PŘEDNÁŠKA Z DESKRIPTIVNÍ TEORIE MNOŽIN VE DRUHÉM SEMESTRU 2015-2016

1. Analytické množiny a stromy na ω

1.1. **Suslinovské množiny.** Suslinovská operace, souvislost s analytickými množinami. Značení $\mathbb{S} = \omega^{<\omega}$.

Poznámky o Suslinově operaci, regulární Suslinovo schéma.

Poznámka 1.1.1.

(a) *Podmnožina topologického prostoru X je suslinovská, právě když je projekcí uzavřené množiny podle ω^ω.*
(b) *Podmnožina polského prostoru X je analytická, právě když je suslinovská v X.*

1.2. **Suslinovská operace a stromy na ω.** Pojem stromu na $\mathbb{N}$, množiny $\mathcal{T}_I$ stromů s nekonečnou větví a $\mathcal{T}_W$ bez ní. Popis $\mathcal{T}_I$ pomocí Suslinovy operace a množin $\mathcal{F}_s = \{T \in \mathcal{T} : s \in T\}$.

Lemma 1.2.1. *Je-li $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ regulární Suslinovo schéma z uzavřených podmnožin X a $S = \bigcup_{\sigma\in\omega^{<\omega}} \bigcap_{n\in\omega} F_{\sigma|n}$, pak předpis $f(x) = \{s \in \omega^{<\omega} : x \in F_s\}$ definuje zobrazení X do $\mathcal{T}$ takové, že $F_s = f^{-1}(\mathcal{F}_s)$, kde $\mathcal{F}_s = \{T \in \mathcal{T} : s \in T\}$, a $S = f^{-1}(\mathcal{T}_I)$.*

1.3. **$\mathcal{T}$ jako polský (kompaktní) prostor.**

Tvrzení 1.3.1. *$\mathcal{T}$ je uzavřená podmnožina $\{0,1\}^{\omega^{<\omega}}$. Množiny $\mathcal{F}_s = \{T \in \mathcal{T} : s \in T\}$ a jejich doplňky tvoří subbázi topologie prostoru $\mathcal{T}$.*

1.4. **Více o zobrazení f z Lemmatu 1.2.1.**

Tvrzení 1.4.1. *Nechť S je suslinovská podmnožina (metrického) prostoru X. Pak existuje zobrazení $f : X \to \mathcal{T}$*

(a) *$f^{-1}(\mathcal{T}_I) = S$;*
(b) *$f^{-1}(\mathcal{F}_s)$ je uzavřená pro $s \in \omega^\omega$;*
(c) *označíme-li $h_\sigma(T) = \sup\{k \in \{0,1,\dots\} : \sigma|k \in T\}$ ($\sup\omega = \infty$), je funkce $x \mapsto h_\sigma \circ f$ shora polospojitá do $\mathbb{R}^*$ pro všechna $\sigma \in \omega^\omega$.*

Speciálně f je první borelovské třídy a $h_\sigma \circ f : \mathcal{T} \to \omega \cup \{\infty\}$ je shora polospojitá.

1.5. **Existence analytických neborelovských množin.**

Lemma 1.5.1. *$\mathcal{T}_I$ je analytická neborelovská podmnožina $\mathcal{T}$. Tedy $\mathcal{T}_W$ je koanalytická neborelovská podmnožina $\mathcal{T}$.*

Konec 1. přednášky.

Věta 1.5.2. *Každá nespočetná borelovská podmnožina polského prostoru X obsahuje analytickou neborelovskou podmnožinu X.*

Poznámka 1.5.3.

(a) *Existenci neborelovské analytické množiny S lze ukázat jinak, např. pomocí univerzální množiny a pak lze dokázat předchozí větu s využitím toho.*
(b) *Máme-li (a), dostaneme neborelovskost $\mathcal{T}_I$ a $\mathcal{T}_W$ okamžitě použitím Tvrzení 1.4.1 na množinu z (a).*

Návod k (a): $C = C_1 = C_2 = C_3\{0,1\}^\omega$; najděte v $C \times C_3$ otevřenou G, aby $\{G^y : y \in C_3\}$ obsahovala všechny otevřené v C ("univerzální otevřená množina"); $F = (C \times C_3) \setminus G$ je univerzální uzavřená; $C_1 \times C_2$ je homeomorfní C, tedy lze uvažovat F jako uzavřenou v $(C_1 \times C_2) \times C_3$ univerzální pro uzavřené v $(C_1 \times C_2)$; projekce A množiny F do $C_2 \times C_3$ podle C_1 je analytická univerzální pro analytické v C_2; $A \cap \{(x,x) \in C_2 \times C_3 : x \in C = C_2 = C_3\}$ je analytická, ale $\{(x,x) : x \in C\} \setminus A$ se od všech A^x liší, tedy není analytická.

1.6. **Derivování stromů.** Definice derivace T', $T^{(\alpha)}$ pro $\alpha < \omega_1$.

Tvrzení 1.6.1. *Zobrazení $d^{(\alpha)} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{(\alpha)}$ je borelovsky měřitelné pro každé $\alpha < \omega_1$.*

1.7. **Luzin-Sierpinského index.** Dál uvažujeme jen neprázdné stromy ($\mathcal{T}^*$). Definice $i(T) = \min\{\alpha \in \omega : T^{(\alpha)} = \{\emptyset\}\}$, existuje-li. Jinak definujeme $i(T) = \infty$.

Konce 2. přednášky.

Lemma 1.7.1 (index stromů)**.** *Pro $T \in \mathcal{T}$ a $s \in T$ definujme $T_s = \{t \in \mathbb{S} : \hat{st} \in T\} \in \mathcal{T}^*$. Platí $i(T_s) = \sup\{i(T_{s^n}) + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ pro $s \in T \in \mathcal{T}^*$.*

Tvrzení 1.7.2 (index stromů bez konečné větve)**.**
(a) *$T \in \mathcal{T}_W^*$, právě když $i(T) < \omega_1$.*
(b) *$i(\mathcal{T}_W^*) = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$.*

1.8. **Rozklad $\mathcal{T}_W^*$ a kosuslinovské množiny.** Definice $\mathcal{T}_W^*(\alpha)$, $\alpha < \omega_1$.

Tvrzení 1.8.1. *$\mathcal{T}_W^*(\alpha)$ jsou borelovské v $\mathcal{T}^*$ pro $\alpha < \omega_1$.*

Poznámka 1.8.2. *Kosuslinovká množina $C \subset X$ je borelovská, je-li nějaký její rozklad $\{f^{-1}_{(X \setminus C)}(\mathcal{T}_W^*(\alpha)) : \alpha < \omega_1\}$ na konstituanty spočetný.*

1.9. **Luzin-Sierpinského index jako "částečné uspořádání"$\mathcal{T}_W^*$.** Cíl: Studovat relaci $\{(T_1, T_2) \in (\mathcal{T}_W^*)^2 : i(T_1) \leq i(T_2)\}$.

Pojem strategie $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ ($\mathbb{S} = \omega^{<\omega}$).

Poznámka 1.9.1.
(a) *Strategie f definuje přirozeně zobrazení $\overline{f} : \omega^\omega \to \omega^\omega$.*
(b) *Interpretace: pro prvních $|s|$ tahů I. hráče popsaných posloupností s popisuje strategie (II. hráče) $f(s)$ prvních $|s|$ tahů II. hráče.*
(c) *Je-li f strategie a $T \in \mathcal{T}^*$, pak $f^{-1}(T) \in \mathcal{T}^*$, $f(T) \in \mathcal{T}^*$.*
(d) *Je-li navíc $\alpha < \omega_1$, platí $f^{-1}(T)^{(\alpha)} \subset f^{-1}(T^{(\alpha)})$.*

Lemma 1.9.2. *$i(T_1) \leq i(T_2)$, právě když existuje strategie $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ taková, že $T_1 \subset f^{-1}(T_2)$ (tj. $f(T_1) \subset T_2$).*

Konec 3. přednášky.

1.10. **Luzin-Sierpinského index je koanalytický rank.**

Věta 1.10.1.
(a) *Množina $A = \{(T_1, T_2) \in (\mathcal{T}^*)^2 : i(T_1) \leq i(T_2)\}$ je analytická.*

(b) *Množina* $C = \{(T_1, T_2) \in (\mathcal{T}^*)^2 : T_1 \in \mathcal{T}^*_W \;\&\; i(T_1) \le i(T_2)\}$ *je koanalytická.*

Množina $A' = \{(T_1, T_2) \in \mathcal{T}^2 : i(T_1) < i(T_2)\}$ je koanalytická.

Pojem *koanalytického ranku.*

Důsledek 1.10.2. *Zobrazení* $\varphi(T) = i(T)$ *pro* $T \in \mathcal{T}^*_W$ *definuje koanalytický rank.*

1.11. **Věta o omezenosti koanalytického ranku.**

Lemma 1.11.1 (princip omezenosti)**.** *Nechť* $\varphi : L \to \omega_1$ *je koanalytický rank,* $B \subset L$ *je analytická a* L *není analytická. Pak* $\sup\{\varphi(x) : x \in B\} < \omega_1$.

Věta 1.11.2. *Je-li* $B \subset \mathcal{T}^*_W$ *analytická, je* $\sup\{i(T) : T \in B\} < \omega_1$.

Co je to "koanalytický rank", resp. "koanalytická norma". Věta o omezenosti.

Konec 4. přednášky.

1.12. **Luzinův první oddělovací princip (podruhé).**

Věta 1.12.1. *Nechť* M *je metrický prostor,* $S \subset M$ *suslinovská,* $A \subset M$ *analytická a* $A \cap S = \emptyset$. *Pak existuje borelovská množina* $B \subset M$ *taková, že* $A \subset B \subset M \setminus S$.

Cvičení. Zkuste dokázat sporem podobně jako oddělování dvou analytických množin v 1. semestru.

Konec 5. přednášky.

Příklad 1.12.2. *Dvě disjunktní kosuslinovské podmnožiny* $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}$ *takové, že je nelze oddělit borelovskou. Speciálně,* C_1, C_2 *jsou suslinovské i kosuslinovské relativně v* $M = C_1 \cup C_2$ *a nejsou borelovské v* M.

Poznámka o souvislosti se selekcí a uniformizací. Poznámka o kosuslinovské uniformizaci (Kondô-Novikov).

Příklad disjunktních koanalytických množin v Cantorově množině, které nelze oddělit borelovskou množinou. Doplňky nelze borelovsky redukovat.

Přeformulace redukce pomocí "selekce".

Poznámka o redukci spočetného systému kosuslinovských množin. Poznámka o kosuslinovské uniformizaci kosuslinovské množiny (Kondô).

Poznámka o Novikovově aproximaci (duální k redukci spočetného systému).

1.13. **Luzinův druhý oddělovací princip a věta o redukci.**

Věta 1.13.1 (věta o redukci)**.** *Jsou-li* C_1, C_2 *kosuslinovské v metrickém prostoru* M*, pak existují kosuslinovské* $D_1 \subset C_1$, $D_2 \subset C_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cup D_2 = C_1 \cup C_2$.

Důsledek 1.13.2 (Luzinův druhý oddělovací princip)**.** *Jsou-li* A_1 *a* A_2 *suslinovské podmnožiny metrického prostoru* M*, existují kosuslinovské množiny* C_1 *a* C_2 *tak, že* $A_1 \setminus A_2 \subset C_1$, $A_2 \setminus A_1 \subset C_2$ *a* $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. *Navíc lze požadovat* $B_1 \cup B_2 = M \setminus (A_1 \cap A_2)$. *Pokud* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, *jsou pak* B_i *bisuslinovské.*

2. Měřitelné selekce

Pojmy selekce a uniformizace.

Poznámka o souvislosti s implicitně zadanými funkcemi.

Příklad 2.0.3 (neexistence analytické uniformizace)**.** *Příklad uzavřené podmnožiny* $F \subset \mathbb{R} \times \omega^\omega$, *tj.* G_δ *v* $\mathbb{R}^2$, *která nemá analytickou uniformizaci.*

Předchozí příklad s $\pi(F) = \mathbb{R}$. Cvičení s návodem.

Konec 6. přednášky.

2.1. Kuratowského a Ryll Nardzewského selekční věta a její důsledky.

Věta 2.1.1 (Kuratowski a Ryll Nardzewski). *Nechť $F : x \in X \mapsto F(x) \in \mathcal{F}^*(Y)$ zobrazení množiny X do polského prostoru Y takové, že*

$$F^{-1}(G) = \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

je v $\mathcal{A}_\sigma$, kde $\mathcal{A}$ je nějaká algebra podmnožin X.

Pak existuje $\mathcal{A}_\sigma$-měřitelná selekce.

Lemma 2.1.2 (o redukci). *Je-li $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ spočetné pokrytí množiny X prvky $\mathcal{A}_\sigma$, kde $\mathcal{A}$ je algebra podmnožin X, pak existují $C_n \subset B_n$, $C_n \in \mathcal{A}_\sigma$ taková, že $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$.*

Poznámka o možnosti dostat hrubší výsledek postupným odečítáním předchozích množin při nějakém očíslování.

Poznámka o tom, že předchozí lemma je speciálním případem věty.

Lemma 2.1.3 (o stejnoměrné konvergenci). *Je-li $f_n : X \to Y$ $\mathcal{A}_\sigma$-měřitelné zobrazení množiny X se systémem podmnožin $\mathcal{A}$ do metrického prostoru Y a je-li f stejnoměrná limita posloupnosti f_n na X, pak je i f $\mathcal{A}$-měřitelné.*

Konec 7. přednášky.

V metrickém prostoru X je $\Sigma^0_\alpha = (\Delta^0_\alpha)_\sigma$ pro $\alpha \geq 2$, i pro $\alpha = 1$, má-li X bázi z obojetných množin.

$\mathcal{A} = \Delta^0_\alpha$ je algebra.

Důsledek 2.1.4 (Kuratowski a Ryll Nardzewski - borelovský případ). *Nechť X je metrický prostor, Y polský prostor a $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ je zdola $\Sigma^0_\alpha(X)$-měřitelné, $\alpha \geq 2$ nebo $\alpha = 1$ a X je 0-dimenzionální. Pak existuje $\Sigma^0_\alpha(X)$- měřitelná selekce zobrazení F.*

Věta 2.1.5 (Jankov, von Neumann - selekce a uniformizace analytické množiny). *Nechť X, Y jsou polské prostory a $A \subset X \times Y$ je analytická. Pak existuje funkce $f : \pi_X(A) \to Y$, jejíž graf je uniformizací A a která je měřitelná vzhledem k σ-algebře množin v X generované analytickými množinami (dokonce vzory otevřených množin jsou v $(\Sigma^1_1(X)) \setminus \Sigma^1_1(X))_\sigma$, tj. spočetná sjednocení rozdílů analytických množin).*

Poznámka o existenci lebesgueovsky měřitelných selekcí, resp. selekcí měřitelných vzhledem k σ-algebře množin s Baireovou vlastností, pro zobrazení.

Konec 8. přednášky.

2.2. Spojité selekce.

Značení $\mathcal{F}_c(Y)$.

Příklady zdola polospojitých mnohoznačných zobrazení, pro která neexistuje spojitá selekce.

Příklad 1. Zdola polospojité zobrazení $\mathbb{R}$ do dvouprvkového diskrétního prostoru (nesouvislý prostor Y je problémem).

Příklad 2. Zdola polospojité zobrazení $\mathbb{R}$ na kompaktní podmnožiny kružnice, které je zdola i shora polospojité, ale nemá spojitou selekci (kružnice je souvislá, ale není jednoduše souvislá).

Věta 2.2.1 (E. Michael). *Je-li $F : X \to \mathcal{F}_c(Y)$ zobrazení separabilního metrického prostoru X do neprázných konvexních uzařených podmnožin separabilního Banachova prostoru Y, které je zdola polospojité (zdola $\Sigma^0_1(X)$-měřitelné), pak existuje spojitá selekce.*

Důsledek 2.2.2. *Jsou-li* $f, g : X \to \mathbb{R}^*$, $f \leq g$, *f shora a g zdola polospojité,* $f < +\infty$, $g > -\infty$, *pak existuje spojité* $h : X \to \mathbb{R}$ *s* $f \leq h \leq g$.

Poznámka o parakompaktnosti a "Tietzeově rozšiřovací větě"do Banachova prostoru Y.

Lemma 2.2.3 (o rozkladu jednotky). *Nechť* $\mathcal{U}$ *je otevřené pokrytí separabilního metrického prostoru* X. *Pak existují spojité nezáporné* g_n *s* $P_n = \{x : g_n(x) > 0\} \subset U_n \in \mathcal{U}$ *a* $U_n \in \mathcal{U}$ *takové, že* $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = 1$ *pro* $x \in X$ *a* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je lokálně konečný.*

Lemma 2.2.4 (o aproximaci spojitým zobrazením). *(Stačí* $G(x)$ *jsou neprázdné konvexní a* Y *je separabilní normovaný lineární prostor.) Nechť* $G : X \to \mathcal{F}_c(Y)$ *je zdola polospojité* $(G^{-1}(\Sigma^0_1(Y)) \subset \Sigma^0_1(X)$ *a* W *je konvexní otevřené okolí* 0 *v* Y. *Pak existuje spojité* $g : X \to Y$ *takové, že* $g(x) \in G(x) + W$ *pro* $x \in X$.

Lemma 2.2.5 (o polospojitosti průniku). *Nechť* $F, G : X \to 2^Y$ *jsou zdola polospojitá a* W *je okolí* 0 *v* Y. *Nechť* $H(x) = F(x) \cap (G(x) + W) \neq \emptyset$ *pro všechna* $x \in X$. *Pak je* H *zdola polospojité.*

Důkaz Michaelovy věty.

Konec 9. přednášky.

2.3. Množiny s kompaktními řezy.

Věta 2.3.1 (Novikovův oddělovací princip, resp. aproximace). *Nechť* A_n *jsou analytické v polském* X *a* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. *Pak existují borelovské* B_n *takové, že* $A_n \subset B_n$ *a* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$.

Pomocný pojem "(E_n) nelze aproximovat".

Lemma 2.3.2. *Pokud* $E_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E^n_i$, $n = 1, \ldots, k$, *nelze aproximovat, pak existují* $i_1, \ldots, i_k$ *taková, že* $E^1_{i_1}, \ldots, E^k_{i_k}, E_{k+1}, \ldots$ *nelze aproximovat.*

Důsledek 2.3.3 (borelovská redukce - Novikov). *Jsou-li* C_n *koanalytické v polském* X *a* $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ *je borelovská, pak existují borelovské po dvou disjunktní* $D_n \subset C_n$ *s* $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Lemma 2.3.4 (Kunugui-Novikov, množina s otevřenými řezy). *Nechť* X, Y *jsou polské,* W_n, $n \in \mathbb{N}$, *tvoří bázi* Y. *Je-li* $B \subset X \times Y$ *borelovská s otevřenými řezy* B_x, $x \in X$, *pak existují borelovské* A_n *v* X *tak, že* $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times W_n$.

Věta 2.3.5 (Novikov, Ščegol'kov). *Nechť* X, Y *jsou polské,* $B \subset X \times Y$ *je borelovská a* B_x, $x \in X$, *jsou kompaktní. Pak*

(a) $\pi_X(B)$ *je borelovská (Novikov) a*

(b) existuje borelovská uniformizace B *(Ščegol'kov).*

Konec 10. přednášky.

2.4. Borelovské množiny se spočetnými řezy.

2.4.1. *Projekce (obrazy).*

Tvrzení 2.4.1 (důsledek 2. oddělovacího principu). *Nechť* X *je polský,* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost analytických množin v* X. *Pak existuje disjunktní posloupnost* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *koanalytických množin takových, že* $A_n \setminus \bigcup\{A_k : k \neq n\} \subset C_n$.

Lemma 2.4.2. *Je-li F uzavřená podmnožina $\mathcal{N} = \omega^\omega$, Y je polský a $f : X \to Y$ je spojité, pak*

$$S_f = \{y \in Y : |f^{-1}(y)| = 1\}$$

je koanalytická.

Poznámka 2.4.3. *Je-li X borelovská podmnožina polského prostoru, Y je polský, $f : X \to Y$ je borelovské, pak S_f je koanalytická.*

Věta 2.4.4. *Nechť B je borelovská podmnožina polského prostoru, Y je polský, $f : B \to Y$ je borelovsky měřitelné a $f^{-1}(y)$ je nejvýš spočetná pro všechna $y \in Y$. Pak $f(B)$ je borelovská.*

Speciálně, pro $B \subset X \times Y$ borelovskou, kde X je polský, a pro B^y spočetné pro všechna $y \in Y$, je $\pi_Y(B)$ borelovská v Y.

Konec 11. přednášky.

2.4.2. *Borelovsky biměřitelná zobrazení.*

Pojem *borelovsky biměřitelné zobrazení.*

Tvrzení 2.4.5 (hodnoty s nespočetně vzory)**.** *Je-li X borelovská v polském prostoru, Y je polský prostor a $f : X \to Y$ je borelovské, pak množina*

$$U_f = \{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ je nespočetná } \}$$

je analytická.

Lemma 2.4.6 (charakterizace nespočetnosti spojitého obrazu)**.** *Nechť P, Q jsou polské a $\psi : P \to Q$ je spojité. Pak $\psi(P)$ je nespočetná, právě když existuje $D \subset P$ spočetná neprázdná bez izolovaných bodů taková, že $\psi\restriction_D$ je prosté.*

Lemma 2.4.7 (popis množin bez izolovaných bodů)**.** *Nechť P je polský a $\mathcal{D} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P^{\mathbb{N}} : \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nemá izolované body $\}$. Pak $\mathcal{D}$ je množina typu G_δ v $P^{\mathbb{N}}$.*

Lemma 2.4.8 (vnoření $\mathcal{C}^2$)**.** *Je-li $A \subset X \times Y$ analytická (X, Y polské), je-li $\pi_Y(A)$ nespočetná a jsou-li A^y perfektní pro všechna $y \in \pi_Y(A)$, pak existuje $C \subset \pi_Y(A)$ homeomorfní s 2^ω a homeomorfismus $\varphi : 2^\omega \times C \to \varphi(2^\omega \times C) \subset A$ takový že $\varphi_2(x, y) = y$.*

Konec 12. přednášky.

Dokončení důkazu lemmatu s použitím následujícího tvrzení.

Tvrzení 2.4.9 (BP-měřitelnost a spojitost)**.** *Je-li $f : X \to Y$ zobrazení topologického prostoru X do prostoru Y se spočetnou bází a je-li vzor každé otevřené množiny množina s Baireovou vlastností, existuje množina I první kategorie v X taková, že $f \restriction (X \setminus I)$ je spojité.*

Věta 2.4.10 (Purves - nutná podmínka pro borelovskou biměřitelnost)**.** *Jsou-li X, Y polské (ev. X je borelovskou podmno6inou polského prostoru), pak zobrazení $f : X \to Y$ je borelovsky biměřitelné, právě když je množina*

$$U_f = \{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ je nespočetná}\}$$

spočetná.

2.4.3. *Rozklad biměřitelných zobrazení.*

Věta 2.4.11 (Luzin, Novikov)**.** *Nechť X, Y jsou polské prostory, $f : X \to Y$ je borelovské zobrazení a množiny $f^{-1}(y)$ jsou spočetné pro $y \in Y$ (ev. je borelovsky biměřitelné). Pak existují borelovské $X_n \subset X$ tak, že $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ a $f \restriction_{X_n}$ jsou prostá pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*

Lemma 2.4.12. *Nechť X, Y jsou polské prostory. Je-li $E \subset X \times Y$ borelovská a množiny E^y, $y \in Y$, jsou spočetné, pak množina*

$$G = \{(x, y) \in E : \{x\} = E^y\}$$

je borelovská.

Konec 13. přednášky.