדרך ארוכה עשוי להרתיע, וכך לעודד חיפוש גישה אלטרנטיבית.

פרקטיקות הוראה

פרקטיקות ההוראה שהוצעו על ידי המורים עסקו בהנעת התלמידים לגלות גמישות בפתרון הבעיות. מהצעות אלה עלתה הבחנה מעניינת בין גמישות מתוך הכרח לבין גמישות מתוך אתגר.

כאשר התלמיד מגיע למבוי סתום עשויה להתגלות גמישות הנובעת מההכרח לחפש אלטרנטיבה. מורים שרצו לעודד נטישה של דרך פתרון סטנדרטית לטובת דרך אלטרנטיבית הציעו לתת לתלמידים רמזים שיעזרו להם לחשוב על גישה אחרת לבעיה. הצעה זו דורשת חשיבה: מתי כדאי לתת את הרמז? האם לתת אותו רק לפותרים שיבקשו? איך לבחור רמז עדין, שיגביר את הסיכוי שהפותר ישנה כיוון חשיבה, ועדיין לא יפתור עבורו את הבעיה? רמזים שונים שהוצעו התייחסו לזמן הפתרון, לתחום המתמטי או ניתנו בעקיפין על ידי הוספת סעיף מקדים.

כשמבקשים מתלמיד שפתר את הבעיה בדרך אחת לחפש דרך פתרון נוספת מצפים לגמישות הנובעת מאתגר. במקרה זה ההנחיה לתלמידים היא לנסות לפתור את הבעיה בדרכים רבות ככל האפשר, לעתים אפילו באמצעים תחרותיים.

סיכום

אופיינו שלושה סוגים של בעיות שמורים רואים כבעלות פוטנציאל לזמן גמישות. בנוסף, הוצעה הצגה מאתגרת ותחרותית כדי לעודד פתרון בדרכים שונות, וסוגים שונים של רמזים עדינים שעשויים לעודד חיפוש דרך אלטרנטיבית.

היתרון הבולט של סיטואציות ההוראה שהמורים עיצבו הוא שהן מתאימות להשתלב בשגרת הפרקטיקה של המורים, הן מבחינת תוכנן המתמטי, והן מבחינת אופיין הפדגוגי. יתרון נוסף הוא העובדה שבסיטואציות אלה התלמידים לא רק נחשפים לדרכי פתרון שונות אלא מתנסים בגמישות מחשבתית בעצמם כאשר הם עוברים מגישה אחת לפתרון הבעיה לגישה אחרת. לסיום, סיטואציות ההוראה שעוצבו עשויות לשמש כמודלים למורים שיוכלו לעצב לאורם סיטואציות הוראה נוספות במטרה לעודד גמישות.

רשימת מקורות

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. N. Balacheff, M. Cooper, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.R. Sutherland & V. Warfield: (Eds. and Trans.).

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational studies in Mathematics*, *58*(1), 45-75.

Charmaz, K. (1996). The search for Meanings–Grounded Theory. In. Smith JA, Harre R., & Van Langenhove L.(Eds.), Rethinking Methods in Psychology (pp. 27–49).

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Guilford, J. P. (1967). The nature of human intelligence. New York, NY, US: McGraw-Hill.

Koichu, B., & Pinto, A. (2018). Developing Education Research Competencies in Mathematics Teachers Through TRAIL: Teacher-Researcher Alliance for Investigating Learning. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *18*(1), 68-85.

Pólya, G. (1945). How to solve it. New Jersey: Princeton University.

Schoenfeld, A. H. (1985). A framework for the analysis of mathematical behavior. *Mathematical problem solving*, 11-45.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm*, *29*(3), 75-80.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics?. *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 20-36.

Superfine, A. C. (2019). Reconceptualizing ways of studying teacher learning: working with teachers rather than conducting research on teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(1), 1-4.

Torrance, E. P. (1974). Torrance Tests of creative thinking. Bensenville, ILL: Scholastic Testing Service.

Yakes, C., & Star, J. R. (2011). Using comparison to develop flexibility for teaching algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 175-191.

מודל לטיפוח הכוונה עצמית בלמידה: קוגניטיבית מטהקוגניטיבית - (SRL) ומוטיבציונית רגשית - (SDT) לפיתוח יכולת העברה מפתרון בעיות מילוליות להפקת שאלות במתמטיקה 1

ענבל קולושי - מינסקר, אוניברסיטת בר-אילן ושאנן המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר-אילן

הקדמה ורקע תיאורטי

לפתרון בעיות מילוליות (סיפור ושאלות) חשיבות בחינוך המתמטי כחלק מתוכנית הלימודים. אולם בחינת יכולת העברה מפתרון בעיות להפקת שאלות קיבלה פחות תשומת לב בהוראת המתמטיקה. על-מנת שתלמידים יבצעו העברה זו, הם צריכים להשתמש במיומנויות של הכוונה עצמית, הכוללות הן את ההיבט הקוגניטיבי-מטהקוגניטיבי והן את ההיבט המוטיבציוני-רגשי (OECD, 2018). אולם מרבית תוכניות הטיפוח במתמטיקה עסקו במיומנויות קוגניטיביות-מטהקוגניטיביות ולא שילבו מיומנויות מוטיבציוניות-רגשיות הנחוצות לביצוע העברה, שהיא משימה ברמת חשיבה מסדר גבוה (Bicer, Capraro, & Capraro, 2013).

מטרת המחקר היא לפתח ולבחון מודל ייחודי לטיפוח הכוונה עצמית בפתרון בעיות, לשם העלאת יכולתם של התלמידים לבצע העברה להפקת שאלות לבעיות נתונות. המודל מבוסס על מרכיבי שתי תיאוריות הכוונה עצמית: SRL להכוונה קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית ו-SDT להכוונה מוטיבציונית-רגשית המטפחת אוטונומיה, יכולת ושייכות, שעל-פי מרכיביהן והשילוב ביניהם נבנו שלוש תוכניות התערבות (SRL+SDT;SRL;SDT). ייחודיות נוספת למחקר הינה ההתמקדות בשתי קבוצות גיל של תלמידים צעירים בכיתות ה' ו-ג', זאת על-מנת לבחון באיזה גיל ניתן לפתח יכולת הכוונה עצמית בעת פתרון בעיות.

שאלות המחקר

1. האם יימצאו הבדלים ביכולת ביצוע העברה מפתרון בעיות להפקת שאלות לבעיות נתונות בין תלמידי כיתות ה' לבין תלמידי כיתות ג', שנחשפו לשלוש תוכניות התערבות (SRL+SDT;SRL;SDT)?
2. באיזו מידה תלמידים שנחשפו לשלוש התוכניות ידווחו על עצמם כמשתמשים במיומנויות הכוונה עצמית בלמידה SRL ובמיומנויות מוטיבציוניות-רגשיות SDT בעת הפתרון?

[1] מאמר זה הוא תוצר מתוך עבודת הדוקטור שבוצעה באוניברסיטת בר אילן, בהנחייתה של פרופ׳ ברכה קרמרסקי

שיטה

במחקר השתתפו 383 תלמידים בכיתות ה' ו-ג', משלושה בתי-ספר יסודיים ממלכתיים (מדד טיפוח על-פי משרד החינוך: עשירון 8+ שמשקף אוכלוסייה חלשה).

תוכניות ההתערבות לטיפוח הכוונה עצמית כללו 20 שיעורים במשך חמישה חודשים:

בשלוש הקבוצות התלמידים נחשפו לארבעה סוגי בעיות לפי המבנה בתוכנית הלימודים (משרד החינוך, 2006): צירוף, החלפה, השוואה וכפליות. האימון היה בפתרון בעיות (סיפור ושאלות נלוות) בליווי דיון כיתתי. התלמידים נבחנו על מגוון מיומנויות לפתרון בעיות, אך הדיווח הנוכחי מתמקד על יכולתם לבצע העברה להפקת שאלות לבעיות נתונות.

תלמידים בקבוצות המשלבות הכוונה עצמית קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית (SRL+SDT ו-SRL) תרגלו פתרון בעיות בסיוע כרטיס ניווט שהוא מחוון **לאפיון וזיהוי סוגי בעיות והמבנה שלהן** (מאפיינים), לדוגמה: בעיה סטטית – בעיית הכללה שמאפייניה הם קבוצה כוללת וקבוצות חלקיות; בעיה דינאמית – בעיית רצף שמאפייניה הם התחלה, פעולה וסוף; בעיית השוואה שמאפייניה הם קבוצה גדולה, קבוצה קטנה וקבוצת הפרש/יחס; בעיית כפל-חילוק שמאפייניה קבוצות, פריטים בכל קבוצה ופריטים בסה"כ (נשר, תשס"ג; סגל, 2002). במהלך פתרון הבעיות התלמידים שאלו את עצמם שאלות הכוונה עצמית בלמידה המטפחות מיומנויות של תכנון, ניטור והערכה (Zimmerman, 2008), לדוגמה: *מה בבעיה? מהי האסטרטגיה? מהו סוג הבעיה? במה הבעיה דומה ובמה היא שונה מבעיות קודמות וכדומה* (Mevarech & Kramarski, 2014).

תלמידים בקבוצות המשלבות הכוונה עצמית מוטיבציונית-רגשית (SRL+SDT ו-SDT) תרגלו פתרון בעיות בסיוע שאלות מכוונות לצרכים פסיכולוגיים בסיסיים: אוטונומיה, שייכות ויכולת (Ryan & Deci, 2000) בהתבסס על דיאלוג תומך צרכים (קפלן ועשור, 2003), לדוגמה: *האם הייתי פעיל/ה בפתרון הבעיה? האם הבעיה עוררה בי עניין? האם התייחסו לדבריי? האם העבודה עם חבריי סייעה לי? וכדומה.*

כלי המחקר

לבחינת שאלת המחקר הראשונה – השוואה ביכולת העברה להפקת שאלות לבעיות נתונות (כיתות ה' ו-ג'), כל תלמיד התבקש להפיק שתי שאלות לשתי בעיות שהוצגו בדיאגרמה, לפני התערבות ולאחריה. הציינון נעשה על-פי מחוון לאפיון וזיהוי סוגי בעיות והמבנה שלהן: 0 נק' –ללא מלל או מלל שאינו רלוונטי *לדוגמה: הילדים נהנו בפריז?* עד 3 נק' – שאלה עם אפיון כמותי הדורשת פתרון דו-שלבי /רב-שלבי, *לדוגמה: אם ידוע שליואב ביום א' יש 175 קלפים, כמה קלפים יהיו לו אם הוא ירוויח כל יום עוד 25 קלפים?* השאלות עם האפיון הכמותי חושבו באחוזים מתוך סך כל השאלות שנכתבו בכל קבוצה.

לבחינת שאלת המחקר השנייה – הועברו לתלמידים (כיתות ה' ו-ג') סרגלי שיפוט לדיווח עצמי במיומנויות הכוונה עצמית, (Pintruch et al., 1993) *לדוגמה*, SRL: *באיזו מידה נזכרתי בחוקים ובכללים שלמדנו לפני פתרון הבעיה?* ו-SDT: *באיזו מידה אני מרגיש/ה פעיל/ה בעת פתרון בעיות.*

ממצאים מרכזיים

במענה לשאלת המחקר הראשונה, לאחר ההתערבות (ANCOVA), בכיתות ה' בשלוש קבוצות ההתערבות נמצאה עלייה ביכולת העברה להפקת שאלות עם אפיון כמותי, כאשר היכולת הגבוהה ביותר נמצאה בקבוצה המשולבת SRL+SDT (57.6%), אחריה בקבוצת SRL בלבד (53.6%), ואחריה קבוצת SDT בלבד (45.9%), ואילו בכיתות ג' יכולת ההעברה להפקה הגבוהה ביותר נמצאה בקבוצת SRL בלבד (32.1%), אחריה קבוצת SRL+SDT (21.1%) ואחריה קבוצת SDT בלבד (9.8%). כמו כן, נמצא כי אחוז השאלות עם אפיון כמותי בקרב תלמידים מכיתה ה' גבוה מאחוז התלמידים מכיתה ג'.

במענה לשאלת המחקר השנייה לבחינת הדיווח העצמי של התלמידים במיומנויות SRL ו-SDT באמצעות סרגלי שיפוט נמצא לאחר ההתערבות (ANCOVA), כי בקרב תלמידי ה' ו-ג' בשלוש קבוצות ההתערבות עלתה תחושת ה-SRL (קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית) בעת פתרון בעיות. עם זאת, תלמידים שקיבלו התערבות ישירה של טיפוח מיומנויות מוטיבציוניות-רגשיות SDT, דיווחו על תחושה גבוהה יותר של אוטונומיה, שהתייחסה במחקר: לפעלתנות לומד, גילוי עניין ורלוונטיות בעת פתרון בעיות.

דיון ותרומת המחקר

מממצאי המחקר עולה כי תלמידים באימון SRL ששאלו את עצמם שאלות בתחום התוכן המתמטי, כלומר, שאלות שעזרתן אפיינו וניתחו את הבעיות על-פי סוגיהן וזיהו את המאפיינים הייחודים של כל בעיה, הצליחו לבצע העברה מפתרון בעיות להפקת שאלות עם אפיון כמותי. לעומתם, תלמידים שנחשפו להתערבות SDT בלבד ששאלו את עצמם שאלות המכוונות לצרכים הפסיכולוגים הבסיסיים, הגיעו להישגים נמוכים יותר בביצוע ההעברה. עוד נמצא כי תלמידי כיתות ה' הצליחו להפיק שאלות עם אפיון מתמטי מורכב יותר מתלמידי כיתות ג'. הדבר מצביע על יכולת התפתחות קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית עם הגיל (קולושי-מינסקר, 2019; Mevarech & Kramarski, 2014). עם זאת, טיפוח הכוונה מוטיבציונית-רגשית (SDT) בעת העיסוק בפתרון בעיות, העלה את תחושת האוטונומיה בקרב התלמידים.

ממצאים אלו מחזקים ממצאי מחקר נוסף שנערך בקרב תלמידי כיתות א'-ו' ומצא על-פי מודל סטטיסטי (SEM) קשר חיובי וחזק בין שתי תיאוריות הכוונה עצמית: SRL ו- SDT. כמו כן נמצא קשר ישיר וחיובי בין SRL (קוגניציה ומטהקוגניציה) לבין הישגים בפתרון בעיות, ואילו SDT (מוטיבציה ורגש) נמצא כמתווך להישגים (קולושי-מינסקר, 2017).

לפיכך מומלץ לטפח בתלמידים צעירים בבית-ספר יסודי הן מיומנויות קוגניטיביות-מטהקוגניטיביות (SRL) והן מיומנויות מוטיבציוניות-רגשיות (SDT), שיובילו לשיפור ביכולת העברה מפתרון בעיות להפקת שאלות, ובכך לטפח חשיבה מתמטית מסדר גבוה. במחקרי המשך מומלץ לבחון את השפעת

התוכנית המשולבת SRL+SDT בדרגות כיתה שונות והעברה לאורך זמן בדרכי הערכה בזמן אמת כמו חשיבה בקול.

מקורות

משרד החינוך, התרבות והספורט (2006). *תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א'-ו' בכל המגזרים*. ירושלים: משרד החינוך, התרבות והספורט, המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים.

נשר, פ' (תשס"ג). שלושה מרכיבי קושי של שאלה מילולית במתמטיקה. *עיונים בחינוך, 10*, 131-144.

סגל, ד' (2002). *אחת ולתלמיד*. ירושלים: אלמוג.

קולושי-מינסקר, ע' (2019). טיפוח הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. *כתב עת למחקר ועיון בחינוך מתמטי, שאנן-המכללה האקדמית הדתית לחינוך, 7*, 117-128 .

קולושי-מינסקר, ע' (2017). *מודל טיפוח הכוונה עצמית בלמידה וצרכים פסיכולוגיים: אוטונומיה, שייכות ויכולת, להעלאת הישגים בפתרון בעיות במתמטיקה*. חיבור לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה. בית ספר לחינוך, אוניברסיטת בר אילן, רמת גן.

קפלן, א' ועשור, א' (2003). דיאלוג תומך צרכים פסיכולוגים בין מורים ותלמידים כמקדם רווחה נפשית בבית הספר: המשגה ותוכנית יישומית. *הייעוץ החינוכי, 13*, 161-188.

Bicer, A., Capraro, R.M, & Capraro, M.M. (2013). Integrating Writing into Mathematics Classroom to Increase Students' Problem Solving Skills. *International Online Journal of Educational Sciences, 5 (2)*, 361-369.

Kramarski, B., Weisse, I., & Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 42*(2), 179-193.

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2014). *Critical Maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. OECD publisher, Paris (196 pages).

OECD. 2018. *The Future of Education and Skills: Education 2030*. Paris: OECD. https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf.

[Google Scholar]

Pintrich, P. R. (2000). An achievement goal theory perspective on issues in motivation terminology, theory and research. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 92-104.

Pintrich, P. R., Smith, D. A. F., Garcia T., & Mckeachie, W. J. (1993). Reliability and predictive validity of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ) *Educational and Psychological Measurement, 53*, 801-813.

Ryan, R. M., & Deci, E. R. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 54-67.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological development, and future prospects. *American Educational Research Journal*, *45*(1), 166-183.

ניתוח שיפוטים מטה-קוגניטיביים במהלך חשיבה בקול בעת פתרון בעיות תובנה במתמטיקה

סטלה גידלביץ, מכללת אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר-אילן

מבוא

פתרון בעיות תובנה הינו נושא מורכב לתלמידים, במיוחד בגילאים הצעירים. תובנה מספרית היא "הבנה של מצבים והקשרים תוך חיבורם לידע קיים או ניסיון קודם" (NCTM, 2009). אולם הקשיים בבעיות אלה לא תמיד נובעים מחוסר ידע בתחום התוכן, אלא הינם תוצאה של חוסר יכולת לפקח ולבקר על תהליכי הפתרון (Schoenfeld, 1992). לכן תיאורטיקנים ממליצים על הכוונה מטה-קוגניטיבית לצורך וויסות הלמידה ושיפור ההישגים במתמטיקה.

מטה-קוגניציה מוגדרת כחשיבה על חשיבה ומכוונת להבנת משימה ולאסטרטגיות פתרון (Flavel, 1979). היא מתייחסת לתהליכים מחזוריים של **תכנון** הפתרון (חשיבה מראש), **פיקוח** (בעת ביצוע המטלה) **והערכה** (רפלקציה, Zimmerman, 2000). מקובל להתייחס בתהליך זה לשני מרכיבים מרכזיים: ידע של קוגניציה ובקרה של הקוגניציה (Pintrich et al., 2000), בעשור האחרון מרחיבים את ההתייחסות למרכיב נוסף - השיפוטים המטה-קוגניטיביים. תחום השיפוטים עדיין חסר במתמטיקה והמחקר הנוכחי תורם להבנת השיפוט העצמי בפתרון בעיות תובנה בגיל צעיר של תלמידים בכיתה ד'.

שיפוט מטה-קוגניטיבי הינו הערכה פרוספקטיבית או רטרוספקטיבית של הבנת התלמיד במשימה תוך התייחסות לשלבים של לפני, במהלך או לאחר השלמת משימה (Mihalca, Mengelkamp & Schnotz, 2017). מבחינים בארבעה סוגים של שיפוטים המעורבים בתהליך הלמידה:

1. **שיפוט קושי או קלות הלמידה** (EOL - Ease of Learning): הערכה פרוספקטיבית של הלומד את הקושי במשימה. הוא מתבצע לפני משימת הלמידה (*"האם המשימה קשה או קלה עבורי"?*).
2. **שיפוט הלמידה** (JOL - Judgement of Learning) מתייחס למודעות הלומד לאסטרטגיית הלמידה שנבחרה וליעילותה. אם התלמיד יאמר לעצמו: *"אני לא מבין את הבעיה הזו"*, הוא עשוי לקרוא פעם נוספת את הבעיה.
3. **תחושה של ידיעה** (FOK - Feeling of Knowing): התלמיד שאינו יכול לזכור איך לבצע מטלה, אך יש לו תחושה חזקה שהוא מכיר את דרך הביצוע. השיפוט מתבטא בשאלה עצמית: *"האם קראתי, שמעתי או בדקתי בעבר משהו על בעיה זו?"*.
4. **ביטחון בשיפוט** (CJ - Confidence Judgements): הערכה רטרוספקטיבית של התלמיד את הפתרון בסוף התהליך (*"אני בטוח שצדקתי"*).

תלמידים עם שיפוט יתר עלולים להפסיק את ביצוע המטלות לפני השגת מטרת הלמידה, או לא לחפש את הטעות ולא לתקן אותה (Isaacson & Fujita, 2006). ההסבר לשיפוט יתר נמצא במיומנויות מטה-קוגניטיביות לא מפותחות. סיבה נוספת היא בלבול בין רצונות לציפיות: כשתלמיד מתבקש להעריך את נכונות הביצוע, הוא מתייחס להערכת המאמץ שהשקיע ולא לתוכן המטלה (Destan & Roebers, 2015). יכולת השיפוט ניתנת לשיפור בעקבות אימון בתוכניות התערבות שונות. אך מחקרים אלו נערכו בגילאים בוגרים ואילו במחקר המוצע תלמידים צעירים אומנו לכל 4 סוגי השיפוטים.

הספרות מציינת כי הכוונה מטה-קוגניטיבית **מפורשת** תורמת הן לטיפוח המטה-קוגניציה והן לתובנה מספרית. שיטה זו מבוססת על שאלות מטה-קוגניטיביות עצמיות: ***מה?, מתי?, למה? וכיצד?*** במהלך שלבי הפתרון: תכנון, פיקוח והערכה (Mevarech & Kramarski, 1997, 2014).

המחקר הנוכחי מהווה חלק ממחקר מקיף ורב משתתפים (קבוצת ניסוי וביקורת) במתודולוגיה כמותית (שאלונים ומבחנים) ואיכותנית (ראיונות מורים ותלמידים וניתוח חשיבה בקול בהיבט מתמטי-מטה-קוגניטיבי). מחקר זה שם זרקור על חשיבות השיפוט העצמי של התלמיד בפתרון בעיות תובנה.

מטרת המחקר המקיף היתה לבדוק את השפעת תכנית התערבות המשלבת הכוונה מטה-קוגניטיבית בפתרון בעיות תובנה עם אימון לשיפוט עצמי על יכולת התובנה ועל מיומנויות מטה-קוגניטיביות מגוונות. אי לכך בכנס אנו מציגים את השפעת האימון לשיפוט מטה-קוגניטיבי באמצעות ניתוח חשיבה בקול רם על יכולת להמליל את פתרון הבעיה בעזרת ההיגדים המטה-קוגניטיביים בקרב קבוצת מיקוד.

שיטה

נבחרו 24 תלמידי כיתה ד' משתי כיתות הטרוגניות ברמת הישגים דומה (בבדיקה לפני ההתערבות): ניסוי וביקורת (12 תלמידים בכל קבוצה). התוכנית ארכה 12 שיעורים.

בכל שיעור פתרו התלמידים בשתי הקבוצות ארבע בעיות תובנה מתוכנית הלימודים. בקבוצת הניסוי התלמידים נחשפו לטיפוח מטה-קוגניטיבי בדגש על השיפוטים. על התלמידים היה להעריך את הבנתם בעזרת סרגל לשיפוט עצמי (0-100) שהותאמו ל-4 סוגי השיפוטים בשלבים השונים של הפתרון (Gidalevich & Kramarski, 2017). בכל שאלה שולב שיפוט אחד, בסה"כ בכל שיעור נחשפו התלמידים לכל 4 השיפוטים. בסיום השיעור נערך דיון בעקבות השיפוטים בהשתתפות התלמידים.

בתום ההתערבות התבקשו התלמידים לפתור **בעיה חדשה,** בשיטת החשיבה בקול רם, בפגישה אישית עם כל תלמיד בנפרד (10 דקות בממוצע). לצורך הערכת תהליך השיפוט נעשה **ניתוח פרוטוקולים** של **חשיבה בקול רם.** שיטה זו חושפת את מטרותיו של הלומד בהגדרת משימת למידה, הבנת בעיה, תכנון פתרון, בחירת אסטרטגיה, מעקב אחר ביצוע ושיפוטים מטה-קוגניטיביים. פתרונות התלמידים הוקלטו ותועדו בכתב.

המורה סידרה את תלמידי הכיתה בקבוצות של 5 ילדים,
וילד אחד נשאר לבד.
כאשר המורה סידרה את ילדי אותה הכיתה בקבוצות של 6 ילדים,
כל הילדים הסתדרו בקבוצות.
כמה ילדים יש בכיתה? נמקו!

ניתוח הממצאים

מיון וסיווג של היגדי הפתרון עפ"י המדדים: ידע ובקרה של הקוגניציה וארבעת השיפוטים, בזיקה לשלבי הפתרון (תכנון, פיקוח והערכה). נערכה מהימנות בין שני שופטים.

תוצאות

ממצאי המחקר המקיף העידו על שיפור ניכר בפתרון בעיות תובנה ויכולת מטה-קוגניטיבית (ידע, בקרה ושיפוטים). בניתוח הפרוטוקולים בקבוצת המיקוד נצפו פתרונות מתמטיים מקוריים תוך שימוש באסטרטגיות מתוחכמות. ניכר שימוש בשפה מתמטית מדויקת בהמללת תהליכי הפתרון.

בקבוצת הניסוי נמצאה שכיחות גבוהה של ההיגדים (ידע ובקרה של הקוגניציה ו-4 השיפוטים) בזיקה לשלבי הפתרון (תכנון, פיקוח והערכה), לעומת קבוצת הביקורת.

דוגמה לניתוח של **פתרון התלמיד בקבוצת הניסוי.**

אני מבין שצריך לפתור דווקא מהסוף. **מטה-קוגניטיבי**
אני לא כל-כך טוב בכפל **שיפוטים (FOK)**
ונראה שצריך פה כפל... **מטה-קוגניטיבי**
סימן ההתחלקות ב-5 זה 0 או 5 ביחידות **מטה-קוגניטיבי (ידע)**
אז כאן המספר ייגמר ב-1 או ב-6, כי יש שארית 1. **מטה-קוגניטיבי (ידע)** *ניכר כי הנבדק ערך הצלבה בין כל נתוני הבעיה והתאים לפתרון אסטרטגיה שתואמת את כל הנתונים בבעיה.*
צריך לבדוק את הכפולות של 6. **מטה-קוגניטיבי (בקרה)**

(לאחר התלבטות וסימני חשיבה על הפנים) יוצא 6 או 36. **מטה-קוגניטיבי (ידע)**
התשובה 6 לא מתאימה לי לנתונים כי לא נראה לי הגיוני, שבכיתה יהיו 6 תלמידים. **שיפוטים (JOL)**
אם 6 לא מתאים, אז נשאר 36. **מטה-קוגניטיבי**
כיסיתי את כל האפשרויות. **מטה-קוגניטיבי**
כי בדקתי את כל הכפולות של 6 שמתאימות לנתונים. **מטה-קוגניטיבי**
זאת הייתה בעיה מאתגרת אבל מעניינת, הצלחתי. **שיפוטים (CJ)**

דיון

הממצאים מעידים על יתרונותיו של האימון לשיפוט העצמי הבאים לידי ביטוי ביכולתם של הלומדים לפתח שפה מטה-קוגניטיבית ולדייק בשפה המתמטית. התלמידים בקבוצת הניסוי השתמשו בהיגדים מכל הסוגים בכל שלבי הפתרון, לעומת קבוצת הביקורת. עובדה זו נתמכת בהמלצות החוקרים שטוענים כי פתרון בעיות דורש שימוש באסטרטגיות מטה-קוגניטיביות לצד הדיוק בשיפוט, הקשור לקבלת החלטות במהלך הפתרון (Ramdass & Zimmerman, 2008). לומד עם שיפוט גבוה ומוטעה עלול להתעלם מהטעות ולא לתקן את עצמו ואף להגיע לסיכון לכישלון במתמטיקה (Labuhn et al. 2010).

תרומתו של המחקר בהרחבת ידע לגבי ההגדרה העדכנית של המטה-קוגניציה הכוללת התייחסות לכל סוגי השיפוט העצמי והערכה של השיפוט בתחום המתמטי בגיל הצעיר.

ביבליוגרפיה

Destan, N., & Roebers, C. M. (2015). What are the metacognitive costs of young children's overconfidence? *Metacognition and Learning, 10*(3), 347-374.

Gidalevich, S., & Kramarski, B. (2017). Metacognitive guidance for self-regulation judgements in various phases: A thinking aloud analysis in mathematics. *Hellenic Journal of Psychology*, *14*, 88–113.

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classroom. *American Educational Research Journal, 34*, 365–395.

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2014). *Critical maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. Paris: OECD.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 165–197). New York: MacMillan.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal, 45*(1), 166-183

פתרון בעיות מילוליות בגן הילדים: תרומתה של תמיכה משולבת מטה-קוגניטיבית רגשית לעומת תמיכה מטה-קוגניטיבית במהלך סיפור חשבוני מפעיל

זוהר גדסי, שאנן- המכללה האקדמית הדתית לחינוך
מירב צהר רוזן, מכללת לוינסקי לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב
פרופ' ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר-אילן

מבוא

בעיות מילוליות במתמטיקה הנו נושא משמעותי בגן הילדים ומהוות חלק נרחב מתוכנית הלימודים (משרד החינוך, 2010). הבעיות המילוליות מפתחות את החשיבה המתמטית, מעמיקות את הבנת משמעות פעולות החיבור והחיסור, מובילות ליישומה של המתמטיקה במצבים מחיי היום יום ומהוות תשתית להתמודדות עם נושא זה גם בבית הספר. לתהליך זה משמעות רבה, שכן מחקרים מצביעים על כך שפתרון בעיות מילוליות מהווה את אחד הנושאים הקשים ביותר לתלמידי בית הספר היסודי (OECD, 2014). קושי זה נובע מכך שפתרון בעיה מילולית דורש בין היתר, הפעלת תהליכים מטה-קוגניטיביים הכוללים תכנון, ניטור ובקרה ורפלקציה (Schoenfeld, 2000) . תהליכים אלה מורכבים לתלמידים בכלל ולילדים בגן הילדים בפרט והתמודדות עימם מובילה לעיתים קרובות לרגשות שליליים המפריעים לתהליך הלמידה (Tzohar-Rozen & Kramarski, 2018). מתוך כך, קיימת חשיבות רבה לטפח מיומנויות מטה-קוגניטיביות ומיומנויות להתמודדות עם רגשות שליליים, כבר בגן הילדים. אחת הדרכים היעילות לכך, הינה ההכוונה העצמית בלמידה (Zhang & Whitebread, 2017). במהלך ההכוונה העצמית, הלומד מציב מטרות, מתכנן, מפקח ומעריך את עבודתו, תוך התייחסות ישירה ומפורשת למרכיב המטה-קוגניטיבי ולמרכיב הרגשי. תהליך זה דורש הכשרה מפורשת של הלומד (Pintrich, 2000). עד כה, מרבית מחקרי ההתערבות נתנו מענה בעיקר למרכיב המטה-קוגניטיבי בעוד החלק הרגשי הוזנח.

במחקר הנוכחי פותחו 2 תוכניות התערבות במהלך פתרון בעיות מילוליות בגן הילדים: האחת, תכנית התערבות ייחודית משולבת הנותנת מענה סימולטני הן למרכיב המטה-קוגניטיבי והן למרכיב הרגשי. השנייה, תוכנית התערבות מטה-קוגניטיבית בלבד. כדי לאפשר לילדים תהליך למידה משמעותי ומותאם לגילם, תוכניות אלו התקיימו במהלך סיפור חשבוני מפעיל.

סיפור חשבוני מפעיל הינו סיפור הבנוי מטקסט עלילתי בהקשר מתמטי. הוא משקף את ההיבט הכמותי של המספר ומעניק משמעות למספרים ולפעולות החשבון, תוך הפעלת הלומד במהלך הקריאה. כלי זה, עשויי לשמש אמצעי אפקטיבי ללימוד מתמטיקה בגן הילדים. הקשר שלו משמעותי ומאפשר לילדים להבין טוב יותר את התכנים המופשטים של המתמטיקה בדרך מאתגרת ומהנה, הוא מעודד את הילדים לפעול בצורה אקטיבית ויצירתית, תוך חיזוק האספקט השפתי והמתמטי וכן חושף את הילד למגוון דרכים שונות לפתרון אותה בעיה (Perels et al., 2009). גישה זו נמצאת בהלימה לעקרונות הלמידה המשמעותית של הלומד האקטיבי במאה ה-21 בגן העתידי (תורג'מן, 2019).

מטרות המחקר

1. בחינת השפעתן של כל אחת מתכניות ההתערבות (משולבת ומטה-קוגניטיבית), בהשוואה לקבוצת הביקורת על ההישגים בפתרון בעיות מילוליות (שגרתיות ותובנה מספרית) של ילדים לאחר ההתערבות ולאורך זמן.
2. בחינת השפעתן של כל אחת מתכניות ההתערבות (משולבת ומטה-קוגניטיבית), בהשוואה לקבוצת הביקורת על תהליכי ההכוונה המטה-קוגניטיביים ותהליכי ההכוונה הרגשיים בפתרון שאלות מילוליות (שגרתיות ותובנה מספרית) של ילדים לאחר ההתערבות ולאורך זמן.

שיטה

מדגם

90 ילדים בגילאי 6-5 משלושה גנים במחוז צפון אשר חולקו באופן אקראי ל- 3 קבוצות:

קבוצה משולבת (n=30) תמיכה מטה-קוגניטיבית ורגשית

קבוצה מטה קוגניטיבית (n=30) תמיכה מטה-קוגניטיבית בלבד

קבוצת בקורת (n=30) תמיכה מסורתית של הוראה בגן.

כל אחת מהקבוצות השתתפה בתוכנית התערבות שכללה 8 מפגשים (25 דקות כ"א) שהתקיימו במשך 4 שבועות. בכל מפגש, נחשפה כל קבוצה למרכיב ההכוונה העצמית הרלוונטי עבורה, במהלך סיפור מפעיל (ראה נספח 1).

הקבוצה המשולבת נחשפה לשאלות מטה-קוגניטיביות ורגשיות המתייחסות לשלב התכנון ("מה אני מבין?", "כיצד אני מרגיש?"), לשלב הניטור ובקרה ("כיצד אני פותר?"), ולשלב הרפלקציה ("האם היה לי קל או קשה ולמה? איך הרגשתי?")

הקבוצה המטה-קוגניטיבית נחשפה לשאלות מטה-קוגניטיביות המתייחסות לשלב התכנון ("מה אני מבין?"), לשלב הניטור והבקרה ("איך אני פותר?") ולשלב הרפלקציה ("האם פתרתי נכון?")

קבוצת הביקורת נחשפה לפתרון פעיות מילוליות באופן מסורתי.

כלי מחקר

- מבחן פתרון בעיות מתמטיות - מטרת המבחן הייתה לבדוק את השינוי בהישגים המתמטיים של הילדים בקבוצות השונות לאחר ההתערבות וחודשיים לאחר ההתערבות. המבחן כלל ארבע בעיות שגרתיות הדומות לאלו שתורגלו בגן וכן שאלה של תובנה מספרית (משרד החינוך, 2010). השאלות המילוליות הועברו לילדים באופן פרטני. משך המבחן היה כ- 20 דקות והועבר על ידי הגננת. תשובה נכונה בכל מטלה קיבלה ציון 1 ותשובה מוטעית קיבלה ציון 0.
- תצפית מובנית להערכת מיומנויות מטה-קוגניטיביות ורגשיות- במהלך המבחנים (לפני ההתערבות, אחרי ההתערבות וחודשיים לאחר ההתערבות), נערכה תצפית מובנית בה קודדו ההיגדים המטה-קוגניטיביים והרגשיים לפי שלושת שלבי ההכוונה העצמית: תכנון ("אני עצובה כשאני לא יודעת", "השאלה קשה"), ניטור ובקרה ("אני חושב שכדאי לי לנסות עכשיו עם הדסקיות") ורפלקציה ("בהתחלה הייתי עצוב אבל הסברת לי שוב והצלחתי אז אני ממש שמח"). הציון חושב לפי שכיחות ההיגדים.

ממצאים

הישגים בפתרון בעיות מילוליות

ביחס להישגים בבעיות השגרתיות נמצא שלאחר ההתערבות וחודשיים לאחריה הקבוצה המשולבת והקבוצה המטה-קוגניטיבית שיפרו את הישגיהם והגיעו להישגים דומים וגבוהים יותר בהשוואה לקבוצת הביקורת. הישגים אלו נשמרו גם במבחן שנערך חודשיים לאחר ההתערבות. ביחס להישגים בבעיית התובנה המספרית נמצא שבקבוצה המשולבת הייתה עליה מובהקת בהישגים במבחן שנערך חודשיים לאחר ההתערבות בלבד. לא נמצאו הבדלים בהישגים בין שלושת זמני המדידה השונים בקרב ילדים המשתייכים לקבוצות האחרות.

תהליכי הכוונה עצמית

הכוונה מטה-קוגניטיבית: לאחר ההתערבות נמצא שהקבוצה המשולבת הפגינה את השינוי הגבוה ביותר בשכיחות ההיגדים המטה-קוגניטיביים מסוג: תכנון ורפלקציה, אחר כך הקבוצה המטה קוגניטיבית ובסוף

קבוצת הביקורת. בהיגדים מסוג ניטור ובקרה, נמצא שיפור דומה בקבוצה המשולבת והמטה-קוגניטיבית. לאחר חודשיים, נמצאה עלייה מובהקת רק בקרב הקבוצה המשולבת בהיגדים מסוג ניטור ובקרה.

הכוונה רגשית: רק בקבוצה המשולבת חל שינוי מובהק בשכיחות ההיגדים הרגשיים לאחר ההתערבות ולאורך זמן.

דיון ותרומת המחקר

המחקר הנוכחי מצביע על חשיבותה הרבה של הכוונה עצמית בלמידה על הישגים בפתרון בעיות מילוליות בגן הילדים ומדגיש את חשיבות שילוב המרכיב הרגשי עם המרכיב המטה- קוגניטיבי בקרב ילדים צעירים. ממצא זה נתמך ממחקרים קודמים שעסקו בהכוונה משולבת.(Tzohar-Rosen & Kramarski, 2018 בקרב תלמידי בית ספר (
ככל הנראה, תהליך למידה משולב מאפשר לילדים לחוש מסוגלות עצמית גבוהה יותר, לבטא ולחלוק את רגשותיהם ובכך להיות פנויים רגשית לשימוש יעיל ומשמעותי ביכולות מטה-קוגניטיביות במהלך פתרון הבעיות. הדבר בא לידי ביטוי בסיום התכנית ובפרט בהשפעה ארוכת הטווח. בנוסף, מחקר זה מדגים את החשיבות הרבה של סביבת למידה מפעילה בעת הקראת סיפור, אשר מספקת גירוי הכולל שאלות עצמיות ושיח על התוכן המתמטי העולה מהסיפור.

למחקר הנוכחי תרומה בתחום התיאורטי, המתודולוגי והיישומי. בתחום התיאורטי, המחקר מעמיק את ההבנה ביחס לחשיבות שילוב המרכיב המטה-קוגניטיבי והרגשי בפתרון שאלות מילוליות ומרחיב ידע זה ביחס לילדי הגן. בתחום המתודולוגי, במחקר זה נעשה שימוש בכלי מדידה כמותיים ואיכותניים אשר נבנו, עובדו ותוקפו לצורך מחקר זה והותאמו לילדי גן. בתחום היישומי, פותחו שתי תכניות התערבות להכוונה עצמית בפתרון שאלות מילוליות המותאמות ויעילות לילדי הגן. תכניות אלו יוכלו לשמש בסיס להכשרת גננות ולהשתלמויות לגננות בתחום ההכוונה העצמית במתמטיקה ובתחומים אחרים הנלמדים בגן הילדים.

רשימת מקורות

משרד החינוך (2006). *תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים*. ירושלים: המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים.

תורג'מן, מ' (2019). הגן העתידי להיות אני, להשתייך ולגלות עולם. עלון דע-גן 12, עמ' 19-8. תשע"ט.

OECD - Organization for Economic Cooperation and Development (2014). PISA 2012 results in focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know. Retrieved 12 june 2017 from: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf.

Perels, F., Merget-Kullmann, M., Wende, M., Schmitz, B., & Buchbinder, C. (2009). Improving self-regulated learning of preschool children: Evaluation of training for kindergarten teachers. British Journal of Educational Psychology, 79(2), 311-327.

Pintrich, P. R. (2000). The role of goal orientation in self-regulated learning. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), Handbook of self-regulation: Research and application (pp. 451-502). San Diego, CA: Academic.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS*, *47*(6), 641-649.

Tzohar-Rozen, M, & Kramarski, B. (2018). An holistic self-regulation model to enhance meta-cognition and meta-affect: A mixed methods study. *Paper presented at the AERA conference.* N.Y. USA.

Zhang, H., & Whitebread, D. (2017). Linking parental scaffolding with self-regulated learning in Chinese kindergarten children. *Learning and Instruction*, *49*, 121-130.

נספח 1- דוגמה לפעילות סיפור מפעיל

הסיפור	השאלות
אמא של רותי הביאה מתנה: שמחה וששון לכל ילד בלון. לרותי בלון כחול לרון בלון צהוב לסיגלית בלון סגול לאורי בלון ירוק לאלון בלון אדום	כמה בלונים אמא הביאה? האם היו מספיק לכל הילדים? כמה ילדים היו? כמה בנים? כמה בנות?
ופתאום... בום טראח מה קרה? הבלון התפוצץ, הבלון נקרע. אנא אורי אל תצטער נביא לך בלון אחר.	כמה בלונים היו? כמה התפוצצו? האם עכשיו יש יותר או פחות?
המשך את הסיפור	שאל שאלות

זהויות בלתי שוויוניות בדו-שיח סביב הוכחה באלגברה לינארית

מרים ולך, עינת הד-מצויינים ורם בנד, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

בשנים האחרונות מתרבים הניסיונות להפוך את הוראת המתמטיקה האוניברסיטאית לממוקדת-לומד ובעלת מאפייני חקירה (Cline, Zullo, Duncan, Stewart, & Snipes, 2013; Talbert, 2014; Wawro, Rasmussen, Zandieh, Sweeney, & Larson, 2012). הצגה זו היא חלק ממחקר רחב יותר המכוון לפתח דרכי הוראה עשירות בשיח באלגברה לינארית, בין היתר באמצעות עבודה בקבוצות. אולם עבודה בקבוצות מעוכבת לעתים על ידי יחסי כח לא שוויוניים (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012). המחקר הנוכחי בוחן כיצד זיהוי (או יצירת זהויות) בלתי שוויוני עלול לפגוע בתקשורת מתמטית אצל זוג הלומד אלגברה לינארית.

רקע תיאורטי

התיאוריה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) מגדירה למידת מתמטיקה כשינוי בשיח הנוצר אצל הלומד כתוצאה מהשתתפותו בקהיליית השיח המתמטית. השינוי בשיח יכול להיות בשתי רמות, רמת האובייקט, שבו הלומדים מרחיבים את ההיגדים שהם מאמצים על אובייקטים מוכרים, ורמת העל, שבה הלומדים משנים את הרוטינות על פיהן הם מאמצים היגדים חדשים (שם). התקשורת המתמטית משולבת כל העת בפעילות נוספת – שיח על משתתפים (זיהוי או יצירת זהויות) (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012). זיהוי זה יכול להתבצע בגוף ראשון (היגדים של הלומד על עצמו) או בגוף שני ושלישי (היגדים של אחרים על הלומד) (Sfard & Prusak, 2005). בעת שיח לימודי (כלומר כאשר לומדים לא נשאלים ישירות על עצמם), מרבית פעילות הזיהוי היא *עקיפה* או מרומזת (Heyd-Metzuyanim, 2013). מחקרים קודמים הראו כי פעילות זו יכולה להפריע לפעילות המתמטית (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012) אך לא הגדירו את הדרכים שבהן היא מפריעה. קבוצות לימוד באלגברה לינארית יכולות להוות כר פורה לחקר נושא זה, שכן הן מצריכות שיתוף פעולה בשיח מתמטי מורכב. במאמר זה אנו שואלות כיצד פעולות הזיהוי הפריעו לתקשורת המתמטית באפיזודה של דו-שיח סביב בעיה באלגברה לינארית.

מתודולוגיה

במסגרת המחקר המחברת הראשונה לימדה סדנאות באלגברה לינארית בשיטות הוראה שמעודדות השתתפות חקירתית בשיח מתמטי (Michaels, O'Connor, & Resnick, 2008; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). בסדנא הנחקרת כאן, הסטודנטים התבקשו להוכיח טענה בקבוצה קטנה, ולאחר מכן להציג את ההוכחה לכיתה. השיעורים צולמו ותומללו. כמו כן התקיים ראיון עם אחת המשתתפות לאחר השיעור.

לצורך המחקר הנוכחי נבחרה אפיזודה אחת, בת 9 דקות, בה ניתן היה לראות במבט לא מעמיק פעילות זיהוי לא שוויונית בין סטודנט וסטודנטית, וקושי סביב הסכמה על הוכחה. השיעור התנהל באנגלית (סטודנטים בין-לאומיים). קטעי השיח המופיעים במאמר תורגמו על ידי המחברות.

השיח נותח בשתי רמות: רמת העשייה המתמטית – בכדי לאתר את ההיגדים המתמטיים של כל אחד מהמשתתפים, מי חיבר אותם, מי אימץ, והאם היו בהם טעויות ברמת אוביקט או ברמת-על. ברמה השנייה ניתחנו זיהוי עקיף וישיר של כל אחד מהמשתתפים. לבסוף, חיפשנו קצרים בתקשורת שיכלו להיווצר כתוצאה מהזיהוי של המשתתפים.

ממצאים מרכזיים

האפיזודה המוצגת התרחשה במפגש סביב תלות לינארית. כל סטודנט קיבל דף משימה (ראה איור 1). אליס ובן עבדו יחד.

Linear Dependence Task :

V is a vector space over the field F.
Are the following statements true or false? If a statement is true, prove it. If a statement is false, give a numerical counter example.

2. $\{u_1,u_2,u_3\} \subset V$ is a linearly dependent set and $u_4 \in V$, then the set $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ is linearly dependent.

איור 1- המשימה

הפעילות המתמטית של אליס ובן כללה כמה טעויות, והובילה להוכחה לא תקפה מתמטית. איור 2 מציג את תמצות ההוכחה שהם גיבשו (הוכחה זו גובשה ביניהם בשיח דבור וכתוב, ונוסחה מחדש על ידינו בכתיב מתמטי):

תמצות ההוכחה:

I. u_1, u_2, u_3 תלויים לינארית

II. לכן $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, לא כולם אפס, כך ש $\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = 0$

III. נבחר $\alpha \neq 0$

IV. לכן $u_1 = \frac{\beta}{-\alpha} \cdot u_2 + \frac{\gamma}{-\alpha} \cdot u_3$

V. באותה מידה ניתן לומר ש $u_3 = \frac{\beta}{-\alpha} \cdot u_2 + \frac{\gamma}{-\alpha} \cdot u_1$ (טעות ברמת האובייקט)

VI. אם $\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 + \theta \cdot u_4 = 0$ (וגם $\alpha \neq 0$)

VII. אז $u_3 = \frac{-\beta}{\alpha} \cdot u_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha} \cdot u_1 + \frac{-\gamma}{\alpha} \cdot u_4$ (טעות ברמת האובייקט)

VIII. כלומר, u_3 צירוף לינארי של הווקטורים האחרים

IX. לכן u_1, u_2, u_3, u_4 תלויים לינארית (טעות ברמת-על)

איור 2 – תמצות ההוכחה

הטעות הקריטית ביותר בהוכחה זו נמצאת בכך שההיגד שיש להוכיח (VI) משמש כהיגד שעליו מסתמכים (כאשר (VII) (VIII) ו-(IX) נגזרים מ(VI)). זוהי טעות נפוצה ברמת-על (Stavrou, 2014). בנוסף, יש בהוכחה מספר טעויות ברמת האובייקט. ביניהן, היגד (V) אליו נתייחס בהמשך.

במהלך כל הדיון, בן ייצר היגדים מתמטיים ואילו אליס לרוב הסתפקה בהבעת הסכמה. סך הכל בן ייצר 16/17 מתוך ההיגדים, אליס ייצרה 1/17 ואישרה 6/17. בכך בן לקח על עצמו את תפקיד ה"מוביל", תוך שהוא מזהה את עצמו כ"מחליט" וכ"יודע". הזיהוי בגוף ראשון על ידי בן קיבל חיזוק כזיהוי בגוף שני מאליס והושלם על ידי הזיהוי של אליס כ"עוקבת" וכ"איננה יודעת". יחד עם זאת, אליס גם הביעה היסוס בנוגע לנכונות ההוכחה ובראיון שנערך איתה הסבירה שאי השוויון ביניהם נבע מ"הבטחון העצמי של הבנים". כלומר, יש יסוד להניח שקשיי התקשורת

והטעויות שייוצרו יחדיו קשורים לזהויות (במקרה הזה, בעיקר מגדריות). ניתוח השיח העלה ארבעה סוגי הפרעות לתהליך פתרון הבעיות, שנקשרו לזהות ה"מוביל" וזהות ה"עוקבת". להלן נדגים כל אחד מהם בקצרה.

ההפרעה הראשונה נמצאה במקרים בהם לאליס היו רעיונות בעלי פוטנציאל לקידום תהליך הפתרון, אך הם לא קיבלו התייחסות ולכן נגוזו. לדוגמה, בפתיחת האפיזודה, אליס אמרה "אני לא יודעת אם זה (שארבעת הווקטורים תלויים לינארית) נכון תמיד". בן, לעומתה, טען "ברור שזה נכון". אליס ניסתה להתנגד תוך שהיא אומרת "אבל.. מה אם נוסיף-". אך בן קטע את הרעיון להוסיף וקטורים לu_3 (וכך לנסות מקרים פרטיים) באומרו "תשכחי מזה, זה לא משנה, זה נכון", תוך שהוא ממשיך לניסוח ההוכחה לכך.

האופן השני שבו זיהוי פגע בתקשורת המתמטית היה באמצעות אישור של טעויות. כשבן עשה את הטעות ברמת-העל (הנחת (VI) לצורך הוכחת (VII), (VIII), (IX) במקום *הוכחה* של (VI)), הוא היסס ובקש אישור מאליס. אליס ענתה: "כן, זה עובד. כי אם החסרת, נכון? החסרת, מינוס כל הדבר הזה, ולחלק באלפא אז אתה מקבל...". אליס אמנם אישרה את דבריו של בן, אך האישור ניתן על המעבר מ(VI) ל(VII), ולא על ההיפוך בין מה שיש להוכיח למה שנתון (הטעות ברמת-העל). אולם, בן הסתפק באישור הזה בלי לשים לב שאליס איננה מאשרת את כל טענותיו.

הדרך השלישית שבה זיהוי פגע בשיח המתמטי היא ב"החלקה" של קצרים בתקשורת. למשל, כאשר בן הניח (III) והגיע ל(IV), הוא החליט להחליף בין u_1 ו- u_3 בטענה שהווקטור התלוי "בדרך כלל אחרון" והגיע ל(V). הקביעה הזאת שקולה להנחה ש $\gamma \neq 0$, אך ההנחה הייתה ש $\alpha \neq 0$. אליס לא אימצה את ההיגד הזה, אלא יצרה היגד נכון יותר: "נקח את וקטור u_1 בעל המקדם שהוא לא 0". אולם הקצר בתקשורת לא הובהר והטעות נמשכה.

הדרך הרביעית שבה הזיהוי פגע בשיח היא בהתעלמות של בן מביקורת על מהלכיו. לדוגמה, לקראת סוף תהליך ההוכחה אליס חזרה ושאלה "כן, אבל למה?". אמנם, הסבריה בנוגע למה היא לא מבינה לא היו ברורים מאוד, אך בן ביטל אותם ולא ניסה לברר את הקושי.

דיון

מצאנו שפעילות זיהוי פגעה בתקשורת המתמטית בארבעה אופנים: (1) גדיעה של רעיונות פרודוקטיביים (2) אישור טעויות (3) "החלקת" קצרים בתקשורת ו(4) התעלמות מביקורת. ממצאים אלו מאששים מחקרים קודמים על כך שסטודנטים במקצועות הנדסה לא מאפשרים לסטודנטיות לקחת תפקידים משמעותיים בלמידה בקבוצות (e.g. Meadows & Sekaquaptewa, 2013) . יחד עם זאת, מחקר זה מראה את האופן שבו יחסי הכח הבלתי שוויוניים הללו משפיעים על התקשורת המתמטית. תקוותנו היא שמחקר זה יוכל להוביל בעתיד לשיפור יעילות הלמידה בקבוצות במתמטיקה אוניברסיטאית.

מקורות

Cline, K., Zullo, H., Duncan, J., Stewart, A., & Snipes, M. (2013). Creating discussions with classroom voting in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(8), 1131–1142. Retrieved from http://www.tandfonline.com/action/journalInformation?journalCode=tmes20

Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics-teacher-student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(3), 341–368.

Heyd-Metzuyanim, E., & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom :

On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying §. *International Journal of Educational Research*, *51–52*, 128–145.

Meadows, L. A., & Sekaquaptewa, D. (2013). The influence of gender stereotypes on role adoption in student teams. In *Proceedings 120th ASEE Annual Conference and Exposition* (pp. 1–16). Washington, D.C.: American Society for Engineering Education.

Michaels, S., O'Connor, C., & Resnick, L. B. (2008). Deliberative discourse idealized and realized: Accountable talk in the classroom and in civic life. *Studies in Philosophy and Education*, *27*(4), 283–297.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling Identities : In Search of an Analytic Tool for Investigating Learning as a Culturally Shaped Activity. *Educational Researcher*, *34*(4), 14–22.

Stavrou, S. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, *1*(March), 1–8.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *10*(4), 313–340.

Talbert, R. (2014). Inverting the Linear Algebra Classroom. *PRIMUS*, *24*(5), 361–374.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., & Larson, C. (2012). An Inquiry-Oriented Approach to Span and Linear Independence: The Case of the Magic Carpet Ride Sequence. *Primus*, *22*(8), 577–599. https://doi.org/10.1080/10511970.2012.667516

שילוב הבזקי חדשות מתמטיות בשיעורי מתמטיקה בחטיבה העליונה כמנוף לפיתוח ידע-מתמטי-להוראה של המורים

רותי סגל, הטכניון מכון טכנולוגי לישראל, אורנים המכללה האקדמית לחינוך, שאנן המכללה האקדמית הדתית לחינוך
בועז זילברמן, הטכניון מכון טכנולוגי לישראל
עטרה שריקי, הטכניון מכון טכנולוגי לישראל, מכללת סמינר הקיבוצים
נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון מכון טכנולוגי לישראל

במאמר זה יוצגו ממצאים חלקיים מתוך מחקר אשר ליווה את השתתפותם של מורים בפרויקט תלת-שנתי "שילוב הבזקי חדשות בהוראת מתמטיקה". בפרט נתמקד בהשפעה שהייתה לכך על העמקת הידע המתמטי שלהם להוראה.

ידע של מורים למתמטיקה

במהלך העשורים האחרונים קהילת החוקרים בחינוך מתמטי מתעניינת באפיון הידע הנדרש ממורים. שולמן (Shulman, 1986) הכיר בקיומו של ידע ייחודי להוראה והבחין בין ידע של התכנים להוראה (Subject Matter Knowledge) לבין מכלול הכלים הפדגוגיים העומדים לרשות המורה, כגון רפרטואר הייצוגים, האנלוגיות, המטאפורות וההסברים (Pedagogical Content Knowledge). בהסתמך על עבודתו, הגדירו בול ובאס (Ball & Bass, 2003) את המונח הספציפי: *ידע מתמטי להוראה* (Mathematical Knowledge for Teaching) כידע שחוצה תחומים ורמות של המתמטיקה בבית הספר, תומך ברעיונות מקושרים של המורה, ומדגיש את היכולת לתכנן, להעריך, לשלב ולנהל תוכן מתמטי מתאים בהוראה. בעקבות עבודה זו, בול וחב' הציגו שישה רכיבים שונים של ידע מתמטי להוראה ((Ball & Bass, 2009; Ball, Thames, & Phelps, 2008). שלושה מהם רלוונטיים במיוחד למחקר הנוכחי, כפי שיתברר בהמשך:

i. Knowledge of Content and Students (KCS) – רכיב המשלב ידע על תלמידים ועל מתמטיקה.

ii. Specialized Content Knowledge (SCK) – רכיב ידע ייחודי של מורים למתמטיקה, שבד"כ אינו נדרש מאלה שאינם עוסקים בהוראה.

iii. Horizon Content Knowledge (HCK) –רכיב הנוגע למודעות לנושאים המתמטיים הכלולים בתוכנית הלימודים, לקשרים ביניהם, וגם להיבטים של המתמטיקה שאינם בהכרח נכללים בתוכנית הלימודים, אך מספקים הבנה ומשמעות רחבה יותר של המתמטיקה.

פרויקט שילוב הבזקי חדשות מתמטיות בהוראה

מתמטיקה היא תחום דינמי שמתפתח ללא הפסקה. אופיו ההיררכי והמצטבר ללא התיישנות גורם לכך שתכניות הלימוד במתמטיקה בבית הספר בדרך כלל אינן משקפות את האופי הדינמי של התחום. כתוצאה מכך, רוב בוגרי תיכון מסיימים את לימודי המתמטיקה שלהם עם תפישה מוטעית שמתמטיקה הוא תחום בו כל השאלות והתשובות ידועות מראש, ואין מקום לתרומה נוספת (Amit & Movshovitz-Hadar, 2011).

פרויקט שילוב הבזקי חדשות מתמטיות בהוראה, במסגרתו נערך המחקר הנוכחי, הוקם כדי לספק פרספקטיבה טובה יותר לתלמידי בית הספר התיכוניים על אופייה של המתמטיקה, תהליכיה, קצב התפתחותה ותרומתה לקדמה האנושית (Movshovitz-Hadar, 2008).

השיטה שנבחרה היא להעמיד לרשות המורים למתמטיקה המלמדים בתיכון מצגות ייעודיות שנקראות "הבזקי חדשות מתמטיות" המוכנות מראש על ידי צוות מומחים. המורים אמורים לשזור את הבזקי החדשות בהוראת המקצוע בפרקי זמן קצובים. כל הבזק מוגש בצורת מצגת PowerPoint, והוא בעל שלושה מאפיינים עיקריים (Amit & Movshovitz-Hadar, 2011) :

(i) תוצאה מתמטית חדשה שפורסמה בספרות המקצועית בעשורים האחרונים;

(ii) הצגה של כ-25 דקות תוך התמקדות בתוצאה החדשה, בהרחבה על ההיסטוריה שלה, ברעיונות הבסיסיים העיקריים ובאנשים המעורבים בתחום;

(iii) התחשבות ברקע המוגבל של התלמידים, רצוי (אם ניתן) לקשר אותו לנושאים מסוימים בתכנית הלימודים המחייבת, מבלי לפגוע בהתקדמות בהוראתם.

כדי לשלב את הבזקי החדשות בכיתותיהם ניתנת למורים הזדמנות לעבור השתלמות בת 30 שעות לפני כל שנת לימודים. בהשתלמות נחשפים המורים להבזקים ודנים בדרכים לשילובם בהוראה. לאחר שילוב כל הבזק, המורים יכולים לתעד את החוויות שלהם ושל תלמידיהם באופן מקוון באמצעות תוכנה ייעודית, המאפשרת משוב על כל אחד מהשקפים של כל אחת מהמצגות.

המחקר

המחקר המוצג במאמר הנוכחי הוא חלק ממחקר תלת שנתי רחב יריעה שליווה את פרויקט ההבזקים המתואר לעיל בין השנים 2016-2019.

שאלת המחקר אליה נתייחס במאמר זה היא: כיצד תופסים מורים למתמטיקה בחטיבה העליונה שהתמידו בחשיפה של אותה כיתה להבזקי חדשות שונים במשך שלוש שנים (כיתה י, יא, יב), את התרומה של שילוב הבזקי חדשות לפיתוח הרכיבים השונים של "הידע המתמטי להוראה" שלהם?

משתתפי המחקר: בחלק זה של המחקר השתתפו שישה מורים למתמטיקה.

כלי המחקר העיקריים אשר שימשו לאיסוף הנתונים מהמורים היו:

1. שאלונים בכתב: ארבעה שאלונים בכתב, עליהם השיבו המורים לפני פתיחת שנת הלימודים הראשונה של שילוב ההבזקים בכיתה י, ובסיומן של כל אחת משלוש השנים שלאחר מכן (י' י"א, י"ב). השאלונים הכילו שאלות פתוחות לצד שאלות בסולם ליקרט בן 5 רמות. השאלות התייחסו לתפישות לגבי טבעה של המתמטיקה ועבודת המתמטיקאים, לגבי הוראת תוכנית הלימודים במתמטיקה ולמידתה, לגבי תוכנית הלימודים ככל שהיא נוגעת למתמטיקה בת-זמננו ולגבי פרויקט ההבזקים כולו;
2. ראיונות מובנים למחצה עם כל אחד משישה המורים;
3. דיווחי המורים על ההפעלה השוטפת. המורים נתנו משוב אחרי השילוב של כל הבזק, והתייחסו לתגובות שלהם עצמם ושל תלמידיהם לכל אחד מהשקפים. תגובות אלו הצטברו על גבי תוכנה ייעודית שנמסרה להם לשם כך.

המחקר נערך בהתאם לפרדיגמת המחקר האיכותני, תוך יישום של תהליך קידוד פתוח וצירי, כדי לזהות את הקטגוריות העיקריות ותתי הקטגוריות (Corbin & Strauss, 2008).

ממצאים עיקריים

ניתוח הממצאים התלת שנתיים מצביע על כך שהמורים שהתמידו בשילוב ההבזקים במשך 3 שנים באותה כיתה מאמינים ששילוב ההבזקים הוביל להתפתחות רכיבי "הידע המתמטי להוראה" שלהם. להלן שלוש מהקטיגוריות של הממצאים הרבים שהמחקר העלה, בזיקה לידע המורים שתואר לעיל:

(i) חשיפה שיטתית ומובנית שלהם להיבטים חדשניים ומגוונים של המתמטיקה ולתהליכי למידה של התלמידים, ובכלל זה הכרה בחשיבות החשיפה של תלמידים לנושאים מהמתמטיקה המודרנית שאינם כלולים בתוכנית הלימודים (KCS). דוגמה אופיינית להתבטאות של מורה בהקשר זה: *"התלמידים שלי התפעלו מזה שבאמצעות המחשב ניתן להפיק הוכחות מתמטיות. זה משהו שהם לא מכירים משיעורי המתמטיקה שלהם ומתוכנית הלימודים במתמטיקה"; "חשוב שהתלמידים יכירו את עולם המתמטיקה מעבר לתכנים של בחינת הבגרות".*

(ii) פיתוח הידע המתמטי שלהם עצמם, הן בהקשר לנושאים שבתוכנית הלימודים והן מעבר לה, כמו גם התרומה של המתמטיקה להתפתחויות בתחומים אחרים במדעים ובחברה (HCK). דוגמאות אופייניות להתבטאות של שניים מהמורים בהקשר זה: *"הבנתי שיש הוכחות לא במסגרת גיאומטריה אוקלידית, כמו הדרך לחלק זווית נתונה לשלושה חלקים שווים בעזרת קיפולי נייר ולא בסרגל ומחוגה"; "באמצעות שילוב ההבזקים הידע שלי במתמטיקה הורחב, למשל למדתי על קוביות אפרון ודרך זה על מצבים שבהם כלל ההעברה [הטרנזיטיבי] לא פועל"; "באמצעות חשיפה להבזקים, נודע לי הקשר שבין מתמטיקה לקיפולי אוריגמי לבין השימושים של אוריגמי ברפואה ובחלל".*

(iii) פיתוח תובנות בנוגע לרכיבים הנוגעים להוראת המתמטיקה (SCK). דוגמאות אופייניות להתבטאות של מורים: *"למדתי על השימוש במחשב ככלי להוכחת משפטים במתמטיקה כמו במקרה של בעיית צבעי מפה"*; *"אני יכול לפתוח לתלמידים שלי אופקים למתרחש במתמטיקה. לא הייתה לי היכולת לחבר דברים יחד מבלי להשתתף בפרויקט הזה"*.

סיכום ומסקנות

על פי תפישת המורים, לשילוב הבזקי חדשות מתמטיות בהוראה הייתה השפעה מצטברת על הרחבת הידע המתמטי להוראה שלהם, ובפרט על רכיבי הידע הבאים:

KCS – המורים הרחיבו את הידע והמודעות שלהם בהקשר לנושאים מתמטיים המעוררים עניין, סקרנות והתלהבות בקרב התלמידים.

HCK – המורים הרחיבו את הידע והמודעות שלהם בהקשר לתרומה והשימושים של המתמטיקה מעבר לתוכנית הלימודים, היישומים של המתמטיקה, ידע על מתמטיקאים ופועלם, ידע על עבודת המתמטיקאים, ידע על ההיסטוריה של המתמטיקה, כיצד נושא המופיע בתוכנית הלימודים ממשיך להתפתח מעבר לתוכנית הלימודים, ידע על מה מניע את המתמטיקה ואופן התפתחותה.

SCK – המורים הרחיבו את רפרטואר הדוגמאות שביכולתם לשלב בשיעורי מתמטיקה בהתאם לנושאי הלימוד המופיעים בתוכנית הלימודים.

הערת שוליים

המחקר נערך בתמיכת תכנית מי"ה 2016 של משרד המדע. תודתנו נתונה לפרופ' אבי ברמן על שותפותו בפרויקט.

רשימת מקורות

Amit, B., & Movshovitz-Hadar, N. (2011). Design and high-school implementation of mathematical-News-Snapshots—An action research into ‘Today’s News is Tomorrow’s History’. In B. E. Krongellner & C. Tzanakis (Eds.), History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the Sixth European Summer University (pp. 171–184). Austria: Verlag Holzhausen GmbH/Holzhausen Publishing Ltd.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), A research companion to the principles and standards for school mathematics (pp. 27–44). Reston, VA: NCTM.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the Mathematical Horizon. In M. Neubrand (Ed.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 (pp. 11–22). Münster: WTM-Verlag.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory, 3rd edition. Los Angeles, CA: Sage Publications.

Movshovitz-Hadar, N. (2008). Today’s news are Tomorrow’s history-Interweaving mathematical news in teaching high-school math. In E. Barbin, N. Stehlikova, & C. Tzanakis (Eds.), History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the fifth European Summer University (ESU 5) (pp. 535–546). Prague, Czech Republic: Vydavatelsky Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4–14.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Vygotsky, L. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

כיצד משפיעה חשיפה מתמשכת לחדשות מתמטיות על תפישות של תלמידי תיכון לגבי מתמטיקה?

בועז זילברמן [1], עטרה שריקי [1,2], רותי סגל [1,3,4], נצה מובשוביץ-הדר [1]
[1] הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, [2] מכללת סמינר הקיבוצים, [3] אורנים – המכללה האקדמית לחינוך,
[4] שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

מבוא

מתמטיקה היא תחום המתפתח בהתמדה, עם מאות אלפי פרסומים ותוצאות מדי שנה (American Mathematical Society, 2019). עם זאת, ההתפתחות המתמדת, כמו גם אופייה הדינמי והיישומי של הדיסציפלינה, כמעט ואינם מקבלים ביטוי בתוכניות הלימודים בביה"ס. כפועל יוצא מכך, נוצרת אצל רבים מבוגרי מערכת החינוך תפישה מוטעית, לפיה המתמטיקה היא אוסף מוגמר ושרירותי של עובדות ופרוצדורות, המיועד רק ליחידי סגולה, שיש בו מעט מקום לביטוי אישי, יצירתיות, או הנאה אינטלקטואלית, ובו לכל בעיה יש פתרון יחיד אשר ידוע למורה הכיתה (Op't Eynde, De Corte, & Verschaffel, 2002; Schoenfeld, 1989; Szydlik, 2013; Zan & Di Martino, 2007).

תכניות חוץ-קוריקולריות רבות לתלמידי תיכון כוללות 'טעימות' מההסטוריה של המתמטיקה וממתמטיקה מודרנית במטרה לחשוף אותם לצדדים שונים של המתמטיקה. מחקרים שליוו תכניות כאלו הראו עלייה בהישגים ובמוטיבציה של התלמידים שהשתתפו בהן (Kim, 2016). עם זאת, תוכניות אלו לרוב הן קצרות טווח ואינן מיועדות לכלל התלמידים – אלא לתלמידים מתעניינים ו/או בעלי הישגים גבוהים במתמטיקה.

פרויקט *הבזקי חדשות במתמטיקה*, אשר בו מעוגן מחקר זה, מאפשר לתלמידי החטיבה העליונה בישראל הצצה אל המתרחש בתחום המתמטיקה בת-זמננו. *הבזקי חדשות* הם מצגות פאוור-פוינט קצרות, שכל אחת מתמקדת בתגלית שהתפרסמה בעיתונות המתמטית המקצועית בעשורים האחרונים (Amit, Movshovitz-Hadar, & Berman, 2011). מורים למתמטיקה משלבים בכיתותיהם 6-7 הבזקי חדשות בכל שנה (בכיתות י-יב), ומקבלים ליווי ותמיכה שוטפים לצד השתלמות מקצועית וגמול השתלמות. ההבזקים מעודכנים באופן שוטף לאור גילויים רלוונטיים חדשים ולאור משוב המתקבל מהמורים.

המחקר הנוכחי הוא חלק ממחקר אורך תלת-שנתי שליווה את פרויקט ההבזקים בשנים 2016-2019 ובחן את השפעת החשיפה הממושכת לחדשות מתמטיות על התלמידים והמורים.

שיטה

שאלות המחקר התמקדו באפיון הדרכים שבהן פרויקט ההבזקים תרם לאורך זמן לעיצוב התפישות של תלמידי תיכון לגבי המתמטיקה – הן כתחום דעת והן כעיסוק. במאמר זה נתמקד ב-78 תלמידי י"ב שנחשפו להבזקים על ידי מוריהם למתמטיקה במשך שלוש שנים (תשע"ז-תשע"ט, 4-5 יח"ל), בחמישה תיכונים. המיקוד בתלמידים אלה, המהווים חלק ממשתתפי המחקר, נעשה לאור העובדה שהתקבל מהם מידע שוטף במהלך כל שלוש שנות הפרויקט.

כלי המחקר כללו:

1. ארבעה שאלונים (בתחילת כיתה י' ובסיום כל שנת לימודים). השאלונים הכילו שאלות פתוחות לצד שאלות בסולם ליקרט בן 5 רמות. השאלות התייחסו לתפישות לגבי המתמטיקה בבי"ס, לגבי מתמטיקה באופן כללי, לגבי מתמטיקאים, ולגבי פרויקט ההבזקים;
2. ראיונות מובנים-למחצה עם 18 תלמידים;
3. משובים מהמורים לגבי התגובות של תלמידיהם לכל הבזק.

ניתוח הנתונים נשען על פרדיגמה איכותנית, תוך יישום של תהליך קידוד פתוח וצירי, כדי לזהות את הקטגוריות העיקריות ותתי הקטגוריות (Corbin & Strauss, 2008).

ממצאים

התוצאות מצביעות על שינוי באופן שבו התלמידים תופשים את המתמטיקה כתחום דעת וכעיסוק, אך ללא שינוי בתפישותיהם לגבי המתמטיקה בבי"ס. תשובות התלמידים מעידות על הבנה טובה יותר מזאת שהייתה להם מלכתחילה של הטבע הדינאמי של המתמטיקה בת-זמננו ושל מאפייני עבודת המתמטיקאים. לאורך שלוש שנות ההשתתפות בפרויקט, הגיעו רבים ממשתתפי המחקר לארבע תובנות מרכזיות:

א. המתמטיקה ממשיכה להתפתח באופן מתמיד מעבר לתחומי תכנית הלימודים (65 מתוך 78 תלמידים). לדוגמה:

"בכל ההבזקים אנחנו לומדים שנושאים עדיין נחקרים ומתפתחים. דוגמא קלסית היא הפאי שממשיכים למצוא עוד ועוד ספרות בהמשכו. אני לא חושבת שהמתמטיקה מתפתחת עוד במישור הפשוט שלה הנלמד ברמת התיכון אבל בדרגות הגבוהות שלה היא בהחלט ממשיכה להתפתח בתחומים רבים ומגוונים." (ל', כיתה יא')

ב. קיימות בעיות פתוחות שנמצאות במוקד של המחקרים הנוכחיים (61 מתוך 78 תלמידים). לדוגמה:
"תלמידים בדרך כלל רואים מתמטיקה בתור 'מה זה עוזר בחיים?', אבל בעצם מתמטיקה מקיפה אותנו ביום–יום, ואנשים פשוט לא רואים את זה כי הם רואים את זה בתור מה שאנחנו עושים בשיעור. ואז אנחנו רואים שיש עוד, שיש מעבר, עד היום המתמטיקה מתפתחת ומגלים דברים חדשים." (ק', כיתה יב')

ג. תהליך הגילוי המתמטי רווי מאמצים, רצוף טעויות, ומערב עבודת צוות (56 מתוך 78 תלמידים). לדוגמה:
"למדתי שהמתמטיקאים חושבים המון על הוכחות וגם אחרי זה טועים ולמרות זאת לא מפסיקים לנסות כך גם אני צריכה, אם תרגיל אחד שלא הצלחתי לנסות שוב ושוב עד לקבלת פתרון." (ש', כיתה י'); "הרבה פעמים אני מדמיין מתמטיקה בתור משהו צר שנלמד בכמה אוניברסיטאות באמריקה ובארץ [...], ועכשיו אני פתאום רואה את זה כתהליך – מישהו אחד עשה זה, ואז מישהו אחר עבד על העבודה שלו, והצליח להוכיח את זה ולהפריך את הדבר השני, ואז מישהו אחר אחרי זה אמר רגע, פה יש טעות, נעבור על זה מחדש, וככה הלוך ושוב לאורך ההסטוריה. זה הראה לי שמתמטיקה, בניגוד לאופן שבו מלמדים אותנו, זה תהליך הרבה יותר שיתופי, הרבה יותר קבוצתי, שדורש הרבה יותר עבודה משותפת." (נ', כיתה יא').

ד. גילויים מתמטיים הם בעלי השפעה מכרעת על חיי היום-יום של בני האדם (53 מתוך 78 תלמידים). לדוגמה:
"למשל הצפנת rsa- בעיה מתמטית שטרם נפתרה המשפיעה על חיי היום יום שלנו." (ת', כיתה יא'); "שאלות מילוליות לקוחות הישר מהיומיום שלנו. גרפים משמשים להצבת נתונים ותכנון, הבנת מגמות בנושאים שונים. טריגו ופיתגורס משמשים לפי הידוע לי בארכיטקטורה. והסתברות משמשת לניתוחים ודוחות סטטיסטיים." (א', כיתה יא')

דיון

ממצאי המחקר מעלים כי לאחר חשיפה בת שלוש שנים לחדשות מתמטיות תלמידי תיכון הפגינו תפישות שונות מהתפישות הנפוצות שעליהן מדווח בספרות (למשל אצל Op't Eynde et al., 2002). כבר לאחר שנה אחת של חשיפה החלו תלמידים להיות מודעים יותר לטבע הדינמי של המתמטיקה המודרנית, לראות את הקשר בין מתמטיקה למציאות היומיומית שלהם כחזק יותר, לתאר טוב יותר את מהות תהליך הגילוי במתמטיקה, ולשקף הבנה רבה יותר של מהות עבודתם של מתמטיקאים ומתמטיקאיות, לעומת תפישותיהם טרם ההטמעה.

מתוך המחקר עולה כי לאחר שנה אחת של חשיפה לחדשות מתמטיות השינוי לעתים אינו ניכר ולעתים הוא אף בכיוון שאינו צפוי. ממצא זה מצביע על כך ששינוי עמדות ותפישות קודמות הינו תהליך איטי, וכי על מנת להטמיע שינוי באופן שבו בוגרי מערכת החינוך תופשים מהי מתמטיקה ובמוטיבציה שלהם לבחור בקריירה בתחום עתיר מתמטיקה יש צורך בהתערבות ממושכת.

לאור הממצאים, אנו ממליצים על שני מחקרי המשך: מחקר אורך לבחינת ההשפעה של החשיפה לחדשות מתמטיות על בחירה בתחום התמחות מקצועי לאחר סיום הלימודים בתיכון, ומחקר השוואתי לבחינת שיטות לחשיפת תלמידים למתמטיקה בת-זמננו.

המחקר נערך בתמיכת תכנית מי"ה 2016 של משרד המדע. תודתנו נתונה לפרופ' אבי ברמן על שותפותו בפרויקט.

רשימת מקורות

American Mathematical Society. (2019). *MathSciNet by the Numbers*. Retrieved on 2019-08-30 from http://www.ams.org/mathscinet/help/about.html

Amit, B., Movshovitz-Hadar, N., & Berman, A. (2011). Exposure to mathematics in the making: Interweaving Math News Snapshots in the teaching of high-school Mathematics. In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 91–102). Washington, DC: MAA-Mathematical Association of America.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory, 3rd edition*. Los Angeles, CA: Sage Publications.

Kim, M. (2016). A meta-analysis of the effects of enrichment programs on gifted students. *Gifted Child Quarterly*, *60*(2), 102–116.

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 13–37). https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_2

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 338–355.

Szydlik, S. D. (2013). Beliefs of liberal arts mathematics students regarding the nature of mathematics. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *32*(3), 95–111.

Zan, R., & Di Martino, P. (2007). Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*, 157–168.

שלוש שפות בשיעור אחד בהכשרה להוראת מתמטיקה

אילנה לבנברג- המכללה האקדמית לחינוך, "גורדון", חיפה.
דורית פטקין – סמינר הקיבוצים, המכללה לחינוך, טכנולוגיה ואומנויות

מבוא

במכללות להכשרה להוראה לומדים את כל המקצועות בשפה העברית למרות שעבור חלק מהסטודנטים השפה העברית אינה שפת האם. הבעיה מורכבת אף יותר בלימודי המתמטיקה שהיא שפה נוספת, שלישית במספר. במהלך ההרצאות אותם סטודנטים מתמודדים עם הצורך לעבור משפה לשפה. כמו כן, לעיתים נדרשת תמיכה של חבר ללימודים או של המרצה עצמו כדי לעקוב ולהבין את הנלמד. מדובר במעברים מהשפה העברית לשפת האם, ואחר כך לשפה המתמטית וחוזר חלילה. מעברים אלה חייבים להיות מהירים וברורים כדי שיוכלו להיות חלק מהקהילה הלומדת ושותפים פעילים בשיח המתנהל בשיעור. המעקב אחר דברי המרצה למתמטיקה דורש לא רק ריכוז רב בתכנים המתמטיים עצמם אלה גם יכולת שליטה בשפה שבה ניתנת ההרצאה.

מן הספרות

המאה ה-21 מתאפיינות בנדידה של אוכלוסיות ממדינה למדינה, מסיבות כלכליות ופוליטיות, ואלה הן הסיבות העיקריות אשר העלו למודעות את נושא המחקר על הוראה ולמידה שאינן בשפת האם. בעשור האחרון הולך וגדל מספרם של מחקרים בנושא דו לשוניות (Bilinguals) והם נערכים במקומות שונים ובהקשרים שונים, הן בקרב אוכלוסיות תלמידים צעירים והן בקרב לומדים בוגרים (Setati, 2005, Essien, 2010). דו לשוניות זוכה לנדבך נוסף ומאתגר כאשר מדובר במתמטיקה ולאור זאת יש מקום לראות את הקשיים ואופן ההתמודדות כשמדובר בלמידה, בו זמנית, בשלוש שפות (Trilinguals) .

בדיקה של יכולת הלמידה של מתמטיקה באנגלית בקרב לומדים באירלנד, אשר שפת האם שלהם אינה אנגלית (שפת האם היא Irish Gaelic באחוז ניכר של האוכלוסייה) מפנה את הקושי המרכזי אל החלק האורייני, בקריאה ובהבנה של בעיות מילוליות (Ní Ríordáin, & O`Donoghue, 2009). מכאן שבמידה וניתנת משימה במתמטיקה, המלווה בטקסט, על הלומד לגשר בין השפה המתמטית, המחייבת את ראיית הרכיבים המתמטיים, לבין השפה הטבעית, המחייבת התייחסות אוריינית לטקסט השלם. מוסקוביץ' (Moschkovich, 2002) מציגה שלושה היבטים בלמידה של מתמטיקה שאינה בשפת האם כבסיס ליכולת להשתלב בקהילת הלומדים. ההיבט הראשון הוא רכישה של אוצר מילים, ההיבט השני הוא הכרות עם המשמעויות השונות של המילים וההיבט השלישי להשתלב בביצוען של פעילות המתמטיות. פטקין (Patkin, 2011) דווחה במחקרה על חשיבות ההתוודעות למשמעויות השונות שיש למילים בשפה הדבורה לעומת המשמעות שלהן בשפה המתמטית. המודעות להבדלים אלה חשובה, שכן היא קשה ללומדים בשפת האם, היא קשה אף יותר לאלה הלומדים מתמטיקה שלא בשפת האם שלהם.

על המחקר וממצאיו

המחקר נוכחי מתמקד בהשפעה של שפת ההוראה בהכשרה להוראת מתמטיקה לסטודנטים ששפת האם שלהן אינה עברית. במחקר השתתפו 47 סטודנטים בתוכנית של הכשרה להוראת מתמטיקה ששפת האם שלהם היא רוסית, ערבית, אמהרית וצ'רקסית. עמדות הסטודנטים בנושא הקשיים שמקורם בלמידה שלא בשפת האם ואופן ההתמודדות עם קשיים אלה נבדקו באמצעות שאלון שכלל 25 היגדים (על סולם ליקרט בעל 5 דרגות). בנוסף נבדק האם לדעתם המרצים למתמטיקה מודעים לקשייהם ומה מידת היחס והטיפול שהם מקבלים מאותם מרצים בהתייחס לאותם קשיים. בנוסף, התבקשו המתכשרים להוראה לדווח על מידת השליטה שלהם בשפה העברית ולהציג דוגמאות למושגים מתמטיים הגורמים להם בלבול, בגלל הבדלים בין שפת האם שלהם לשפה העברית.

מהממצאים עולה שאכן קיים קושי לסטודנטים אלה, המשפיע על הלמידה וההישגים שלהם. נמצא קשר בין מידת השליטה שלהם בשפה העברית לבין הקשיים השונים שהם חווים כמו התמודדות עם קצב דיבור של המרצה או היכולת לקרוא ולהבין בעיה מילולית. סטודנטים אלה גם מלווים בתחושה שהשפה מהווה גורם המונע מהם הישגים טובים יותר במתמטיקה, והם מצפים מהמרצים להתחשבות בהערכת הציונים שלהם בגין קשיי השפה האלה. 70% מהם הצהירו על קושי בהבנת הניסוח של השאלות במבחנים שכן הן אינן כתובות בשפת האם. 76% הצהירו על קושי בהבנת מושגים מתמטיים שונים, לאור ההבדלים בין שפות. בהתייחס לשאלה האם המרצים שלהם מודעים לקשיים שיש להם, יותר מ70% מהם הצהירו שאין שום התחשבות או הקלות לסטודנטים ששפת האם אינה עברית.

הם מדווחים שהם מתגברים על הקשיים במהלך הלימודים בעזרת תרגום של תכני הלימוד לשפת האם, וכן בישיבה במהלך ההרצאות ליד חברים אשר דוברים את אותה שפת אם. ממצא נוסף עוסק בהתנסות המעשית שלהם כמתכשרים להוראה בבתי הספר, כאשר ההתנסות מתקיימת בשפת האם שלהם. במקרים אלה, כשההוראה בבתי הספר מתקיימת בשפת האם (כמו ערבית לדוגמא), 40% מהמתכשרים מדווחים על קשיים בכתיבת מערכי השיעורים, בטיעון שקל להם יותר ללמד מתמטיקה בשפה העברית, שכן הלימודים שלהם במוסד ההכשרה התקיימו בעברית.

ממצאי המחקר חשובים לכלל המלמדים במסגרות רב תרבותיות, שכן מטרתם להציף ולהעלות את הקשיים האלה למודעות בקרב המרצים לאוכלוסייה זו, מה שיוביל לטיוב ההוראה בכלל ולהוראת המתמטיקה בפרט.

רשימת מקורות

Essien, A. A. (2010). Mathematics Teacher Educators' Account of Preparing Pre-service Teachers for Teaching Mathematics in Multilingual Classroom: The Case of South Africa. *International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 5*(2), 33-44 .

Moschkovich, J. (2002). A Situated and Sociocultural Perspective on Bilingual Mathematics Learners. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(3), 189-212.

Ní Ríordáin, M. & O`Donoghue, J. (2009). The relationship between performance on mathematics word problem and language proficiency for students learning though the medium of Irish. *Educational Studies in Mathematics, 73,* 43-64

Patkin, D. (2011). The interplay of language and mathematics. *Pythagoras - Journal for Research in Mathematics Education, AMESA, 32*(2), 1-7

Setati, M. (2005). Teaching mathematics in primary multilingual classroom. *Journal for Research in Mathematics Education.36,* 447-466.

שימוש בתורת הפערים לניתוח טקסטים מתמטיים – המקרה של הוכחה ללא מילים

נדב מרקו וברוך שוורץ, האוניברסיטה העברית בירושלים

רקע תיאורטי ושאלת המחקר

מחקרים רבים ניסו לאפיין טקסטים מתמטיים (e.g. Österholm, and Bergqvist, 2013). חלקם ניסו ליצור טיפולוגיות או להציע פרמטרים שונים בעזרתם ניתן לאמוד טקסטים אלו (e.g. Remillard, 2011). מחקרים אחרים התמקדו בקוראים ובתהליך הקריאה (e.g. Inglis, & Alcock, 2012). אחרים פיתחו טיפולוגיות של סגנונות קריאה, של אסטרטגיות קריאה אפקטיביות או של קשיים של הקוראים (e.g. Shepherd, Selden, & Selden, 2012). אלבוים-כהן (2016) מצאה כי קריאת טקסטים מתמטיים בקבוצות קטנות הובילה לרווחים שונים כמו העשרת הידע המתמטי, פיתוח מיומנויות תקשורת בעבודת צוות ופיתוח כלים להתמודדות עם תחושות אי-הבנה (אלבוים-כהן, 2016). מתוך תפישת הטקסט והקורא כנמצאים בתלות הדדית, המחקר הנוכחי מבקש להמשיך את כיווני המחקר שנזכרו ולבחון את הקשר שבין מאפייני הטקסט המתמטי ובין ההתנהגות המתמטית של הקוראים.

'תורת הפערים', אותה הציגו פרי ושטרנברג (1968/1986), היא תורה ספרותית הרואה בטקסט הספרותי "מערכת של פערים". לצד המידע הנמסר בטקסט ישנם חוסרי מידע אותם משלים הקורא בעצמו כדי להבנות את 'תמונת המציאות' אותה מבקש הכותב לתאר (Perry, & Sternberg, 1986). תהליך זה של השלמת הפערים מתרחש כאשר הקורא שואל את עצמו שאלות ומשיב עליהן על ידי הוספת מידע. השלמת הפערים יכולה להתבצע באופן מידי, אוטומטי ובלתי מודע, או להיות תוצר של תהליכי חשיבה מאומצים, מודעים וממושכים, תוך ניתוח מעמיק ושקילת חלופות להשלמת הפערים.

הטענה כי טקסטים מתמטיים מתאפיינים בתמציתיות ומכילים פערים רבים נפוצה בספרות המחקרית (e.g. Barton & Heidema, 2000). טענה זו נכונה במיוחד כאשר מדובר על טקסט מסוג הוכחות ללא מילים או הוכחות ויזואליות (הל"ם). סוגה זו של טקסט מתמטי עושה שימוש בשרטוטים המכילים רק סימונים או חישובים מתמטיים כדי לרמוז על דרך להוכחת משפט או טענה (Nelsen, 1993). מחקר זה בא להציע את תורת הפערים כמסגרת מושגית לניתוח טקסטים מתמטיים ולהדגים שימוש בה בניתוח הל"ם.

מתודולוגיה

בחירת הל"ם כטקסט המכיל פערים היא טבעית. אולם, מחקר על תפקיד הל"ם בלמידה הינו בחיתוליו ולכן בחרנו במתודולוגיה של חקר מקרה (Case-study) (Eisenhardt, & Graebner, 2007) כדי לבחון האם תורת הפערים יכולה לעזור להבין את תפקיד הל"ם בלמידה. חקר המקרה התבצע במשך שנה אחת בקרב שש קבוצות בנות 2-3 תלמידי כיתה י' מתקדמים, שקראו רצפים של הל"ם בתחומי הגאומטריה, תורת המספרים וטריגונומטריה, בשלושה מפגשים בני 90 דקות כ"א. המחקר כלל ניתוח אפריורי של הפערים בהוכחות ולאחר מכן בחינת קריאת התלמידים והפערים עמם התמודדו בפועל. השתמשנו בהקלטות ובתוצרי התלמידים בניתוח, כאשר בכל שלב שאלנו האם ניתן להסביר את ההתנהגות המתמטית של התלמידים כניסיון לגשר על פערים שבטקסט. תהליך זה הוביל לדיוק והתאמת תורת הפערים להקשר המתמטי ולהגדרת המושגים הבאים:

פער – פיסת מידע חסרה בטקסט אשר לה חשיבות כלשהי להבנתו, ושאותה הקורא מצופה להשלים. המידע החסר עשוי להיות: נימוק, טענה, חישוב, משפט בו נעשה שימוש באופן לא מפורש, דוגמה הממחישה ומסבירה רעיון מורכב או ייצוג נוסף שלא מופיע בטקסט (למשל – ויזואלי, מילולי או סימבולי). פערים בטקסט אינם מוחלטים ולעולם תלויים בקורא ובמאפייניו הייחודיים.

פערי סף (threshold gaps) – כל טקסט מניח ידע קודם מסוים של קוראיו. פער סף מוגדר כחוסר של ידע זה או כידיעתו באופן בלתי שלם או שגוי.

פערים פנימיים (interior gaps) – פערים שהכותב משאיר בטקסט באופן מכוון עבור הקורא להשלים, אם משיקולי חסכנות ואם משיקולים דידקטיים.

השלמת פערים (gap-filling) – הוספת מידע חסר לטקסט על ידי הקורא על מנת לפרשו ולהבינו ברמה טובה יותר.

גישור פערים (gap-bridging) – השלמת פערים הכוללת פעילות מתמטית ענפה המורכבת ממספר שלבים, אשר עשויה לקחת זמן ממושך והיא מודעת ומכוונת.

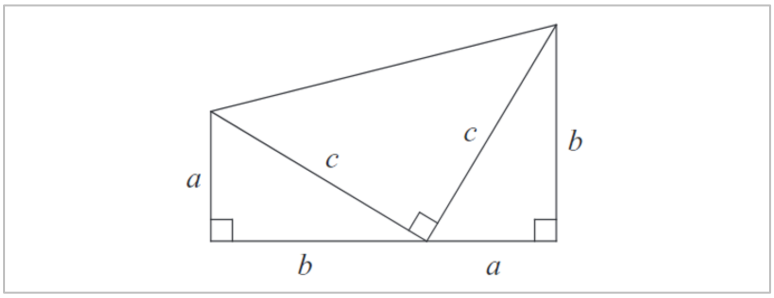
מרחב הפערים (gap-space) – אוסף כל הפערים שטקסט מסוים עשוי להכיל ביחס לקהל קוראים מיועד.

ממצאים – הדגמת ניתוח בעזרת תורת הפערים

בחלק זה נציג ניתוח של טקסט מסוג הל"ם למשפט פיתגורס. נדגים ניתוח טקסטואלי וניתוח קריאת תלמידים בעזרת המסגרת המושגית המתהווה.

ניתוח פערים אפריורי

השרטוט הבא מהווה הל"ם למשפט פיתגורס:

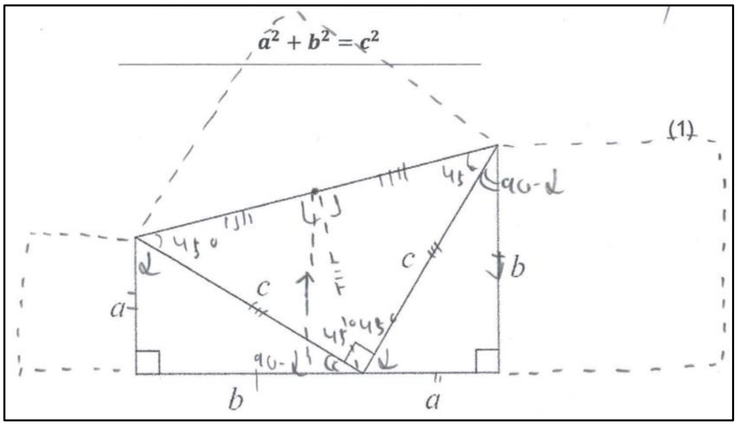


תרשים 1. הל"ם (Alsina & Nelsen 2011, pp. 3-22)

על מנת להדגים פרישה של *מרחב הפערים* נניח שלקוראים אין כלל *פערי סף* ויש בידם את כל הכלים המתמטיים לבניית הוכחה בהתבסס על השרטוט. היות והטקסט מכיל רק שרטוט וכמה סימונים, כל משפט מילולי שינוסח בידי הקורא אודותיו מהווה השלמה של *פער*. שכן, המילים מהוות דרך ייצוג של מידע שאינו מופיע בטקסט. בנוסף, המידע בשרטוט נמסר לקורא בבת אחת (זאת בשונה מהוכחה מילולית, בה נמסר סדר הטענות). על הקורא לא רק להשלים את הטענות החסרות ולנמקן אלא אף לקבוע את הסדר בו יופיעו. באופן קונקרטי יותר נציין שתי דוגמאות ל-*פערים פנימיים*: (א) נימוק המסביר מדוע זווית הראש במשולש שווה השוקיים היא ישרה - מידע שאינו מופיע בשרטוט ודורש *גישור פערים* בן מספר שלבים. (ב) הוספת חישובי שטחים מהם נובע המשפט - דבר שאינו נרמז כלל בשרטוט.

ניתוח פערים בטקסט מנקודת מבט התלמידים

בחלק זה ננסה להסביר התנהגות מתמטית של שלושה תלמידי כיתה י', שעבדו על הוכחה זו, במונחי תורת הפערים. יהלי, אחד התלמידים, הוסיף לציור קווי עזר באופן הבא:



תרשים 2. בניות עזר שביצע תלמיד בתהליך החיפוש אחר ההוכחה

לאחר ששרטט את הקווים המקווקוים החיצוניים התקיימה בקבוצה השיחה הבאה:

23 יהלי: תסתכלו - אז ה-a הזה כפול ה-a הזה שווה ל-b הזה כפול ה-b הזה שווה ל-c בריבוע שזה מה שיש כאן (מצביע על הנוסחה בראש הדף).

24 איתן: לא, למה?

25 יהלי: a בריבוע ועוד b בריבוע שווה c בריבוע

26 אסף: לא אבל אתה צריך כאילו להוכיח את זה

27 יהלי: כן...

אנו מסבירים את ההתנהגות המתמטית של יהלי כניסיון לגשר על *הפער* של היעדרם של האובייקטים a^2, b^2, ו-c^2 בשרטוט. הריבועים שהוסיף יהלי אמנם לא הובילו להוכחה, אך הם היוו התחלה של *גישור פער* (ב) דלעיל, בכך שהביאו את חברי הקבוצה לקשר את האובייקטים האלגבריים a^2, b^2, ו-c^2 למושג השטח. בשיחה שהתנהלה יהלי טען שהמשפט מוכח בידי הבניות שיצר. חבריו זיהו את הטעות הלוגית ועמדו על כך שעדיין ישנם *פערים* עליהם יש לגשר כדי להוכיח את המשפט. ייתכן שהניסיון להוכיח משפט באמצעות המשפט עצמו נובע *מפער סף* שנוצר עקב חוסר ניסיון בהוכחת משפטים. נראה כי עבודת הצוות סייע ליהלי בסגירת פער זה.

סיכום ודיון

נראה כי טקסט מתמטי דוגמת הל"ם מזמן פעילות של *גישור על פערים* העשויה להיות פעילות מתמטית ודיאלוגית ענפה ומשמעותית (Baker, & Schwarz, 2019). שימוש בתורת הפערים לניתוח קריאה של טקסטים בידי תלמידים מהווה חידוש מחקרי ודורש מחקר אמפירי מקיף יותר, על מנת לפתח ולבסס את המסגרת המושגית ולהוסיף לחקור את הקשר בין הפערים בטקסט לפעילות המתמטית של הקוראים.

מקורות

אלבוים-כהן, א' (2016). *מאפייני ההוראה והלמידה בקורסים לקריאת טקסטים מתמטיים לתלמידים מתקדמים בתיכון.* (חיבור לשם קבלת תואר "דוקטור לפילוסופיה"), מכון ויצמן למדע, רחובות.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2011). Icons of mathematics: An exploration of twenty key images (No. 45). MAA.

Baker, M. J., & Schwarz, B. B. (2019). “Argumentexturing”: a framework for integrating theories of argumentation and learning. *To appear in F. van Eemeren and B. Garssen (Eds.).*

Barton, M. L., & Heidema, C. (2002). *Teaching reading in mathematics*. Aurora, CO: Mid-Continent Research for Education and Learning.

Eisenhardt, K. M., & Graebner, M. E. (2007). Theory building from cases: Opportunities and challenges. *Academy of management journal*, *50*(1), 25-32.

Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 358-390.

Nelsen, R. B. (1993). Proofs without words: Exercises in visual thinking (No. 1). MAA.

Österholm, M., & Bergqvist, E. (2013). What is so special about mathematical texts? Analyses of common claims in research literature and of properties of textbooks. *ZDM*, *45*(5), 751-763.

Perry, M., & Sternberg, M. (1986). The King through Ironic Eyes: Biblical Narrative and the Literary Reading Process. *Poetics Today*, *7*(2), 275-322.

Remillard, J. T. (2011). Modes of engagement: Understanding teachers' transactions with mathematics curriculum resources. In *From text to'lived'resources* (pp. 105-122). Springer, Dordrecht.

Shepherd, M. D., Selden, A., & Selden, J. (2012). University students' reading of their first-year mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(3), 226-256.

כיצד מתרחש שינוי בפרקטיקות של מנחה השתלמות חדש?

גיל שורץ, מכון ויצמן למדע
רוני קרסנטי, מכון ויצמן למדע
אברהם הרכבי, מכון ויצמן למדע

מבוא ושאלת מחקר

מנחים (אשר לעיתים נקראים גם מורי-מורים או מורים מובילים) נושאים בתפקיד של הובלת השתלמויות, סדנאות או קהילות, לרוב כמשרה חלקית לצד הוראה בבתי ספר או מחקר ופיתוח במוסדות להשכלה גבוהה. בשנים האחרונות גברה תשומת הלב המחקרית הניתנת למנחים, להכשרתם, לידע ולמיומנויות הדרושים להם לצורך תפקידם ולהתפתחות המקצועית שלהם עצמם (Even, 2014; Lesseig et al., 2016; Prediger et al., 2019). המחקר המתואר כאן מבקש להוסיף נדבך לתחום, והוא מתמקד בתהליך בו מורים למתמטיקה הופכים למנחים, ומובילים בפעם הראשונה השתלמות למורי מתמטיקה אחרים. המחקרים המועטים העוסקים במנחים חדשים טוענים כי האתגרים המרכזיים הניצבים בפניהם נוגעים לניהול דיונים (Borko et al., 2014), תכנון פעילויות ותכנים אשר יוציאו לפועל את מטרות ההשתלמות (Jackson, 2015) וניווט בין היותם בעת ובעונה אחת עמיתים ומנחים של קבוצת המורים איתה הם עובדים (Knapp, 2017). עם זאת, ישנו צורך במחקרים אמפיריים אשר בוחנים כיצד הפרקטיקות של מנחים חדשים מתפתחות לאורך זמן בהתייחס לאתגרים הניצבים בפניהם, ומה מניע שינויים אלו. המחקר המתואר בהצעה זו בא לענות על צורך זה. מבין השאלות שהמחקר עוסק בהן, ההצעה מתמקדת בשאלת המחקר הבאה:

מה מאפיין את הפרקטיקות של מנחה חדש בעת ניהול דיונים במפגשי השתלמות למורי מתמטיקה? האם, ובאיזה אופן, משתנות הפרקטיקות במהלך שנת ההנחיה הראשונה?

מתודולוגיה

המחקר נערך במסגרת פרויקט עדש"ה (עמיתים דנים בשיעורי המתמטיקה) אשר פועל במכון ויצמן למדע משנת 2012. במסגרת ההשתלמויות המוצעות בפרויקט, מורים צופים בשיעורי מתמטיקה מוסרטים מהארץ ומהעולם ודנים בהם בעזרת מסגרת ניתוח בת שש 'עדשות' המתמקדת בפעולות המורה (Karsenty & Arcavi, 2017). מטרת הצפייה והדיון היא העמקת הרפלקציה של מורים על הפרקטיקה שלהם ופיתוח הידע המתמטי להוראה של המורים (MKT; Ball et al., 2008). הצעה זו מתייחסת לחלק מתוך מחקר מקיף אשר מתחקה אחר 8 מנחים. כאן אציג חקר-מקרה אחד, של המנחה יונתן אשר הנחה בפעם הראשונה השתלמות עדש"ה בית-ספרית (8 מפגשים, 30 שעות) בבית הספר בו הוא מלמד. בעת איסוף הנתונים יונתן היה בשנתו הרביעית בהוראה, אך כבר שימש כרכז הפדגוגי של בית הספר.

בניתוח חקר-המקרה נעשה שימוש בנתונים הבאים: (1) צילומי המפגש השני והאחרון בהשתלמות; (2) צילומי ראיונות מבוססי-וידאו אשר נערכו עם המנחה לאחר המפגשים שצולמו, בהם החוקרת והמנחה צפו ביחד במפגש ההשתלמות והמנחה התבקש לעצור כאשר הוא מזהה החלטה שביצע; (3) יומני הנחיה שהמנחה כתב לפני ואחרי כל מפגש השתלמות; (4) שאלונים פתוחים הנוגעים למטרות, דילמות והיבטים נוספים, שמולאו על ידי המנחה לפני תחילת שנת ההנחיה ובסיומה.

בניתוח הנתונים נעשה שימוש במסגרת התיאורטית ROGI, המבוססת על המסגרת הידועה בשם ROG (Schoenfeld, 2010) שמבקשת לתאר החלטות הוראה בעזרת ניתוח המשאבים (Resources), התפיסות (Orientations) והמטרות (Goals) של מורים. מסגרת ROG הותאמה לתיאור קבלת החלטות של מנחים בעזרת הרחבת המרכיבים הללו כך שיתאימו הן לרמת ההוראה והן לרמת ההנחיה. לדוגמה, תפיסות של מנחה כוללות לא רק תפיסות לגבי הוראה ולמידה של מתמטיקה בכיתה, אלא גם לגבי למידת מורים בהשתלמות. בנוסף, בניתוח הנתונים הראשוני התגלה כי תיאור החלטות הקשורות להנחיה עשוי להיות עשיר יותר כאשר לשלושת המרכיבים מצטרף גורם נוסף, זהות (Identity), מכיוון שהמנחים מנווטים בין זהויותיהם כמנחים, מורים, לומדים ועמיתים. לצורך הניתוח, נעשה שימוש בהגדרתו של Gee למושג הזהות:

“Being recognized as a certain ‘kind of person’, in a given context” (Gee, 2000, p. 99). ארבעת המרכיבים של ROGI משמשים לניתוח קבלת ההחלטות של מנחים. תיאור וניתוח קבלת ההחלטות משמש לאפיון פרקטיקות הנחיה.

בהצעה זו אדווח על פרקטיקות של המנחה הקשורות לניהול דיונים. נערכה השוואה בין הפרקטיקות המאפיינות את המנחה לאורך השנה וכן בין המשאבים, האמונות, המטרות ומרכיבי הזהות שמסבירים את אותן פרקטיקות, כפי שעלו מהיומנים, השאלונים ותמלילי הראיונות. לבסוף, נבנה נראטיב הממחיש את תהליך ההתמקצעות שעבר המנחה בשנת ההנחיה הראשונה שלו.

ממצאים

פרקטיקה בולטת שנמצאה בעת ניתוח הדיונים במפגש ההשתלמות השני שיונתן הנחה היא **לנהל דיון כך שיעלו בו רעיונות מסוימים להם המנחה מצפה.** המנחה ניהל דיונים סביב שיעור מצולם בעיקר בעזרת שאלות סגורות אשר נועדו לכוון את המורים לתשובות מסוימות. פרקטיקה זו הושפעה בין היתר מהתפיסה של יונתן לפיה דיון טוב בהשתלמות עדש"ה הוא כזה שבו עולים כל הרעיונות המופיעים במדריך לצופה אשר נמצא באתר עדש"ה, תפיסה שייתכן והגיעה מזהות המנחה כ"שגריר" הפרויקט אשר רוצה להישאר נאמן למטרותיו. תפיסה זו עיכבה את ההוצאה לפועל של מטרות אחרות עליהן הצהיר יונתן , כגון "להוות גורם מכווין ומנחה", ואת השימוש במשאבים אחרים כגון משאבי ההוראה שלו.

ביומני ההנחיה של מפגשים 3-7 המנחה העיד על עצמו שהפגין גמישות רבה יחסית והצליח להסתמך במידה רבה יותר על תגובות המורים, כולל תגובות אותן לא צפה מראש, ופחות על המערך שהכין. הסתמכות זו סייעה להתגברות הביטחון שלו בעצמו כמנחה, ואפשרה לו גם להבליט את זהותו כמנחה אשר *לומד* מהמורים האחרים.

במפגש ההשתלמות האחרון ניכר כי רוב השאלות שיונתן שאל הגיעו מתוך רצונו ללמוד מהמורים האחרים כעמית שלהם, כלומר הפרקטיקה הבולטת היא **לשאול שאלות פתוחות מתוך עניין.** כמעט ולא ניכרה היצמדות למערך שהוכן מראש, ומטרותיו האישיות של המנחה השתלבו עם מטרות ההשתלמות כפי שהוא רואה אותן. עם זאת, יונתן עדיין חווה קשיים, לטענתו, בפיתוח תגובות מורים לכדי דיון עמוק. השינוי שזוהה בפרקטיקה עשוי לנבוע ממספר גורמים: במהלך השנה הוא נטש את התפיסה לפיה דיון טוב בהשתלמות הוא כזה המכיל את כל הרעיונות שהופיעו במדריך לצופה, והחל להשתמש בכלים של עדש"ה כדי למלא את מטרותיו כלומד. לדוגמה, במקום להשתמש בעדשות הניתוח כדי שהמורים יעלו רעיונות אשר מופיעים במערך המפגש, יונתן השתמש בעדשת 'רעיונות מתמטיים' כדי לקיים דיון בין המורים לגבי רצף ההוראה בנושא התפלגות נורמלית, נושא שעניין אותו כמורה צעיר יחסית אשר רוצה ללמוד מעמיתיו המנוסים.

לסיכום, זוהה שינוי בפרקטיקות של המנחה בעת ניהול דיונים לאורך השנה ובגורמים המסבירים שינוי זה: במהלך השנה המנחה שינה את תפיסותיו, מה שגרם לשימוש שונה במשאבים, תיעדוף אחר של מטרות ולהבלטת מרכיבי זהות אחרים. חקר המקרה מציג התמודדות עם אתגר מרכזי בהנחיה – ניהול דיונים פורים, ועשוי לתרום למכשירי ומלווי מנחים המבקשים לרדת לעומקם של תהליכי ההתמקצעות של מנחים חדשים והתמיכה הנדרשת במהלכם.

רשימת מקורות

Ball, D.L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders’ facilitation of mathematics PD. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 149-167.

Even, R. (2014). Challenges associated with the professional development of didacticians. *ZDM*, *46*(2), 329–333.

Gee, J. (2000). Identity as an analytic lens for research in education. *Review of Research in Education*, *25*(1), 99-125.

Jackson, K., Cobb, P., Wilson, J., Webster, M., Dunlap, C., & Appelgate, M. (2015). Investigating the development of mathematics leaders’ capacity to support teachers’ learning on a large scale. *ZDM*, *47*(1), 93-104.

Karsenty, R., & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(5), 433-455.

Knapp, M. C. (2017). An autoethnography of a (reluctant) teacher leader. *Journal of Mathematical Behavior, 46,* 251–266.

Lesseig, K., Elliott, R., Kazemi, E., Kelley-Petersen, M., Campbell, M., Mumme, J., & Carroll, C. (2016). Leader noticing of facilitation in videocases of mathematics professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(6), 591-619.

Prediger, S., Roesken-Winter, B., Leuders, T. (2019). Which research can support PD facilitators? Strategies for content-related PD research in the Three-Tetrahedron Model. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-19.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. New York: Routledge.

שינויים בתחושת מסוגלות-עצמית של מורים המתמחים בהוראת מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל במסגרת פרויקט חונכות

רובא זערורה, אורט בסמת טבעון
עטרה שריקי, מכללת סמינר הקיבוצים

מבוא ומסגרת תיאורטית

במחוז הצפון קיים מחסור במורים הנכונים ללמד מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל. הפרויקט התלת-שנתי "רמזור לצפון" הושק במטרה לתת מענה למחסור הקיים. הפרויקט הוא יוזמה של המחוז, והוא פותח והופעל בין השנים תשע"ה-תשע"ז על-ידי מרכז המו"פ "קשר חם" – לקידום, שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל באמצעות מוסד שמואל נאמן בטכניון ובתמיכת קרן טראמפ. הפרויקט כלל שלושה מרכיבים עיקריים: חונכות, מפגשי השתלמות ומהלכים שנועדו לתמוך בהיווצרותה של קהיליית מורים אוטונומית וברת-קיימא. מרכיב החונכות שיושם במסגרת הפרויקט הופעל במתכונת שבה מורים בעלי ניסיון רב בהוראת מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל שימשו כחונכים למורים למתמטיקה שטרם התנסו בהוראה ברמה של 5 יח"ל ויש להם עניין לעשות זאת (להלן "חונכים" ו"מתמחים", בהתאמה). הן החונך והן המתמחה לימדו באותו בית הספר. מחקרים (למשל, Anderson & Shannon, 1988) מצביעים על כך שחונכות מסייעת להקהות את תחושת הבדידות והאי-ודאות המאפיינות מורים, וכי תפקידו של החונך הוא לתמוך ולשמש משען למורה המתמחה, מבלי ליצור תלות, לשחרר את המורה המתמחה ממטען הרגשות שהוא צובר במהלך עבודתו היום-יומית, ולתרום להתפתחותו של המורה המתמחה כך שיוכל לבטא את ייחודיותו ועצמאות חשיבתו. בפרט, מודל חונכות שבו החונך והמתמחה מלמדים באותו בית הספר נחשב ליעיל ועצמתי בהקשר להתפתחות מקצועית של מורים חסרי ניסיון בתחום מסוים, לנוכח העובדה שהחונך, שהוא בעל ניסיון רב, נגיש למתמחה בכל עת ומכיר את הסביבה שבה פועל המתמחה (Ingersoll & Strong, 2011). מכיוון שהחונך מודע לאתגרים העומדים בפני מורים שאינם מנוסים בתחום מסוים, יש בכוחו לתת מענה ישיר לצרכי המתמחה, להנחות אותו כיצד לתכנן ולהעריך את עבודתו, לספק לו חומרי הוראה ולמידה מתאימים ובאופן כללי לטפח את תחושת המסוגלות-העצמית של המתמחה (West, 2016), כאשר המשמעות של תחושת מסוגלות-עצמית היא המידה שבה אדם מאמין ביכולתו לבצע בהצלחה משימה או התנהגות כלשהי בתנאים נתונים, על-מנת להשיג את התוצאות הרצויות בעיניו (Bandura, 1986).

כחלק מהשתתפותם בפרויקט, המתמחים לימדו בפועל בכיתה י ברמת 5 יח"ל בשנת הלימודים תשע"ה, בכיתה י"א בשנה"ל תשע"ו (כולל הגשת התלמידים לחלק הראשון של בחינת הבגרות במתמטיקה ברמה זו) ובכיתה י"ב בשנה"ל תשע"ז (כולל הגשת התלמידים לחלק השני של בחינת הבגרות במתמטיקה ברמת 5 יח"ל.

מודל החונכות במסגרת פרויקט "רמזור לצפון" כלל שני מרכיבים עיקריים: (1) מפגשים שבועיים של כל חונך והמתמחה/ים שלו לצורך תכנון ההוראה וכתיבת מערכי-שיעור באתר ייעודי, "רמזור למורה", שפותח לצורך זה (https://ramzor.sni.technion.ac.il/#!/home); (2) תצפיות הדדיות בשיעורים ושיחות משוב בעקבותיהן.

המחקר

מטרת המחקר. בהינתן שלתחושת מסוגלות-עצמית יש קשר חזק לביצועי ההוראה ולשיפור תהליכי למידה (Klassen & Tze, 2014), מטרת המחקר הייתה לבחון את תפיסותיהם של המתמחים בנוגע להשפעת מרכיב החונכות בפרויקט על שינויים בתחושת המסוגלות-העצמית שלהם ללמד מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל.

שיטת המחקר, כלי המחקר, שיטות לניתוח המידע. המחקר התבצע בהתאם לשיטת המחקר האיכותני, תוך ניסיון להבין את הפרשנות של משתתפי המחקר לאירועים שהתרחשו במהלך השתתפותם בפרויקט (Willis, 2008). המידע נאסף בארבע נקודות זמן: לפני תחילת הפרויקט ועם סיומה של כל אחת משלוש שנות הלימודים, תוך שימוש בשני כלי מחקר עיקריים: שאלונים מובנים-למחיצה וראיונות עומק. כחלק מאיסוף הנתונים הושם דגש על תפיסות המשתתפים בנוגע להתפתחות תחושת המסוגלות-העצמית שלהם ללמד מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל כמו גם תרומת יחסי החונכות להתפתחות זאת. בפרק הממצאים יוצגו כמה אמירות מתוך הראיונות. ניתוח המידע התבסס על גישות לניתוח תוכן (Hsieh & Shannon, 2005).

משתתפי המחקר. סך-הכל השתתפו בפרויקט 24 מתמחים, מתוכם 15 היו מהמגזר הערבי/דרוזי/בדואי (באופן דומה לייצוג המגזרי במחוז צפון). לאור ההעדפה של הכותבת הראשונה של מאמר זה לראיין את משתתפי המחקר בשפת

האם שלה (ערבית), נשלחה פנייה לכל 15 המתמחים דוברי הערבית בבקשה לקחת חלק במחקר. חמישה מתמחים מתוכם נענו לבקשה, 4 נשים וגבר אחד.

ממצאים

הממצאים מצביעים על נוכחותם של שני תנאים, אשר לקיומם בו-זמנית יש השפעה מיטבית של יחסי החונכות על התפתחותה של תחושת המסוגלות-העצמית של המתמחים: פער גדול בין הותק של החונך והמתמחה (לטובת החונך), והזמינות והנגישות של החונך. במקרה של שלושה מתוך חמשת המתמחים שהשתתפו במחקר היה פער גדול בותק (פער של 20-27 שנות ותק). כתוצאה מכך, בדומה לממצאיהם של אנדרסון ושנון (Anderson & Shannon, 1988), מתמחים אלה ראו בחונכים שלהם דמות סמכותית מבחינת הידע המתמטי והדידקטי שלהם, וכן ייחסו חשיבות לעצות שלהם ולצפיות ההדדיות בשיעורים. יתירה מכך, בהלימה לממצאי המחקר שבוצע על-ידי ווסט (West, 2016), שלושת החונכים הללו היו זמינים ונגישים, מה שסיפק למתמחים תחושה של "סביבה בטוחה". מתמחים אלה העידו על כך שהשילוב של שני התנאים הוא זה שתמך בהתפתחות ההדרגתית של תחושת המסוגלות-העצמית שלהם: "זה נותן לי תחושת ביטחון שיש לי עם מי להתייעץ מתי שאני צריך, והוא נמצא באותו בית הספר...החונך שלי הוא מורה עם ניסיון רב, ואני מתייחס ברצינות רבה לכל מילה שהוא אומר לי, אפילו בשיחה מזדמנת בפרוזדור או בהפסקה". יחסים אלה גם סיפקו למתמחים תחושה של עמיתים שווי ערך לחונכים: "רואים שהחונך מעריך אותי יותר, ומתנהג אליי כמו עמיתה. רואים גם שהשפעתי עליו מבחינת הגישה שלו לתלמידים. הוא מתייחס לקשיים הרגשיים שלהם כעת וזה לא היה קודם"; "במהלך הצפיות שלי זיהיתי שינוי קטן בהתנהלות השיעורים של החונך- הוא אימץ כמה דברים ממערכי השיעורים שהעברתי בכיתה י. אני מרגישה את ההשפעה ההדדית בינינו".

עבור המתמחה הרביעית, התקיים רק אחד התנאים: זמינות החונכת שלה. הן לחונכת והן למתמחה היה ותק דומה בהוראת מתמטיקה (פער של שנת הוראה אחת בלבד), מה שגרם לכך שהמתמחה לא ראתה בחונכת שלה דמות סמכותית: "אני בונה את השיעורים שלי באופן עצמאי...לשתינו יש אותם שנות ותק כמעט ואני מאמינה שכל אחד והייחודיות שלו...לכן אני מעדיפה לבנות את השיעורים בהתאם לתלמידים שלי"; "...ובגלל שיש לנו אותו ותק, החונכת לפעמים שואלת את דעתי איך להעביר נושא מסויים. בשיחות בינינו לא יכולים לזהות מי החונכת ומי המתמחה". עם זאת, המתמחה העריכה את זמינותה של החונכת להתייעצות בסוגיות הנוגעות להספק תכנית הלימודים: "למרות שאני עצמאית כבר מהשנה הראשונה, אני זקוקה לפעמים להתייעצות איתה בנוגע להספק החומר בהסתמך על נסיונה. אז חשוב שהיא זמינה".

גם במקרה של המתמחה החמישית התקיים תנאי אחד בלבד: פער גדול בין הותק שלה לבין זה של החונך (פער של 14 שנות הוראה). אולם בשל אילוצי מערכת בבית ספרם, החונך לא היה זמין להתייעצות ואף לא התקיימו צפיות הדדיות בשיעורים. מצב זה היקשה על המתמחה ללמד מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל, ואף גרוע מכך- פגם בתחושת המסוגלות-העצמית שלה. מתמחה זאת בחרה לעזוב את הפרויקט לאחר שנה אחת בלבד, וציינה שלעולם לא תלמד מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל.

דיון והשלכות מעשיות לשדה החינוך

במסגרות חינוכיות, יחסי חונכות בהם החונך והמתמחה מלמדים באותו בית הספר נחשבים לכלי עצמתי לתמיכה בהתפתחות המקצועית של מורים חסרי ניסיון בתחום מסויים, הודות לנגישות החונך (Ingersoll & Strong, 2011). ביחסים כאלה, החונך מיומן יותר ובעל ידע רחב יותר מהמתמחה, ולכן יכול לספק לו הדרכה, תמיכה ומשוב שיסייעו לו בתהליך ההתפתחות. בין השאר, ליחסים אלה יש תרומה משמעותית להתפתחות תחושת המסוגלות-העצמית של המתמחה (West, 2016). בעוד שתנאים כאלה עשויים להיתפס **כתנאים מספיקים** לצורך הפקת תועלת מיחסי החונכות בין מורים, ממצאי המחקר מצביעים על כך שהשילוב ביניהם עשוי להוות **תנאי הכרחי** בלבד. כלומר– קיומם של שני התנאים: פער בותק ההוראה אשר ייתפס על-ידי המתמחה כמשמעותי וזמינות החונך. בפרט, כפי שעולה מתוך ממצאי המחקר, חוסר הזמינות של החונך עלול לפגום בתחושת המסוגלות-העצמית של המתמחה עד כדי ערעור הנכונות שלו להמשיך ולהתמודד עם האתגר.

מכיוון שבמחקר השתתפו חמישה מתמחים בלבד, וכולם מהמגזר הערבי, מומלץ לבחון את מסקנות המחקר באופן רחב יותר, כמו גם במגזרים אחרים. בנוסף, מומלץ לקיים מחקר מעקב אשר יבחן את התפתחותם של יחסי-הגומלין בין החונך לבין המתמחה לאורך זמן, ללא מסגרת פורמלית של פרויקט. כמו כן, מוצע לבחון את הממצאים גם בהקשר של תחומי דעת אחרים, וכן לבחון את הפער האופטימלי בין הותק של החונך לבין זה של המתמחה.

רשימת מקורות

Anderson, E. M., & Shannon, A. L. (1988). Toward a conceptualization of mentoring. *Journal of Teacher Education, 39*(1), 38-42.

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Ingersoll, I. M., & Strong, M. (2011). The impact of induction and mentoring programs for beginning teachers: A critical review of the research. *Review of Educational Research, 81*(2), 201–233 .

Klassen, R. M., & Tze, V. M. C. (2014). Teachers' self-efficacy, personality, and teaching effectiveness: A meta-analysis. *Educational Research Review, 12*, 59-76.

West, A. (2016). A framework for conceptualizing models of mentoring in educational settings. *International Journal of Leadership and Change, 4*(1), Article 11 .

Available at: http://digitalcommons.wku.edu/ijlc/vol4/iss1/11

Willis, J. W. (2008). *Qualitative research methods in education and educational technology*. Information Age Publishing.

בניית רצף משחקים לימודיים במתמטיקה: שיקולי מורה מומחית למול אלגוריתם

ענת כהן, אוניברסיטת תל אביב
אורית עזרא, אוניברסיטת תל אביב
ארנון הרשקוביץ, אוניברסיטת תל אביב
בן לוי, אוניברסיטת בן גוריון בנגב
אודליה צייאדה, אוניברסיטת תל אביב
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב
אבי סגל, אוניברסיטת תל אביב
קובי גל, אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מבוא

שילוב של סביבות למידה משחקיות ממוחשבות בהוראת המתמטיקה, בהם התלמיד פועל באופן עצמאי על-פי רצף מוכתב מראש, גובר בעשורים האחרונים, ועדיין, נשאלת שאלת האפקטיביות של רצף פעילויות אלו. אחד המדדים הנלקחים בחשבון בעת תכנון רצף הפעילויות הוא מדד הקושי של הפעילות, והתאמתו במסלול הלמידה לכל לומד. תשומת לב רבה ניתנה לרצף לימודי גמיש שמטרתו לספק מסלול למידה אופטימלי ללומדים בעלי ידע קודם, העדפות, ויעדי למידה שונים (Chen, 2008).

מתן המלצות לפעילות מותאמת אישית יכול להתבצע במערכות תרגול חכמות באופן אוטומטי מוחלט (Mouri et al., 2016), או באמצעות מעורבות של המורים (Manouselis et al., 2011). קיימים מחקרים המשווים בין תהליכי למידה מותאמים ולא, ומחקרים המשווים אלגוריתמים שונים, אולם, לא נמצא מחקר המשווה בין מעורבות גבוהה/נמוכה של מורה ומכונה בתהליך הפרסונליזציה. למורה ולמכונה יתרונות שונים, וסביר להניח שימצא הבדל בשיקולים המלווים את קבלת החלטות שלהם. מורים מומחים הם בעלי ידע מוצק בתחום התוכן ובעלי ידע תוכני-פדגוגי, הקושר בין ידע בתחום התוכן עם ידע פדגוגי (Shulman, 1986). הידע המקצועי במתמטיקה, הגישה הפדגוגית וההיכרות האישית עם הלומד (Birch, & Ladd, 1997) הם אפוא יתרונות המורה המומחה. לעומת זאת, מערכות תרגול חכמות ו/או מערכות ממליצות מבוססות על מספר סוגי אלגוריתמים, או שילוב שלהם (Verbert et al., 2012). ההמלצות על המשימות העתידיות מבוססות על ניתוח הנתונים לשם חיזוי השימוש בפריטים, או לשם השוואה לפריטים אחרים (Ricci et al., 2011). לפיכך, נגישות לנתוני עתק, חישוביות ואוטומטיזציה הם הבולטים ביתרונות המכונות.

נציין כי התאמה אישית ללומד עדיין נחשבת לאתגר הן בלמידה בכתה והן בלמידה מבוססת מחשב.

המחקר

מטרת המחקר לבחון את אפקטיביות הלמידה בתהליכי פרסונליזציה במסגרת שילוב משחקונים מתמטיים ממוחשבים, תוך בחינת המלצות של מערכת ממוחשבת (אלגוריתמים), בה למורה אין מעורבות כלל, למול המלצות של מורה מומחית. נבחנו ההבדלים בסוגי המשחקונים הנבחרים ובסדר הופעתם ללומד. שאלנו: מהם מסלולי הלמידה המותאמים לתלמידים על-ידי מורה מומחית למול מערכת ממוחשבת, בהתייחס לדרגת קושי הפעילויות ואפקטיביות הלמידה?

פרסונליזציה דורשת התאמה של פעילות עתידית על בסיס פעילות קודמת של הלומד ורמת הקושי שלה עבורו. אחת הגישות הנפוצות לכך היא *Collaborative filtering* (Shishehchi et al., 2011). במחקר הנוכחי יושם עיבוד חדשני לגישה זו, שהוכיחה יתרון על-פני אלגוריתמים אחרים (Segal et al., 2014), על מערך נתונים שכלל

563,735 רשומות, המתעדים 15,000 תלמידים מישראל שהשתמשו ב-978 יישומונים במהלך ספטמבר 2017-יוני 2018. על-פי ביצועי התלמידים, ציונם וזמן שהייה ממוצע ביישומון, הותאמו לתלמידים פעילויות על-פי דרגות קושי, המדורגות על-סמך התנהגות תלמידים דומים. נציין כי המערכת לומדת מתוך הנתונים, ולא נשענת על תיאוריה. על מנת לערוך השוואה הוגנת בין המלצות המורה לבין האלגוריתם, השתמשנו בניסוי מבוקר אקראי (RCT: Randomized Controlled Trial), הקיים במחקר החינוכי (Bouguen & Gurgand, 2012), אך אינו נפוץ בסביבות כיתתיות אותנטיות.

במחקר השתתפו 77 תלמידים בכיתות ד'-ה' מבית-ספר יסודי בעיר גדולה, 2 כיתות בכל שכבת גיל. בשכבת ד'-22 בנים, 24 בנות; ובשכבת ה'-12 בנים, 19 בנות. המורה המומחית במחקר מלמדת מתמטיקה בבית-הספר, ובעלת ניסיון של 18 שנה בהוראה ובשילוב טכנולוגיה בכיתה. היא מכירה היטב את סביבת הלמידה המקוונת, בה נעשה שימוש, הכוללת יישומונים במתמטיקה מבוססי-משחק לבית-הספר היסודי.

איסוף הנתונים בבית-הספר התבצע במהלך דצמבר 2018 – ינואר 2019 בשני שלבים: א. התנסות התלמידים ב-10יישומונים זהים, בסדר שנבחר על-ידי המורה על-פי שכבת הגיל; ב. התלמידים חולקו באקראי לקבוצת האלגוריתם שקיבלה המלצה לפעילויות מהמערכת; ולקבוצת המורה שקיבלה המלצות מהמורה.

ממצאים

בדקנו האם היישומונים המוצעים לתלמיד דורגו בסדר קושי עולה. כמו-כן נבדקה רמת הקושי במשימות המורה שהוקצו לתלמידים "חלשים", "בינוניים" ו"חזקים". חישוב ממוצעי היישומונים הממולצים על-ידי המורה עבור כל קבוצה, הראה ערך גבוה יותר מקבוצת ה"חלשים" ל"בינונים" ומקבוצת ה"בינונים" ל"חזקים" (טבלה 1). נתון, המצביע על **התאמה בין הערכות המורה את קושי היישומונים ומידת הקושי שלהם כפי שנצפתה בפעילות התלמידים**.

טבלה1. קושי ממוצע של רצף הפעילויות של המורה

שכבת גיל	"חלשים"	"בינונים"	"חזקים"
4	1.9	2.1	2.4
5	1.4	1.8	2.5

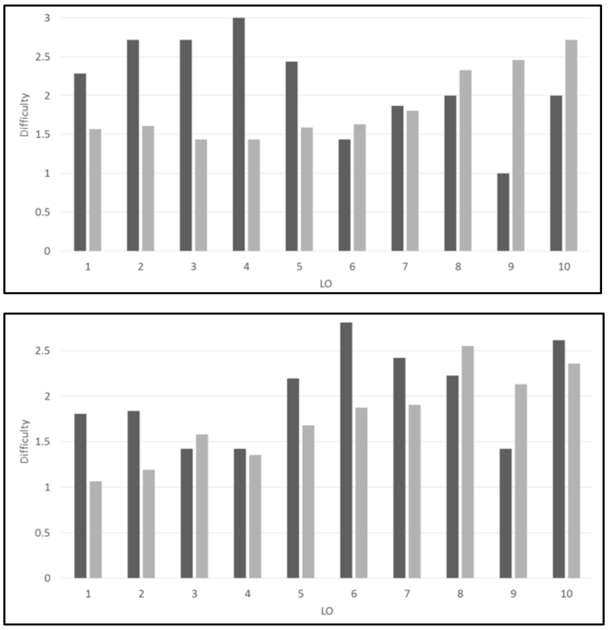
דרגות הקושי של פעילויות המורה הושוו לקושי פעילויות האלגוריתם. **המורה, בהשוואה לאלגוריתם, המליצה על יישומונים קשים יותר.** ההבדלים נמצאו מובהקים סטטיסטית, עם גודל אפקט קטן (טבלה 2).

טבלה 2. השוואת דרגות הקושי של הפעילויות המומלצות

שכבה	ממוצע (ס.ת.) מורה	ממוצע (ס.ת.) אלגוריתם	t-testמזווג	גודל האפקט†
4 (N=46)	2.17 (0.21)	1.96 (0.11)	9.32***	0.05
5 (N=31)	2.02 (0.44)	1.77 (0.18)	3.84**	0.13

** $p<0.01$, *** $p<0.001$, † Cohen's d

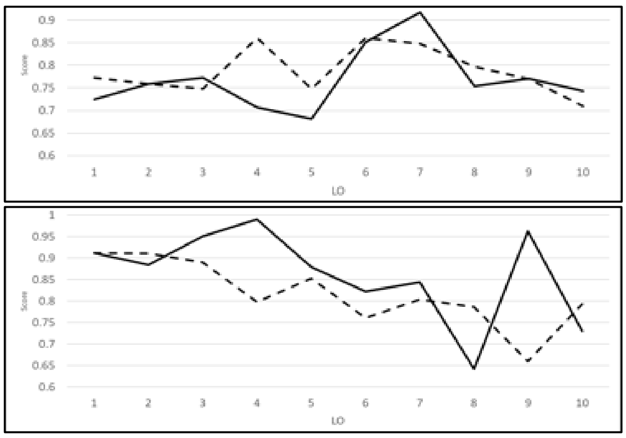
בבחינת הסדר וסוג הפעילויות של כל לומד, ממוצע הקושי נבחן בעבור כל פעילות בנפרד (לכלל התלמידים), תוך השוואה בין המלצות המורה לאלגוריתם. בשכבת ד' המלצת האלגוריתם מאופיינת ברמת קושי גוברת לאורך הפעילויות, בעוד שלהמלצות המורה מגמה כללית הפוכה. ממצא זה נתמך על-ידי חישוב המגמה הליניארית בעבור שני הווקטורים של הפעילויות, עם m=0.13 לאלגוריתם ו-m=-0.13 למורה. בשכבת ה', נמצאה מגמה גוברת בשני המקרים, כאשר חישובי מגמה ליניארית מגיעים לתוצאה של m=0.15 ו-m=0.07 עבור האלגוריתם והמורה בהתאמה (איור 1).



איור 1. רמת קושי ההמלצות (שכבת ד'–למעלה, שכבת ה'–למטה) של המורה (כהה) והאלגוריתם (בהיר)

הקשר בין המלצות המורה להמלצות האלגוריתם נבחן באמצעות מתאם AP (Yilmaz, Aslam, & Robertson, 2016), המודד דמיון בין שני רצפים שונים (סדר פעילויות שונה). בשכבת ד' נמצא ממוצע מתאם של 0.42 (SD=0.12, N=46), כשגודל הממוצע של קבוצת החפיפה נמצא 6.22 (SD=0.87). בשכבת ה', מתאם הממוצע נמצא 0.75 (SD=0.22, N=31) עם ממוצע חפיפה של 5.19 (SD=0.79). אלה נמצאו בהלימה להתאמה הגבוהה שנמצאה בין הרצפים, כאשר גם המלצות המורה וגם האלגוריתם מדגימות קושי גובר (כיתה ה').

בשכבת ד' לא נמצא יתרון ברור לקבוצת המורה (N=25) או לקבוצת האלגוריתם (N=21) באשר לציון הממוצע, בעוד שבשכבת ה', נמצא יתרון לקבוצת המורה (N=16) על-פני האלגוריתם (N=15) (איור 2). על בסיס הממצאים הקודמים, ניתן להסיק שכאשר המלצות האלגוריתם והמורה נמצאות בהלימה, למורה יש יתרון; וכאשר ההמלצות אינן בהלימה, לא המורה ולא האלגוריתם מפגינים יתרון.



איור 2. ציוני שכבות ד' (למעלה) וה' (למטה) בקבוצת המורה (קו רציף) ובקבוצת האלגוריתם (קו מקוקו)

דיון

במחקר זה הושוותה רמת הקושי של פעילויות במתמטיקה המומלצות לתלמידים בהתאמה אישית על-ידי מורה מומחית לבין המלצות אלגוריתם חדשני. הממצאים מצביעים על כך שהאלגוריתם יכול להפיק תועלת מניסיון המורה המומחית אודות דרגות קושי ובניית רצף פעילויות מותאם לתלמיד, ולהיפך. לדוגמא, המורה המליצה על יישומונים קשים יותר מהאלגוריתם, ואין זה הביא להישגים נמוכים יותר בקבוצתה. לכן, ניתן להמליץ באלגוריתם על משימות

קשות יותר למקסום מעורבות התלמידים והלמידה. המלצה, העשויה להיות טובה לתוכנות חינוכיות בכלל (Luckin, 2001). בנוסף נמצא שלמורה יתרון ביחס לביצועי התלמידים כאשר המליצה על רצף יישומונים העולה בדרגת הקושי. ממצא העשוי לנבוע מהיכרותה עם הנושאים שנלמדו בכיתה ועם תכני היישומונים. גם פה, ניתן, למשל, להוסיף לאלגוריתם מידע, הקשור לתוכן היישומונים או למיומנויות הנדרשות להם. מצד שני, מודגש היתרון של קביעת רמת קושי אובייקטיבית, המבוססת על נתונים. יש לנקוט במשנה זהירות בפירוש הממצאים כיוון שמדובר בפיילוט קטן, בו השתתפה מורה מומחית אחת, ולכן, מתוכנן מחקר עתידי עם מאגרים גדולים יותר, כמו גם עם שכבות גיל ונושאים נוספים.

המחקר נתמך על-ידי משרד החינוך, לשכת המדען הראשי.

רשימת מקורות

Birch, S. H., & Ladd, G. W. (1997). The teacher-child relationship and children's early school adjustment. *Journal of School Psychology*, *35*(1), 61–79. doi:https://doi.org/10.1016/S0022-4405(96)00029-5

Bouguen, A., & Gurgand, M. (2012). Randomized controlled experiments in education, EENE analytical report No. 11.

Chen, C.-M. (2008). Intelligent web-based learning system with personalized learning path guidance. *Computers & Education*, *51*(2), 787–814. doi:https://doi.org/10.1016/j.compedu.2007.08.004

Luckin, R. (2001). Designing children's software to ensure productive interactivity through collaboration in the Zone of Proximal Development (ZPD). *Information Technology in Childhood Education Annual*, *2001*(1), 57-85.

Manouselis, N., Drachsler, H., Vuorikari, R., Hummel, H., & Rob, K. (2011). Recommender systems in technology enhanced learning. In F. Ricci, L. Rokach, B. Shapira, & P. B. Kantor (Eds.), *Recommender systems handbook* (pp. 387–415). New York, NY: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-0-387-85820-3.

Mouri, K., Ogata, H., Uosaki, N., & Lkhagvasuren, E. (2016). Context-aware and personalization method based on ubiquitous learning analytics. *Journal of Universal Computer Science*, *22*(10), 1380–1397.

Ricci, F., Rokach, L., & Shapira, B. (2011). Introduction to recommender systems handbook. In F. Ricci, L. Rokach, B. Shapira, & P. B. Kantor (Eds.), *Recommender systems handbook* (pp. 1–35). New York, NY: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-0-387-85820-3.

Segal, A., Katzir, Z., Gal, K., Shani, G., & Shapira, B. (2014). EduRank: A collaborative filtering approach to personalization in e-learning, in *Proceedings of the 7th International Conference on Educational Data Mining*, 68–75.

Shishehchi, S., Banihashem, S. Y., Zin, N. A. M., & Noah, S. A. M. (2011). Review of personalized recommendation techniques for learners in e-learning systems. *2011 International Conference on Semantic Technology and Information Retrieval*, 277–281.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. doi:https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004

Verbert, K., Manouselis, N., Ochoa, X., Wolpers, M., Drachsler, H., Bosnic, I., & Duval, E. (2012). Context-aware recommender systems for learning: A survey and future challenges. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, *5*(4), 318–335. doi:https://doi.org/10.1109/TLT.2012.11

Yilmaz, E., Aslam, J. A., & Robertson, S. (2016). A new rank correlation coefficient for information retrieval, in *Proceedings of the Sixth International Conference on Learning Analytics & Knowledge*, 587–594.

ספירה ומנייה בגיל הרך: אלו פעילויות מבוגרים מציעים?

רותי ברקאי (1) (2) אסתר לוינסון (1), דינה תירוש (1), פסיה צמיר
(1) אוניברסיטת תל אביב, (2) סמינר הקיבוצים

רקע תיאורטי

הספרות המחקרית ותכניות הלימודים ממליצות על קידום מיומנויות ספירה ומנייה בגיל הרך (משרד החינוך והתרבות, 2010; Nguyen et al., 2016; Sarama & Clements, 2009). מספר מחקרים בדקו את סוגי הפעילויות המספריות המיושמות בגני הילדים על ידי גננות (Clements et al., 2011). עם זאת, ילדים צעירים מבלים חלק ניכר מהיום עם מבוגרים אחראיים אחרים שאינם בהכרח גננות. מחקרים מראים כי כדי שילדים יוכלו לנצל הזדמנויות למידה בגן, יש צורך ברמת תמיכה מסוימת בסביבה הביתית, ובכלל זה פעילויות וצעצועים המעודדים מיומנויות ספירה ומנייה (Anders et al., 2012).

ספירה ומנייה הם כישורים בסיסיים שנלמדים במקרים רבים בילדות המוקדמת (Baroody, 1987). ספירה כוללת את היכולת לומר את רצף מילות המספרים בסדר הנכון ומיומנויות נוספות כגון היכולת לספור קדימה החל ממספר שאינו אחד, ספירה לאחור וספירה בדילוגים. מנייה מתייחסת ליכולת לקבוע מהו המספר של קבוצת עצמים והיא כוללת שליטה בחמישה עקרונות (Gelman and Gallistel, 1987): ספירה, התאמה חד חד ערכית, קרדינליות, הפשטה ואי רלוונטיות סדר המנייה.

מאמר זה בוחן את סוגי הפעילויות שמציעים מבוגרים, שאינם מורים לגיל הרך, לקידום מיומנויות ספירה ומנייה של ילדים צעירים (גילאי 3-6).

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 44 מבוגרים בגילאי 20-60 אשר אינם מורים בגיל הרך (37 נשים ו- 7 גברים). למרביתם (כולם פרט לעשרה) יש קשר עם ילדים בני שש ומטה.
כל אחד מהמשתתפים התבקש להשיב על שאלון באופן פרטני ובסביבה המתאימה לו, בנוכחות חבר בצוות המחקר. המשתתפים התבקשו להשיב בכתב על השאלות:
(1) בתוכנית הלימודים במתמטיקה לגיל הרך נכתב כי עד סוף הגן, ילדים צריכים להיות מסוגלים לספור עד 30. אילו פעילויות ספירה הייתם נותנים לילדים כדי לקדם מיומנות זו?
(2) אילו פעילויות מנייה הייתם נותנים לילדים כדי לקדם את יכולתם למנות שמונה עצמים?

ממצאים

פעילויות ספירה: ראשית, הבחנו בין פעילויות שמעודדות אמירה של רצף המספרים לבין פעילויות שלא מעודדות זאת (למשל, משתתף אחד הציע פעילות של צביעת סמלי המספר. למרות שחשוב לזהות את סמלי המספר, צביעת ספרות אינה דורשת מיומנות של אמירת רצף המספרים).
הפעילויות שדרשו אמירת רצף מספרים סווגו לשלוש קטגוריות:
(1) פעילות ספירה. למשל, לבקש מהילד לספור בקול רם עד המספר שהוא יכול, לבקש מהילד לספור עד 30.
(2) פעילות שמשלבת תנועה וספירה. למשל, ספירת צעדים, ספירת קפיצות וספירת תנועות הלוך ושוב של נדנדות.
(3) פעילות של מניית עצמים. למשל, צעצועים, חרוזים, סלעים, סוכריות.

נציין כי חלק מהמשתתפים הציעו יותר מסוג פעילות אחת. מטבלה מספר 1 ניתן לראות כי כמחצית מהמשתתפים (23) הציעו פעילויות שכללו מניית עצמים (כאשר שניים מהם הציעו גם פעילויות ספירה, ושישה

הציעו פעילויות ששילבו תנועה וספירה). רבע מהמשתתפים (11) הציעו פעילויות ספירה. משתתפים אלה הציעו פעילויות ספירה ברצף מאחד. שניים מהמשתתפים שהציעו פעילויות ספירה התייחסו גם לספירה לאחור, שניים התייחסו לספירה קדימה ממספר שאינו אחד, ושניים התייחסו לאמירת מספר לפני מספר כלשהו או למספר עוקב למספר כלשהו. שבעה משתתפים רשמו פעילויות שאינן קשורות למיומנויות ספירה.

טבלה מספר 1: שכיחות סוגי פעילויות ספירה (N=44)

הפעילות	ספירה	ספירה ותנועה	מניית עצמים
שכיחות	11	10	23

פעילויות מנייה: ראשית, הבחנו בין הצעות לפעילויות מנייה כלליות לבין הצעות בהן היה פירוט לגבי הפעילויות שהוצעו. בפעילויות מנייה כלליות נכללו פעילויות כגון ספירת כיסאות, אצבעות וסוכריות. בהתייחס לפעילויות מפורטות יותר נקבעו שלוש קטגוריות:
(1) התייחסות למיקום ולסוג העצמים הנמנים. למשל, אחת המשתתפות כתבה: "אשים עפרונות צבעוניים בשורה". משתתפת אחרת הדגישה שחשוב לגוון את קבוצות העצמים אותן יש למנות: "אבקש למנות פריטים זהים ופריטים לא זהים". התייחסות זו קשורה לעקרון ההפשטה.
(2) הדגשת שאלה ספציפית אותה יש לשאול את הילד בפעילות מנייה. למשל, בשונה מהבקשה מהילד למנות את המלפפונים, אחת המשתתפות כתבה: "אשאל את הילד, כמה מלפפונים קנינו, או כמה צלחות יש על השולחן". השאלה "כמה" יכולה לעודד התייחסות לעקרון הקרדינליות.
(3) מנייה כחלק מפעילות משחקית. למשל, אחת המשתתפות הציעה לבקש מילדים "להביא שמונה צעצועים מהקופסה". משתתפת אחרת הציעה: "לבנות מגדל עם שמונה בלוקים". פעילות נוספת ששולבה בפעילות מנייה הייתה פעילות מיון. למשל, "אראה תמונה עם מספר פריטים, כמו גן שעשועים לילדים. המשימה היא לספור כמה פריטים ניתן למצוא עם אותו מאפיין. כמה ילדים יש בתמונה? כמה חולצות אדומות יש?". משתתפת אחת הציגה פעילות שהתמקדה בהתאמה חד- חד ערכית מבלי להזכיר את המונחים ספירה או מניה: "סדרו שולחן עם שמונה כסאות, ליד כל כיסא יש לשים צלחת, ובכל צלחת הניחו פרוסת לחם אחת". מטבלה מספר 2 ניתן ללמוד כי כמחצית מהמשתתפים (23) הציגו פעילויות מפורטות יותר כאשר כמחציתם (11) התייחסו למיקום ולסוג העצמים הנמנים (תשעה התייחסו למיקום העצמים ושניים לסוג העצמים).

טבלה מספר 2: שכיחות סוגי פעילויות המנייה (N=44)

הפעילות	פעילויות מנייה כלליות	פעילויות מפורטות יותר			לא השיבו
		מיקום וסוג העצמים	הצגת שאלות	כחלק מפעילות משחקית	
שכיחות	19	11	3	9	2

תרומת המחקר

במחקר קודם (Anderson & Anderson, 2018) הורים התבקשו לצלם את ילדיהם בעת העיסוק בפעילויות הקשורות למיומנויות מתמטיות (הם לא התבקשו לתאר באופן ספציפי את המתמטיקה המעורבת בפעילויות אותן צילמו). נמצא כי כל המשפחות שהשתתפו המחקר עוסקות בפעילויות ספירה או מנייה כלשהן. עם זאת, רק מחציתן עסקו בפעילויות ספירה. במחקר הנוכחי המבוגרים התבקשו לתאר פעילויות שיכולות לקדם מיומנויות ספירה ומנייה של ילדים. נזכיר כי בשפת היום יום מקובל להשתמש במונח ספירה גם כאשר הכוונה היא למנייה. לפיכך, אין זה מפתיע שחלק ניכר מהמשתתפים הציעו למנות עצמים כאשר התבקשו לתאר פעילויות שמקדמות מיומנויות ספירה. עם זאת, אחד מעקרונות המנייה הוא ספירה ולכן מנייה, מעצם טבעה, עשויה לקדם גם מיומנויות ספירה.

מהממצאים עולה כי מיומנויות כגון ספירה לאחור, ספירה קדימה ממספר כלשהו שאינו אחד וספירה בדילוגים כמעט ולא הוזכרו. למיומנויות אלה חשיבות לביצוע פעולות חשבון בסיסיות (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) . ניתן וחשוב לקדם מיומנויות אלה לא רק בגן הילדים אלא גם בסביבה ביתית. במחקר הנוכחי אנו מתמקדות בבדיקת התייחסותם של מבוגרים למיומנויות ספירה ומנייה. תוצאות המחקר יכולות לסייע לאנשי מקצוע להציע סדנאות העשרה למבוגרים ולהגביר את המודעות ואת הידע של מבוגרים לגבי פעילויות שמסייעות בקידום מיומנויות מתמטיות של ילדים צעירים.

המחקר שמתואר במאמר זה ממומן על ידי הקרן הלאומית למדע (מענק מחקר 1631/18)

מקורות

משרד החינוך והתרבות (2010). *תכנית לימודים במתמטיקה לגן הילדים*. האגף לתכנון ופיתוח תכניות לימודים, ירושלים.

Anders, Y., Rossbach, H. G., Weinert, S., Ebert, S., Kuger, S., Lehrl, S., & von Maurice, J. (2012). Home and preschool learning environments and their relations to the development of early numeracy skills. *Early Childhood Research Quarterly*, 27(2), 231-244.

Anderson, A., & Anderson, J. (2018). Math-in-context: The types of math preschoolers 'do' at home. In I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, & C. Benz (Eds.), *Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education* (pp. 183-202). Springer, Cham.

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking: A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers.* New York, NY: Teacher's College Press.

Clements, D., Sarama, J., Spitler, M., Lange, A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*, 127–166.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.

Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C., & Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early childhood research quarterly*, *36*, 550-560.

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. London, England: Routledge.

תפקידיה של תנועה קצבית בפעילות מתמטית מעוגנת גוף

אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית
דור אברהמסון, UC Berkele

מבוא ורקע תיאורטי

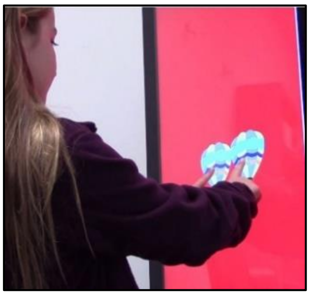
חשיבה מעוגנת גוף (embodied cognition) היא תיאוריה לפיה תכונות ומאפיינים של הגוף משפיעים ומעצבים היבטים רבים של החשיבה. גוף הולך וגדל של מחקר בחינוך מתמטי מפתח את התיאוריה והפרקטיקה של למידה מעוגנת גוף כתהליך של רפלקציה מודרכת על פעולה גופנית ממוקמת (Abrahamson & Sánchez-García, 2016; Bamberger & diSessa, 2003; Nemirovsky & Ferrara, 2009; Radford, Arzarello, Edwards, & Sabena, 2017; Sinclair, Chorney, & Rodney, 2016). הצעתינו דנה בתכלית, בתפקוד ובמנגנונים של התנהגות קצבית של התלמידים כאשר הם מתמודדים עם משימות מתמטיות מעוגנות גוף.

מספר חוקרים רואים בנטייה של בני אדם לשגרות קצביות משאב ללמידת מתמטיקה. למשל, מאפיינים קצביים של פעילות מוסיקלית נמצאו כמקלים למידה על יחס, שברים ופרופורציות (Bamberger & diSessa, 2003). Bautista & Roth (2012) שחקרו משימות סיווג חפצים תלת מימדיים, תיעדו את הופעתן של תנועות ידיים קצביות והציעו שקצב יכול להוות משאב וגם תוצאה של העיסוק בפעילויות המתמטיות. Radford (2015) ממשיג את הדינמיקה הקצבית כתכונה מכוננת של חשיבה מתמטית. בניתוח של פעילות אלגברית יוצרת תבנית רדפורד מפרט ארבעה היבטים של התנהגויות קצביות: משקל (meter), קיבוץ (rhythmic grouping), אורך (prolongation), ונושא (theme).

בחקר מקרה שנציג כאילוסטרציה לתפקידיה של תנועה קצבית בלמידת מתמטיקה, נתמקד ב- (1) הופעה והתאמה של תנועה קצבית בהתמודדות עם משימה בסביבת למידה תנועתית טכנולוגית וכן (2) בהטמעה של מסגרת ייחוס כמותית לתנועה קצבית כדרך לניסוח יחסי פרופורציה — המטרה הלימודית של הפעילות.

מתודולוגיה

הנתונים האמפיריים למחקר זה נוצרו בהקשר של מחקר-עיצוב מתמשך שחוקר חשיבה מתמטית מעוגנת גוף. במרכזו נמצא מכשיר אינטראקטיבי The Mathematics Imagery Trainer (MITp, Abrahamson & Trninic, 2015; ראה איור 1).



איור 1. המכשיר קולט מרחק בין מיקום של כל יד מתחתית המסך. כאשר היחס בין שני המרחקים הוא, בדוגמא הזו, 1:2—המסך ירוק, כאשר שונה—המסך מחליף צבע בהדרגה לאדום.

מכשיר זה נועד לאפשר לתלמידים לעסוק בפעילות בה הם לומדים דרכים חדשות לנוע ולחשוב מתמטית כדי להצליח במשימה. התלמידים מזיזים שני אובייקטים וירטואליים בניסיון לקבל משוב חיובי (מסך ירוק) ולגלות את החוקיות לפיה המשוב החיובי מתקבל. תיאום התנועה של שתי הידיים על-פני תבניות חזותיות המאפשרות את ארגון התנועה מהווה את הבסיס הקוגניטיבי להתערבות נוספת ורפלקציה ורבאלית מודרכת. התהליך מוביל ללמידה של מושג מתמטי—הפרופורציה.

K הייתה תלמידה בת 11, אחת מ -25 תלמידים שהשתתפו בראיון קליני מובנה למחצה מבוסס משימות (לפרטים ראו Palatnik & Abrahamson, 2018). המקרה של K עניין אותנו מפני שהיא התקדמה במשימה ביעילות ובמהירות רבה. הדבר גרם לנו לתהות האם קיים מאפיין סמוי להתמודדות שלה. נקטנו בגישה של 'תיאוריה מעוגנת שדה' בניתוח מיקרו-גנטי של הנתונים האמפיריים (Goldin, 2000). תוך בחינה רב-מודאלית של תנועות גוף, מחוות, התבטאויות של התלמידה ושל מידת ההצלחה במשימה. סוגיית הקצב עלתה מן הנתונים אף שעיצוב ההתערבות לא היה ממוקד בה במקור.

לצורך ניתוח זיהינו את כל האירועים בהם התלמידה ניסחה תובנה הנוגעת לאסטרטגיית הפעולה שלה והשיבה לשאלתנו: "איך היית מסבירה לאדם אחר את האסטרטגיה שלך לקבל משוב ירוק?". כל תובנה חדשה סימנה מעבר לתת-משימה הבאה. קידדנו תתי-משימות כמקומיות ("למצוא ירוק" על ידי הצבת שני הסמנים במיקומי מסך מסוימים) או גלובליות ("שמירה על ירוק" תוך כדי החלקה אנכית של הסמנים על מסך). חיפשנו קשר בין שני היבטים של התנהגותה של K: (1) שינוי באסטרטגיות תנועתיות בהן השתמשה (ראה טבלה 1 לעיון במילון התנועות שפותח) ו-(2) שינויים שראינו ברצף התגובות הורבאליות שלה.

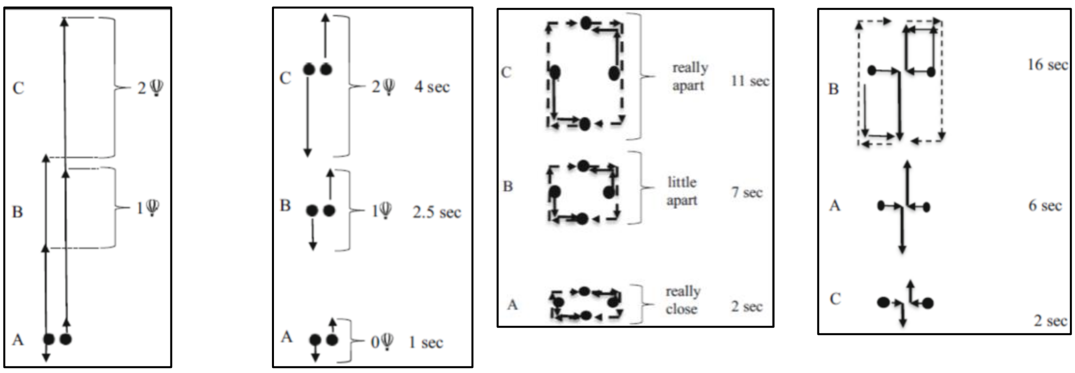
טבלה 1. קידוד תנועות הידיים הנפוצות ביותר

תנועה	סימון
תנועה אנכית, (למשל, יד שמאל נעה מטה ויד ימין נעה מעלה)	↓↑
תנועה אופקית, (ידיים נעות זו אל זו)	→←
תנועה אנכית, כאשר היד הימנית עולה למעלה פי שניים מהר מהשמאלית	↑↑x2
הנחת שתי האצבעות על המסך	●●

ממצאים ודיון

K החלה בתנועות ידיים די כאוטיות, שהלכו והתגבשו כתנועות מתואמות. עם הזמן K החלה לשים לב להיבט הכי רלוונטי של התנועה - הזזה אנכית. הדבר התבטא בתנועותיה שהפכו לבעלות מבנה יציב במרחב ובזמן. צורת התנועה זו הייתה יעילה במשימות מקומיות אך לא התאימה על פני מרחב הבעיה כולו.

המשך החקירה התנועתית של K נראה באיור 2.



תת-משימה מקומית 1

"הבלונים היו בערך אחד מעל השני" (02:05).

תת-משימה מקומית 3

" למטה [בתחתית המסך] הידיים שלי היו ממש קרובות, ואז כאן [אמצע המסך] הם היו קצת לחוד, ואז למעלה [חלק עליון] הם היו ממש לחוד " (3:15)

תת-משימה מקומית 6

" ... בתחתית, ... זה אפס בלונים ביניהם, באמצע יש בלון אחד ביניהם, ובחלקו העליון, ... שני ... בלונים ... ביניהם ... אז זה גדל כל פעם באחד." (6:45)

תת-משימה גלובאלית 7

"... מזיזים יד אחת מהר יותר..., באמצע הם מופרדים כמו בלון אחד ... ובחלק העליון שני בלונים" (7:15)

תרשים 2. חקירה תנועתית של K. האבולוציה של תנועות וניסוחים מילוליים לאסטרטגיית פעולה.

כאשר מפעילים "עדשה" של מאפיינים קצביים (Radford, 2015) בהתמודדות של K מתגלה דינאמיקה סמויה בין יצירת הקצב "לינארי" ואי התאמתו ליחס פרופורציוני (טבלה 2). הודות למבנה המכפלתי של יחסים פרופורציוניים, משכי זמן-מרחב בתתי-משימות מקומיות הינם בהכרח שונים. שוני זה מנע היווצרות של מבנה קצבי כולל למשימה גלובלית. הפתרון: נוצר מבנה מטה-קצבי שכלל סדרת משכי זמן-מרחב 0, 1 ו -2 "יחידות-בלונים-פורחים". מרגע זה יחידות מדידה—"בלונים"—וכימות הדריכו את תנועתה של K גם במשימות גלובאליות, כפי שניכר מההיגדים שלה "... מהיר פי שניים ..." או "... רחוק כפליים...".

טבלה 2. התפתחות והשתכללות רכיבים קצביים

משימה	היבטים של התנהגויות קצביות			
	נושא (theme)	קיבוץ (grouping)	משקל (meter)	אורך (זמן/מרחב) (prolongation)
1	●●;→←; ↓↑; □□	טנטטיבי	לא מוגדר	לא ברור/ לא ברור
3	●●; ↓↑;→←; ←→; ↑↓; →←	רכיב יציב:↓↑; ●●	למטה, באמצע, למעלה	קרוב, קצת לחוד, ממש לחוד/ לא בררור
6	●●; ↓↑	קבוצה יציבה	למטה, באמצע, למעלה	0, 1, 2 כדורים פורחים/ שניה אחד, 2.5 שניות, 4 שניות

ניתן לסכם את הדרך של K כאבולוציה ופירוק של צורות תנועה קצביות: מצורות פרוטו-קצביות, דרך קונסולידציה של צורת תנועה קצבית ותיאורה האיכותני, אל כימות צורות תנועה קצביות אפקטיביות מקומיות ולבסוף הרכבה אדפטיבית וארגון מחדש של צורות תנועה קצביות לצורה יעילה גלובלית.

בני אנוש נוטים לתנועה קצבית. אי לכך פעילויות מתמטיות מעוגנות גוף מזמנות תנועה קצבית אפילו שתנועה זו איננה הכרחית מבחינה תפקודית (Radford, 2015). לקצב בחקר המקרה דנן נמצאו מספר תפקידים. האחד היווה אמצעי להסתגלות, לאירגון מרחב-זמן של הבעיה ולבניית מסגרת ייחוס. יצירת קצב אפשרה ל-K להבחין ולהשקיט גורמים לא רלוונטיים ולהתמקד בתכונות שמורות של הסיטואציה המתמטית. השני התבטא כאשר מבנה קצבי התפרק, למשל עקב אי התאמתו לדרישות של הבעיה. פירוק של המבנה חשף תכונות סמויות של הסביבה, יצר הזדמנויות לחשיבה כמותית ותמך בלמידה של מושגים מתמטיים.

מקורות

Abrahamson, D., & Sánchez-García, R. (2016). Learning is moving in new ways: The ecological dynamics of mathematics education. *Journal of the Learning Sciences*, *25*(2), 203-239.

Abrahamson, D., & Trninic, D. (2015). Bringing forth mathematical concepts: Signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action. *ZDM Mathematics Education, 47*(2), 295–306.

Bamberger, J., & diSessa, A. (2003). Music as embodied mathematics: A study of a mutually informing affinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8*(2), 123–160.

Bautista, A., & Roth,W.-M. (2012). The incarnate rhythm of geometrical knowing. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 91–104.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nemirovsky, R., & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. In L. Radford, L. Edwards, & F. Arzarello (Eds.), Gestures and multimodality in the construction of mathematical meaning [special issue]. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 159-174.

Palatnik, A**.**, & Abrahamson, D. (2018). Rhythmic movement as a tacit enactment goal mobilizes the emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics, 99*(3), 293–309. DOI: 10.1007/s10649-018-9845-0.

Radford, L. (2015). Rhythm as an integral part of mathematical thinking. In M. Bockarova, M. Danesi, D. Martinovic, & R. Núñez (Eds.), *Mind in mathematics: Essays on mathematical cognition and mathematical method* (pp. 68–85). Munich: LINCOM GmbH.

Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L., & Sabena, C. (2017). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. In J. Cai (Ed.), *First compendium for research in mathematics education* (pp. 700–721). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sinclair, N., Chorney, S., & Rodney, S. (2016). Rhythm in number: Exploring the affective, social and mathematical dimensions of using TouchCounts. *Mathematics Education Research Journal, 28*(1), 31–51.

מורים לגיאומטריה בבית הספר היסודי לומדים מספרות מקצועית תיאורטית ויישומית

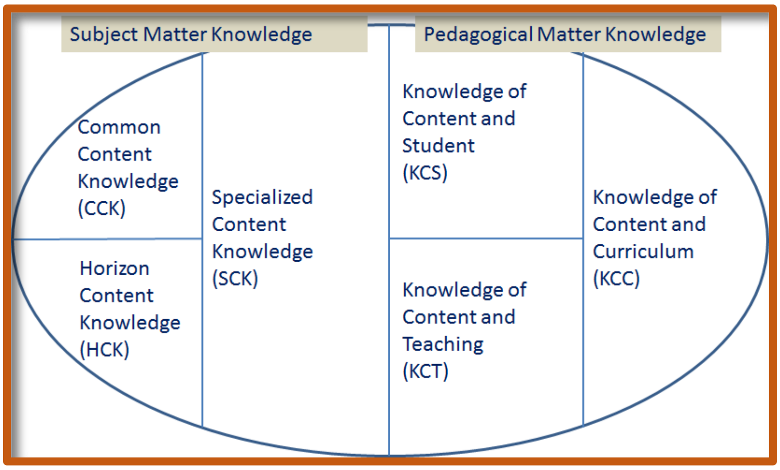
איריס פרץ, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך
תקוה עובדיה, מכללת אורנים ומכללה ירושלים

מבוא

המחקר המתואר להלן עוסק בהתפתחות החשיבה הגיאומטרית של מורים בבית הספר היסודי בעקבות סדנה ממוקדת בדרכי הוראת הגיאומטריה. מטרות הסדנה היו להעשיר את הידע הגיאומטרי של המורים בהיבטים: התוכני, התאורטי והדידקטי ולקדם את יכולת המורים ללמד ולפתח תובנה גיאומטרית מושגית עשירה של תלמידים בבית הספר היסודי. המחקר נולד בעקבות למידה לעומק של נתוני מבחני המיצ"ב הבית ספריים, בתחום הגיאומטריה בארבע השנים האחרונות, במסגרת כתיבת עבודת גמר ללימודי התואר השני במתמטיקה במכללת אורנים. יחד עם המנחה לכתיבת העבודה החלטנו על בניית סדנה מתמשכת להתפתחות מקצועית לצוות ההוראה. סדנת הלמידה בגיאומטריה לוותה במחקר שהתמקד בהתפתחות התפיסה הגיאומטרית והתפתחות תפיסות מקצועיות של צוות המורים וכלל תובנות חדשות מכלילות על היבט הלמידה מספרות מקצועית של המורים המשתתפים בסדנה.

רקע תיאורטי

אחד המודלים הידועים לפיתוח ידע מורה הוא של שולמן (Shulman, 1986; 1987) המתמקד בידע התוכן לסוגיו לעומת הידע הפדגוגי לסוגיו, והקשר שבין שניהם לידע של תוכנית הלימודים ויישומה. המודל, הורחב בעשרים השנים האחרונות בהיבטים רבים כפי הדגם המוצג להלן באיור 1



איור 1: תחומים של ידע מתמטי להוראה (2008) Ball, Thames, & Phelps,

ממרלה ועמיתיו (2017) Mammarella, Giofrè, Caviola, בצעו סריקה של מחקרים בתחום התפתחות מקצועית בגיאומטריה ומצאו כי מורים צריכים לחוות השתלמות שבה הם יפתרו בעיות גיאומטריות כמו תלמידים, ויבינו דרך חווייתם האישית את התפתחות התפיסה הגיאומטרית הנדרשת בכל גיל, בהתאם לתוכנית הלימודים הנדרשת במדינתם. (ממצא זה נכתב גם במחקר של: .(Swafford, Jones & Thornton, (1997)

מחקרים כמו של ליוי ודאונטון Livy & Downton, 2018 ושל הרבסט וקוסקו (Herbst & Kosko, 2014 מראים כי תכניות התערבות ממוקדות נושאים גיאומטריים הובילו לשיפור ידע התוכן וידע ההוראה של המורים בנושאים אלו, גם בזכות העבודה השיתופית עם עמיתיהם.

גם טיילור ושותפיו (Taylor, Roth, Wilson, Stuhlsatz and Tipton, 2017), בדקו את השפעת תכנית ההתערבות לפיתוח מקצועי של המורים על ידע התלמידים ומצאו, כי מורים לתלמידים שלקחו חלק בתכנית הגיעו להישגים גבוהים יותר מעמיתיהם שלא לקחו חלק בתוכנית. מוס ושותפיו (Moss, Hawes, Naqvi and Caswell, 2015) בדקו את התאמת המודל של השיעור היפני על מנת לשפר את ההוראה והלמידה בשנים הראשונות של המורה. קבוצת המורים שעבדו יחד על פי המודל תמכו אחד בשני וגילו עניין ומחויבות להוראת הגיאומטריה.
במחקר הנוכחי נציג ממצאים בהיבט של למידה ממאמרי תיאוריה מחקר ופרקטיקה בתוכנית להתפתחות מקצועית של מורים.

מתודולוגיה

המחקר הנוכחי בדק את תרומת לימוד ספרות תיאוריה מחקר ופרקטיקה, להתפתחות מקצועית להעשרת הידע הגיאומטרי של המורים הן בהיבט התיאורטי והן בהיבט הדידקטי של מקצוע הגיאומטריה.
שאלות המחקר היו :

1. האם וכיצד ניתן לאפיין את התפתחות ידע המורים בעקבות קריאת מאמרי מחקר וספרות תיאורטית ופרקטית בגיאומטריה לאורך השתתפות בסדנאות?
2. האם וכיצד ניתן לאפיין את תהליך ההעברה ויישום הלמידה שבצעו המורים מהתוכנית לכיתות ההוראה, בהקשר של למידה מספרות?

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר מנתה שמונה מורים המלמדים מתמטיקה וגאומטריה בכיתות היסודי

תיאור תכנית התפתחות מקצועית

התוכנית נבנתה לצוות המורים המלמדים בבית הספר בכל שכבות הגיל א׳-ו׳. התוכנית כללה שישה ימי מפגש, שעסקו בנושאים מרכזיים בתוכנית הלימודים בגיאומטריה. בכל מפגש הוצג מאמר מהספרות התיאורטית מחקרית המציג היבט תיאורטי-גיאומטרי או פרקטי גיאומטרי. במפגש פתרו המורים בעיות שהוצגו במאמר, נערך דיון על עיקרי המאמר והפעילויות הדידקטיות שהוצגו בו ועל האופנים שניתן ליישם רעיונות תיאורטיים או פרקטיים בעקבותיו.

כלי מחקר

המחקר הנוכחי נעשה בגישה איכותנית. כל מפגשי הצוות הלומד תועדו בווידאו. בסרטוני הווידאו ניתן לראות מורים לומדים משתפים מעורבים ונהנים. תהליך הכנת הסדנה טרם הוראה, ההוראה

בפועל והרפלקציות על כל מפגש תועדו ביומן חוקרת. הרפלקציות כללו שיתוף בידע הגאומטרי-דידקטי שנרכש בסדנה ובמתן דוגמאות לפעילויות ומשימות שבצעו תוך ההוראה בכיתה לאחר הסדנה. עוד שתפו המורים בידע הגאומטרי- תאורטי שרכשו בעקבות קריאת המאמרים שנלוו לסדנה. התקיימו תצפיות בשלושה שיעורים שלימדו המורים המשתתפים כחודש לאחר סיום התוכנית. בתצפיות בשיעורים ניתן היה לראות שימוש במשימות מתוך המאמרים. הועבר שאלון משוב למשתתפים בו נאספו נתונים אודות מחשבות המורים על התוכנית להתפתחות מקצועית שלקחו חלק בה. השאלון התייחס להיבט התאורטי ולהיבט הדידקטי של הנושאים שהועברו. המורים שיתפו במיומנויות הוראה שלמדו במפגשים ובתובנות שעלו על בעיות גאומטריות שהוצגו במהלך הסדנה בזכות דיונים שהתקיימו בה. המורים כתבו כי נחשפו לשימוש באמצעי המחשה שונים ללימוד בשיעורי הגאומטריה. הנתונים שהוצגו נותחו מייד לאחר ההשתלמות .שנתיים לאחר סיום הסדנה בוצעה צפייה חוזרת בשיעורי גיאומטריה נותחו הצפיות ונמצאו ממצאים זהים.

ממצאים

מתוך ניתוח הנתונים עלו ארבע קטגוריות מרכזיות המתארות את עיקרי הלמידה המושגית (שאלת מחקר ראשונה) מהספרות התיאורטית והפרקטית:1 . גילוי תיאוריית ואן הילה כתיאוריה משמעותית שנלמדה בסדנה תוך משחק עם חלקי פאזל שהוצגו במאמר פיתוח חשיבה גיאומטרית על ידי משחק (שנכתב בהשראת המאמר: Van Hiele, 1999) בשאלון מסכם הסדנה מרבית המורים שתפו כי לא הכירו תיאוריה זו..2.בניית משימות תואמות תכנית לימודים וגיל בהתאם לספרות- המורים פתרו בסדנא משימות שעובדו מתוך המאמר מציאת מספר קוביות במבנים מלבניים בו הוצגו הסברים וטעויות נפוצות של תלמידים בספירת קוביות במבנים מלבניים (כפי שמסבירות החוקרות Battista, & Clements, 1998).בשיח לאחר התצפיות בשיעורים הדגישו חלק מהמורים כי חסר להם הידע בהבנית רצף נושא ובהתאמת משימות והספר הוא הבסיס להוראה. 3. הבנת מושגים באמצעות עשיה-המורים למדו כי העשייה שלהם, ובוודאי של תלמידיהם, מקדמת הבנה של מושגים גיאומטריים כמו מושג השטח מתוך המאמר פיתוח חוש מרחבי בעזרת מדידת שטח (Nitabach and Lehre, 1996). 4.תפיסות של הערכה למושג גיאומטרי- המורים הכירו כלי חשוב להערכה מעצבת בלימוד מושג ה"אורך". המאמר הבנת התפתחות החשיבה של תלמידים על מושג האורך (Battista, 2006) עזר למורים להבין את מושג האורך על רב היבטיו הגיאומטריים באמצעות משימות שונות.

בנוסף, נמצאו שלושה אופנים של יישומים של המאמרים בהוראה (שאלת מחקר שנייה):1. יישום דומה בדיוק לתוכנית הלמידה המוצגת במאמר, 2. יישום לצורך הבנת המושג (אורך) באמצעות התבוננות בתלמידים הלומדים וחקר חשיבתם. 3. יישום להערכת ההבנה של התלמידים באמצעות משימות מהמאמר.

דיון וסיכום

באיור 2 מציגים החוקרים מרטינוביק ומניזד Martinovic & Manizade (2018) שהעריכו ידע מורים לגיאומטריה, חמישה ממדים להתבוננות בידע מורה, וחמישה ציונים (0-4) לכל ממד: ידע גיאומטרי, היכולת להרחיב ידע, ידע אסטרטגי להוראה, ידע על הערכה, ידע על אתגרי התלמיד ותפיסות מושגים. (A radar diagram representing Michael's PCK along the five dimensions (levels 0–4)(

איור 2: ממדים להערכת ידע מורה לגיאומטריה

A radar diagram representing Michael's PCK along the five dimensions (levels 0–4)

אם נתבונן בכל אחד משמונת המורים שהשתתפו בתוכנית, ונרכז את הנתונים שלו בהתאם לחמשת הממדים נוכל להציג להלן את ציון ההתפתחות האישי. בנוסף, נוכל להציג ציון ממוצע לקבוצה הלומדת, בכל אחד מחמשת הממדים, אך כאמור, התוכנית לא מתיימרת להציג ציון והערכה להתפתחות כללית, אלא להתפתחות מלמידה ממאמר, וגם להיבט הזה בלבד מצאנו כי ניתן להתייחס באמצעות חמשת הממדים, ולהציג שינוי בציון האישי ובציון הקבוצתי.

מקורות

Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics*, 13(3), 140.

Battista, M., & Clements, D. H. (1998). Finding the number of cubes in rectangular cube buildings. *Teaching Children Mathematics*, *4*(5), 258.

Herbst, P., & Kosko, K. (2014). Mathematical knowledge for teaching and its specificity to high school geometry instruction. In *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 23-45).

Howse, T. D., & Howse, M. E. (2014). Linking the Van Hiele Theory to Instruction. *Teaching Children Mathematics*, *21*(5), 305-313.

Livy, S., & Downton, A. (2018). Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Mammarella, I. C., Giofrè, D., & Caviola, S. (2017). Learning Geometry: The Development of Geometrical Concepts and the Role of Cognitive Processes. In *Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts* (pp. 221-246).

Martinovic, D., & Manizade, A. G. (2018). The challenges in the assessment of knowledge for teaching geometry. *ZDM*, 1-17.

Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S., & Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *Zdm*, *47*(3), 377-390.

Nitabach, E., & Lehrer, R. (1996). Developing spatial sense through area measurement. *Teaching Children Mathematics*, *2*(8), 473-477.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Taylor, J. A., Roth, K., Wilson, C. D., Stuhlsatz, M. A., & Tipton, E. (2017). The effect of an analysis-of-practice, videocase-based, teacher professional development program on elementary students' science achievement. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, *10*(2), 241-271.

המסע אל ההוכחה: האם אני מלמדת להוכיח? ניתוח מציאות באמצעות הצפייה בווידאו במהלך הוראת הבניות הגאומטריות.

מעין פישלוביץ, מכללת ירושלים
תקוה עובדיה, מכללת אורנים, מכללה ירושלים

המחקר להלן מציג ניתוח מקרים של מורה למתמטיקה המתעדת את הוראתה המתמקדת בהקניית המיומנות להוכיח הוכחות גיאומטריות, תוך כדי הוראת בניות גיאומטריות. במהלך הצפיות המונחות בווידאו התוודענו שהמורה שבויה בקונספציה של הוכחה פורמלית ורואה את הבניות ככלי להשגת ההוכחה, בעוד התלמידים בשלבים הראשונים של לימודי גאומטריה רואים את הבניות כמטרה בפני עצמה. כפי שניתן לראות מהמחקר המורה והתלמידים מגיעים בסוף התהליך למכנה משותף בו המורה משתמשת בבניות כחלק מההוכחה ההסברית והתלמידים רואים צורך בהוכחת שלבי הבניה.

רקע תיאורטי:

ההוכחה וההנמקה:

הרשקוביץ (הרשקוביץ,1998) מציינת כי חוקרים שונים מונים שלבים שונים ברמת ההנמקה, שלבים אלה מתבטאים בתהליך הלמידה ומתפתחים בקרב הלומדים בזמנים שונים :

א. הסבר נאיבי (כגון "רואים ש..)
ב. הסבר אינטואיטיבי.
ג. הבנת כל שלב בהוכחה לוגית ללא הבנת כל ההוכחה בשלמותה.
ד. הבנת השלבים היסודיים של הוכחה מתמטית ללא יכולת לפרט.
ה. הבנה מלאה של הוכחה מתמטית.

הוראת בניות גאומטריות בסרגל ומחוגה:

לפי דואק אחד הקשיים הגדולים בהוראת הגאומטריה הוא לגרום ללומדים לייצר השערות בכוחות עצמם. רוב לימודי הגאומטריה בימינו מתבצעים על ידי הצגת המשפטים על ידי המורה, כאשר התלמידים נדרשים בעיקר ליישם משפטים אלו בהמשך. תהליך זה מקשה על עידוד המרכיב היצירתי ההכרחי ליצירת השערות חדשות (Douek, 2009).

פוגיטה ג'ונס וקנימון (Fujita, Jones, &Kunimune, 2010) מצאו כי התמודדות עם בניות גאומטריות עשויה לשפר את יכולת הטיעון, ההנמקה וההוכחה של התלמידים. במחקרם לא נמצא כי התנסות בבניות גאומטריות גורמת להתאמה ברורה בין תוצאות הבנייה המבוצעת על ידי תלמיד למבנה ההוכחה הנכתבת על ידו. סמפר (Samper, 2016;) מציינת כי במהלך הבנייה הגאומטרית התלמידים עשויים למצוא את עצמם בדילמה קוגניטיבית העולה מכך שעליהם להשתמש במהלך הבניה בפרטים שהם עצמם דורשים הוכחה. במקרה זה יידרש מהתלמיד לאמץ דרכי פעולה המבוססים היסטורית ורק לאחר מכן להבין את תהליך ההוכחה ואת אובייקטים המתמטיים המשתתפים בו. התהליך הזה בשלביו הראשונים חייב להיות מונחה על ידי המורה המסוגל להעריך את קבילות הטענות מנקודת המבט המתמטית.

תפיסות ואמונות המורים בנוגע להוראת ההוכחה מתמטית באמצעות בניות גאומטריות

במחקר שנערך על פרחי הוראה מגרמניה וארה"ב מצאה קוזל (Kuzle, 2013) כי כל הסטודנטים הכירו בערך ההיסטורי של הוראת בניות בסרגל ומחוגה. רוב הסטודנטים האמינו כי הוראת הבניות בסרגל ומחוגה מקדמת חשיבה מתמטית, יוצרת קשרים בין מערכות יחסים גיאומטריות ומקלה על השימוש בהן. כמו כן, טסטוב (Тестов, 2014) מציין שמורים וחוקרים רבים מתייחסים להוראת המתמטיקה בבית ספר כמסורת תרבותית- היסטורית, כאשר הוראת הגאומטריה האוקלידית בסרגל ומחוגה מהווה דוגמא קלאסית למסורת הזאת.

הוידאו ככלי להתבוננות על תהליך ההוראה בכיתה

שונפלד (Schoenfeld, 2017) רואה בווידאו לא רק מקור נתונים עם פוטנציאל לגלות את המידע אודות מה שהתרחש בשיעור, אלא כלי מחקרי המעודד דיון ומיון מידע ההכרחיים בכל מחקר מדעי. שרין, גמורן ון אס ואליזבט (Sherin, Gamoran, van Es & Elizabeth, 2005) מציינים כי הוידאו לא רק נותן למורה הזדמנות לצפות בתהליך הלמידה הכיתתי, אלא אף עשוי לשפר את יכולת ההתבוננות של המורה על המתרחש בכיתה ולסייע לו להקדיש תשומת לב רבה יותר לרעיונות שמועלים על ידי התלמידים ולשימוש ברעיונות הללו בהמשך.

מידע מתודולוגי:

שאלת המחקר: האם וכיצד מתפתחת הוראת ההוכחה הגאומטרית באמצעות הוראת בניות גאומטריות, של מורה למתמטיקה, כפי שניתן לאפיין באמצעות ניתוח הסרטה עצמית של שיעורים בווידאו?

המחקר הינו מחקר פעולה שנערך על ידי מורה ותיקה המלמדת בכיתה ט' בבית ספר תיכון לבנים במרכז הארץ באחת ההקבצות הגבוהות המיועדות ל4-5 יחידות לימוד. נתונים נאספו באמצעות הסרטות הווידאו של שנים עשר שיעורי בניות בגאומטריה, ובאמצעות ניהול יומן חוקרת שכלל תיעוד של כל תהליך ההוראה, ובמקביל תהליך ניתוח הנתונים.

תהליך ניתוח הנתונים התבצע בארבעה שלבים:

א. סיכום השיעור על ידי המורה מהזיכרון ללא הווידאו.
ב. צפיית המורה בסרטי הווידאו וסימון קטעים המלמדים על תובנות חדשות למורה.
ג. ניתוח קטעי הווידאו במפגש עמיתים במכללה.
ד. ניתוח קטעי הווידאו עם המנחה לביצוע המחקר.

ממצאים:

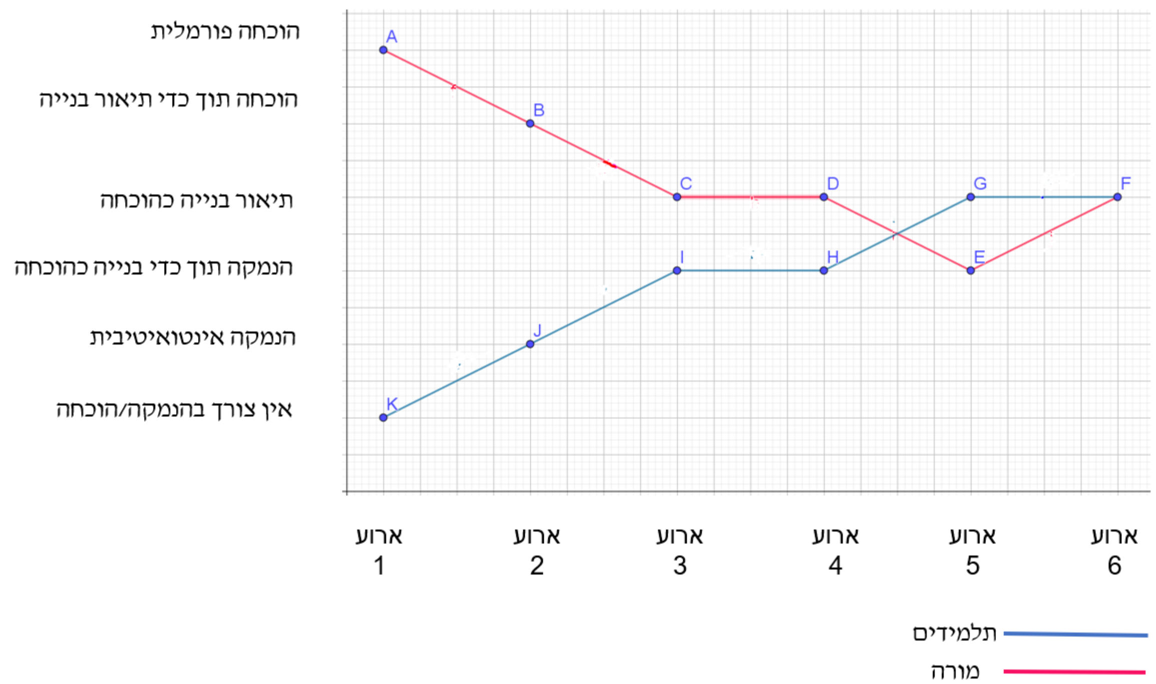
נציג את התוצאות באמצעות ששה שלבים המוצגים באמצעות אירועים שכל אחד מהם מציג מאפיין אחר של ההוראה המתמקדת בבניות גיאומטריות ושואפת לפתח הבנה ותפיסה של הוכחה באמצעות הבניות.

האירועים מציגים תהליך תלת שלבי של ניתוח הווידאו: המורה מתבוננת בעצמה במהלך הוראת הבניות הגאומטריות וכותבת ניתוח לצפייה. העמיתים מתבוננים בווידאו ומגיבים לצפייה, והתבוננות של המנחה באירועים אלה הכולל את המשוב שלה. התבוננו בשיעורים בשני מוקדי עניין: האופן שבו מתפתחת הוראת הבנייה הגיאומטרית והתהליך שבו מתפתחת הוראת ההוכחה בהקשר של הבניות. התהליך מתואר על ידי ששת האירועים הבאים:

1. המורה מציגה בפני התלמידים את הבנייה וכותבת הוכחה על הלוח לאחר הבנייה. התלמידים מעתיקים את ההוכחה ללא הבנה בנחיצות ההוכחה.
2. המורה כותבת הוכחה על הלוח במקביל לכל שלב בבנייה שנעשית גם על הלוח. התלמידים דנים בכל שלבי ההוכחה תוך כדי הצגת הבנייה על הלוח מסתבר שבלי להבין את הבעיה עצמה.

3. המורה מתכננת תיאור בנייה כהוכחה, אבל במקום זאת כותבת על הלוח הוכחה פורמאלית. התלמידים אינם מבינים האם עליהם "להעתיק או להוכיח".
4. המורה מותרת מראש על הוכחה ומזכירה שקיימת הוכחה פורמאלית. אך כותבת תיאור בנייה במקביל לבנייה. התלמידים מתנסים בבנייה מתוך דוגמא פתורה.
5. המורה מציגה בנייה שגויה והתלמיד דורש הוכחה באמצעות ניתוח בנייה המוצגת כתוצר מוגמר.
6. המורה והתלמידים דנים בקשר שבין בנייה גיאומטרית להגדרה גיאומטרית כהוכחה.

ניתן לתאר את התפתחות התהליך שחוותה המורה החוקרת יחד עם תלמידיה באמצעות הדיאגרמה הבאה:



דיון:

במחקר הנוכחי ניתן לראות את התפתחות תפיסת המורה את הוראת ההוכחה הגאומטרית באמצעות בניות בד בבד עם התפתחות ההבנה והתפיסה של ההוכחה על ידי התלמידים. הבנת התהליך התרחשה באמצעות ניתוח חוזר בסבבים שונים, של השיעור המתועד. בתחילת התהליך המורה שמה לעצמה למטרה ללמד הוכחה פורמלית ומשתמשת בכלי של הבניות הגאומטריות כמשענת המספקת תוקף לטענות המתמטיות. התלמידים אינם בקיאים בשלבים ההיסטוריים של התפתחות ההוכחה הגאומטרית, אינם רואים צורך בהוכחה ואינם מבינים את הקשר בין הבנייה לתוקף הטענות. ממצאים אלה עולים בקנה אחד עם מחקרים המעידים על כך שתלמידים בשלבים הראשונים של לימודי הגאומטריה אינם בהכרח מבינים את נחיצות ההוכחות (Kunimune, Fujita & Jones, 2009). בהמשך, המורה מפרשת את אי ההבנה של התלמידים כחוסר יכולת להתמודד עם הוכחה גאומטרית מורכבת, אך, במהלך הצפייה המונחית בווידאו המורה נעזרת במשוב חיצוני ומבחינה בפעולות שבצעה בכיתה בהקשר של הוראת ההוכחה, ומקבלת תובנות על בחירותיה, ועל התאמת ואי התאמת רעיונות ההוכחה שהציגה לרמת הלומדים..

כתוצאה מהרפלקציה בקבוצה ועם המנחה, המורה בוחרת להחליף את ההוכחה הפורמלית בתיאור בנייה ואת הדרישה להנמקה ברמה גבוהה לדרישה להנמקה אינטואיטיבית. התלמידים מבחינתם עוברים תהליך בו הם מקבלים את ההבנה בצורך בהנמקת הטענות המתמטיות על ידי בניות גאומטריות. בהמשך התהליך של הוראת הבנייה המורה מצפה מהתלמידים להפעיל יכולת הנמקה אינטואיטיבית אך מספר תלמידים בכיתה דורשים הוכחה "מוכיחה" בעלת אלמנטים של הוכחה פורמלית. ששת השלבים שזוהו באמצעות ניתוח השיעורים המתועדים, קדמו את המורה להבין את דרכי ההוראה המתאימות להקניית התובנה והמיומנויות של בניית הוכחה. באשר לתלמידים, האם לימוד ההוכחה הדדוקטיבית הוא זה ששיפר את יכולת ההוכחה שלהם או שמא ההתנסות בבניות הגאומטריות היא זו שיצרה אצל התלמידים את הצורך בהוכחה? נושא זה חורג ממסגרת המחקר הנוכחי והוא המשכו.

ביבליוגרפיה

Douek, N. (2009). Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction. In *Proceedings of ICMI Study 19 International Conference* (Vol. 1, pp. 142-147).

Fujita, T., Jones, K., & Kunimune, S. (2010). Students' geometrical constructions and proving activities: A case of cognitive unity. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 9-16).

Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM, 40*(2), 329-336.

Hershkowitz, R. (1998). Reasoning in Geometry. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*: An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,(pp. 29- 37).

Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2010). Strengthening students' understanding of 'proof'in geometry in lower secondary school. *Proceedings of CERME6*, 756-765.

Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2009). "Why do we have to prove this?" Fostering students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education (Vol. 1, pp. 256-261). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University, Department of Mathematics.

Kuzle, A. (2013). Constructions with various tools in two geometry didactics courses in the United States and Germany. B. Ubuz, (ed.), *Proceedings of the eighth congress of the European Society of Research in Mathematics Education* (pp. 6-10), Antalya.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A., & Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 35-50.

Sherin, M., & van Es, E. (2005). Using video to support teachers' ability to notice classroom interactions. *Journal of technology and teacher education*, *13*(3), 475-491.

Schoenfeld, A. H. (2017). Uses of video in understanding and improving mathematical thinking and teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(5), 415-432.

Тестов, В. А. (2014). Основные проблемы развития математического образования. *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, *(16*), 38-48.

קבוצות דיון

בעיות מאתגרות המעודדות מוטיבציה ללימודי המתמטיקה: שימוש בפדגוגיות חדשניות לשילובן בתיכון

זהבית כהן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
נלי קלר, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
תומר פלג, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
אורטל ניצן-תמר, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

קידום המצוינות בחינוך המתמטי הנו מטרה מרכזית של משרד החינוך בישראל (Fares, 2018). מיומנות חשובה להשגת מצוינות במתמטיקה הנה פיתוח שיח-מתמטי ופתרון בעיות מאתגרות. למידה שיתופית של בעיות מתמטיות מאתגרות בפורומים מקוונים, מאפשרת פיתוח מיומנות זו תוך פיקוח של המורה על תהליך הלמידה. מיומנות חשובה נוספת להשגת מצוינות במתמטיקה הנה הבנה מושגית, הנשענת על מספר הייצוגים שמחזיק הלומד לגבי המושג המתמטי ויכולת המעבר בין ייצוגים שונים (Pape & Tchoshanov, 2001). טכנולוגיות בהוראת המתמטיקה מאפשרת לייצג מושגים מתמטיים בדרכים מגוונות. לבסוף, לעידוד המוטיבציה והעניין בלימודי המתמטיקה יש את הפוטנציאל לקדם מצוינות במתמטיקה. שילוב בעיות אותנטיות מתחום ההיי-טק הרלוונטיות לחיי היומיום של התלמידים נותן מענה לצורך זה (Dori, Avargil, Kohen, & Saar, 2018). להלן נציג את התיאוריה המעגנת כל אחת משלוש הפדגוגיות המוזכרות לעיל.

פתרון בעיות מאתגרות בפורומים מקוונים: חקר תהליכים מטה-קוגניטיביים

רציונל ומסגרת תיאורטית

פורומים מקוונים לצורך פתרון בעיות (Problem Solving Forum: PSF) מאפשרים לבצע פתרון שיתופי של בעיות מתמטיות מאתגרות בקבוצות קטנות, אשר מעודד גישה מטה-קוגניטיבית באמצעות שיח מתמטי סביב סוגיות שונות שמתוארות בבעיות. המחקר מתבסס על תיאורית הדואליות של תפקיד המורה, כאשר התנסות בגישות המטפחות מטה-קוגניציה אצל מורים, מסייעות למורים בהכוונת תהליכי הלמידה שלהם כמו גם בהכוונת תהליכי ההוראה (Hattie & Yates, 2014; Kramarski & Kohen, 2017). ניתוח התהליכים המתרחשים ב-PSF נערך בהתאם לשלושת המרכיבים של הגישה המטה-קוגניטיבית: תכנון, בקרה, והערכה (Schraw et al., 2006; Schunk, 1996).

מטרת המחקר הינה לבחון אילו תהליכים מטה-קוגניטיביים מתרחשים תוך-כדי התנסות של מורים כלומדים ב-PSF, האם מתרחש שינוי בתהליכים אלו לאורך התנסות מתמשכת ב-PSF וכיצד, אם בכלל, משתקפים תהליכים אלו בקרב המורים כמנחים תוך-כדי התנסות תלמידיהם ב-PSF.

ממצאים ראשוניים ודיון

ממצאים ראשוניים שנבחנו על קבוצה של כ-50 מורים למתמטיקה המשתתפים בתכנית לפיתוח מקצועי מצביעים על התפתחות התפקיד הדואלי של מורים בהיבט המטה-קוגניטיבי – החל מתהליך הלמידה שלהם בסביבת PSF כלומדים ועד לתהליך ההובלה של סביבת למידה PSF כמורים עבור תלמידיהם. הממצאים מראים על חשיבות תפקיד המנחה בתהליך התמיכה המטה-קוגניטיבית למורים כלומדים, אשר בא לידי

ביטוי גם כאשר המורים עוברים לתפקיד המורה-המנחה. למחקר תרומה תיאורטית ופרקטית לתכניות הכשרה ופיתוח מקצועי של מורים, המתייחסת לחשיבות ההתנסות של מורים כלומדים בתהליך פתרון בעיות במהלך הכשרתם, לצורך תפקידם כמורים אשר פותרים בעיות מתמטיות עם תלמידיהם.

פיתוח מקצועי של פרחי הוראה ומורים למתמטיקה בעזרת GEOGEBRA

רציונל ומסגרת תיאורטית

הטמעת יכולות טכנולוגיות ככלי לפיתוח החשיבה בקרב מורים הנה אחת המשימות החשובות לפיתוח מקצועי של מורים. מתמטיקה דינמית הנה טכנולוגיה מתקדמת המאפשרת חקירה של תופעות מתמטיות בעזרת הצגה ויזואלית ושינוי דינמי של מבנים מתמטיים. המחקר מבוסס על מודל ה-TPCK (**T**echnology, **P**edagogy, **C**ontent, **K**nowledge), הידע המתמטי הנדרש להוראת המתמטיקה לצורך פיתוח מקצועי של מורים (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Koehler & Mishra, 2009; Kohen & Kramarski, 2012). על-פי המודל, תהליך ההוראה והלמידה הוא רב-ממדי ודורש התאמה של הטכנולוגיה והפדגוגיה לתמיכה בבניית ההבנה של התוכן המתמטי.

מטרת המחקר הינה לבחון האם, ובאיזה אופן, מתרחש שינוי בעמדות וביכולת בניית פעילויות המשלבות טכנולוגיה של מתמטיקה דינמית, בקרב פרחי הוראה ומורים אשר נחשפו למודל והתנסו בבנייה של פעילויות TPCK אשר מדגישות היבט פדגוגי של למידה חקר והתנסות בטכנולוגיה של מתמטיקה דינמית.

ממצאים ראשוניים ודיון

ממצאים ראשוניים על כ- 40 פרחי הוראה ומורים למתמטיקה הראו כי תכנית המחקר שחשפה את המשתתפים לתיאוריה והיבטים מעשיים בהקשר של TPCK הביעה שינוי חיובי בעמדותיהם של המורים ויכולת טובה יותר ליישם ידע טכנולוגי המשולב בידע הפדגוגי וידע התוכן המתמטי. למחקר תרומה תיאורטית ופרקטית לתכניות הכשרה ופיתוח מקצועי של מורים, המתייחסת לחשיבות ההתנסות של מורים בפעילויות טכנולוגיות המשלבות פתרון בעיות מתמטיות תוך חשיבה פדגוגית.

שילוב בעיות היי-טק בשיעורי מתמטיקה בתיכון

רציונל ומסגרת תיאורטית

אחד האתגרים העומדים בפני מורים למתמטיקה בתיכון הוא לעורר עניין ומוטיבציה בקרב התלמידים ללמוד מתמטיקה. שילוב בעיות אותנטיות בכיתה נחשבת לפדגוגיה מוצלחת בעיקר בתחומי המדעים, ובעלת פוטנציאל גבוה לעידוד המוטיבציה של הלומדים ללמוד ולהבין את החומר הנלמד, אולם לא נחקר הרבה בהקשר של לימודי מתמטיקה, בפרט בתיכון. המודל של שוינפלד (Schoenfeld, 1985) לבעיה מתמטית טובה מהווה את המסגרת התיאורטית למחקר הנוכחי, כאשר המיקוד הוא בשני מאפיינים עיקריים: משאבים (ידע הנדרש לפתרון הבעיה) ושיטה (האסטרטגיות/טכניקות הנדרשות לפתרון).

מטרת המחקר הינה לבחון האם את המאפיינים של בעיה אותנטית במתמטיקה ואת מידת ההיתכנות של שילוב בעיות אותנטיות בשיעורי מתמטיקה סטנדרטיים בתיכון.

ממצאים ראשוניים ודיון

ממצאים ראשוניים על כ-120 מומחים וקובעי מדיניות במתמטיקה, ומורים למתמטיקה בעלי רקע וותק שונה, אשר הועבר להם שאלון כמותי שבחן את טיב הבעיות על פי התיאוריה של שוינפלד, הראה כי מאפייני

תהליך פתרון הבעיות האותנטיות דומות להגדרת תהליך פתרון בעיה על-פי שוינפלד. כמו כן, בהתבסס על מתודולוגית SWOT, אשר בוחנת את החוזקות, החולשות, ההזדמנויות, והאיומים של התחום הנחקר (Chermack & Kasshanna, 2007), ממצאי המחקר הראו כי קיימת היתכנות ברמה גבוהה להטמעת בעיות אלו בכיתות. למחקר תרומה תיאורטית ופרקטית להגדרת ושילוב בעיות אותנטיות במתמטיקה בכיתות לימוד בתיכון.

מפגשי עבודה בקבוצות הדיון

בקבוצות הדיון נדון בשלוש הפדגוגיות המוצגות תוך התמקדות בדוגמאות של בעיות מאתגרות ותרומתן לעידוד מוטיבציה ללימודי המתמטיקה. מיקוד מפגש העבודה הראשון הינו בחשיפה לתיאוריה העומדת מאחורי כל אחת מהפדגוגיות תוך התמקדות במחקרים המתוארים לעיל, כאשר תוצג למשתתפים יחידת הוראה לדוגמא. מפגש העבודה השני יהיה במיקוד יישומי-מעשי, תוך התנסות בפתרון בעיות מאתגרות שמדגימות כל אחת מהפדגוגיות המוצגות.

מטרת המפגש הראשון

במפגש זה יוצגו שלוש הפדגוגיות, תוך מתן דוגמא ליחידת הוראה המשלבת פדגוגיות אלה. יחידת ההוראה תציג בעיה מתפתחת מבחינת רמות קושי שונות בתחום הגיאומטריה, החל מקישור בעיה גיאומטרית פשוטה לטכנולוגיה ייחודית ומוכרת לשם העלאת המוטיבציה בקרב הלומדים; לאחר מכן, בחינה של שילוב גיאומטריה דינמית בתהליך ההוראה של בעיה גיאומטרית דומה וברמת קושי בינונית לקידום ההבנה; לבסוף פתרון בעיה דומה ברמת קושי גבוהה באמצעות פורום מקוון, לבחינת התהליכים הקוגניטיביים שעובר הלומד בעת פתרון הבעיה.

שאלות לדיון

1. מהי התרומה הייחודית של כל שיטה?
2. האם נכון לשלב כמה שיטות ביחידת הוראה אחת?
3. מהי התדירות הרצויה לשילוב שיטות כגון אלו בהוראה?
4. מה ההיתכנות לשילוב שיטות אלו בפועל בכיתה?
5. מהם הגורמים המעכבים / המקדמים מורים להשתמש בשיטות חדשניות בהוראה?

מטרת המפגש השני

במפגש זה יתקיים דיון מעמיק בקבוצות על כל אחת מהשיטות בנפרד, זאת במטרה להבין ולהתנסות בתהליכים אותם המורה עובר בעת בניית בעיה בהתאם לאחת משלוש הפדגוגיות.

שאלות לדיון בקבוצות

1. מהן החוזקות / החולשות של השיטה?
2. מהם האתגרים העומדים בפני מורים בבואם לפתח בעיה בהתאם לשיטה?
3. האם, ובאיזה אופן, להתנסות בפועל בפיתוח בעיה יש השפעה על יישום השיטה על-ידי מורים בכיתה?

רשימת מקורות

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Chermack, T. J., & Kasshanna, B. K. (2007). The use and misuse of SWOT analysis and implications for HRD professionals. *Human Resource Development International*, *10*(4), 383-399.

Dori, Y. J., Avargil, S., Kohen, Z., & Saar, L. (2018). Context-based learning and metacognitive prompts for enhancing scientific text comprehension. *International Journal of Science Education* special issue on context-based learning: cognition, metacognition and affective Aspects – ten years later, 40(10), 1198-1220.

Fares, M. (2018). How Did a Crisis in Mathematics Education Lead to a Positive Reform?. In Movshovitz-Hadar, N. (Ed.), *K-12 Mathematics Education in Israel: issues and innovations* (pp. 21-28). Singapore: World Scientific.

Hattie, J. A. C., & Yates, G. (2014). *Visible learning and the science of how we learn*. London: Routledge.

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)?. *Contemporary issues in technology and teacher education*, *9*(1), 60-70.

Kohen, Z. & Kramarski, B. (2012). Developing a TPCK-SRL assessment scheme for conceptually advancing technology in education. *Studies in Educational Evaluation, 38*, 1–8.

Kramarski, B., & Kohen, Z. (2017). Promoting preservice teachers' dual self-regulation roles as learners and as teachers: Effects of generic vs. specific prompts, *Metacognition and Learning, 12*(2), 157-191.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. Theory into practice, 40(2), 118-127.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic press.

Schraw, G., Crippen, K.J., & Hartley, K. (2006). Promoting self-regulation in science education: Metacognition as a broader perspective on learning. *Research in Science Education, 36*, 111-139.

Schunk, D. H. (1996). *Self-evaluation and self-regulated learning.* Paper presented at the Graduate School and University Center, City University of New York, New York.

Zazkis, R. (2016). Turn vs. shape: Teachers cope with incompatible perspectives on angle. *Educational Studies in Mathematics, 93*(2), 223-243.

אירועים קריטיים בהכשרת מורים למתמטיקה - הגדרתם והאפשרויות הטמונות בשימוש בהם (קבוצת דיון)

סיגל רותם, אוניברסיטת חיפה
שולה וייסמן, אוניברסיטת חיפה והמכללה האקדמית גורדון
מיסא חאיין, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

הכשרת פרחי הוראה למתמטיקה היא משימה מורכבת. הספרות מציעה שלהתנסות מעשית בשדה יש תרומה משמעותית להתפתחותם המקצועית של פרחי ההוראה, אך הניסיון המעשי "דה פקטו" המתאפשר בכיתות הוא מועט (Zeichner, 2012). גם לייקין (Leikin, 2008) מצביעה על מיעוט ההזדמנויות להתנסות מעשית של פרחי הוראה כמו גם על הקושי למזג רכיבי ידע שונים יחד עם מיומנויות פדגוגיות. בקבוצת הדיון נציג את השימוש באירועי הוראה קריטיים מכיתת המתמטיקה ככלי להגברת המרכיב ההתנסותי במהלך הכשרת השדה, נדון יחד באירועים קריטיים שפרחי הוראה זיהו וניתחו במהלך ההתנסות המעשית, וננתח אותם ונדון בהשלכות היישומיות שיש לשימוש בהם להכשרת מורים למתמטיקה.

רקע תיאורטי

אחת הבעיות המרכזיות בהכשרת פרחי הוראה היא הקשר בין התיאוריה לפרקטיקה. שילוב של הכשרת שדה יחד עם הגברת הרפלקציה על הפרקטיקה נחשבת כמסייעת בהתגברות על בעיה זו (Zeichner, 2012). רפלקציה היא התהליך בו אדם המתמודד עם בעיה מתייחס במודע לאופן בו הוא מבין אותה ומתאים את פעולותיו (*reflection on knowing-in-action*: Schön, 1983). בהתייחסות להוראה, הרפלקציה שנעשית תוך כדי ההוראה בכיתה נחשבת למרכזית בתהליך קבלת ההחלטות של מורה המתאים את מהלך השיעור להתפתחות העניינים בכיתה (Clarke, 2000). הספרות מצביעה על כך שהכשרה מבוססת אירועי הוראה יכולה לספק מקור לרפלקציה ולתמוך בפיתוח ידע מתמטי להוראה בקרב מורים ופרחי הוראה (למשל, Putnam & Borko, 2000). למושג אירוע הוראה יש התייחסויות שונות (Shulman, 1991) והמשותף לכולן היא ההתייחסות לאירוע הוראה כאל סיטואציה כיתתית משמעותית המזמנת למידה על הוראה. אנו מגדירות אירוע קריטי כאירוע הוראה לא מתוכנן שיכול לשנות את תכנית השיעור ומהווה הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים (Stockero, & Van Zoest, 2013).

כדי לסייע לפרחי הוראה לקשר בין התיאוריה לפרקטיקה במהלך ההתנסות המעשית שלהם בשדה, אנו משתמשות באירועים קריטיים כמרכיב מרכזי בתוכנית הקלי"ם- 5 (**ה**כשרה **קלי**נית **ל**הוראה **י**יחודית **מ**תמטיקה-**5**) המנוהלת בחוג לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה. פרחי ההוראה המשתתפים בתוכנית מזהים בעצמם אירועים קריטיים המתרחשים במהלך הצפייה בשיעורים או תוך כדי הוראה של שיעורים במסגרת ההתנסות המעשית. פרחי ההוראה מנתחים את האירועים שזוהו על פי מסגרת ייעודית ודנים בהם בקורס מלווה באוניברסיטה. ההנחה היא שזיהוי וניתוח אירועים קריטיים <u>שזוהו ונבחרו לניתוח על ידי פרחי ההוראה עצמם</u> מתוך השיעורים בהם הם נכחו, יכולה לסייע להם לפתח 'רפלקציה תוך כדי הוראה' (*reflection in action*), במיוחד בפיתוח מיומנות של שימת לב לחשיבה מתמטית של תלמידים (Jacobs, Lamb and Philipp, 2010) הנחשבת לחיונית בעבודתו של המורה המעוניין לבנות את הידע המתמטי של תלמידיו על בסיס ההבנה המתמטית שכבר קיימת אצלם.

מסגרת העבודה של קבוצת הדיון

בקבוצת הדיון נתמקד באירועים קריטיים שנבחרו ונותחו על ידי פרחי ההוראה במסגרת תוכנית הקלי"ם-5 ונדון בהשלכות מעשיות של העיסוק באירועים קריטיים להכשרת מורים ובמסקנות תיאורטיות. במפגש הראשון נעסוק באירועים קריטיים: הגדרתם, ניתוחם והשימוש בהם במהלך ההכשרה. במפגש השני, נדון בסוגיות שעולות מהתבוננות באירועים קריטיים שנותחו על ידי סטודנטים ובתרומתם לפיתוח תוכניות הכשרה ולמחקר.

מפגש ראשון- אירועים קריטיים מכיתת המתמטיקה: הגדרתם, ניתוחם, והשימוש בהם במהלך ההכשרה

- נברר מהו אירוע קריטי בכיתת המתמטיקה דרך עבודה סדנאית. ננתח אירועים קריטיים שהובאו על ידי פרחי ההוראה המשתתפים בתוכנית, מנקודות מבטם הן של התלמיד והן של המורה המשתתפים באירוע. נשאל: איזו הבנה מתמטית עומדת מאחורי אמירת התלמיד? מה היו שיקוליו של המורה לפעול כפי שפעל ומה יכולות להיות דרכי פעולה חלופיות? נדון בהשלכות היישומיות של השימוש באירועים קריטיים להכשרת מורים מנקודת מבט של מורי-מורים.

- שימוש באירועים קריטיים לפיתוח שימת לב לארגומנטציה: בחלק זה של המפגש נתנסה בניתוח של אירוע הוראה כתוב הלקוח משיעור מתמטיקה תוך התמקדות בהיבט מסוים - ארגומנטציה. הוראה המעודדת השתתפות של תלמידים בפעילות ארגומנטטיבית (כגון העלאת טענות והשערות, בדיקתן, הצדקתן, הערכה של טיעונים) נתפסת בספרות העוסקת בחינוך מתמטי, ובחינוך בכלל, כמקדמת הבנה ולמידה (Asterhan & Schwarz, 2016). תוך התמקדות בעדשה של ארגומנטציה, נקרא את אירוע ההוראה ונשאל: מה ניתן "לראות" באירוע? כיצד ניתן להסביר את המתרחש בו מנקודת מבט מתמטית, מנקודת מבטם של התלמידים, מנקודת מבטה של המורה ומנקודת מבט סוציו-תרבותית? מה היינו עושים אילו היינו נוכחים באירוע במקומה של המורה כדי לקדם את הארגומנטציה? נדון בשאלות אלה וכן באפשרויות הלמידה הטמונות בשימוש באירועי הוראה לפיתוח שימת לב לארגומנטציה בחינוך מורים.

מפגש שני- התבוננות באירועים קריטיים שנותחו על ידי סטודנטים, מה אפשר ללמוד להכשרה ולמחקר?

במפגש זה נדון באופן בו פרחי הוראה להוראת מתמטיקה תופסים את המושג אירוע הוראה קריטי. נצא מתוך ההגדרה המתייחסת לאירוע קריטי כאל רגע לא מתוכנן שיכול לשנות את תכנית השיעור ומהווה הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים (Stockero, & Van Zoest, 2013) וננסה ללמוד אילו סוגי אמירות של תלמידים נתפסות בעיני פרחי ההוראה כרגעים קריטיים, עליהם ניתן לבסס את ההבנה המתמטית של התלמידים. בנוסף, נחדד מה נתפס בעיני פרח ההוראה כקריטי באירוע, האם האמירה של התלמיד הייתה קריטית מבחינת פרח ההוראה? אולי התגובה של המורה? מה היה הרגע שהיווה אירוע קריטי מבחינת פרח ההוראה? ננתח יחד אירועים קריטיים שזוהו ונותחו על ידי פרחי הוראה במהלך ההתנסות המעשית בבתי הספר בכיתות חמש יחידות לימוד ונדון בהם בשני חלקים:

- ראשית, בעזרת מסגרת תיאורטית שנבנתה על בסיס המסגרת של סטוקרו וואן זואסט (Stockero, & Van Zoest, 2013) מנקודת מבטם של חוקרים ומנקודת מבטם של פרחי ההוראה. מתוך הניתוח נדון בשאלה: אילו אמירות נתפסות על ידי פרחי ההוראה כזרז לרגע קריטי בשיעור?

- שנית, בעזרת מודל מייצג לאירועים קריטיים שמנסה להאיר את הרגע ש"תפס" את תשומת ליבם של פרחי ההוראה, נדון בתובנות של פרחי ההוראה שהן תוצאה של ניתוח אירועים קריטיים שנצפו על ידם. נדון באפשרויות שמציע הכלי של אירוע קריטי ללמידה ולהכשרה של פרחי הוראה.

המסגרות התיאורטיות אשר ישמשו במפגש השני משמשות את המחקר המלווה את תוכנית הקלי"ם-5 וממצאים ראשוניים מן המחקר יוצגו במהלך שני חלקי המפגש.

רשימת מקורות

Asterhan, C. S. C. & Schwarz, B. B. (2016). Argumentation for Learning: Well-trodden paths and unexplored territories. *Educational Psychologist*, 51(2), 164187.

Clarke, D. (2000). Time to reflect. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 201–203.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education*, 41(2), 169-202.

Leikin, R. (2008). Teams of Prospective Mathematics Teachers: Multiple Problems and Multiple Solutions. In T. Wood (Series Editor) & K. Krainer (Volume Editor). *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 3. Participants in mathematics teacher education: individuals, teams, communities, and networks*. (pp. 63-88). Sense Publishers.

Putnam, R. T., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning?. *Educational researcher*, 29(1), 4-15.

Schön, D. A. (1983). The reflective practitioner: how professionals think in action. New York: Basic Books.

Shulman, J. H. (1991). Revealing the mysteries of teacher-written cases: Opening the black box. *Journal of Teacher Education*, 42(4), 250-262.

Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(2), 125-147.

Zeichner, K. (2012). The turn once again toward practice-based teacher education. *Journal of Teacher Education*, 63(5), 376-382.

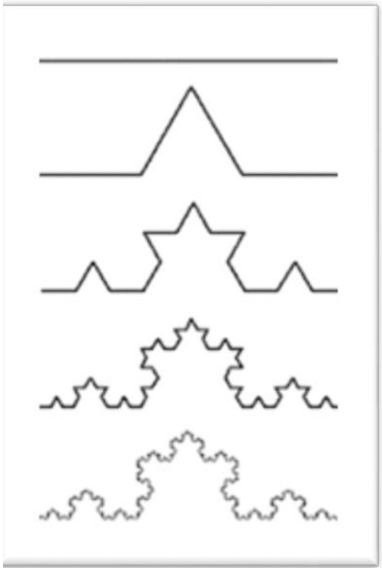
פרקטלים: ממתמטיקה אל טכנולוגיה וחינוך

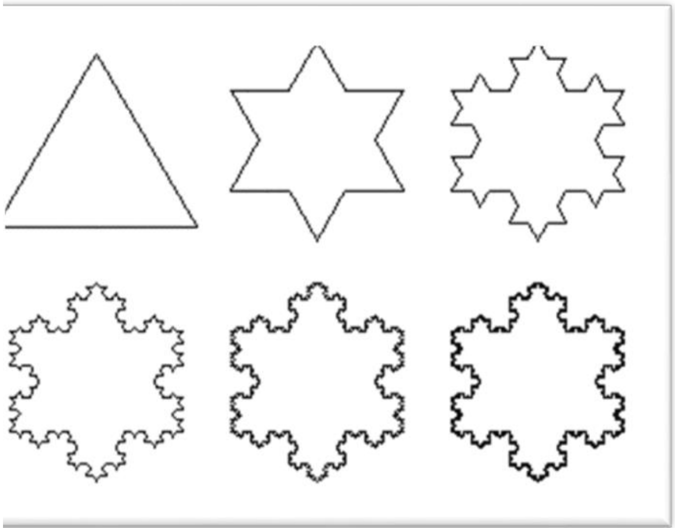
נח דנא פיקראד, המרכז האקדמי לב
שרה הרשקוביץ, המרכז לטכנולוגיה חינוכית, שאנן - מכללה אקדמית דתית

למושג "פרקטל" יש לעתים קרובות קונוטציות שונות בקרב הציבור הרחב מאשר ל ציבור המתמטיקאים. הציבור הרחב מכיר יותר את האומנות הפרקטלית (ציורים, חולצות מעוטרות, צעיפים עם מוטיבים הודים וכו') מאשר את המושג המתמטי עצמו.

הגיאומטריה הפרקטלית היא תת-תחום בטופולוגיה. צורה גיאומטרית פרקטלית מאופיינת ב"דמיון עצמי" (self-similarity), כלומר החלק המקומי, דומה לכלל. לכן, קשה יחסית להגדיר באופן מדויק את המושג המתמטי של פרקטל, אפילו עבור מתמטיקאים, אך ניתן להבין את האלמטים העיקריים של תחום מתמטי זה, בהתבסס על פעילויות (מה שנקרא to do mathematics) ברמות שונות.

איור מס' 1 ממחיש שתיים מהדוגמאות הידועות ביותר:





(א) (ב)

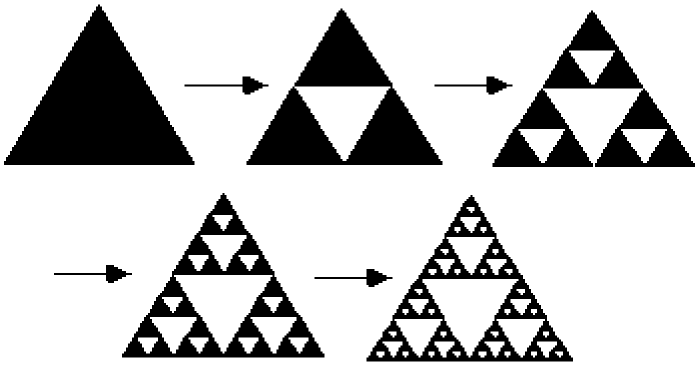
איור 1: בניית פרקטל

שני התהליכים בנוים על אותו עיקרון: נדגים באיור 1ב: מתחילים ממשולש שווה צלעות (המשולש בפינה השמאלית העליונה) מחלקים כל צלע לשלושה קטעים שווים ובונים על הקטע האמצעי, משולש שווה צלעות הפונה החוצה (התמונה האמצעים בשורה הראשונה של איור 1ב). וחוזר חלילה.

דוגמה זו ידועה בשם "פתית השלג של קוך" (Koch snowflake). והאיור ממחיש את בנייתו.

דוגמה נוספת מפורסמת מאוד, היא משולש סירפינסקי. השלבים הראשונים של בנייתו מוצגים באיור 2. הצורה הפרקטלית היא האובייקט המתמטי המופשט המתקבל מאינסוף איטרציות של אותו תהליך. נזכיר את סרטי הוידאו המראים ש"זומינג" פנימה בצורה פרקטלית מראה כל הזמן את אותה הצורה.

כמו בכל אובייקט מתמטי המוגדר ע"י אינסוף איטרציות, בפועל משתמשים בקירוב הניתן ע"י מספר סופי של איטרציות.



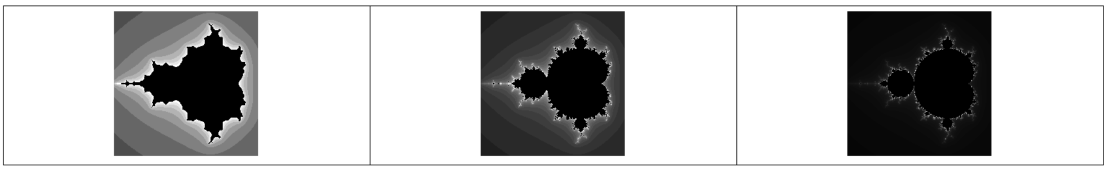
איור 2: בניית משולש סירפינסקי

לדוגמה, חישוב סכום של טור חזקות אינסופי מתכנס $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ דורש חישוב מופשט של הגבול של הסדרה. בפועל עבור היישומים משתמשים בסכום חלקי $\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$, כאשר קריטריונים מסוימים מאפשרים לקבל אמדן של השגיאה (כגון חישוב השארית של לגרנג').

איור 1ב נותן המחשה של עקומה במישור שאי אפשר לצייר. אחת הסיבות היא שהעקומה ה"אמיתית" לא ניתנת לציור, כיון שהיא לא דיפרנציאבילית באף מקום. גם ההוכחה של התכונה הזאת היא הוכחה כבדה.

עבודה בסביבה טכנולוגית מאפשרת גישה אל התיאוריה של הפרקטאלים ברמות חינוך שונות:

1. עבודה ידנית בעזרת עפרון וסרגל מספקת כדי לשרטט את הציורים הנ"ל.
2. אפשר לצייר את הציורים הנ"ל בעזרת תכנה לגיאומטריה דינמית כגון GeoGebra. בכך אפשר לראות ערך מוסף חינוכי ביכולת התלמיד להתנסות גם במיומנויות טכנולוגיות, אשר יהיו שימושיות בתחומים אחרים.
3. אפשר להשתמש ב Computer Algebra System (CAS), כגון Maple המכיל פקודות ספציפיות לבניית פרקטלים. באיור מס' 3 אפשר לראות שלוש איטרציות בבניית קבוצת מנדלברוט[1] ע"י פקודה ספציפית של Maple. Mylläri et al. (2019) משתמשים בCAS וב DGS שונים, אבל הפרדיגמות זהות.



איור 3:

4. בשלב מתקדם יותר, אפשר לחקור בצורה מפורשת איטרציות של תהליך הניתן ע"י העתקה מורכבת. בעצם, זה מה שמסתתר בפקודות המוטמעות ב CAS.
5. לימוד נושא הפרקטלים יכול לתרום בעבודה רב-תחומית במתמטיקה. אפשר לחקור עם תלמידים מתקדמים, עקומה סגורה באורך אינסופי התוחמת שטח סופי (למשל: בפתית השלג של קוך). תלמידים שהתנסו בכך ראו דוגמאות פשוטות יותר מסוג זה כאשר למדו אינטגרלים לא אמיתיים, ובמקרה כזה אפשר לקדם אותם בלולאה נוספת בספירלת בוכברגר (Buchberger 2002) .

[1] לזכור שתיאוריית הפרקטאלים הוגדרה בשנות ה 1960 ע"י המתמטיקאי היהודי צרפתי (ממוצא פולני) Benoit Mandelbrot.

6. אפשר למצוא יישומים ודוגמאות נוספות בתחומי ידע רבים: פיזיקה, בוטניקה, גיאוגרפיה, אמנות, ועוד ....
7. פעילויות הקשורות לבניית פרקטלים מקדמות למידה המאפשרת את פיתוח מיומנויות המאה ה- 21: יצירתיות, חשיבה ביקורתית, תקשורת ושיתוף פעולה, שנתפסות כמטרות החינוך בעת הזו.(Charles Fadel, 2015).

עיסוק בנושא "פרקטלים אופייני לתחום הנקרא STEAM (ראשי תיבות של Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics). הוא מופיע גם בתחומים מופשטים עוד יותר Dana-Picard (2017) או תחומים מדעיים אחרים, כגון אסטרונומיה. לדוגמא Jurell et al. (2019) מראים מבנים של משולש סירפינסקי ומבנים של קבוצת מנגל בחלל.

בכל רמה, יש לפתח שיח מתמטי-טכנולוגי מתאים מצד המורה (Artigue 2002 קוראת לזה technological discourse). בעצם, המיומנויות הטכנולוגיות האלה מהוות חלק של הידע המתמטי החדש הנרכש.

מקורות

דנא-פיקארד, נ.(2017). המבנה הפרטאלי של הזמן, לדעת בארץ דרכך א', מרכז אקדמי לב וספריית בית אל, תשע"ז, 137-158.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 7(3), 245-274.

Buchberger, B. (2002). Teaching without teachers?, Talk at VISIT-ME, Vienna 2002, available: https://slideplayer.com/slide/5212644/

Fadel, Charles. (2015). Making Education More Relevant Center for Curriculum Redesign CCR www.curriculumredesign.org

Jurell, B., Walker, D., Mylläri, A. and Mylläri. T. (2019). On the Applicability of Pairwaise Separations Method in Astronomy: Influence of the Noise in Data, in (M. Beaudin et al., edts) *Mathematics in Computer Science* 13 (1-2), Special Issue on Applications of Computer Algebra (ACA 2017, Jerusalem), 5-10.

Mylläri, T., Takato, S, Yamashita, S., Noda, T. and Mylläri, A. (2019). Fractals in the classroom with CAS and KeTCindy*,* ACA 2019 (Int. Conf. on Applications of Computer Algebra), Montreal, Canada. Presentation available at http://aca2019.etsmtl.ca/program/ in Book of Abstracts pp.196-197.

Peitgen, Heinz-Otto. Jürgens, H. and Saupe, D. (2004). Chaos and Fractals: New Frontiers of Science 2e, NY: Springer.

ייצוגי הוראה והזדמנויות הלמידה שהם מזמנים למורים

מרב וינגרדן ועינת הד-מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
אביטל אלבוים-כהן, תיכון על שם אהרון קציר רחובות
טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך
גיל שורץ, יעל נוריק, מכון ויצמן למדע

הדיונים בקבוצה זאת יוקדשו לרעיון של ייצוגי הוראה שונים. ייצוגי הוראה הם למעשה הדרכים השונות בהן ניתן לייצג את ההוראה. בפרט, כל ייצוג הוראה חושף ומדגיש היבטים שונים של ההוראה וככזה, מאפשר למורים או לפרחי ההוראה הזדמנויות למידה שונות (Grossman et al., 2009). בשנים האחרונות נעשה שימוש במגוון ייצוגי הוראה בהקשר של תהליכי הכשרת מורים. לדוגמא: מקרים כתובים המתארים סיטואציה מסוימת (Merseth, 2003), קטעי וידיאו מהכיתה (Karsenty & Arcavi, 2017) וסיפורי אנימציה המתארים סיטואציה מהכיתה (Chieu, Herbst, & Weiss, 2011). עם זאת, המחקר אודות הזדמנויות הלמידה השונות שניתנות למורים במהלך החשיפה לייצוגי הוראה שונים נמצא בראשית דרכו.

בקבוצת הדיון המוצעת, נבחן כיצד שלושה ייצוגי הוראה שונים חושפים ומדגישים היבטים שונים של ההוראה ואילו הזדמנויות למידה הם מאפשרים למורים או לפרחי הוראה.

שלושת ייצוגי ההוראה בהם נתמקד בקבוצת הדיון המוצעת הם: קטעי ווידאו, אוסף פרקטיקות להוראה איכותית ועצי מימושים של עצמים מתמטיים. להלן תיאור קצר של כל אחד מייצוגי ההוראה.

קטעי וידאו

פרויקט עדש"ה – עמיתים דנים בשיעורי מתמטיקה – גיל שוורץ, יעל נוריק ורוני קרסנטי

שימוש בווידאו לצרכי פיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה החל בשנות ה-60 של המאה העשרים והפך נפוץ עם הזמן. לשימוש בווידאו יש יתרונות רבים בעבודה עם מורים, כמו למשל האפשרות לראות שוב ושוב קטעים מסוימים, לעתים תוך התבוננות מנקודות התייחסות שונות (Sherin, 2004). בנוסף, וידאו מאפשר לשכּן דיונים על חקרי מקרה בפרקטיקות של כיתה אמיתית ובכך להפוך את הדיון על מקרים אלו הן לאותנטי (Borko, Koellner, Jacobs, & Seago, 2011) והן לכזה המאפשר בסיס משותף לדיון וללמידת עמיתים (Clarke & Hollingsworth, 2000). וידאו משמש גם ככלי להגברת מודעות של מורים לפרקטיקות ההוראה שלהם ומאפשר חשיפה לפרקטיקות הוראה שונות (Ball & Bass, 2003; Santagata, Gallimore, & Stigler, 2005).

פרויקט עדש"ה, אשר יוצג בקבוצת הדיון, עושה שימוש בשיעורים מוסרטים לשם פיתוח כלים לרפלקציה של מורים למתמטיקה על פרקטיקות ההוראה שלהם. זאת, באמצעות דיון עמיתים בשיעורים מוסרטים המונחה על ידי מסגרת ניתוח שפותחה לשם כך (Karsenty & Arcavi, 2017). מסגרת הניתוח של עדש"ה מתמקדת בהיבטים שונים של הוראת המתמטיקה ומכילה שש עדשות: (1) הרעיונות המתמטיים והמטא-מתמטיים הקשורים לנושא המוצג בשיעור המוסרט; (2) מטרות המורה בשיעור; (3) המטלות והמשימות הניתנות בשיעור; (4) האינטראקציות של המורה עם תלמידיו; (5) החלטות שקיבל המורה לפני ובמהלך השיעור והדילמות שעמדו בפניו כתוצאה מההתפתחויות בשיעור; (6) מסרים ואמונות של המורה על מתמטיקה ועל הוראתה ולמידתה.

בקבוצת הדיון נקרין קטע משיעור מתמטיקה מצולם ונדגים ניתוח סרט בעזרת מסגרת הניתוח של עדש"ה. לאחר מכן, נקרין קטעים ממספר השתלמויות מורים בהם עסקו באותו השיעור המצולם, ונדון בהזדמנויות הלמידה שייצוג הוראה זה מזמן במסגרת פרויקט עדש"ה, תוך הדגשת יתרונות הוידאו והשימוש במסגרת ניתוח.

אוסף פרקטיקות להוראה איכותית

פרויקט פרקטל – אביטל אלבוים-כהן וטלי נחליאלי

פרקטיקות-הוראה עומדות כיום בליבן של תוכניות רבות להכשרת מורים והשתלמויות מורים ברחבי העולם (Grossman, 2018; Hatch & Grossman, 2009; Borko et al., 2011). התייחסות לפרקטיקות הוראה כוללת

הכרה בכך שאין די להתייחס לידע שמורים צריכים לדעת כדי להיות מורים טובים, ויש להתייחס גם לשאלה – מה מורים צריכים לדעת לעשות?

במסגרת פרויקט פרקטל – פרקטיקות להוראה איכותית של מתמטיקה ופיסיקה, אנו מתמקדים בזיהוי פרקטיקות-הוראה ופיתוח מסגרת מושגית. אוסף הפרקטיקות להוראה איכותית כמייצגים את ההוראה מאפשרים שיח פורה ומקדם של מורים או פרחי הוראה על ההוראה ועל פרקטיקות ההוראה השונות. אנו מגדירים פרקטיקת-הוראה כרוטינה (שִׁגרה), (Lavie, Steiner, & Sfard, 2018) הכוללת פעולות הוראה שהמורה מבצע יחד עם המשימה שאפשר לייחס לפעולות הוראה אלה.

דוגמה לפרקטיקת הוראה יכולה להיות המשימה של "חשיפת החשיבה של תלמידים" והליך אפשרי עשוי להיות: ניהול דיון בו תלמידים מוזמנים להציג את רעיונותיהם ולהגיב אחד לדברי האחר. בפרקטל, אם כן, אנו מזהים פעולות הוראה שונות שמורים מומחים מבצעים במהלך שיעורי המתמטיקה והפיסיקה בבית הספר העל יסודי ומייחסים לפעולות אלה את המשימה שאפשר להשיג באמצעותן. לשם כך, אנחנו מצלמים שיעורים של מורים מומחים, מנתחים אותם ומנגישים את תוצרי הניתוח למורים ולפרחי הוראה באופן שיאפשר למידה.

במסגרת קבוצת הדיון נציג בפני המשתתפים קטעי וידאו משיעור מתמטיקה, ונדון בפרקטיקות הוראה שונות שניתן לזהות בקטעים אלה. נעשה זאת על ידי כך שנזהה פעולות הוראה שהמורה מבצעת, ונעלה רעיונות לגבי המשימה שהיא מנסה להשיג בעזרת פעולות הוראה אלה. בפרט, נתייחס לפרקטיקת הוראה שנקראת "הוראה המעודדת מעברים קריטיים במתמטיקה" ונזהה פעולות הוראה שהמורה מבצעת כדי לעודד ולאפשר מעבר זה.

עצי מימושים של עצמים מתמטיים

מרב וינגרדן ועינת הד-מצויינים

הערכת עצי המימושים הוא כלי הבוחן את המידה בה התלמידים משתתפים באופן חקירתי בדיון הכיתתי, כלומר, מייצרים נרטיבים על עצמים מתמטיים בכוחות עצמם (Weingarden, Heyd-Metzuyanim, & Nachlieli, 2019). עצם מתמטי (פונקציה למשל) מוגדר, על פי ספרד (Sfard, 2008), באמצעות המימושים השונים שלו – דרכים שונות בהן ניתן לדבר על העצם המתמטי המוגדרות כ"אותו דבר" על פי כללים מוגדרים היטב (גרף הפונקציה, ביטוי אלגברי של הפונקציה וכו'). התהליך שבו מדברים על שני מימושים שונים של העצם המתמטי כ"אותו דבר" נקרא דימות (saming). תהליך זה הוא מרכיב חשוב להשתתפות החקירתית של התלמיד.

בהתבסס על כך, שני מאפיינים מרכזיים של ההשתתפות החקירתית העומדים בבסיסו של הכלי הם: דימות - באיזו מידה התלמידים נחשפו למימושים שונים של העצם המתמטי ולקשר ביניהם. וסמכות התלמידים - באיזו מידה התלמידים ייצרו נרטיבים מתמטיים בשיעור (לעומת המורה).

הכלי מתאר באופן ויזואלי את ההשתתפות החקירתית של התלמידים בשיעור באמצעות הצגת העצם המתמטי המרכזי הנידון בשיעור, המידה בה התלמידים נחשפו למימושים השונים שלו ולקשרים ביניהם והמידה בה התלמידים יצרו נרטיבים מתמטיים.

במסגרת הכשרת מורים, אנו עושות שימוש בכלי הערכת עצי המימושים באמצעות הצגה של עצי מימושים שונים אשר נלקחו משיעורים מצולמים אמיתיים, וקיום דיון עם פרחי ההוראה סביב הדומה והשונה בכל אחד מהשיעורים המיוצגים על ידי עץ המימושים.

במהלך קבוצת הדיון נציג את הכלי ואת הרעיונות העומדים בבסיסו. לאחר מכן המשתתפים יתנסו בהשוואה של שיעורים המיוצגים על ידי עצי מימושים שונים. לבסוף, המשתתפים ינתחו קטעי שיח של פרחי הוראה על עצי מימושים שונים במטרה לזהות ולדון בהזדמנויות שניתנו לפרחי ההוראה לפתח את תהליך הלמידה שלהם דרך עץ המימושים כייצוג הוראה.

מבנה קבוצת הדיון המוצעת

במהלך המושב הראשון המשתתפים ראשית יכירו את שלושת ייצוגי ההוראה ואת התיאוריות המרכזיות העומדות בבסיסם. בנוסף, המשתתפים יתנסו כלומדים בשימוש בייצוג ההוראה ובהזדמנויות שכל ייצוג הוראה מאפשר להם.

במושב השני נתמקד בשיח של מורים על ייצוגי הוראה שונים. המשתתפים יתנסו בניתוח קטעי שיח או קטעים מצולמים של מורים הנחשפים לכל אחד מייצוגי ההוראה השונים וידונו בהזדמנויות הלמידה שכל ייצוג הוראה מזמן למורים במסגרת הכשרת מורים או התפתחות מקצועית.

מקורות

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GDEDM .

Borko, H., Koellner, K., Jacobs, J., & Seago, N. (2011). Using video representations of teaching in practice-based professional development programs .ZDM, 43(1), 175–187. Retrieved from http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-010-0302-5

Chieu, V. M., Herbst, P., & Weiss, M. (2011). Effect of an animated classroom story embedded in online discussion on helping mathematics teachers learn to notice. Journal of the Learning Sciences, 20(4), 589–624. http://doi.org/10.1080/10508406.2011.528324

Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2000). Seeing is understanding: Examining the merits of video and narrative cases. Journal of Staff Development, 21(4), 40-43 .

Grossman, P. (2018). Teaching Core Practices in Teacher Education. Harvard Education Press. 8 Story Street First Floor, Cambridge, MA 02138.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., & Williamson, P. W. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. Teachers College Record, 111(9), 2055–2100.

Hatch, T., & Grossman, P. (2009). Learning to look beyond the boundaries of representation: Using technology to examine teaching (Overview for a digital exhibition: Learning from the practice of teaching). Journal of Teacher Education, 60(1), 70-85.

Karsenty, R., & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: a framework and a language for developing reflective practices of teaching. Journal of Mathematics Teacher Education, 20(5), 433–455. http://doi.org/10.1007/s10857-017-9379-x

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2018). Routines we live by: from ritual to exploration. Educational Studies in Mathematics, 101(2), 153-176. http://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Merseth, K. (2003). Windows on teaching math: Cases of middle and secondary classrooms. New York: Teachers College Press.

Santagata, R., Gallimore, R., & Stigler, J.W. (2005). The use of video for teacher education and professional development: Past experiences and future directions. In C. Vrasidas, & G. V. Glass (Eds.), Preparing Teachers to Teach with Technology (pp. 151-167). Information Age Publishing Inc.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating. New York: Cambridge University Press.

Sherin, M. G. (2004). New perspectives on the role of video in teacher education. Advances in Research on Teaching, 10, 1–27. http://doi.org/10.1016/S1479-3687(03)10001-6

Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E., & Nachlieli, T. (2019). The realization tree assessment tool – examining explorative participation in mathematics lessons. Journal of Mathematical Behavior. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100717

סוגיות מרכזיות בחינוך מתמטי לעשור הקרוב

טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב
אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

שני סוגי מחקר שיש הרבה סיבות ומעט סיכוי לבצע אותם

לדעתי קיימים שני סוגי מחקר אשר קבלו מעט מידי תשומת לב ב-40 השנים האחרונות וחשובים להשפעת המחקר המצוין שנעשה, וזה נכון גם בארץ וגם בעולם.

הסוג הראשון הוא מחקר על למידה למשך טווח ארוך. אמנם נעשו הרבה מאוד מחקרים על למידה ואחדים, בעיקר במסגרת עבודות דוקטורט, אספו נתונים במשך שנה או יותר, אבל תלמיד לומד מתמטיקה במשך 10-20 שנה ויש תכנים ואמונות שמתפתחות בטווח ארוך. דוגמה אחת לכך היא נושא הנימוק / הצדקה / הוכחה. תכנית מחקר שאני רואה ככדאית ועשויה להביא לתובנות חשובות היא חקירת הפוטנציאל של דוגמאות לטענות מתמטיות כלליות להפוך באופן שיטתי במשך לימודי היסודי והחטיבה לדוגמאות גנריות ומשם במשך למודי התיכון להצדקות כלליות ומשם בלימודי האוניברסיטה להוכחות פורמליות. לשם כך צריך לעקוב אחרי הלומד לפחות במשך 10 שנים (מכיתה ד׳ ועד שנה א׳ באוניברסיטה) ורצוי במשך 18-20, החל מגן הילדים.

הסוג השני הוא מחקר על יישום בהיקף רחב של תוצאות מחקר שהוכיחו את עצמן מקומית. קהיליית המחקר בחינוך מתמטי, גם בארץ וגם בעולם, מבצעת הרבה מחקרים חדשניים, מבוססים על רעיונות נהדרים ומבוססים היטב גם מבחינה תיאורטית וגם אמפירית. מראים שרעיונות אלה ברי ביצוע עם תלמידים בודדים, קבוצות קטנת, וכיתות אחדות. היישום בהיקף גדול נדיר ומחקר על יישום כזה נדיר מאוד. לדעתי רצוי לבצע מחקרים שעוקבים אחרי יישום רחב של רעיונות שהוכיחו את עצמם בהיקף מצומצם, ולחקור את התנאים שמונעים או תורמים ליישום רחב. לדוגמה (ויש בטח דוגמאות טובות יותר, אבל זו אחת שאני מכיר מקרוב) תכנית הלימודים החדשה ל-5 יח״ל מציעה גישה חדשה למושג האינטגרל, מבוססת על מחקרים בהיקף מצומצם מאוד. היה רצוי לעקוב אחרי יישום ההוראה בגישה זו במשך 5 עד 10 שנים בממספר כיתות כיתות גדול בכל האזורים ומערכות חינוך תיכוני בארץ.

המשותף שאני רואה בין שני סוגי המחקרים המוצעים הוא ששניהם מחקרי טווח ארוך מאוד. קיימות בעיות מערכתיות, בארץ ואף בעולם ביישום מחקרים ארוכי טווח ורחבי היקף, גם באופן המימון וגם בהכרה שחוקר יכול לקבל מהם בטווח הקצר. לכן אינני אופטימי לגבי האפשרות לבצע מחקרים כאלה אבל יתכן שבדיון אפשר למצוא פשרות שכן ברי ביצוע.

שאלות –מחקר ארוך טווח

- מהם התפישות והמושגים המתמטיים ומהם היבטים נוספים בחינוך מתמטי שהתפתחותם נמשכת שנים רבות?
- מהן שאלות מחקר חשובות וברות ביצוע עבור כל אחד מהמחקרים ארוכי טווח שזוהו בנקודה הקודמת?
- מה ההיבטים המיוחדים, מדעיים (למשל מתודולוגיים) ואירגוניים (כגון מימון, צוות מחקר יציב לשנים רבות), שמתעוררים בתכנון וביצוע של מחקר לטווח ארוך ואיך ניתן לדאוג להם ולהבטיח אותם?

שאלות –מחקר היקף רחב (upscaling)

- כאן שאלות המחקר אולי די ברורות:
  - מהם הגורמים שמקשים על יישום בהיקף רחב של חידושים שהוכיחו את עצמם בהיקף מצומצם?
  - מהם דרכי הפעלה שמגבירים את היעילות של הפעלה בהיקף רחב?

  זהו מחקר יישומי ולכן מוצעים לדיון שאלות כגון
  - לאיזה סוג לש חידושים רצוי לתת עדיפות במחקרים של upscaling: תכניות לימוד? שיטות הוראה? הערכה? אחר?
  - מה אופן שיתוף הפעולה עם גופים ציבוריים (בעיקר משרד החינוך) שיאפשרו ויקלו על ביצוע מחקרים כאלה?
  - מי אמור לממן מחקרים כאלה?

מיצגים

באיזו מסעדה נבחר?

קרני שיר, מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

אתה נמצא בעיר זרה, שאתה לא מכיר, ומרגיש רעב. על שפת הנהר, משני צידי הרחוב, יש שתי מסעדות. שתי המסעדות נראות יפה, משתיהן בוקעת מוסיקה נעימה, ובשתיהן פחות או יותר אותה כמות של סועדים. ההבדל היחידי בין המסעדות הוא השלט שתלוי בכניסה למסעדה.

בשלט של מסעדה א' כתוב: "אוכל טוב הוא לא זול". בשלט של מסעדה ב' כתוב: "אוכל זול הוא לא טוב". באיזה מסעדה תבחר לאכול?

הבעיה המתוארת הנה הרחבה של טענה מפורסמת בתחום הלוגיקה המתמטית. הבעיה הוצגה ל- 41 פרחי הוראה הלומדים לתואר הוראת מתמטיקה במסגרת הקורס "מבוא ללוגיקה" במכללת שאנן, במטרה לעמוד על תפיסות אינטואיטיביות שלהם לגבי כלל ההיסק הלוגי 'קונטרה-פוזיטיב'. פרחי ההוראה התבקשו לכתוב באיזו מסעדה היו בוחרים ולנמק את קביעתם. תשובות פרחי ההוראה נאספו והנימוקים אותם כתבו להצדקת הקביעה שלהם חולקו לקטגוריות.

למרות שהכתוב בשני השלטים של שתי המסעדות הנו שקול, רק ארבעה פרחי הוראה שמו לב לשקילות הזו. הרוב המוחלט של פרחי ההוראה (68%) כתבו שיעדיפו ללכת לאכול במסעדה א', כאשר הנימוק הנפוץ ביותר אותו הביאו פרחי ההוראה בהתייחסותם להעדפת מסעדה א' היה הנימה החיובית של השלט התלוי בכניסה למסעדה וההתייחסות לאוכל הטוב. גם מבין פרחי ההוראה שראו את השקילות בין הפסוקים, היו כאילו שהעדיפו את מסעדה א'. לדוגמא אחד הנימוקים שנכתבו: " אלך למסעדה א' כי המסר של השלט שלה יותר ברור, למרות שבאופן כללי זה אותם משפטים, הם שקולים זה לזה". מתגובותיהם של פרחי ההוראי עולה השאלה - האם מכך ששני הפסוקים הללו שקולים לוגית זה לזה ניתן להסיק כי המשמעות שלהם זהה?

סמואליין (Smullyan, 2011) התייחס בדיוק לאותה בעיה בספרו What's the Name of this book. גם הוא העלה את השאלה: האם שני המשפטים הללו אומרים את אותו דבר, או אומרים שני דברים שונים. לטענתו, אומנם מבחינה לוגית שני המשפטים אומרים בדיוק את אותו הדבר (ושקולים למשפט האומר כי "לא קיים אוכל שהוא גם טוב וגם זול"), אך מבחינה פסיכולוגית המשמעות של שני המשפטים הללו היא שונה. כאשר קוראים את המשפט הראשון נוטים לדמיין אוכל טעים ויקר, בעוד שכאשר קוראים את המשפט השני נוטים לדמיין אוכל רקוב וזול.

אז איך אתם תופסים את עצמכם – יותר לוגיקנים או יותר פסיכולוגים ... ?

במסגרת המיצג תוצג הבעיה, תגובותיהם של פרחי ההוראה, ודוגמאות לנימוקים בהם השתמשו על מנת להצדיק את קביעתם, והתפלגות נימוקים אילו.

מיומנויות וידע בפתרון משוואות הדורשות שימוש ב"חוש למבנה"

בסן צינצינטוס רונית - סמינר הקיבוצים, המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאומנות
פלדמן רוית - תיכון אליאנס, כל ישראל חברים, תל אביב

מבוא

בתחום החינוך המתמטי קיימת התלבטות בין שתי גישות המאפיינות את הלמידה בכיתה. האחת מדגישה את חשיבות ההקניה של התכנים המתמטיים הפרוצדורליים העיקריים והשנייה מדגישה את פיתוח תהליכי החשיבה הדרושים להתמודדות עם בעיות מתמטיות ובניית מודלים מתמטיים של סיטואציות מתחומים שונים (פרידלנדר, 2008).

משוואה שניתנה בבחינת בגרות במתמטיקה יצרה מצב שהתלמיד פתר על פי הכללים שלמד אך שגה בהעתקתה. דרך הפתרון העידה על שליטה סבירה בטכניקה אלגברית אך חסרה לו מיומנות אחרת. הוא לא הבחין בהפרשם של שני ביטויים זהים (Hoch & Dreyfus, 2004). ישנם תרגילים, בהם תשומת לב למבנהו המיוחד של התרגיל, תאפשר פתרון קל, מהיר ויעיל יותר. מיומנות זו של התבוננות וניצול מבנה התרגיל לפתרון, נקראת בספרות המקצועית "חוש למבנה" (Linchevski & livneh, 1999).

שונפלד (Scheonfeld, 1989) טען כי לימוד אשר מדגיש את השימוש בטכניקה אלגברית תוך שינון חוקים נוסחאות ומשפטים מתמטיים מקנה לתלמידים ניסיון בפתירת בעיות מתמטיות מאותו סוג אולם לא בונה ידע המעודד יצירתיות, פענוח, גילוי וחשיבה מעמיקה.

מתודולוגיה

מחקר זה ביקש לחדש, מעבר לקיים בספרות המקצועית, בבחינת השפעת יחידת הוראה המשלבת בין ידע, מיומנויות וזיהוי "מבנים-אלגבריים" על הגמישות המחשבתית, ההבנה, יעילות פתרון התלמידים והישגיהם (פלדמן ובסן-צינצינטוס, 2019). מטרת המחקר לבחון השפעת הוראה על ביצועי התלמידים בפתרון משוואות. אוכלוסיית המחקר כללה 23 תלמידי כיתה י' הלומדים ברמת 4 יחידות לימוד מתמטיקה. הועבר לתלמידים שאלון מקדים, יחידת הוראה שנבנתה במיוחד לצורך מחקר זה ולאחר מכן שאלון נוסף. כמו כן, רואיינו תלמידים, שנבחרו בהתאם לתוצאות השאלונים.

ממצאים

יחידת ההוראה באה להציג שינוי וסטייה מתכנית הלימודים הסטנדרטית. הממצאים מראים כי לפני ההוראה כשליש מהתלמידים פנו לפתרון בחוש למבנה. בשאר הפתרונות פנו לפתרון מסורבל או לא פתרו כלל. נראה שקיימת מוגבלות בהפעלת שיקול דעת לפני שתלמידים ניגשים לפתור והם אינם בוחנים דרכים שונות לפתרון. לאחר ההוראה, אחוז גבוה מהתלמידים פנו לחוש למבנה ואחוז ההצלחה עלה. ברגע שנחשפו למבנה התרגיל בצורה מוסדרת, חוויתית, המבוססת על דיונים והבנת הנלמד, התלמידים, למדו לחשוב ולבצע בקרה של מבנה התרגיל לפני תחילתו ובכך למצוא את הדרך היעילה ביותר לפתרו.

טרם ההוראה, נמצא כי קיים קשר בין מידת ההצלחה בפתרון התרגיל לבין שימוש או אי שימוש בחוש למבנה. הוראה ממוקדת מבנים אלגבריים, מביאה לשיפור בפנייה לשימוש בחוש למבנה ובהישגי התלמידים ובזאת תרומתה. מכאן, יש לבנות את תכנית הלימודים באיזון נכון ולשלב בין חיזוק המיומנות והשליטה של התלמידים בחוקים הפורמליים לבין פיתוח טכניקות ומיומנות חשיבה לוגית.

בספרות המקצועית נמצא כי קשיים בהפעלת טכניקה אלגברית היא תופעה שכיחה. יתכן שהתכנים נלמדים בעיקר בצורה טכנית וחסרה התבססות על הבנה (Hoch & Dreyfus, 2004 ; Booth, 1981). תלמידים עשו שימוש בטכניקה של פתרון חישובי גם כשכלל לא היה צורך. יתכן שהם מעדיפים את

הפתרון החישובי שהוא יותר בטוח מבחינתם וכך הם נכנסים לרוטינה של עבודה טכנית בפתרון המשוואות (Steinberg, Sleeman & Ktorza; 1990). תלמידים מצליחים בדרך כלל, לפתור משוואות ואי שוויונות מסוימים ממעלה ראשונה ושניה, אבל התהליכים שהם מבצעים חסרי משמעות עבורם. הם מתקשים בפתרון משוואות ואי שוויונות שלא ניתן לפתור בגישה אנליטית (סוזן, 2000).

ממחקר זה עולה כי תלמידים מתקשים מאוד להתייחס לביטוי אלגברי כיחידה. ממצא זה מחזק את הטענה כי בבית הספר היסודי לא מושם דגש על ראייה מבנית של ביטויים חשבוניים וכתוצאה מכך מתקשים התלמידים להתמודד עימם בהמשך לימודיהם - בלימודי האלגברה (Booth, 1989). בהקשר זה, חוסר היכולת של תלמידים להבין את הדואליות תהליך-מבנה של סמלים אלגבריים הינו אחד ממקורות הקושי בלימודי האלגברה (Sfard, 1991). מומלץ אם כן, לשלב הוראת מבנים אלגבריים בתכנית הלימודים עוד בבית הספר היסודי. חכים וגזית (2011) מציינים כי תכנית הלימודים במתמטיקה שמה דגש הן על תוצרים והן על דרכי ותהליכי חשיבה והתכנית אף מדגישה כי המתמטיקה אינה רק מקצוע נוקשה בעל חוקים חד משמעיים, אלא מקצוע בעל היבט רחב בו אפשר להתמודד עם משימות לא שגרתיות באמצעות שילוב בין חשיבה אלגוריתמית לבין חשיבה מסתעפת ויצירתית.

ממצאי מחקר זה מלמדים כי במצב הנוכחי שמים דגש רב יותר על הבנה אינסטרומנטלית ולימוד המיומנויות האלגבריות תופס, נכון להיום, חלק ניכר מתכנית הלימודים (פלדמן ובסן-צינצינטוס, 2019). תרומת המחקר בכך שהעברת יחידת הוראה ממוקדת מבנים אלגבריים, מביאה לשיפור הן בפנייה לשימוש בחוש למבנה והן בהישגי התלמידים. שימוש בחוש למבנה הינה אסטרטגיית פתרון מעניינת, מעשירה וחיונית במגוון תחומי לימוד במתמטיקה ואינה מופיעה בתוכניות הלימודים בצורה רשמית וישירה, אך ניתן, במידת הצורך, לשלבו למעשה בכל תכני הלימוד. לפיכך, מומלץ להקדיש זמן להקנייתה באופן מפורש במסגרת הוראת המתמטיקה. רצוי ללמד מתי כדאי להשתמש בה ולדון במוקדי הקושי שביישומה. כמו כן, רצוי להדגים את השימוש בה ולעורר את המודעות לפוטנציאל האפקטיבי הטמון בה.

מקורות

פלדמן, ר., ובסן-צינצינטוס, ר. (2019). השפעה של הוראה המשלבת בין ידע, מיומנויות ו"מבנים-אלגבריים" על יכולת פתרון משוואות. שאנן - מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 7, 75 – 85.

חכים, ג., וגזית, א. (2011). מקומה של יצירתיות בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות אצל תלמידים בכיתות ה-ז. מספר חזק 2000, 20, 40-48.

סוזן, ע. (2000). ניתוח גישות תלמידים, מהיחידה הקדם-אקדמית. על"ה, 25, 27-41.

פרידלנדר, א. (2008). כיצד פותרים... תרגילים? הצעה לתרגול מיומנויות אלגבריות. על"ה39 ,, 11-18.

Booth, L, R. (1981). Child-Methods in Secondary Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 12(1), 29-41.

Booth, L, R. (1989). A Question of Structure. In: S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research Issues in in the Learning and Teaching of Algebra, 57-59, The National Council of Teachers of Mathematics, Reston: Virginia.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, 49-56. Bergen, Norway: PME.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. Educational Studies in Mathematics, 40(2), 173-196.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior. Journal for Research in Mathematics Education, 20(4), 338-355.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1-36.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1990). Algebra Students' Knowledge of Equivalence of Equations. Journal for Research in Mathematics Education, 22(2), 112-121.

למידת מתמטיקה מבוססת מתמטיקה אתנית- המקרה של העיטור האסלאמי ללמידת חפיפת משולשים

אחסאן חאג'-יחיא, אקדמיית אלקאסמי –מכללה אקדמית לחינוך
ג'והיינה עוואדה שחברי, אקדמיית אלקאסמי – מכללה אקדמית לחינוך
וג'יה דאהר, אקדמיית אלקאסמי – מכללה אקדמית לחינוך
ג'יהאד בלעום, אקדמיית אלקאסמי – מכללה אקדמית לחינוך

מבוא

המתמטיקה האתנית "Ethnomathematics" הוגדרה על ידי דאמברוסיו (D'Ambrosio, 1990) לפי שלושה חלקים שמרכיבים את המונח: "ethno", "mathema" ו- "tics"; "Ethno" מתייחס לכל ההקשר החברתי-תרבותי הכולל קודים וסמלים. "mathema" מתייחס לפעילות של להסביר, להפעיל, להסיק ולמידול. "tics" נגזר מהשורש "techné" ויש לו אותו שורש של טכניקה. המתמטיקה האתנית הופכת את המתמטיקה הפורמלית של בית הספר לרלוונטית ומשמעותית יותר עבור התלמידים. בנוסף, היא מפתחת את הלמידה האינטלקטואלית, החברתית והרגשית של התלמידים בכך שהיא מתחברת על ידי רלוונטיות תרבותית והתנסויות אישיות בעת בניית הידע המתמטי שלהם (Rosa & Orey, 2011). ההשפעה של המתמטיקה האתנית הודגשה במחקרים שונים, לדוגמא, ווידדה, הירוותי ולוביס (Widada, Herawaty & Lubis, 2018) דיווחו שההבנה המתמטית של התלמידים שלמדו מתמטיקה פורמאלית בהתבסס על מתמטיקה אתנית, הייתה גבוהה יותר מאשר תלמידים שלמדו מתמטיקה פורמאלית בלי ההקשר הזה. האמנות נחשבת לקוד חשוב בכל תרבות, ומשמשת גם ככלי רב עוצמה למורים בכיתה. באמנות האסלאמית העיטורים נחשבים לאלמנטים מרכזיים, ומתחלקים לעיטורים המתבססים על צמחים, בעלי חיים, וצורות גיאומטריות (Shafiq, 2014). במחקר הנוכחי, אמצנו את העיטור הגיאומטרי האסלאמי כדי לתכנן רצף למידה בחפיפת משולשים. נושא חפיפת משולשים נחשב לאחד הנושאים הבסיסיים בגיאומטריה הקלאסית (Laudano & Vincenzi, 2017). ועל אף חשיבות זו, התלמידים מתקשים להבין את נושא חפיפת המשולשים (Wu, 2005). החשיבות והקשיים בנושא חפיפת המשולשים, יחד עם ההשפעה החיובית של המתמטיקה האתנית, הובילו למחקר הנוכחי. שמטרותיו העיקריות, הן בדיקת מאפייני תהליכי הלמידה בקרב תלמידים מוסלמים במהלך למידתם רצף בנושא חפיפת משולשים המתבסס על העיטור הגיאומטרי האסלאמי. בנוסף, לבדיקת השפעת למידת הרצף על הבנתם של התלמידים את נושא חפיפת המשולשים.

שיטה

המחקר נערך בקרב 30 תלמידי כיתה י' שנחשבים לתלמידים מתקשים במתמטיקה. התלמידים עבדו בקבוצות, כל קבוצה מנתה 4-5 תלמידים שלמדו רצף של ששה מפגשים (60 דקות כל מפגש) בחפיפת משולשים המתבססת על העיטור הגיאומטרי האסלאמי. המפגשים כללו: היכרות עם העיטור האסלאמי; היחשפות לחפיפת צורות הנדסיות שונות בעיטורים; בניית עיטורים בשימוש בסימטריה, הזזה ושיקוף; זיהוי השוויון בין צלעות וזוויות מתאימות בשני משולשים חופפים; ההבחנה בתנאים לא מספיקים לחפיפת משולשים, הכרת שלושת משפטי חפיפת משולשים תוך בניית עיטורים וחקירתם. מקור הנתונים היה: (א) הקלטות וידאו לשלוש קבוצות בזמן התמודדות התלמידים בששת המפגשים, אשר תמללו במלואן. (ב) שני שאלונים מקבילים א' ו- ב', כשכל שאלון כולל ארבע שאלות הוכחה המתבססות על שלושת משפטי החפיפה. התלמידים נדרשו לענות על שאלון א' לפני תהליך למידה ושאלון ב' בתומו. ניתוח תהליכי הלמידה התבסס על ההשוואה המתמדת (Strauss & Corbin, 1998), בהתחלה נעשה קידוד פתוח לקביעת תהליכים חוזרים וזיהוי דפוסים דומים הקשורים לתהליך הלמידה; אחר כך קידוד צירי לבחון הקשרים בין קטיגוריות ותת- קטיגוריות ובסוף בניית קטיגוריות עיקריות. ניתוח ממצאי השאלונים התבסס על מתן ניקוד בהתאם למחוון שנבנה ע"י החוקרים, ואחר כך עיבוד הנתונים שהתקבלו בשימוש במבחן t מזווג.

הממצאים

התוצאות העיקריות שהתקבלו מניתוח תהליכי הלמידה, מצביעים על כך שהתלמידים בהתחלת תהליך הלמידה קישרו את המשולשים החופפים לזוויות שוות, דמיון משולשים, שטח שווה. במהלך הלמידה, התלמידים הצליחו להגדיר משולשים חופפים. בנוסף, התלמידים הצליחו להבדיל בין התנאים המספיקים לחפיפת משולשים ובין התנאים הלא מספיקים ולנסח את שלושת משפטי החפיפה. ממגבלת המקום נציג חלק ממצאי תהליך הלמידה.

זיהוי תנאים לא מספיקים לחפיפת משולשים

במהלך חקירת העיטורים הגיאומטריים השונים התלמידים הסיקו ששוויון בצלע אחת בין שני משלושים, צלע וזווית אחת או שלוש זוויות אינם תנאים מספיקים לקיום חפיפה בין שני המשולשים. להלן חלק משיח התלמידים המתאר חקירת התלמידים לעיטור [איור1] והסקתם ששוויון בצלע אחת בין שני משולשים אינו מהווה תנאי מספיק לחפיפה.

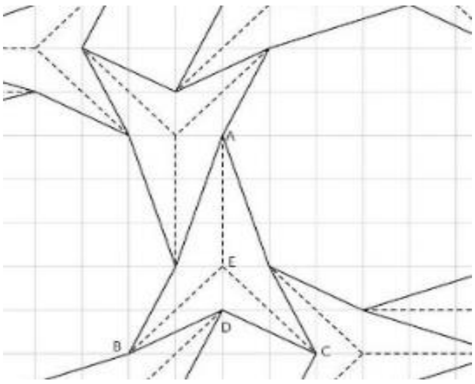
[102] רים: אם יש צלעות שוות במשולשים BDE ו- BDA [איור1]

[105] נג'ם: AD

[107] סג'א: לא זה BD

[111] רים: המשולשים אינם חופפים, אחד גדול ואחד קטן

[116] רים: כלומר שתי צלעות שוות בשני משולשים אינם מספיקות לחפיפת שני המשולשים



איור 1

במהלך חקירת העיטור התלמידים חיפשו צלעות שוות כמו שמתבהר בשאלת רים [102], סג'א [107] זיהתה את הצלע השווה בין שני המשולשים. רים [111] הדגישה ששני המשולשים אינם חופפים, והדגישה ב [116] ששתי צלעות שוות בשני משולשים אינו מהווה תנאי מספיק לחפיפת שני משולשים.

להלן חלק וחקירת התלמידים לעיטור[איור 2] והסקתם ששויון בצלע אחת וזווית אחת גם הוא אינו תנאי מספיק לחפיפת שני המשולשים.

[127] מרח: מה הן הזוויות והצלעות השוות במשולש ABC ו- BDC [איור 2]

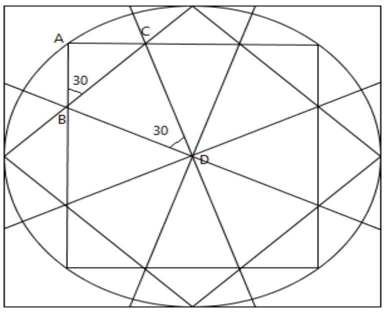
[129] סג'א: הצלע BC משותפת

[133] נג'ם: הזוויות B ו- D

[136] סג'א: האם מספיק השוויוניים האלה?

[137] מרח: לא מספיק, משולש קטן ומשולש גדול

[138] סג'א: שוויון בצלע אחת וזווית אחת לא מספיקים לחפיפת שני המשולשים



איור 2

במהלך חקירת העיטור סג'א [129] הצהירה שהצלע BC משותפת לשני המשולשים ABCו- BDC. בנוסף, נג'ם [133] מצאה ש ABC ∠ שווה ל- ∠BDC. מרח [137] הדגישה שהמשולשים לא חופפים וסג'א [138] סיכמה שצלע וזווית שווה בשני משולשים לא תנאי מספיק לחפיפה.

הסקת משפטי חפיפת המשולשים

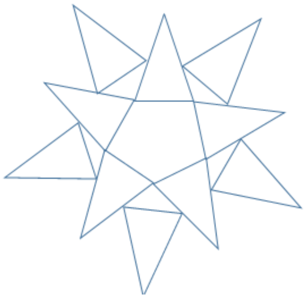
התלמידים הסיקו שלושת משפטי החפיפה (צ,ז,צ), (ז,צ,ז) ו- (צ,צ,צ) תוך כדי בניית עיטורים וחקירתם. נדגים את הסקת משפט החפיפה (צ,צ,צ). התלמידים התמודדו בבניית עיטורים בשימוש במשולש צלעותיו מוגדרות מראש. התלמידים הסיקו שניתן לצייר משולש אחד ויחיד עם אותן צלעות [איור 4].

[323] נור: כל המשולשים יצאו אותו דבר

[326] עבד: בכל העיטורים יש אותו משולש

[328] דועאא: משולש עם אותן צלעות ניתן לצייר רק אחד

[331] נור: אם שני משולשים שווים בצלעותיהן אז הם חופפים



איור 4

הממצאים הכמותיים מחזקים את הממצאים שנגזרו מניתוח תהליכי הלמידה, ומצביעים שהתלמידים הצליחו בזיהוי משולשים חופפים וכתיבת תנאי ההוכחה בהתאם למשפט החפיפה המתאים. ממצאי מבחן t מזווג שנגזרו מהשאלונים א ' ו-ב' הצביעו על ממוצע גבוה יותר בקרב התלמידים בתום תהליך הלמידה ($M = 15.9$, $SD = 10.137$) מאשר לפני תהליך הלמידה ($M = 88.6$, $SD = 11.57$) וההבדלים מובהקים $t(9) = -17.14$, $p < .001$.

סיכום

הממצאים מעידים על שינוי ניכר בקרב התלמידים בהבנתם לנושא חפיפת משולשים בכל מרכיביו ובהסתמך על למידה של מתמטיקה אתנית. ממצאי החקר מצביעים על תרומתה של המתמטיקה האתנית להבנה התלמידים את נושא חפיפת המשולשים שהינו נושא מורכב לתלמידים. לאור התוצאות, אנו ממליצים לפתח ולבחון רצפי למידה המבוססים על מתמטיקה אתנית.

מקורות

D’Ambrosio, U. (1990). Etnomatemática [Ethnomathematics]. São Paulo, SP, Brazil: Editora Ática.

Laudano, F., & Vincenzi, G. (2017). Congruence theorems for quadrilaterals. *J. Geom. Graphics*, *21*(1), 45-59.

Shafiq, J. (2014). Architectural Elements in Islamic Ornamentation: New Vision in Contemporary Islamic Art. *Arts and Design Studies*, *21*, 11-21.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Rosa, M. & Orey, D. C. (2011). Ethno mathematics: the cultural aspects of mathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 4*(2). 32-54.

Wu, H.S. (2005). Key mathematical ideas in grades 5-8. Paper presented at the Annual Meeting of the NCTM, Anaheim, CA. Retrieved from: http://math.berkeley.edu/~wu/NCTM2005a.pdf

Widada, W., Herawaty, D., & Lubis, A. N. M. T. (2018). Realistic mathematics learning based on the ethnomathematics in Bengkulu to improve students’ cognitive level. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1088, No. 1, p. 012028). IOP Publishing.

תרומתם של סוגי הוראה שונים לזכירת עובדות הכפל בקרב תלמידות יסודי בחינוך הממלכתי-דתי

שושי דורפברגר, **מלאכי רונית**, המכללה האקדמית גורדון

רקע

מתמטיקה היא אחד המקצועות המרכזיים הנלמדים במערכת החינוך בישראל בכל שכבות הגיל. הוראת הכפל היא שלב יסודי והכרחי כבסיס להמשך לימודי המתמטיקה. בהתאם לתכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי, על תלמידי כיתה ג' לשלוט בעובדות היסוד של לוח הכפל. המחקר הנוכחי בחן מהי דרך ההוראה המיטבית להשגת שליטה בעובדות הכפל בהתבסס על השוואת יעילותן של ארבע שיטות הוראה מבוססות תאורטית להקניית רכישה ושליטה בכפל: הוראה בעזרת אסטרטגיה, הוראה באמצעות שאלות (בעיות) מילוליות, הוראה בעזרת אמצעי המחשה והוראה בעזרת שינון. שתיים מהשיטות התאפיינו במתן אסטרטגיה ללומד, בעוד השתיים האחרות לא התבססו על אסטרטגיה.

שאלת המחקר היתה אם ימצא הבדל בין השיטות השונות ביכולתן להביא את התלמיד לשליטה בלוח הכפל בתום יחידת לימוד של שמונה שיעורים וכן שנה לאחר תום יחידת הלימוד.

שיטת מחקר

במחקר השתתפו 100 תלמידות כיתה ג' (בנות 9-10) הלומדות בבית ספר חרדי לבנות המשתייך לרשת חינוך חב"ד ונמצא בפיקוח של משרד החינוך במסגרת החינוך הממלכתי-דתי. הבנות חולקו לארבע קבוצות. כל קבוצה תרגלה במשך תשעה שבועות את לוח הכפל באמצעות שיטת הוראה שונה. כלי המחקר היה מבחן שבדק את הישגי התלמידות בתחום זה וכלל 30 תרגילים. מבחן זה נערך בשלוש נקודות זמן, לפני הוראת הכפל (קדם), מיד לאחריה (בתר) ושנה לאחר תום הלימוד.

ממצאים ודיון

תוצאות המחקר הצביעו על שיפור מובהק בהישגי כל התלמידות מאז תחילת יחידת הלימוד ועד סופה, מהממצאים עולה כי בעוד שלא נמצאו הבדלים בין ארבע השיטות במדידת הבתר שנערכה בתום יחידת הלימוד, הרי במדידה לאחר שנה הקבוצות נבדלו באופן מובהק: אלו שלמדו בשיטות הוראה מבוססות-אסטרטגיה הגיעו לשליטה בעובדות הכפל ושמרו עליה, בעוד אלו שלמדו בשיטות שעיקרן שינון ירדו בביצועיהן. החידוש אם כן הינו הממצא שאימון באמצעות אסטרטגיה עשוי להוביל לשיפור ארוך טווח בשליטה בעובדות הכפל. בהנחה זו יש משום הצעה למורים העוסקים בהקניית עובדות הכפל שבהוראת הכפל ראוי ליישם שיטה מבוססת-אסטרטגיה.

מקורות

אלמוג, נ', בן יהודה, מ' ושרוני, ו' (2014). פיתוח כלי לבדיקת המהירות והדיוק בחישוב המבוסס על תובנה מספרית בקרב תלמידים בכיתות ג'-ו'. דפים, 58, 197-224.

משרד החינוך (2006). תכנית הלימודים במתמטיקה לבתי ספר יסודיים. נדלה מהאתר

http://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/Yesodi/mavo1.pdf
Kling, G. & Williams, J. (2015). Three steps to mastering multiplication facts. Teaching Children Mathematics, 21(9), 548-559.

חדשות במתמטיקה – הבזקים לתלמידי תיכון

קרני שיר, מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
ורדה זיגרסון, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

פרויקט ההבזקים הוא אחד הפרויקטים המתנהלים במסגרת מרכז המחקר והפיתוח קשר חם – **ל**קידום, **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי בישראל, המתנהל בטכניון. הפרויקט נועד לאפשר לתלמידי החטיבה העליונה בישראל הצצה אל המתרחש בתחום המתמטיקה בת-זמננו. הפרויקט מעמיד לרשות המורים למתמטיקה מצגות פאואר-פוינט (להלן "הבזקים") שכל אחת מהן מתמקדת בחדשה שהתפרסמה בעיתונות המתמטית המקצועית בשנים האחרונות. כל הבזק כולל גם את הרקע המתמטי של החדשה, פרטים אודות המתמטיקאים שעסקו בה והמשמעות הרחבה יותר של ההישג – למשל יישומיו (אם כבר התגלו כאלה). משך ההצגה בכיתה של כל הבזק הוא 25-30 דקות. בשנים האחרונות מתנהל שילוב ההבזקים בשיעורי המתמטיקה על ידי מורים ביותר מ- 90 כיתות בכל רחבי הארץ, בעקבות השתלמויות שהתנהלו בטכניון ברשת אורט ובמרכזי פסג"ה והודות למימון של משרד המדע ומשרד החינוך.

ההבזקים הם פרי יצירתם של צוותי מומחים בראשותה של פרופ' נצה מובשוביץ-הדר. הם מעודכנים באופן שוטף לאור גילויים רלוונטיים חדשים, ולאור משוב המתקבל באופן שוטף מהמשתמשים. הכנת כל הבזק דורשת מעל ל-100 שעות עבודה על מנת להגישו בצורה מרתקת ובשפה המובנת לתלמידי תיכון. ההבזקים מיועדים לתלמידי החטה"ע בכל רמות הלימוד, ומכוונים לתת לכולם טעימה מהתרבות המתמטית רבת-העניין שבה מתברכת החברה האנושית המודרנית. הכנתם של 22 הבזקים כבר הושלמה ועוד היד נטויה.

במסגרת מושב המיצגים בכנס ירושלים השמיני (2020) יוצגו שני הבזקים שונים, אחד בכל יום, במתכונת של מצגת בהקרנה מעגלית. באי הכנס יוכלו להתרשם מהחדשה המתמטית, משילוב החדשה עם הרקע ההיסטורי שלה, מהמידע הנוגע למתמטיקאים הקשורים אליה ומהפדגוגיה של שאלות סוקרטיות בהצגת ההבזקים. יצוין כי בכנס ירושלים השישי (2018), הצגנו במסגרת מושב המיצגים מצגת הכוללת את כל הרקע לפרויקט ואת ההיסטוריה של התפתחותו בעשר השנים מ-2008 עד 2018. בנוסף למושב המיצגים, יוצגו בכנס שתי הרצאות על ממצאי המחקר אשר עקב אחר התנסות התלמידים והתנסות המורים שהשתתפו בפרויקט ההבזקים תשע"ז-תשע"ט.

שני ההבזקים אשר יוצגו במושב המיצגים הם בנושאים הבאים:

השערת קפלר: ההבזק מתמקד בבעיית האריזה היעילה של כדורים שווי רדיוס, שהועלתה במאה ה 16 ע"י יוהנס קפלר ונשארה פתוחה כמעט 400 שנה. ההבזק עוקב אחרי נסיונות הפתרון הכושלים של מתמטיקאים שונים במהלך שנים אילו, ועד לפתרון שהושג ב 1998 באמצעות מחשבי-על, והקשיים של הקהילייה המתמטית להכיר בפתרון מסוג זה כקביל. המאבק על פרסום הפתרון נמשך 7 שנים, וכתוצאה ממנו נבנתה מערכת ממוחשבת שבודקת תוקף של הוכחות באמצעות מחשב. הוכחות באמצעות מחשב גרמו למהפך בעולם המתמטי במאה ה-20, ואימותן באמצעות מחשב הוא החדשה הגדולה של ימינו.

טבעת מביוס: ההבזק פותח בהבחנה בין משטח דו-צדדי לבין משטח חד-צדדי והגילוי המפתיע של טבעת מביוס שהתרחש ב 1858. בהמשך מוצגת בעיית המודל המתמטי של המשטח המיוחד הזה שהועלתה בשנת 1930, ונפתרה רק 70 שנה לאחר מכן. לבסוף מוצגת שורה ארוכה של שימושים שיש לה בימינו - שימושים בתעשייה, פטנטים רשומים באלקטרוניקה, יישומים לרפואה, ואפילו שימושים במוסיקה, בספורט, באמנות ועוד.

<u>צוות הפרויקט בתש"ף</u>:

פרופ' נצה מובשוביץ-הדר ניהול הפרויקט
פרופ' עטרה שריקי - מרכזת המחקר
ורדה זיגרסון - מרכזת היישום
דר' בועז זילברמן, דר' רותי סגל, דר' קרני שיר - חוקרים ומלווי-היישום
אורנה אימבר - מתאמת פרויקטים של "קשר חם"
הכתובת ליצירת קשר בדוא"ל: mns.project@gmail.com

תחרות טנגרם שיתופית

סבינה סגרה, המכללה האקדמית אחוה

מבוא

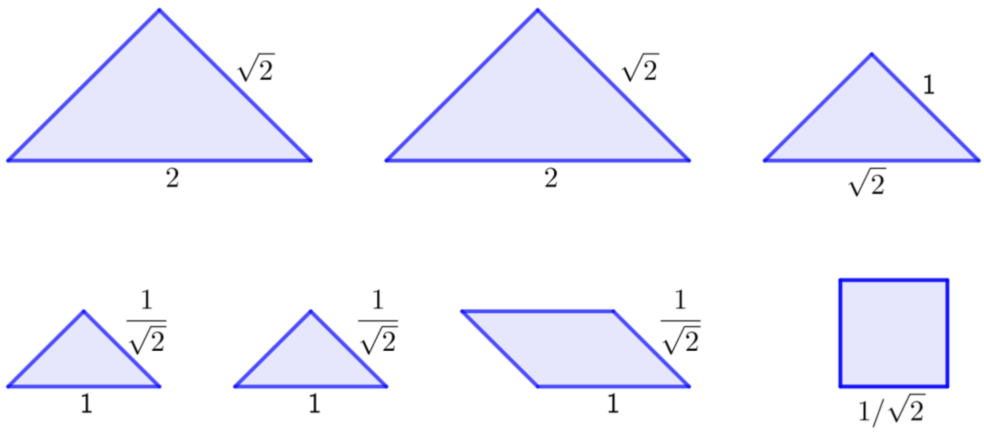
המשחק טנגרם משמש הרבה בשיעורי מתמטיקה. מצד אחד הוא פשוט: ישנם שבעה חלקי פאזל בלבד שאפשר להכין בעבודת גזירת נייר פשוטה. מצד שני הוא מלא אפשרויות, הרכבים שונים ואתגרים. שלבי ההתפתחות של חשיבה גיאומטרית לפי ואן הילה הודגמו בין היתר על-ידי המשחק טנגרם (Siew & Chong, 2014). במיצג זה אתאר שיעור שמלמד את הנושאים "דמיון" ו"דמיון עצמי" בעזרת משחק זה.

כמו בכל תחום יש גם בלמידת המתמטיקה חשיבות רבה לשיתוף פעולה (Karali & Aydemir, 2018). בכל זאת, על התלמידים להתמודד עם סיטואציות רבות של תחרות, החל עם מבחני המחוננים בכיתה ב'.

בשיעור "טנגרם חוזר על עצמו" תלמידים מוזמנים לפתור חידות טנגרם פעם אחת בסיטואציה תחרותית ופעם נוספת בשיתוף פעולה. הפעילות מזמינה את התלמידים לדיון על הרקע המתמטי של החידות (דמיון ודמיון עצמי) ועל עמדת התלמידים כלפי למידה שיתופית וכלפי הלמידה בסיטואציות של תחרות.

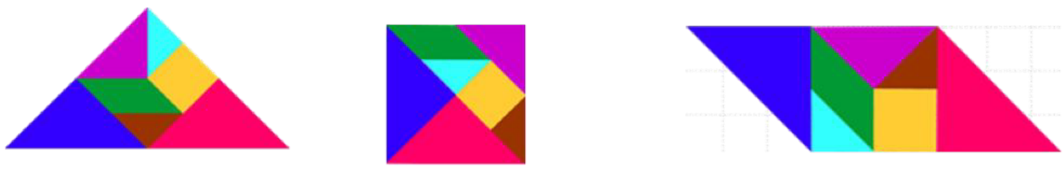
הרקע המתמטי

לפאזל הסיני הקלסי טנגרם שייכים שבעה חלקים שלעתים נקראים "טנים". חמישה מהחלקים הללו הם משולשים שווי-שוקיים וישרי זווית בשלושה גדלים שונים. בנוסף יש ריבוע אחד ומקבילית אחד (תמונה 1).



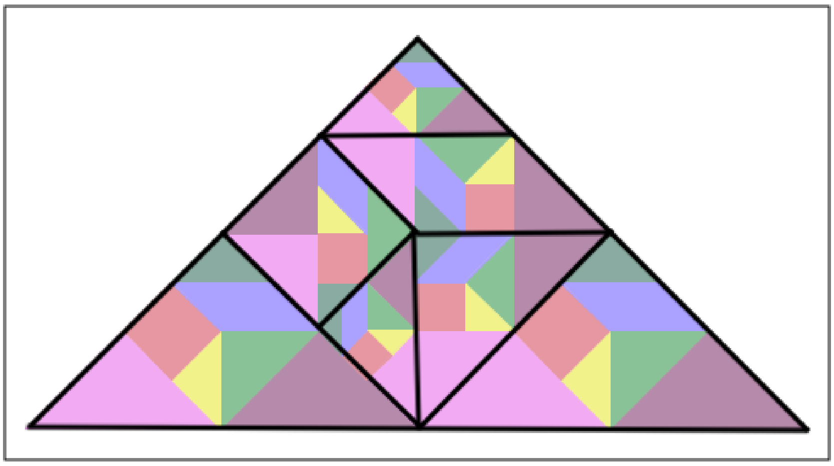
תמונה 1: שבעת חלקי הטנגרם ואורכי הצלעות שלהם.

ניתן להרכיב את כל אחת משלוש הצורות הללו מסט שלם של חלקי טנגרם (תמונה 2).



תמונה 2: שלוש צורות הטנגרם - המקבילית, הריבוע והמשולש - וכיצד ניתן להרכיב אותן מחלקי טנגרם.

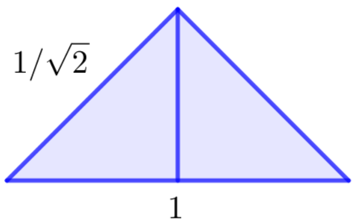
כמובן שניתן לחזור על תהליך זה ולהרכיב מחלקי טנגרם את חלקי הטנגרם שמרכיבים צורת טנגרם (תמונה 3).



תמונה 3: משולש טנגרם המורכב מחלקי טנגרם שמורכבים מחלקי טנגרם.

מרטין גרדנר מקדיש בספרו "The unexpected hanging and other mathematical diversions" פרק לנושא המצולעים שניתן להרכיב מהעתקים מוקטנים של עצמם (Gardner, 1991) ומכנה אותם "Rep-Tiles" (קיצור של repeated tilings) כמו לפניו סולומון גולומב (Golomb, 1964).

גרדנר וגולומב דנים בצורות שניתן לכסות ללא חורים וללא חפיפה ב-n העתקים מוקטנים של אותה הצורה. לדוגמה, משולש ישר זווית שווה שוקיים ניתן להרכיב משני העתקים מוקטנים של עצמו (תמונה 4). במקרה זה גורם ההקטנה הוא $1/\sqrt{2}$(היחס בין צלעות מתאימות או בין שורש השטחים).

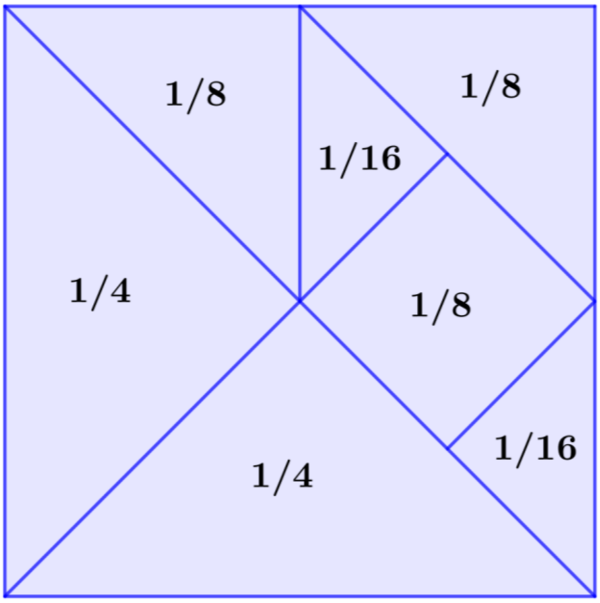


תמונה 4: ניתן לחלק משולש ישר זווית שווה שוקיים לשני העתקים מוקטנים של עצמו.

הטנים המוקטנים בעזרתם מרכיבים צורות טנגרם דומים לטנים המקוריים.

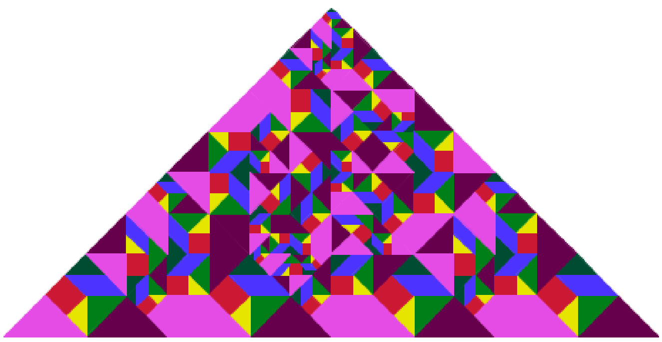
הטנים השונים (חלקי הטנגרם השונים) בעלי שטחים שונים ביחס לשטח הטוטלי של כל הצורות ביחד (תמונה 5). לכן ישנם שלושה גורמי הקטנה שונים כאשר מרכיבים צורות טנגרם מצורות טנגרם, כפי שמפורט בטבלה הבאה.

צורות (בסוגריים מספר ההעתקים ששייכים למשחק)	גורם הקטנה
משולש גדול (2)	$1/2$
ריבוע (1), משולש בינוני (1), מקבילית (1)	$1/2\sqrt{2}$
משולש קטן (2)	$1/4$



תמונה 5: שטח הטנים ביחס לשטח של כל המשחק.

כמובן שאפשר לחזור באופן רקורסיבי על תהליך הרכבת חלקי הטנגרם מחלקי טנגרם. כל אחת מהצורות בתמונה 2 מורכבת משבעה טנים. כאשר נרכיב גם את שבעה הטנים הללו מחלקי טנגרם, נצטרך $49 = 7 \cdot 7$ טנים. בכל שלב נצטרך את מספר הטנים הקודם כפול 7. עבור n איטרציות נצטרך 7^n טנים. כך המשולש בתמונה 6 מורכב מ- $7^3 = 343$ טנים. באופן תאורטי אפשר להמשיך את תהליך הרכבת הטנים מטנים עד אינסוף.

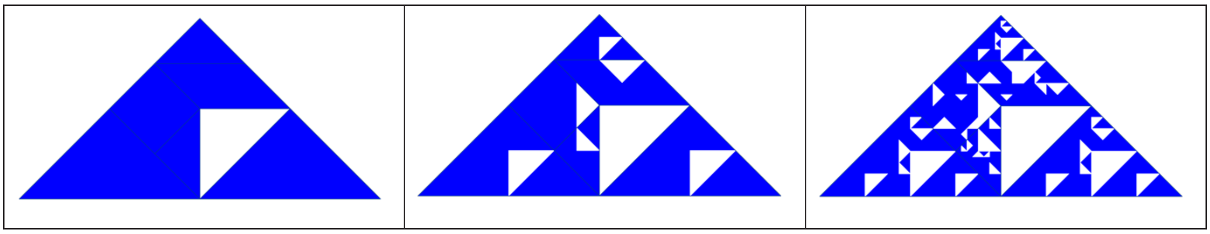


תמונה 6: משולש טנגרם אחרי שלוש איטרציות של הרכבת טנים מטנים.

דמיון עצמי קיים כאשר צורה דומה לחלק של עצמה. לטנים המורכבים מטנים יש דמיון עצמי כאשר חוזרים אינסוף פעמים על התהליך הנ"ל. במקרה זה כל אחד מהטנים כולל אינסוף העתקים מוקטנים של עצמו. כאשר עוצרים את התהליך, הטן החיצוני (הגדול ביותר) כולל יותר העתקים מאשר הטנים שמרכיבים אותו ולכן אין דמיון עצמי.

שאלת קומבינטוריקה מעניינת היא מהו מספר חלקי הטנגרם השונים בצעדים של התהליך הרקורסיבי. מספר המשולשים במשחק טנגרם רגיל הוא 5 (שני משולשים גדולים, אחד בינוני ושנים קטנים). לכן יהיו חמישה משולשים אחרי שלב אחד של הרכבת טנים מטנים (כמו בתמונה 2). אחרי שלב נוסף יהיו $7 \cdot 5 = 35$ משולשים ובסך הכול 49 טנים. בשלב מספר n יהיו $7^{n-1} \cdot 5$ משולשים, כי כל אחד מהטנים של השלב הקודם (7^{n-1}) יהיה מורכב מחמישה משולשים, ריבוע ומקבילית.

לבסוף נציין שניתן ליצור פרקטלים: חוזרים על פעילות הרכבת הטנים מטנים (באופן תאורטי אינסוף פעמים) ומוחקים בתהליך זה קבוצת טנים קבועה שנבחרה מראש (בתמונה 7 נמחק את משולש הבינוני בכל שלב).



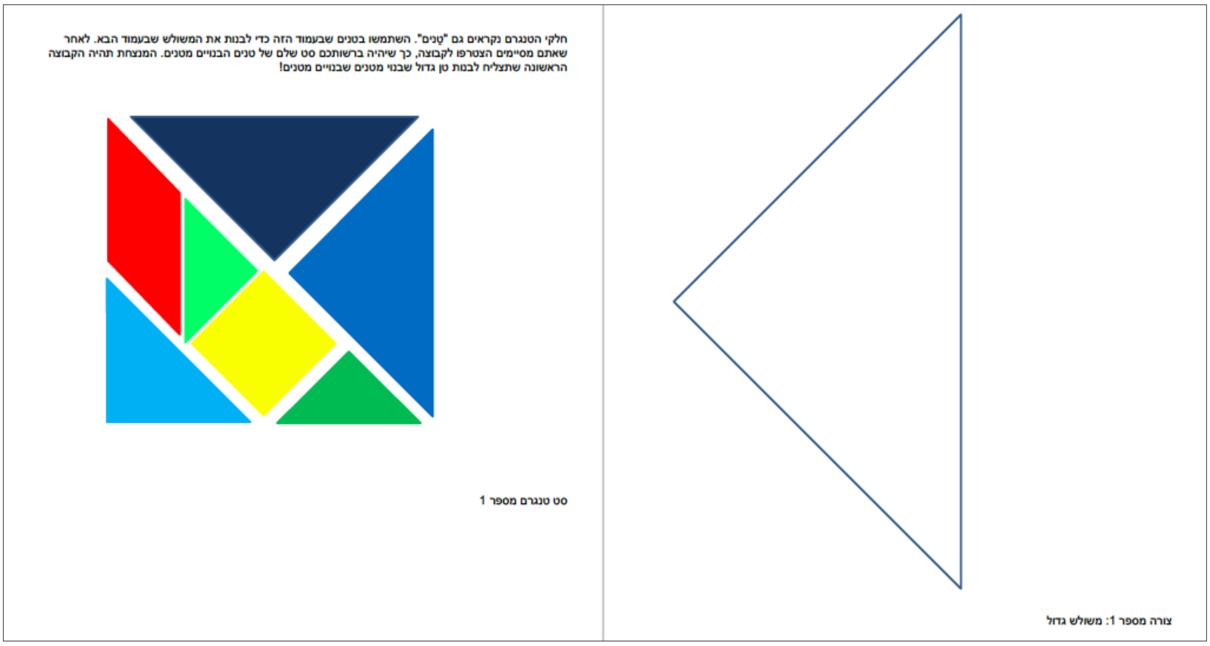
תמונה 7: סדרה של שלושה משולשים המורכבים מצורת טנגרם שבעצמן מורכבות מצורות טנגרם. בכל שלב המשולש הבינוני נמחק.

הפעילות

הפעילות מחולקת לשני שלבים עיקריים ונמשכת בדיון מסכם. בשלב הראשון כל אחד מהתלמידים מקבל דף עם קו קונטור של צורת טנגרם (ריבוע, משולש או מקבילית) ודף גזירה עם שבעת חלקי הטנגרם בגדלים המתאימים כדי להרכיב את הצורה הנתונה (ראו תמונה 8). כך בשלב הראשון על כל תלמיד להרכיב צורת טנגרם אחת מסט שלם של שבעת חלקי הטנגרם. שלב זה הוא תחרותי.

תלמידים שסיימו עוברים לשלב השני. עליהם למצוא שותפים כך שתהיה קבוצה ובה שבעת חלקי טנגרם שהורכבו בשלב הקודם בחלקי טנגרם קטנים יותר. הקבוצה אמורה להרכיב צורת טנגרם – ריבוע, מקבילית או משולש לפי בחירתם. הקבוצה הראשונה שמצליחה לעשות זאת היא המנצחת (תמונה 9).

בהמשך התלמידים מוזמנים להשתתף בחידון סוקרטיב (Showbie Inc , 2019) על תכונות גאומטריות של צורות הטנגרם ולשתף עם הכיתה את ניסיונותיהם בשלבים השונים של הפעילות.



תמונה 8: דוגמה עבור הציוד המחולק בשלב הראשון של הפעילות.

תמונה 9: ריבוע המורכב מחלקי טנגרם שבעצמם מורכבים מחלקי טנגרם. הפאזל נחתם על-ידי תלמידים שהרכיבו ריבוע זה.

מסקנות ודיון

גם בחלק התחרותי התלמידים גילו מהר שהיה כדאי לגלות פתרונות ולעזור לאחרים בהרכבת הצורות השונות, אחרת הם לא הצליחו למצוא שותפים עבור השלב השני. הילדים למדו על דימיון ודימיון עצמי והעלו שאלות המשך בקשר לפרקטלים.

בדיון על שיתוף פעולה מול תחרות הם העלו מספר נקודות מעניינות:

- בלי הקטע התחרותי, הפעילות הייתה משעממת יותר ואיטית יותר. כנראה צריך תחרות לסטימולציה. גם בטבע יש תחרות רבה.
- הקטע השיתופי היה חשוב כדי לאחד את הכיתה וכדי לתת לכולם לסיים את השיעור עם חוויה חיובית, גם לאלה שפחות הצליחו בשלב הראשון.
- אלה ששיתפו פתרונות (כדי למצוא שותפים) ציינו שלהסביר העמיק את הבנתם, ושרק כאשר הם עזרו והסבירו, הם הבינו לעומק את מה שהם עשו קודם.

התלמידים סיימו את הפעילות עם רגישות מוגברת לגבי התנהגותם בתחרויות ובשיתוף פעולה. הפעילות העירה את ענייניהם בנושאי הדמיון העצמי.

רשימת מקורות

Gardner, M. (1991). Rep-Tiles: Replicating Figures on the Plane. In M. Gardner, *The Unexpected Hanging and other Mathematical Diversions* (pp. 222-233). Chicago and London: The University of Chicago Press.

Golomb, S. W. (1964, December). Replicating Figures in the Plane. *Mathematical Gazette, 48*, pp. 403-412.

Karali, Y., & Aydemir, H. (2018). The Effect of Cooperative Learning on the Academic Achievement and Attitude of Students in Mathematics Class. *Educational Research and Reviews, 13*(21), 712-722.

Showbie Inc. (2019). *Socrative*. Retrieved from https://socrative.com/

Siew, N. M., & Chong, C. L. (2014). Fostering Students' Creativity through Van Hiele's 5 phase-Based Tangram Activities. *Journal of Education and Learning;, 3*(2), 66-80.

"רמזור למורה" - מאגר אינטראקטיבי מתעדכן של מערכי-שיעור, תכניות הוראה, שאלות ופתרונותיהן ומבחנים שונים שנכתבים על-ידי מורים למתמטיקה למען עמיתיהם

ורדה זיגרסון, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל
נעמי בוחניק, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל

מוסד שמואל נאמן למחקר מדיניות לאומית

פרויקט "רמזור למורה" הוא אחד הפרויקטים של המרכז למחקר ופיתוח "**קשר חם**" – לקידום, **שיפור** וריענון ה**חינוך** ה**מ**תמטי בישראל, ומתנהל במוסד שמואל נאמן למחקרי מדיניות, בטכניון. במסגרת הפרויקט פותח (בשיתוף עם חברת התוכנה אומניסול בע"מ) אתר **"רמזור למורה"** תוך כדי מחקר מלווה. בכנס ירושלים השביעי (2019) הוצג המחקר שליווה את פרויקט "רמזור לצפון", פרויקט תלת-שנתי שבמסגרתו נעשה שימוש באתר.

במושב המיצגים בכנס ירושלים השמיני (2020) אנו מציגים את האתר "רמזור למורה"

האתר פותח על מנת לאפשר יצירה שיתופית של מאגרים של מערכי-שיעור, תכניות-הוראה, פריטי-שאלות ומבחנים. המטרה ביצירת מאגרים אלה היא איגום הידע העשיר שצוברים המורים במהלך שנות עבודתם ושיתופו עם עמיתיהם. האתר מאפשר גם קיום דיונים מקצועיים ומשוב הדדי על כל אחד מהפריטים הכלולים בו. פיתוח האתר מלווה בהערכה מעצבת.

האתר מכיל כיום למעלה מאלף מערכי-שיעור, מאות שאלות ופתרונותיהן, עשרות מבחנים למיניהם ותוכניות הוראה רבות, כל אלה במגוון רחב של נושאים מתמטיים הכלולים בתוכנית הלימודים המחייבת של משרד החינוך. כל החומרים נכתבו והועלו לאתר על-ידי מורים למתמטיקה שתיעדו את עבודתם בכיתותיהם ומופיעים באתר בשמם. במקביל, מורים רבים, כמו גם פרחי הוראה, עושים שימוש בחומרים, שנכתבו על-ידי עמיתיהם, לצורך תכנון עבודת ההוראה שלהם. האתר מאפשר לכל המשתמשים להגיב לעבודת עמיתיהם, להציע הצעות לשיפור החומרים או להעשרתם ברעיונות נוספים ולכותבים הוא מאפשר להתייחס להערות שקיבלו.

אתר "רמזור למורה" פתוח לשימוש ועומד לרשות קהיליית החינוך המתמטי בישראל. הפריטים באתר כתובים בתוכנת word כדי לאפשר למורים המעוניינים בכך להורידם למחשב האישי ולהתאים אותם לצרכיהם ולצרכי תלמידיהם. החומרים עוברים עריכת לשון ובדיקת רהיטות מתמטית בלבד ולא נעשית התערבות שיפוטית כלשהי. שיפורים ושינויים דידקטיים ופדגוגיים הם בידי הכותבים לאור התגובות שהם מקבלים מהמשתמשים (בדומה לוויקיפדיה).

אנו מאמינים שבעצם היותו של האתר אינטראקטיבי הוא מסייע לפיתוח הקהילייה המקצועית של אנשי חינוך מתמטי בישראל לקהילייה דינאמית ועצמאית המפתחת בהתמדה ובאופן שיתופי משאבים חינוכיים לטובת כלל חברי הקהילייה, תוך קביעת סטנדרטים להוראה מיטבית של המתמטיקה.

המיצג בכנס יאפשר לבאי הכנס להתרשם מהאתר ומהחומרים בו ולהתנסות ביכולות החיפוש והאיתור של פריט זה או אחר באמצעות מילות מפתח, שמות הכותבים, קהל היעד, הנושאים המתמטיים הרלוונטיים ועוד. בנוסף להצגת ההדגמה שתתקיים במיצג יוכלו משתתפי הכנס, שיהיו מעוניינים בכך, לגלוש ולהתרשם מהאתר באופן עצמאי באמצעות המחשבים האישיים.

צוות הפרויקט בתש"ף: פרופ' נצה מובשוביץ-הדר - ראש הצוות ורדה זיגרסון, נעמי בוחניק - הנחייה ובקרה אורנה אימבר - מתאמת פרויקטים של "קשר חם"	כתובת האתר: https://ramzor.sni.technion.ac.il הכתובת ליצירת קשר בדוא"ל: project.ramzor@gmail.com

שימוש במתמטיקה במסגרת בנייה מחנאית בתנועת נוער ישראלית

לורי רובל, אוניברסיטת חיפה
נוי חורי, אוניברסיטת חיפה

מבוא

בעשור האחרון, התחילו להקדיש תשומת לב על חוויות אשר תומכות בחשיבה מתמטית, מדע, והנדסה- חינוך זה נקרא STEM. לאחרונה, מוסיפים אמונות בקונפיגורציה זו, כך ש STEM גדל ל-STEAM (Pattison et al., 2016) כך שיש פוטנציאל אדיר בלמידת STEM בהקשרים של חינוך בלתי פורמלי/ חוקרים, אנשי חינוך וקובעי מדיניות מתחילים לבנות ידע על כיצד חוויות אלה עשויות לקחת תפקיד חשוב בחוויות הלמידה וההתפתחות.

בישראל, החינוך הבלתי פורמלי הוא שדה גדול שבו פועלים ארגונים אוטונומיים רבים בהתאם למטרותיהם, כולל תנועות הנוער. מייחסים יתרונות רבים להשתתפות בתנועות נוער, ביניהם רכישת מיומנויות אישיות וחברתיות, כישורי חיים בתחומים שונים, תחושת שייכות, ביטוי עצמי, שימוש באינטליגנציות שונות יצירת קשרי חברות, וכן מפגש עם מגוון רחב של אנשים בעלי עניין משותף (מנדל-לוי וארצי 2006). בתנועת נוער הצופים, בחופשות מבית-ספר משתתפים החניכים במחנות של התנועה. בסוף שנה מתקיים מחנה קיץ, אשר משלב את כלל הפעילויות ומסכם את השנה, הזדמנות ייחודית לפעילות חווייתית בחיק הטבע.

המחנה מאפשר לילדים להקים לעצמם "עיר צופית" משלהם בה יתנסו בתכנון, בנייה ועבודת צוות. כחלק אינטגרלי של הקמת ה"עיר" למחנה קיץ, בונים החניכים סטרוטקורות גדולות, תלת-מימדיות, צבעוניות, מעץ. לא משתמשים בכלים מודרנים, אפילו לא במסמרים: החומרים היחידים הם אך ורק עץ וחבל. ניכר היה כי תנועת הצופים מייצגת מסגרת שבה מלמדים את התלמידים על מוסר, שיתופיות, וטבע. אנחנו טוענות שההשתתפות בצופים מהווה גם הזדמנות עשירה ומגוונת ללמידת STEAM.

רקע תאורטי

פרספקטיבות תרבותיות-חברתיות רואות מתמטיקה כתוצר תרבותי אשר התפתח על ידי בני אדם. כמו שכל תרבות אשר מייצרת שפות, דעות דתיות, טכניקות וכדומה, כך גם כל תרבות מייצרת מתמטיקה משלה (Bishop, 1988). לפי התאוריה של Nasir, יש את המתמטיקה האקדמית, ששייכת לבתי ספר ומוסדות פורמליות (המרחב השני), ויש את המתמטיקה של הבית והפרט (המרחב הראשון). מחקרים רבים בודקים את הקשר בין החשיבה במרחבים אלה וחלקם מראים שאנשים משתמשים במתמטיקה בהתאמה להקשר(Saxe, 1988). יש מחקרים שמראים אפילו שילדים פותרים אותם בעיות דרך פתרונות שונים, תלוי היכן הבעייה נשאלת (Schliemann & ,Carraher, Carraher 1985). הידע של בן אדם מהמרחב הראשון הינו חלק ממקורות ידע שלו (Civil, 2007). כל אחד מאיתנו אוסף מקורות ידע ממקורות שונים בחיינו.

אנחנו משתמשות במושגים אלה כבסיס למחקר בחשיבה מתמטית בהקשר של הצופים במהלך הבנייה מעץ וחבל. אנחנו רואים את החשיבה המתמטית הזאת כחלק מהמרחב הראשון של המשתתפים,, כתוצר תרבותי המהווה מקור ידע מתמטי.

שאלת מחקר

אנחנו מתמקדות במתמטיקה: אם איזו נושאים מתמטיים נעזרים הילדים במהלך הבניות מעץ בהקשר של הצופים?

מתודולוגיה

במסגרת של עבודה בקורס לתואר שני, חוקרת-סטודנטית עשתה ארבע תצפיות במפגשים בתקופת העיצוב, בימי עבודה, של שבט צופים בצפון הארץ (עם הסכמת התלמידים והוריהם). שתי החוקרות עשו תצפיות במחנה במהלך הבנייה כשהצוות הבוגר (תלמידי כיתה ט' עד יב') בנו את המבנים. השתמשנו בכלים אתנוגרפיים (Emerson, Fretz, & Shaw, 2011) כגון צילומים של תהליך הבנייה, ו- field notes מפורטים. כשלא היה ברור מה נעשה או מדוע, ואיך הם פותרים בעיות, ביקשנו הבהרה מראש הצוות (תלמיד שאחראי על קבוצת תלמידים).

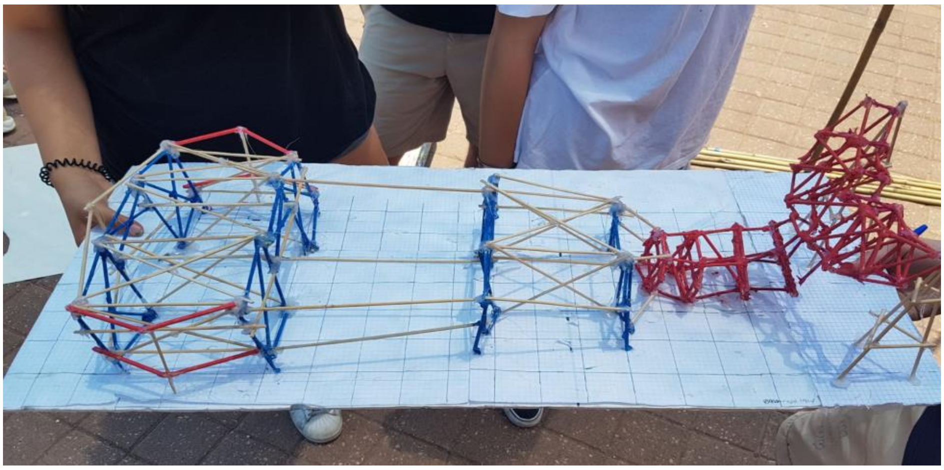
ממצאים

בכללי, מצאנו שהילדים פועלים ועובדים מתוך רצון לתרום לחברה, לעזור לחבריהם וללמוד. הילדים לומדים אחד מהשני, שואלים שאלות, הכל באווירה של למידה מתוך עניין, רצון והנאה.

גילינו 6 תחומים רחבים של כלים מתמטיים שנעזרו בהם הילדים במהלך הבנייה.

קנה מידה, יחס ופרופורציה.

די בתחילת התהליך, אחר שחלקם לומדים להשתמש בעזרת תוכנת עיצוב, בונים דגם. את הדגם הם בונים על גבי דפי משבצות (ראו תמונה 1). התלמידים הסבירו שאת חישוב הקנה מידה הם חישבו כך שכל שמונה משבצות (במחברת) מייצגות במציאות מטר. לפי קנה מידה זה, הם משרטטים במחברת משבצות את הסקיצה, מכמה היטלים, ולאחר מכן, על מנת להעביר סקיצה זו למציאות הם פועלים לפי הקנה מידה שצוין לעיל. במעבר מהדגם למציאות, הילדים כופלים כל אורך פי 25 ס"מ ועל מנת להגיע ליחידות של מטר הם מחלקים פי 100. הילדים לא ידעו מדוע הם פועלים כך וטענו שזו החלטה של ההנהגה. הם מתרגמים את הדגמים לסטרוקטורות גדולות (ראו תרשים 2) כך שנדרש חשיבה פרופורציונלית שוטפת.



תרשים 1. דגם על דף משבצות

תרשים 2. מבנה בשטח

משפט פיתגורס

התלמידים הסבירו שעל מנת למצוא אורך של מוט, רק בצורה עם זווית של 90 מעלות, עליהם להשתמש במשפט פיתגורס. אך תשובה זו התחלקה לשתיים. חלק מהתלמידים ציינו שהם פשוט יניחו מקל ויבדקו מה האורך המתאים ולפי זה ינסרו, וחלקם ידעו כי עליהם לעשות משפט פיתגורס על מנת להגיע לאורך הרצוי והמדויק. הסטרוקטורות שהם בונים כוללים מלבנים עם אלכסונים תומכים (תרשים 3). הם צריכים לחשב כל פעם את האורך הנדרש לכל אלכסון ועושים את זה בעזרת משפט פיתגורס.

תרשים 3. משפט פיתגורס מעשי

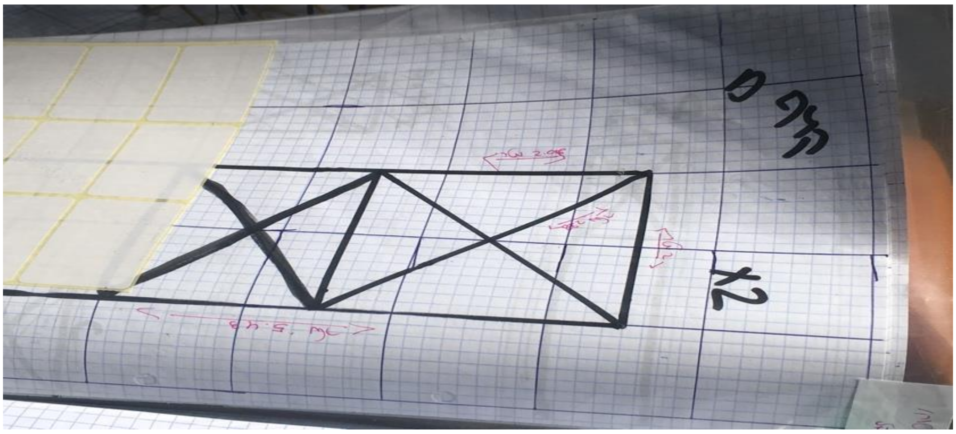
התייחסות למספרים עשרוניים

בגלל השימוש במשפט פיתגורס, למשל, במהלך העבודה יוצאות תוצאות עם מספרים לא רציונלים אן לא ידידותיים. ההתייחסות של הילדים למספרים "לא יפים" במסגרת הצופים הייתה שאלו האורכים הנתונים, וזה בסדר. הם לא מסתכלים על המספרים בתור אורך שחייב

להיות כדי שייצא מבנה טוב ויפה. היתה התייחסות למספרים מסוג זה במסגרת בית ספרית כמשהו שגוי. חלק טענו כי במידה ומספרים אלה היו מתקבלים בזמן מבחן, הם היו נלחצים.

ראיה במרחב

מהתצפיות בשטח עלה, כי כל דגם אשר הם בונים (ראו תרשים 4) הם משרטטים אותו על דף מכיוונים שונים: היטל צד, היטל על, היטל אחורי והיטל פנים. גם נושא זה אף אחד לא לימד אותם לפני והם לומדים את הידע הזה במסגרת ההתעסקות שלהם בבניות.



תרשים 4. ראיה במרחב

טריגונומטריה

היו תלמידים שציינו כי בעבר, הם נתקלו במקרים שהם היו צריכים להשתמש בטריגונומטריה על מנת למצוא אורך של צלע או זווית. אבל במהלך הצפייה במחנה הקיץ לא ראינו דוגמאות לשימוש בטריגונומטריה.

סוגי הכפיתות

כפיתה הכוונה לחיבור שני מוטות באמצעות חבל. ישנם סוגים שונים של כפיתות בהתאם לסוגי חיבורים: כפיתה מצולבת, כפיתה מרובעת, כפיתת מקבילית, כפיתה חצובה/ שמיניות, כפיתה רצה ועוד (תרשים 5).

תרשים 5: כפיתות.

סיכום

השתתפות בבניית המחנה בתנועת הנוער הצופים היא ידועה כחוויה לימודית חשובה מבחינה חברתית. המחקר הנוכחי מראה שהחוויה הזאת מהווה דוגמא מצויינת של STEAM כחלק מחינוך אי-פורמלי. ההתמקדות שלנו, במתמטיקה, מראה נושאים רבים מתמטיים שהילדים נעזרים בהם במהלך פעילות זאת. ילדים המשתתפים בצופים רוכשים מקורות-ידע מסוימים, גם מתמטיים ביניהן. יש פוטנציאל שעדיין לא הוגשם לגישור בין הידע הפורמלי של בית הספר לידע שנרכש בצופים ואולי יותר חשוב, תהליך רכישת הידע בשני ההקשרים השונים.

כיוונים עתידיים מחקריים

המחקר הזה מהווה צעד התחלתי של חקר על הלמידה המתרחשת בתנועות הנוער סביב STEAM. האם ואיך למידה הזאת תומכת בלמידה הפורמלית? ובכיוון השני, האם ואיך הלמידה הפורמלית תומכת בלמידה המתרחשת בצופים? נדרש גם לנתח את תהליך העברת ידע ולמידה מתלמיד לתלמיד במסגרת בלתי פורמלית, כמו הצופים, לנסות להבין איך ידע מועבר מבוגר (תלמיד כיתה י'א או י'ב) לחניך.

רשימת מקורות

מנדל־לוי, נ׳ וארצי, א׳ (עורכים). חינוך בלתי פורמלי לילדים, בני נוער וצעירים בישראל: עדויות מהשדה וסיכום תהליך למידה, דוח פעילות. היזמה למחקר יישומי בחינוך, האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים. ירושלים: תשע״ו.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 179–191.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3(1), 21-29.

Emerson, R. M., Fretz, R. I. & Shaw, L. L. (2011). *Writing ethnographic fieldnotes*. University of Chicago Press.

Nasir, N., Rosebury, A., Warren, B. & Lee. C.)2006(Learning as a cultural process: Achieving equity through diversity. In R. Sawyer (Ed.),*The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (Cambridge Handbooks in Psychology (pp. 489-504). Cambridge: Cambridge University Press.

Pattison, S., Rubin, A., & Wright, T. (2016). Mathematics in informal learning environments : A summary of the literature. *Math in the Making*. Accessed at https://www.informalscience.org/mathematics-informal-learning-environments-summary-literature

Saxe, G. (1988). Candy selling and mathematics learning. *Educational Researcher, 17*(6), 14-21.

למידה בכיתה הפוכה על והשפעתה על ההבנה התפיסתית והמוטיבציה של תלמידי תיכון מהמגזר הערבי בישראל

חלימה שרקייה, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
זהבית כהן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מחקרים בינלאומיים מראים כי קיימים פערים בשיעורי ההצלחה בתחומי מדעים וטכנולוגיה בכלל ובמתמטיקה בפרט בין תלמידים בני מיעוטים למגזר היהודי (Friedman-Sokuler & Justman, 2019; OECD, 2010). שימוש בטכנולוגיה לקידום הישגי למידה הינו רווח, בפרט ישנם מחקרים התומכים בשימוש בשיטת הכיתה ההפוכה בחינוך המתמטי לשיפור הבנה תפיסתית והגברת המוטיבציה של תלמידים ללמוד מתמטיקה (Bhagat, Chang, & Chang, 2016). הכיתה ההופכה היא סביבת למידה המבוססת על רעיון הפוך לשיטת הלימוד הרגילה. בשיטה זו, אנשי הוראה משתמשים בטכנולוגיה במטרה לשלב גם למידה מקוונת וגם פנים אל פנים בכיתה, ובכך "הופכים" את הגישה המסורתית הרגילה (Baepler, Walker, & Driessen, 2014). כאמור אם בשיטה הרגילה התלמידים לומדים בכיתה ומתרגלים בבית, בשיטת הכיתה ההפוכה התלמידים לומדים את התכנים המתמטיים באופן מקוון מחוץ לכיתה, כאשר אחר כך הזמן בכיתה מוקדש לתרגול בלבד.

עם זאת, מעט מאוד ידוע על השפעת הלמידה בכיתה הפוכה במתמטיקה בקרב בני מיעוטים בכלל, ועל תלמידים מהמגזר הערבי בפרט מחוסר מחקרים בו. ולכן מטרת המחקר הנוכחי היא לחקור האם ואיך שילוב הכיתה ההפוכה בלימודי מתמטיקה משפיע על ההבנה התפיסתית והמוטיבציה אצל תלמידי תיכון מהמגזר הערבי בישראל. שאלת המחקר היא: האם יימצאו הבדלים בהבנה התפיסתית ובמוטיבציה ללמידה במתמטיקה בין תלמידי תיכון מהמגזר הערבי שלומדים מתמטיקה מתקדמת בכיתה ההפוכה לעומת תלמידים מהמגזר שלומדים מתמטיקה מתקדמת בשיטה הפרונטאלית הרגילה?

הסביבה המקוונת לצורך יישום הכיתה ההפוכה במחקר זה הינה באמצעות אתר אינטרנט *bscool.com* שמכיל חומר מצולם של כל היחידות הנלמדות לבגרות במתמטיקה בשפה הערבית. המשתתפים במחקר הם כ- 40 תלמידי כיתה י' מצוינות וכ- 40 תלמידי כיתה י"א מצוינות אשר מגיעים למרכז פרטי לשיעורי מתמטיקה הנלמדים בהתאם לתוכנית הלימודים בתיכון. בשתי שכבות הגיל, התלמידים חולקו באופן רנדומלי לשתי קבוצות: קבוצה אחת שלמדה בשיטת הכיתה ההפוכה, וקבוצת השוואה שלמדה בשיטה הפרונטלית, כאשר בשתי השיטות נלמד אותו הנושא וניתנו תרגולים זהים. תלמידי כיתה י' למדו את נושא הנגזרות ותלמידי כיתה יא' למדו את נושא האינטגרל. כל הקבוצות מלאו שאלון כמותי לפני ואחרי יחידת הלימוד שמטרתו לבדוק הבנה תפיסתית במתמטיקה ומוטיבציה פנימית ללמידת מתמטיקה.

ממצאי המחקר מצביעים על אינטרקציה משולשת מובהקת על-פי סוג קבוצה, כיתה וזמן המדידה, הן בהתייחס לרמת המוטיבציה, $F(1, 71)=4.08, P<.05, \eta^2=.054$ והן ביחס למידת ההבנה התפיסתית, $F(1, 71)=13.22, P<.001, \eta^2=.157$. בחינת מקור האינטרקציה העלתה כי בעוד שתלמידי כיתה י"א הראו רמת מוטיבציה דומה בשתי קבוצות המחקר, תלמידי כיתה י' שהשתתפו בסביבת הכיתה ההפוכה הראו רמת מוטיבציה נמוכה יותר לעומת תלמידי קבוצת ההשוואה. תופעה זו של ירידה במוטיבציה בסביבת כיתה הפוכה הינה רווחת במחקרים בתחום (לדוגמא, Davies, Dean, & Ball, 2013). בהמשך, נמצא כי תלמידי כיתה י"א, אשר למדו בסביבת הכיתה ההפוכה הדגימו רמת הבנה תפיסתית גבוהה יותר לעומת התלמידים שלמדו בקבוצת ההשוואה, בניגוד לתלמידי כיתה י' שהשתתפו בסביבת הכיתה ההפוכה אשר הדגימו רמת הבנה תפיסתית נמוכה יותר לעומת תלמידי קבוצת ההשוואה.

ממצאים אלו מלמדים כי שיטת הכיתה ההפוכה, כפי שנבחנה על תלמידים מהמגזר הערבי, התאימה יותר לתלמידים בוגרים אשר עומדים בפני בחינת בגרות בהיקף של 5 יח"ל. נראה כי הם הצליחו לתעל את הלמידה בסביבה זו. מאחר וקיימים פערים מובהקים בין התלמידים מהמגזר היהודי לערבי, ולאור התוצאות האחרונות במבחן PISA שמדגישות פערים אלו (www.oecd.org), המחקר הנוכחי מציג פוטנציאל לשימוש בכיתה הפוכה במגזר הערבי.

References

Baepler, P., Walker, J. D., & Driessen, M. (2014). It's not about seat time: blending, flipping, and efficiency in active learning classrooms. *Computers and Education, 78*, 227–236.

Bhagat, K. K., Chang, C. N., & Chang, C. Y. (2016). The impact of the flipped classroom on mathematics concept learning in high school. *Journal of Educational Technology & Society, 19*(3), 134-142.

Davies, R. S., Dean, D. L., & Ball, N. (2013). Flipping the classroom and instructional technology integration in a college-level information systems spreadsheet course. *Educational Technology Research and Development, 61*(4), 563-580.

Friedman-Sokuler, N., & Justman, M. (2019). *Gender, culture and STEM: Counter-intuitive patterns in Arab society (No. 307)*. GLO Discussion Paper.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (2010). *Education at a glance 2010: OECD indicators*. Paris: OECD.

אינדקס
ופרטי מרצים

אינדקס

שם המרצה	פרטי התקשרות
איטון אילנית	ilaniteaton@gmail.com
אטקינס אושרית	osh.cohen@gmail.com
אליאס דפנה	dafna.elias@gmail.com
אלמלם דינה	dinaelmalem@gmail.com
באור רינת	rinatbaor@gmail.com
ביטון יניב	YanivB@cet.ac.il
בן דור נעמה	naamabd@gmail.com
בסן-צינצינטוס רונית	ronit.bassan@smkb.ac.il
ברקאי רותי	ruthi11@netvision.net.il
גבר איריס	gaber@mta.ac.il
גדסי זוהר	meiravroz@levunsky.ac.il
גידלביץ סטלה	stellagid@gmail.com
גל הגר	hagarg@dyellin.ac.il
דביה רנין	d.raneen@hotmail.com
דורפברגר שושי	shoshke16@gmail.com
דרייפוס טומי	tommyd@post.tau.ac.il
הרשקוביץ רנה	rina.hershkowitz@Weizmann.ac.il
הרשקוביץ שרה	sarah@cet.ac.il
וידר מירלה	mirelaw@walla.co.il
וייסמן שולה	shulawe@gmail.com
וינגרדן מירב	merav.weingarden@gmail.com
ולך מרים	miriamw@campus.technion.ac.il
זיגרסון ורדה	zigersonvarda@gmail.com
זילברמן בועז	boazs02@gmail.com
חאג' יחיא איחסאן	aehsanhajyahya@gmail.com
חסידוב דינה	hasidov@netvision.net.il
יעקובוביץ נחמה	nechamadl@gmail.com
כהן דורית	doritc@cet.ac.il
כהן ענת	anatco@tauex.tau.ac.il
לבנברג אילנה	ilanalev1967@gmail.com
לוי פאולה	paualevi@gmail.com
לפקורט תמרה	tamara.lefcourt@gmail.com

פרטי התקשרות	שם המרצה
maha_m10@walla.co.il	מנסור מהא
nadav.marco@mail.huji.ac.il	מרקו נדב
zviam@oranim.ac.il	מרקוביץ צביה
gnagarih@campus.haifa.ac.il	נגרי-חדיף גלית
lioranutov@gmail.com	נוטוב ליאורה
yael.nurick@weizmann.ac.il	נוריק יעל
tallin@levinsky.ac.il	נחליאלי טלי
ortal.n@campus.technion.ac.il	ניצן אורטל
samaher.yassin@gmail.com	נעמה סמאהר
rutisegal@gmail.com	סגל רותי
sabine.segre@live.achva.ac.il	סגרה סבינה
sinitzsk@gordon.ac.il	סיניצקי איליה
bettysela@gmail.com	סלע בטי
tikvao@actcom.net.il	עובדיה תקוה
juhaina8@gmail.com	עואודה שחברי ג'והיינה
patkin@netvision.net.il	פטקין דורית
maayanf970@gmail.com	פישלוביץ מעין
alik.palatnik@mail.huji.ac.il	פלטניק אליק
anaprusak@gmail.com	פרוסק אנה
farmenu@gmail.com	פרבר מנוחה
Irisperetz27@gmail.com	פרץ איריס
odelia.tza@gmail.com	ציאדה אודליה
inbalmin@gmail.com	קולושי מינסקר ענבל
lrubel@edu.haifa.ac.il	רובל לורי
maya.ronezra@gmail.com	רון עזרא מאיה
sigal.h.rotem@gmail.com	רותם סיגל
sharon.ged@gmail.com	שבת גדליהו שרון
Gil.Schwarts@weizmann.ac.il	שוורץ גיל
karnishir@gmail.com	שיר קרני
irisifi5@gmail.com	שרייבר איריס
atarashriki@gmail.com	שריקי עטרה
halima.sharkia@gmail.com	שרקייה חלימה

Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

8 JCRME

כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי

כנס ירושלים השמיני
למחקר בחינוך מתמטי