Požadavky znalostí ke státní bakalářské zkoušce

Matematická analýza

1. Posloupnosti reálných čísel, limity.
Limita posloupnosti (vlastní a nevlastní), Bolzanova-Cauchyova podmínka. Věty o limitách. Vybrané posloupnosti.

2. Elementární funkce a jejich zavedení.
Goniometrické funkce a cyklometrické funkce. Exponenciální funkce, přirozený a obecný logaritmus, obecná mocnina, odmocnina. Vlastnosti těchto funkcí a jejich vzájemné vztahy.

3. Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné. Vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu. Průběh funkce, užití vyšších derivací.
Limita funkce, aritmetika limit, limita složené funkce, limitní přechod v nerovnosti, limita monotónní funkce. Spojitost funkce v bodě a na intervalu, Heineova definice spojitosti, vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu. Derivace funkce, početní pravidla pro derivování, derivace inverzní funkce. Věty o střední hodnotě: Rolleova, Lagrangeova a Cauchyova. L'Hospitalovo pravidlo. Vztah derivace a monotonie funkce, nutné a postačující podmínky pro extrém. Taylorův polynom, Taylorova věta. Konvexnost a konkávnost a jejich souvislost s druhou derivací funkce. Asymptoty.

4. Primitivní funkce, Newtonův integrál.
Základní primitivní funkce. Integrace per partes. První a druhá věta o substituci. Integrace racionálních funkcí, základní typy substitucí.

5. Riemannův integrál.
Zavedení Riemannova integrálu, geometrická interpretace. Riemannův integrál jako funkce horní meze. Newtonova-Leibnizova formule. Existenční věty pro Riemannův integrál. Nevlastní integrál. Délka křivky zadané parametricky, objem rotačního tělesa a povrch jeho pláště, obsah plochy zadané parametricky.

6. Nekonečné číselné řady, mocninné řady.
Součet řady, konvergentní a divergentní řady, Bolzanova-Cauchyova podmínka, nutná podmínka konvergence. Řady s nezápornými členy a kritéria jejich konvergence: srovnávací, odmocninové, podílové a integrální kritérium, limitní tvary kritérií. Řady se střídavými znaménky, Leibnizovo kritérium. Absolutně a neabsolutně konvergentní řady. Součin řad. Mocninná řada a její konvergence, poloměr konvergence. Derivace a integrace mocninné řady člen po členu.

7. Diferenciální rovnice.
Věty o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy. Metody řešení diferenciálních rovnic: rovnice se separovanými proměnnými, homogenní rovnice. Lineární rovnice 1. řádu a jejich soustavy, variace konstant, rovnice s konstantními koeficienty, speciální tvary pravé strany.

8. Funkce více proměnných.
Limita a spojitost. Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál, gradient. Derivace složené funkce. Věta o inverzní funkci. Věta o implicitní funkci. Lokální extrémy, vázané extrémy, metoda Lagrangeových multiplikátorů.

Lineární algebra a algebra

1. Relace, zobrazení a jejich základní vlastnosti.
Relace a jejich vlastnosti. Ekvivalence, uspořádání, úplné uspořádání, příklady. Rozklad množiny podle ekvivalence. Zobrazení (injektivní, surjektivní a bijektivní), skládání zobrazení. Jádro a obraz zobrazení (Ker *f*, Im *f*), rozklad zobrazení na surjekci, bijekci a injekci.

2. Vektorový prostor, báze, dimenze, lineární zobrazení. Vektorový prostor se skalárním součinem.

Příklady vektorových prostorů, lineární závislost a nezávislost vektorů, báze a dimenze konečně generovaného vektorového prostoru, věta o dimenzích spojení a průniku. Vlastnosti homomorfismu, věta o hodnosti a defektu. Skalární součin na reálném vektorovém prostoru, ortonormální báze, ortogonální doplněk podprostoru. Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.

3. Matice a jejich vlastnosti, užití k řešení soustav lineárních rovnic. Formy.
Hodnost matice, regulární a singulární matice, inverzní matice, matice homomorfismu.

Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Věta o dimenzi vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy. Užití matic k řešení soustav lineárních rovnic, Gaussova eliminační metoda.

Vlastní čísla a vlastní vektory, podobnost matic. Charakteristický a minimální polynom.

Lineární formy, duální báze. Bilineární a kvadratické formy, jejich matice, polární a normální báze, Sylvestrův zákon o setrvačnosti, signatura.

4. Determinanty a jejich vlastnosti, Cramerovo pravidlo.
Definice determinantu, Sarrusovo pravidlo, věta o rozvoji determinantu, charakterizace regulárních matic pomocí determinantů. Výpočet inverzní matice pomocí determinantu. Věta o násobení determinantů. Řešení soustav lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla.

5. Přirozená a celá čísla, dělitelnost.
Přirozená čísla, Peanovy axiomy, matematická indukce, dobré uspořádání. Konstrukce oboru integrity celých čísel. Dělitelnost, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek. Eukleidův algoritmus a Bézoutova věta, Eukleidovo lémma, Základní věta aritmetiky. Numerační soustavy o různých základech.

Prvočísla, Eratosthenovo síto, mohutnost množiny všech prvočísel. Mersennova čísla, dokonalá čísla, věta Eukleidova a Eulerova. Fermatova čísla a prvočísla. Přirozená čísla jako svaz.

Kongruence modulo n, odvození kritérií dělitelnosti. Malá Fermatova věta.

6. Čísla racionální, reálná a komplexní.
Konstrukce pole racionálních čísel, podílové pole. Reálná čísla (Dedekindovy řezy, desetinné rozvoje, cauchyovské posloupnosti, axiomatický popis R), iracionalita.

Řetězové zlomky, konvergenty, aproximace reálných čísel racionálními. Algebraická a transcendentní čísla.

Pole komplexních čísel, zavedení, vlastnosti. Algebraický a goniometrický tvar, operace a jejich geometrické znázornění, důkazy některých goniometrických vzorců. Mohutnosti číselných oborů.

7. Grupy a jejich homomorfismy.
Binární operace na množině. Pojem grupy, grupa permutací, grupy symetrií pravidelných n-úhelníků, další příklady. Podgrupy a jejich vlastnosti. Svaz podgrup. Cyklické grupy a jejich vlastnosti. Lagrangeova věta. Homomorfismy grup, příklady. Jádro a obraz homomorfismu a jejich vlastnosti. Faktorizace grupy podle normální podgrupy. Příklady.

8. Okruhy, obory integrity, tělesa, pole a jejich základní vlastnosti.
Oboustranný ideál okruhu, faktorizace okruhu podle oboustranného ideálu. Příklady. Homomorfismy okruhů. Obor integrity, těleso, pole, příklady.

9. Základní pojmy dělitelnosti v komutativním oboru integrity.
Relace dělitelnosti a asociovanosti v oboru integrity. Příklady eukleidovských oborů integrity a příklady na užití Eukleidova algoritmu. Ireducibilní prvek, prvočinitel.

10. Rovnice.
Základní věta algebry. Rovnice 1., 2. a 3. stupně, Cardanovy vzorce, casus irreducibilis. Vietovy vzorce. Racionální a celočíselné kořeny algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty, algebraická a transcendentní čísla. Reciproká rovnice. Lineární diofantické rovnice.

11. Posloupnosti, průměry.
Aritmetická a geometrická posloupnost. Aritmetické posloupnosti vyšších řádů. Geometrická řada a harmonická řada. Aritmetický, geometrický a harmonický průměr, jejich vztah a geometrické znázornění.

Geometrie

Syntetická geometrie

1. Planimetrie (věty i s důkazy).
Základní věty geometrie trojúhelníku: Thalétova, Eukleidovy, Pýthagorova a její zobecnění, Hippokratovy měsíčky, sinová, kosinová, o obvodových a středových úhlech, součet vnitřních úhlů, těžiště a ortocentrum, Feuerbachova kružnice, Eulerova přímka, střední příčky, osy stran a osy úhlů, kružnice opsaná, vepsaná a

připsaná. Konstrukce trojúhelníku (sss, sus, usu, Ssu, zadání pomocí výšek a těžnic).

Klasifikace a vlastnosti čtyřúhelníků, konstrukce; vlastnosti tečnových a tětivových čtyřúhelníků (Ptolemaiova věta, součty vnitřních úhlů).

Kružnice a její vlastnosti (tečny, tětivy, obvodové a středové úhly, úsekový úhel, mocnost bodu ke kružnici), konstrukce.

Obsah trojúhelníku, Hérónův vzorec, obsah čtyřúhelníku a n-úhelníku. Obsah a obvod kruhu a jeho částí.

Shodnosti, podobnosti, stejnolehlost. Stereografická projekce, kruhová inverze.

2. Stereometrie (věty i s důkazy).

Základní stereometrické věty a jejich důkazy (rovnoběžnost přímky a roviny, rovnoběžnost dvou rovin, vzájemná poloha tří rovin, kolmost přímky a roviny, kolmost dvou rovin). Řezy mnohostěnů.

Pravidelné mnohostěny (Platónská tělesa, jejich počet a vlastnosti). Mnohostěny, Eulerova věta.

Objem a povrch těles a jejich částí, Cavalieriho princip.

Geometrická zobrazení v prostoru (shodnosti, podobnosti).

3. Zobrazovací metody.
Princip rovnoběžného a středového promítání. Řešení stereometrických úloh ve volném rovnoběžném promítání. Osová afinita, afinní obraz kružnice (užití osové afinity při konstrukci řezů hranolů a válců). Základy Mongeova promítání. Základy kosoúhlého promítání, základy lineární perspektivy.

4. Kuželosečky.

Kuželosečky jako řezy kuželové plochy, Quételetova-Dandelinova věta, elipsa jako řez válcové plochy.

Analytická geometrie

1. Afinní prostor.
Afinní prostor a jeho zaměření. Lineární kombinace bodů. Lineární soustava souřadnic. Podprostor a jeho parametrické vyjádření. Obecná rovnice nadroviny, podprostor jako průnik nadrovin, obecné rovnice podprostoru. Vzájemná poloha podprostorů. Orientace afinního prostoru.

2. Eukleidovský prostor.
Eukleidovský prostor. Vektorový součin a jeho základní vlastnosti. Kartézská soustava souřadnic. Kolmost podprostorů. Odchylka dvou přímek, dvou nadrovin, přímky a nadroviny, odchylka přímky a podprostoru. Vzdálenost bodu od podprostoru, vzdálenost podprostorů; osa dvou mimoběžných podprostorů, Gramův determinant. Vnější součin. Příklady v E^2 a E^3.

3. Množiny bodů daných vlastností, kuželosečky.

Chordála dvou kružnic, chordální střed tří kružnic. Vzájemná poloha kružnice a přímky. Apollóniova kružnice. Definice, vlastnosti a klasifikace kuželoseček. Kanonické rovnice kuželoseček a jejich transformace. Rovnice ohnisková, vrcholová. Parametrické vyjádření kuželoseček.

4. Grupy geometrických zobrazení.
Dělicí poměr, afinní zobrazení, asociovaný homomorfismus. Afinity (základní afinity, homothetie), samodružné body a směry, příklady v A^2 a A^3 včetně analytického vyjádření. Projekce.

Grupa shodností, grupa podobností, samodružné body a směry, příklady v E^2 a E^3 včetně analytického vyjádření, klasifikace v E^2, stejnolehlost.

Analytické vyjádření stereografické projekce a kruhové inverze, jejich vlastnosti.

Grupy geometrických transformací.

Požadavky znalostí ke státní závěrečné zkoušce z matematiky a didaktiky matematiky

1. Matematická analýza.
Základy teorie míry, Lebesgueova míra, měřitelné funkce. Lebesgueův integrál funkcí dvou a více proměnných, Fubiniova věta, věta o substituci, příklady substitucí (polární souřadnice, sférické, válcové souřadnice). Aplikace vícerozměrných integrálů (objemy, obsahy ploch zadaných parametricky, těžiště). Záměna limity a integrálu (věta Leviho a Lebesgueova).

Fourierovy řady: ortonormální systém funkcí, Fourierovy koeficienty, bodová konvergence.

Metrické prostory, normované lineární prostory (otevřené a uzavřené množiny, limita a spojitost, úplnost), Banachova věta o pevném bodě a její aplikace.

2. Algebra a lineární algebra.

Lineární formy, duální prostor, duální báze. Bilineární a kvadratické formy a jejich matice, polární báze, normální báze, Sylvestrův zákon o setrvačnosti, signatura.

Prostor se skalárním součinem, Cauchyova-Schwarzova nerovnost, trojúhelníková nerovnost, Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces, ortogonální projekce, Fourierovy koeficienty, ortogonální zobrazení, ortogonální matice.

Polynomy, dělitelnost, kořenové vlastnosti, derivace polynomu.

Grupy, okruhy, obory integrity, tělesa: základní výsledky a příklady. Homomorfismy grup.

Hlavní výsledky Galoisovy teorie, řešení algebraických rovnic z hlediska teoretické algebry, konstruovatelnost pravítkem a kružítkem.

3. Geometrie.
Projektivní prostor, definice a základní vlastnosti, homogenní souřadnice, projektivní rozšíření afinní roviny. Reálná a komplexní projektivní přímka, grupa möbiovských transformací. Základní typy kvadrik a jejich vlastnosti, afinní a eukleidovská klasifikace regulárních a singulárních kuželoseček, afinní klasifikace regulárních kvadrik. Neeukleidovská geometrie, modely hyperbolické geometrie, základy axiomatického vybudování geometrie, Kleinův erlangenský program.

4. Diferenciální geometrie.
Parametrické vyjádření křivky, příklady. Délka křivky, parametrizace obloukem. Frenetův repér a Frenetovy vzorce v rovině a v prostoru, křivost a torze.

Parametrické vyjádření plochy, příklady. Tečná rovina, normála. První a druhá základní forma plochy a jejich užití. Střední a Gaussova křivost. Zobrazení mezi plochami (izometrie, konformní zobrazení).

5. Logika a teorie množin.
Výrokový a predikátový počet. Axiomatická teorie. Konečné množiny; spočetné a nespočetné množiny. Dobré uspořádání. Kardinální a ordinální čísla. Axiom výběru a jeho ekvivalenty. Peanova aritmetika a model přirozených čísel v teorii množin; čísla celá, racionální, reálná. Mohutnosti oborů přirozených, celých, racionálních a reálných čísel.

6. Kombinatorika, pravděpodobnost a matematická statistika.
Princip inkluze a exkluze, permutace bez pevných bodů. Řešení rekurentních rovnic, generující funkce. Fibonacciho čísla. Pravděpodobnostní prostor, různé definice pravděpodobnosti. Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost náhodných jevů. Náhodné veličiny – základní charakteristiky, nezávislost. Diskrétní a spojitá rozdělení náhodných veličin. Náhodné vektory. Zákon velkých čísel, centrální limitní věta. Popisná statistika. Korelace, regresní přímka. Odhady parametrů a testy hypotéz. Lineární model a jeho speciální případy, lineární regrese.

7. Didaktika matematiky.

Argumentace a ověřování ve školské matematice (induktivní a deduktivní metody, výroky, důkazy a jejich typy). Vytváření představ, pojmů a jejich vlastností, klasifikace pojmů (číslo, číselné obory, funkce a posloupnosti, geometrická zobrazení). Rozvíjení geometrické představivosti v rovině a v prostoru (vzájemné polohy a vlastnosti geometrických útvarů, konstrukční úlohy). Metody řešení úloh v algebře (rovnice, nerovnice a jejich soustavy) a analytické geometrii (rovnice přímek a rovin, vzdálenosti a odchylky). Aplikace matematiky v praxi (finanční matematika, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika).