FUNCIONÁLNÍ ANALÝZA - PŘEDNÁŠKA ZIMA-JARO 2005/6

1. Spektrální teorie operátorů na Hilbertových prostorech

O konečně rozměrných operátorech, maticích, diagonalizovatelnosti a rozkladech.

1.1. **Samoadjungované a normální operátory - základní vlastnosti.** Pojem hermitovsky adjungovaného operátoru T^* na Hilbertově prostoru, vztah k adjungovanému operátoru T'.

Tvrzení 1.
(a) *$T \mapsto T^*$ je konjugovaně lineární izometrie $L(H)$ na sebe.*
(b) $(ST)^* = T^*S^*$.
(c) $T^{**} = T$.
(d) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.
(e) $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$, $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$.

Definice samoadjungovaného (hermiteovského) operátoru na Hilbertově prostoru.

Tvrzení 2 (samoadjungovanost a skalární součin)**.**
(a) $T = T^* \Leftrightarrow (\forall x, y \in H)\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$;
(b) *Pro H nad $\mathbb{C}$:* $T = T^* \Leftrightarrow (\forall x \in H)\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Příklady samoadjungovaných operátorů.
Definice normálního operátoru na Hilbertově prostoru.

Tvrzení 3. *Nechť $T \in L(H)$. Pak*
(a) *T je normální, právě když* $(\forall x, y \in H)\langle T^*x, T^*y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$.
(b) *Každý samoadjungovaný operátor je normální.*

Důsledek. $\|Tx\| = \|T^*x\|$, tedy $\ker T = \ker T^*$.

1.2. **Norma a spektrum samoadjungovaných a normálních operátorů.**

Tvrzení 4.
(a) $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.
(b) $T = T^* \Rightarrow \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$.
(c) *Je-li T normální, pak $Tx = \lambda x$ implikuje $T^*x = \overline{\lambda}x$.*
(d) *Je-li T normální, pak $\lambda \neq \mu$, $Tv = \lambda v$ a $Tw = \mu w$ implikuje $\langle v, w\rangle = 0$.*

Věta 5 (Rayleighova - o skalárním součinu a normě)**.** *Nechť T je samoadjungovaný. Pak $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.*

Věta 6 (netrivialita spektra samoadjungovaného kompaktního operátoru)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor nad $\mathbb{R}$ a $T \in K(H)$ je samoadjungovaný. Pak $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ patří do $\sigma_p(T)$.*

Pro normální operátory:

Lemma 7. *Nechť $T \in L(X)$, X Banachův, pak*
$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = inf\{\|T^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Cvičení. Je-li $Tf(t) = \int_0^t f(s)\ ds$ na $C[0,1]$, pak $r(T) = 0$.

Pojem spektrálního poloměru $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Věta 8 (o spektrálním poloměru a spektru)**.** *Nechť $T \in L(X)$, X Banachův. Pak*

(a) *Pro $|\lambda| > r(T)$ konverguje Neumannova řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ v $L(X)$, tedy $\lambda \in \rho(T)$.*

(b) *Pro X nad $\mathbb{C}$ existuje $\lambda \in \sigma(T)$ s $|\lambda| = r(T)$.*

Máme tedy $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$; tomuto nezápornému číslu říkáme spektrální poloměr.

Aplikace na T z předešlého cvičení dává $r(T) = 0$ ze znalosti spektra $\sigma(T) = \{0\}$.

Věta 9 (o normě a spektru normálního operátoru)**.** *Nechť $T \in L(H)$ je normální, H nad $\mathbb{C}$. Pak $r(T) = \|T\|$, a tedy existuje $\lambda \in \sigma(T)$ s $|\lambda| = \|T\|$.*

1.3. **Spektrální rozklad a funkční kalkulus pro kompaktní operátory (samoadjungované a normální).**

Věta 10 (spektrální rozklad normálních kompaktních operátorů)**.** *Nechť $T \in K(H)$ je normální a H je Hilbertův nad $\mathbb{C}$ (resp. $T \in K(H)$ je samoadjungovaný (a H je nad $\mathbb{R}$)). Pak existují*

posloupnost $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (resp. v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) s $\lambda_k \to 0$ a

ortonormální posloupnost $e_1, e_2, \dots$ v H takové, že

(a) $H = \ker T \oplus_2 \overline{lin}\{e_1, e_2, \dots\}$,

(b) $Tx = \sum_{k=1,\dots} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$ *pro všechna $x \in H$ a*

(c) $\|T\| = \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\}$.

Poznámky.

Platí nutně, že $\{\lambda_k : k = 1, 2, \dots\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ a $Te_k = \lambda_k e_k$.

Jádro $\ker T$ může být nekonečně rozměrné i neseparabilní, jádra $\ker(\lambda_k - T)$ jsou konečně rozměrná; po doplnění e_k o ortonormální bázi $\ker T$ dostaneme ortonormální bázi B prostoru H a rozklad $Tx = \sum_{e\in B} \lambda_e \langle x, e\rangle e$.

Označme P_k ortogonální projekci H na $\ker(\mu_k - T)$, kde $\mu_1, \mu_2, \dots$ jsou všechna navzájem různá nenulová vlastní čísla T.

Věta 10'. Za předpokladů věty 10 je $T = \sum_{k=1,\dots} \mu_k P_k$ v $L(H)$.

Důsledky.

Pojem nezáporného (pozitivně semidefinitního) operátoru … $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pro všechna $x \in H$.

Pro H nad $\mathbb{C}$ je každý nezáporný operátor samoadjungovaný.

Věta 11. *Nechť $T \in K(H)$ je samoadjungovaný a nezáporný. Pak existuje právě jeden nezáporný samoadjungovaný operátor $S \in K(H)$, který splňuje rovnost $S^2 = T$. Píšeme $S = \sqrt{T} = T^{1/2}$.*

Poznámka o funkčním kalkulu pro kompaktní normální operátory.

Definice $|T|$ pro kompaktní operátor na Hilbertově prostoru. Jeho polární rozklad.

Rozklad kompaktního operátoru mezi Hilbertovými prostory.

Kompaktní operátory mezi Hilbertovými prostory jako limity omezených operátorů s konečným rankem.

1.4. **Spojitý funkční kalkulus pro samoadjungované operátory.** H je Hilbertův prostor nad $\mathbb{C}$.

Tvrzení 12 (reálnost spektra).

(a) *Je-li* $T \in L(H)$, *je* $\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}}$.
(b) *Je-li* $T \in L(H)$ *samoadjungovaný, je* $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
(c) *Je-li* $T \in L(H)$ *nezáporný, pak* $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Funkční kalkulus pro polynomy ($p(T)$ pro polynom p s komplexními koeficienty).

Lemma 13 (funkční kalkulus pro polynomy). *Nechť* $T \in L(H)$ *je samoadjungovaný. Pak zobrazení* $F : p \mapsto p(T)$ *splňuje*

(a) F *je involutivní algebraický homomorfismus.*
(b) $p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$ - *"tvrzení o obrazu spektra".*
(c) F *je izometrie prostoru* $P(\sigma(T)) \subset C(\sigma(T))$ *všech polynomů s komplexními koeficienty restringovaných na* $\sigma(T)$ *do* $L(H)$.

Věta 14 (spojitý funkční kalkulus - Rieszův). *Nechť* $T \in L(H)$ *je samoadjungovaný. Pak existuje jediné* $F : C(\sigma(T)) \to L(H)$, *které splňuje:*

(a) $F(p) = p(T)$ *pro polynomy* p.
(b) F *je involutivní algebraický homomorfismus.*
(c) F *je spojité.*

Navíc platí:

(c') F *je izometrie.*
(d) $f \geq 0$ *implikuje* $f(T) \geq 0$.
(e) $Tx = \lambda x$ *implikuje* $f(T)x = f(\lambda)x$.
(f) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.
(g) $\{f(T) : f \in C(\sigma(T))\}$ *je komutativní algebra;* $f(T)$ *je vždy normální;* $f(T)$ *je samoadjungovaný, právě když je* f *reálná.*

K důkazu (f) jsme užili
Lemma (o aproximativním spektru). Je-li T normální a $\lambda \in \sigma(T)$, pak existují x_n s $\|x_n\| = 1$ a $Tx_n - \lambda x_n \to 0$.

Důsledek 15 (poznámky k rozkladu kompaktního samoadjungovaného operátoru). *Je-li* T *samoadjungovaný kompaktní na* H, *pak* $T = \sum_{k=0,1,\dots} \mu_k P_k$ *dle Věty 10,* $\mu_0 = 0$, P_0 *ortogonální projekce na* $\ker T$. *Zobrazení* $F : f \in C(\sigma(T)) \mapsto \sum_{k=0,1,\dots} f(\mu_k)P_k$ *splňuje (a), (b), (c) z Věty 14. Pro* $k > 0$ *je* $\chi_{\{\mu_k\}} \in C(\sigma(T))$ *a* $P_k = \chi_{\{\mu_k\}}(T)$.

Poznámky. Předchozí důsledek ukazuje, jak z funkčního kalkulu dostat projekce, na které se operátor rozkládá. Charakteristické funkce na spektru samoadjungovaného operátoru nemusí být spojité. Rozšíříme kalkulus na obecnější funkce a najdeme rozklad na projekce aplikací na charakteristické funkce.

Spojitý funkční kalkulus pro konečně rozměrné operátory lze aplikovat na všechny funkce, neboť jejich restrikce na konečnou $\sigma(T)$ je spojitá. K libovolné funkci lze najít co nejjednodušší polynom p, který se s ní na $\sigma(T)$ shoduje a zkoumat $p(T)$.

1.5. **Měřitelný funkční kalkulus pro samoadjungované operátory.**
$B^b(K)$ ... prostor omezených borelovsky měřitelných funkcí na metrickém prostoru K.

Tvrzení 16. *Nechť K je metrický. Pak*
(a) *$(B^b(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor.*
(b) *$B^b(K)$ je nejmenší množina $B \subset \mathbb{C}^K$, která splňuje:*
 – *B je uzavřená na bodové limity stejně omezených posloupností*
 – *$B \supset C(K)$.*

Lemma 17. *Nechť $s : H \times H \to \mathbb{C}$ je lineární v první proměnné a konjugovaně lineární ve druhé (seskvilineární forma). Nechť $|s(x,y)| \le K\|x\|\,\|y\|$. Pak existuje operátor $S \in L(H)$, který splňuje $\langle Sx, y\rangle = s(x,y)$ a $\|S\| \le K$.*

Věta 18 (měřitelný funkční kalkulus)**.** *Nechť $T \in L(H)$ je samoadjungovaný. Pak existuje právě jedno $\widehat{F} : B^b(\sigma(T)) \to L(H)$, které splňuje*
(a) *$\widehat{F}(id) = T$, $\widehat{F}(1) = I$;*
(b) *$\widehat{F}$ je involutivní algebraický homomorfismus;*
(c) *$\widehat{F}$ je spojitý;*
(d) *je-li (f_n) stejně omezená posloupnost funkcí z $B^b(\sigma(T))$, která bodově konverguje k f, pak $\langle \widehat{F}(f_n)x, y\rangle$ konverguje k $\langle \widehat{F}(f)x, y\rangle$.*

Lemma 19. *Tvoří-li $f_n \in B^b(\sigma(T))$ omezenou posloupnost, která bodově konverguje, konvergují $f_n(T)x$ k $f(T)x$ v H.*

Příklad o nerovnosti obrazu spektra a spektra obrazu při omezené měřitelné funkci.

Tvrzení 20. *Nechť $A, B \subset \sigma(T)$ jsou borelovské. Pak*
(a) *$\chi_A(T) = P_A$ je ortogonální projekce;*
(b) *pokud $A \cap B = \emptyset$, pak $P_A \perp P_B$.*

Vlastnosti přiřazení $A \mapsto P_A$ a pojem spektrální míry (rozklad jednotky, ...):
- $\emptyset \mapsto 0$;
- $\sigma(T) \mapsto I$;
- pro disjunktní borelovské B_n je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{B_n}x$ ve smyslu bodové konvergence v normě;
- $P_A \circ P_B = P_{A\cap B}$.

Poznámka o integrování dle spektrální míry.

Věta 21. *Nechť $T \in L(H)$ je samoadjungovaný a P je jeho spektrální míra. Pak*
(a) *$\rho \in \rho(T) \Leftrightarrow (\exists U \ni \rho$ otevřená $)P_U = 0$;*
(b) *$\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow P_{\{\lambda\}} \ne 0$ (a je to projekce na $\ker(\lambda - T)$);*
(c) *izolované body λ v $\sigma(T)$ jsou vlastní čísla.*

Věta 22. *Nechť $T \in L(H)$ je samoadjungovaný, $g \in B^b(\sigma(T))$ je reálná a $f \in B^b(\sigma(T))$. Pak $(f \circ g)(T) = f(g(T))$.*

Důsledek 23. *Nechť $T \in L(H)$ je samoadjungovaný a pozitivně semidefinitní. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje jediný pozitivně semidefinitní samoadjungovaný operátor $S \in L(H)$ takový, že $S^n = T$.*

Poznámka o diagonalizaci $T = U \circ D \circ U^{-1}$ pomocí unitárního operátoru $U : H \to L^2(\mu)$ a $D \in L(L^2(\mu))$ typu $Df = gf$ pro nějakou g omezenou měřitelnou.

Poznámky k normálním operátorům. Vyjádření pomocí samoadjungovaných operátorů.

Věta 24 (spektrální rozklad pro normální operátory). *Pro normální operátor $T \in L(H)$ existuje jediná spektrální míra P s kompaktním nosičem na borelovských množinách v $\mathbb{C}$, která splňuje rovnost $\langle Tx, y\rangle = \int_{\sigma(T)} z \, d\langle P_z x, y\rangle$. Zobrazení $g \in B^b(\sigma(T)) \mapsto \int g(z) \, d\mu_{x,y}$ je měřitelný kalkulus, tj. jsou splněny vlastnosti (a)-(d) měřitelného kalkulu jako výše.*

Poznámky o aplikaci na odmocniny z matice ap.

1.6. Dunfordův holomorfní funkční kalkulus - bez důkazu.

Věta 25. *Nechť $T \in L(X)$ pro Banachův prostor X, h je holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, která obsahuje $\sigma(T)$ jako svou podmnožinu. Po částech hladká křivka (cyklus) γ v G je taková, že $\operatorname{ind}_z\gamma = 1$ pro $z \in \sigma(T)$ a $\operatorname{ind}_z\gamma = 0$ pro $x \notin G$. Pak $h(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(\rho)(\rho - T)^{-1} \, d\rho$ je funkční kalkulus (souhlasí na polynomech, je to involutivní algebraický homomorfismus, obraz spektra je spektrum obrazu) a $h_n(T) \to h(T)$ v normě, pokud h_n konvergují k h lokálně stejnoměrně na G.*

Poznámka o možnosti počítat hodnoty funkcí pro nenormální matice atd.

2. Úvod do teorie distribucí

Motivace potřebou derivací spojitých funkcí. Myšlenka derivovat analogií s metodou per partes, např. $\operatorname{sgn}' x$. Teorie distribucí - L. Schwartz - hodnoty na testovacích funkcích.

2.1. Základní prostor.

Definice $\mathcal{D}(\Omega)$.

Jde o vektorový prostor, možnost násobení, chybí jednotka.

Tvrzení 26.

(a) *Funkce $\varphi_r(x) = \exp\left(-\frac{r^2}{r^2 - \|x\|^2}\right)$ pro $\|x\| \le r$ a $\varphi_r(x) = 0$ jinak patří do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Každou spojitou funkci s omezeným nosičem lze stejnoměrně aproximovat funkcí z $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Metoda zhlazování pomocí konvoluce.

Konvergence $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice norem $\|\varphi\|_N$ na $\mathcal{D}_K(\Omega)$ a popis konvergence v $\mathcal{D}(\Omega)$ s jejich pomocí.

Tvrzení 27. *Je-li posloupnost φ_n v $\mathcal{D}_K(\Omega)$ cauchyovská vzhledem k $\|\cdot\|_N$ pro všechna N, pak $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.*

2.2. Pojem distribuce.

Definice distribuce na otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Značení $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Tvrzení 28. *$\mathcal{D}'(\Omega)$ je vektorový prostor.*

Lemma 29. *$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, právě když pro všechny kompakty $K \subset \Omega$ existují N a C tak, že $T\varphi \le C\|\varphi\|_N$ pro $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, tj. T je omezený lineární operátor na každém $\mathcal{D}_K(\Omega)$ vzhledem k nějaké normě $\|\cdot\|_N$.*

2.3. **Souvislost s funkcemi a měrami.**

Prostor lokálně integrovatelných funkcí $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Tvrzení 30.

(a) *Pro* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *je* $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$ *("regulární") distribuce.*
(b) *Zobrazení* $f \mapsto T_f$ *je lineární bijekce prostoru* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *(s rovností ve smyslu rovnosti skoro všude) na prostor všech regulárních distribucí.*

Příklad konstantních funkcí jako regulárních distribucí. Distribuce $T\varphi = \varphi(0)$ není regulární.

Tvrzení 31. *Nechť* μ *je znaménková Radonova míra (konečná na kompaktech) na otevřené* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*. Pak* $T_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu$ *je distribuce na* Ω *a zobrazení* $\mu \mapsto T_\mu$ *je lineární a injektivní.*

Příklad distribuce $T : \varphi \mapsto \varphi'(0)$. Není definována znaménkovou Radonovou měrou.

Příklad "regularizace" funkce $1/x$.

Poznámka s definicí násobení distribuce a funkce z $C^\infty(\Omega)$.

2.4. **Derivace distribucí.**

Definice $D^\alpha T$. Derivace "ve smyslu distribucí".

Příklad $\operatorname{sgn}' = 0$ skoro všude, ale $\operatorname{sgn}' = T'_{\text{sgn}} = 2T_{\delta_0} = 2\delta_0$ ve smyslu distribucí.

Věta 32. *Je* $T_{f'} = (T_f)'$*, pokud* f *je lokálně absolutně spojitá na otevřeném intervalu v* $\mathbb{R}$ *(*f *má spojitou derivaci ap.).*

Příklad Cantorovy funkce f a její derivace.

Příklad derivace $\log|x|$ ve smyslu distribucí; regularizace $1/x$ hlavní hodnotou integrálu z $\varphi(x)/x$.

2.5. **Diferenciální rovnice v distribucích - náznak pro $n = 1$.**

Tvrzení 33. *Jediným řešením rovnice* $T' = 0$ *na otevřeném intervalu jsou konstanty.*

Věta 34. *Rovnice* $S' = T$ *má řešení* S *pro každou distribuci* T *na otevřeném intervalu* $\Omega \subset \mathbb{R}$*. Řešení je určeno jednoznačně až na konstantu.*

Poznámka o možnosti řešit lineární rovnice s C^∞ hladkými koeficienty a pravými stranami v distribucích.

2.6. **Konvergence posloupností distribucí.**

Pro distribuce T_k a T v $\mathcal{D}'(\Omega)$ píšeme $T_k \to T$, jestliže jde o bodovou konvergenci na $\mathcal{D}(\Omega)$.

Věta 35. *Jestliže* $T_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *a* $T_k(\varphi) \to T(\varphi)$ *pro každé* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, pak*

(a) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *a*
(b) $D^\alpha T_k \to D^\alpha T$.

Úplná metrizovatelnost konvergence v $\mathcal{D}_K$.

Poznámka - cvičení: Definice posunů funkce a distribuce o h (l_h doleva). Dokažte, že $\lim_{h\to 0} \frac{l_h T - T}{h} = T'$ ve smyslu Heineho věty, tj. limity přes posloupnosti $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$.

Platí VĚTA: Každá distribuce $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je sumou posloupnosti derivací spojitých funkcí ($T = \sum_\alpha D^\alpha f_\alpha$, kde sčítáme přes všechny multiindexy α).

2.7. **Fourierova transformace integrovatelných funkcí.**

Poznámky o Fourierově řadě, Fourierově integrálu a jejich významu. Definice Fourierovy transformace $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ pro funkce z $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Věta 36. *$\mathcal{F}$ je spojitý lineární operátor $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Cvičení. Z pozdějších výsledků spočtěte normu $\mathcal{F}$.

Poznámka o myšlence, jak transformovat distribuce. Problém s transformací na základním prostoru. Potřeba základního prostoru invariantního vůči Fourierově transformaci.

Definice Schwartzova prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rychle ubývajících funkcí. Příklad. Ekvivalentní popisy včetně definice pseudonorem $\|f\|_{k,\alpha}$. Vztah k základnímu prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 37. *Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a α je multiindex. Pak*

(a) $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f)$.
(b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|} y^\alpha \mathcal{F}f$.

Lemma 38. $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.

Lemma 39. *Definujeme-li $\gamma(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ a $\gamma_\varepsilon(x) = \gamma(\varepsilon x)$, pak $(\mathcal{F}\gamma)(y) = e^{-\|y\|^2/2}$ a $(\mathcal{F}\gamma_\varepsilon)(y) = \frac{1}{\varepsilon^n}(\mathcal{F}\gamma)(\frac{y}{\varepsilon})$.*

Lemma 40. *Je-li $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pak $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x)$.*

Věta 41 (inverzní formule)**.**

(a) *$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je bijekce a*

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle x,y\rangle}\,dy. \tag{1}$$

(b) $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{L^2} = \langle f, g\rangle_{L^2}$ *pro* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(c) *Je-li $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pro $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pak (1) platí skoro všude.*

Poznámka o Plancherelově transformaci na $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.8. **Fourierova transformace a temperované distribuce.**

Definice konvergence posloupností v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 42.

(a) *Zobrazení $\varphi \mapsto x^\alpha\varphi$ je "spojité na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$" (ve smyslu konvergence posloupností).*
(b) *Zobrazení $\varphi \mapsto D^\beta\varphi$ je "spojité na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$" (ve smyslu konvergence posloupností).*
(c) $|\widehat{\varphi}(y)| \le c\|\varphi\|_{0,n+1}$ *pro* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Věta 43. *$\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou spojité lineární operátory na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Definice temperované distribuce a transformace derivací. Příklady.