

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy - 2. termín - 1.2.2012

Příklad 1 Zobrazení F je definováno předpisem $F(f) = \int_1^\infty \frac{f(t)}{t} dt$. Vyšetřete:

- (a) Pro která $p \in [1, \infty]$ je F spojitý lineární funkcionál na Banachově prostoru $L_p := L_p(1, \infty)$ nad tělesem reálných čísel.
- (b) Pro p popsaná v bodě (a) najděte normu F a vyšetřete, zda funkcionál F nabývá hodnotu normy pro nějaký prvek jednotkové koule B_{L_p} .

(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení S je definováno pro posloupnost $x = (x_1, x_2, \dots)$ komplexních čísel předpisem

$$S(x) = \left(i^n x_{2n} \right)_{n=1}^\infty.$$

- (a) Dokažte, že S je omezený lineární operátor z $L(\ell_1, c_0)$ nad \mathbb{C} .
- (b) Napište tvrzení o reprezentaci duálů k prostoru ℓ_1 a k prostoru c_0 . Popište duální operátor S' jako operátor mezi prostory reprezentujícími příslušné duály.
- (c) Je S , resp. S' , kompaktní operátor?

(8 bodů)

Příklad 3 Operátor T je pro funkci f z prostoru komplexně hodnotových funkcí $C([-1, 2])$ definován předpisem $Tf = hf$, kde $h(t) = \max\{|t|, \frac{1}{2}\}$ pro $t \in [-1, 2]$.

- (a) Dokažte, že T je omezený lineární operátor na $C([-1, 2])$. Určete jeho normu.
- (b) Vyšetřete spektrum i bodové spektrum operátoru T .
- (c) Vyšetřete kompaktnost operátoru T .

(8 bodů)

Hodnocení

Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.

Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.

Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.