Funkcionální analýza 1

Funkcionální analýza 1

- Topologické vektorové prostory

Funkcionální analýza 1

- Topologické vektorové prostory
- Distribuce II

Funkcionální analýza 1

- Topologické vektorové prostory
- Distribuce II
- Bochnerův integrál

Funkcionální analýza 1

- Topologické vektorové prostory
- Distribuce II
- Bochnerův integrál
- Banachovy algebry

Funkcionální analýza 1

- Topologické vektorové prostory
- Distribuce II
- Bochnerův integrál
- Banachovy algebry
- Operátory na Hilbertově prostoru

Funkcionální analýza 1

- Topologické vektorové prostory
- Distribuce II
- Bochnerův integrál
- Banachovy algebry
- Operátory na Hilbertově prostoru
- Spektrální rozklad

I. Topologické vektorové prostory

I. Topologické vektorové prostory

Definice 1

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a τ je topologie na X. Pokud jsou operace sčítání a násobení skalárem spojité jakožto zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$, nazveme dvojici (X, τ) topologickým vektorovým prostorem.

I. Topologické vektorové prostory

Definice 1

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a τ je topologie na X. Pokud jsou operace sčítání a násobení skalárem spojité jakožto zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$, nazveme dvojici (X, τ) topologickým vektorovým prostorem.

Systém všech okolí bodu $x \in X$ značíme $\tau(x)$.

Fakt 2

Nechť X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní pseudometrika na X. Pak

(a) *operace sčítání je spojitá jakožto zobrazení* $+\colon (X,\rho)\times(X,\rho)\to(X,\rho)$;

Fakt 2

Nechť X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní pseudometrika na X. Pak

(a) *operace sčítání je spojitá jakožto zobrazení* $+\colon (X,\rho)\times(X,\rho)\to(X,\rho)$;

(b) $\rho(nx,0)\leq n\rho(x,0)$ *pro každé* $x\in X$ *a* $n\in\mathbb{N}$.

Tvrzení 3

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

(a) *Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \lambda x$ homeomorfismy X na X.*

Tvrzení 3

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

(a) *Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \lambda x$ homeomorfismy X na X.*

(b) *Pro každé $x \in X$ je $\tau(x) = x + \tau(0)$.*

Tvrzení 3

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

(a) *Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \lambda x$ homeomorfismy X na X.*

(b) *Pro každé $x \in X$ je $\tau(x) = x + \tau(0)$.*

(c) *Je-li $U \in \tau(0)$, pak existuje $V \in \tau(0)$ otevřené takové, že $V + V \subset U$.*

Definice 4

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- pohlcující, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;

Definice 4

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- pohlcující, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;
- vyvážená, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$.

Definice 4

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- pohlcující, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;
- vyvážená, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$.

Tvrzení 5

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Každé $U \in \tau(0)$ je pohlcující.*

Definice 4

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- pohlcující, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;
- vyvážená, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$.

Tvrzení 5

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Každé $U \in \tau(0)$ je pohlcující.*

(b) *$\tau(0)$ má bázi z otevřených vyvážených množin.*

Věta 6 (John von Neumann (1935))

Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je systém podmnožin X obsahujících 0, který je bází filtru (tj. pro každá $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset U_1 \cap U_2$). Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ má následující vlastnosti:

(i) *Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.*

(ii) *Každá množina z $\mathcal{U}$ je pohlcující.*

(iii) *Každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená.*

Pak existuje právě jedna topologie τ na X taková, že (X, τ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0.

Věta 7

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $C \subset X$ je uzavřená a disjunktní s K. Pak existuje otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.*

Věta 7

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $C \subset X$ je uzavřená a disjunktní s K. Pak existuje otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.*

(b) *X je regulární (tj. lze oddělit bod a uzavřenou množinu pomocí otevřených množin).*

Věta 7

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $C \subset X$ je uzavřená a disjunktní s K. Pak existuje otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.*

(b) *X je regulární (tj. lze oddělit bod a uzavřenou množinu pomocí otevřených množin).*

(c) *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

   (i) *X je Hausdorffův.*

   (ii) *X je T_1 (tj. body jsou uzavřené množiny).*

   (iii) *$\{0\}$ je uzavřená množina.*

   (iv) *$\{0\} = \bigcap\{U;\ U \in \tau(0)\}$.*

Tvrzení 8

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Je-li $G \subset X$ otevřené a $A \subset X$ libovolná, je $A + G$ otevřená.*

Tvrzení 8

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Je-li $G \subset X$ otevřené a $A \subset X$ libovolná, je $A + G$ otevřená.*

(b) *Je-li $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní, je $F + K$ uzavřená.*

Tvrzení 8

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Je-li $G \subset X$ otevřené a $A \subset X$ libovolná, je $A + G$ otevřená.*

(b) *Je-li $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní, je $F + K$ uzavřená.*

(c) *Jsou-li $K, L \subset X$ kompaktní, je i $K + L$ kompaktní.*

Tvrzení 9

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.

Tvrzení 9

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.

(b) $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$ *a* $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.

Tvrzení 9

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.

(b) $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$ *a* $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.

(c) $\lambda\bar{A} = \overline{\lambda A}$ *a* $\lambda \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A)$ *pro libovolné* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Tvrzení 9

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\overline{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.

(b) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$ *a* $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.

(c) $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$ *a* $\lambda \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A)$ *pro libovolné* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(d) *Je-li Y podprostor X, pak $\overline{Y}$ je též podprostor X.*

Tvrzení 9

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.

(b) $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$ *a* $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.

(c) $\lambda\bar{A} = \overline{\lambda A}$ *a* $\lambda \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A)$ *pro libovolné* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(d) *Je-li Y podprostor X, pak $\overline{Y}$ je též podprostor X.*

(e) *Je-li A konvexní, pak $\bar{A}$ a $\operatorname{Int} A$ jsou konvexní.*

Tvrzení 9

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.

(b) $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$ *a* $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.

(c) $\lambda\bar{A} = \overline{\lambda A}$ *a* $\lambda \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A)$ *pro libovolné* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(d) *Je-li Y podprostor X, pak $\overline{Y}$ je též podprostor X.*

(e) *Je-li A konvexní, pak $\bar{A}$ a* $\operatorname{Int} A$ *jsou konvexní.*

(f) *Je-li A vyvážená, pak $\bar{A}$ je vyvážená.*

Tvrzení 9

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.

(b) $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$ *a* $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.

(c) $\lambda\bar{A} = \overline{\lambda A}$ *a* $\lambda \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A)$ *pro libovolné* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(d) *Je-li Y podprostor X, pak $\overline{Y}$ je též podprostor X.*

(e) *Je-li A konvexní, pak $\bar{A}$ a* $\operatorname{Int} A$ *jsou konvexní.*

(f) *Je-li A vyvážená, pak $\bar{A}$ je vyvážená.*

(g) *Je-li A vyvážená a* $0 \in \operatorname{Int} A$, *pak* $\operatorname{Int} A$ *je vyvážená.*

Věta 10

Nechť X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $Y + Z$ je uzavřený.

Věta 10

Nechť X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $Y + Z$ je uzavřený.

Důsledek 11

Nechť X je Hausdorffův topologický vektorový prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.

Definice 12

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Definice 12

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$.
Množina A se nazývá omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Tvrzení 13

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Množina A je omezená.*

Definice 12

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Tvrzení 13

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Množina A je omezená.*

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ a každou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{K}$, $\gamma_n \to 0$ platí $\gamma_n x_n \to 0$.*

Definice 12

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Tvrzení 13

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Množina A je omezená.*

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ a každou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{K}$, $\gamma_n \to 0$ platí $\gamma_n x_n \to 0$.*

(iii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ platí $\frac{1}{n} x_n \to 0$.*

Tvrzení 14

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou omezené. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Množiny $A \cup B$ a $A + B$ jsou omezené.*

Tvrzení 14

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou omezené. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Množiny $A \cup B$ a $A + B$ jsou omezené.*

(b) *Množina λA omezená pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Tvrzení 14

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou omezené. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Množiny $A \cup B$ a $A + B$ jsou omezené.*

(b) *Množina λA omezená pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.*

(c) *Množina $\bar{A}$ je omezená.*

Lemma 15

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \to 0$. Pak $\{\delta_n V;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.

Lemma 15

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \to 0$. Pak $\{\delta_n V;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.

Věta 16

Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X má spočetnou bázi okolí 0.*

Lemma 15

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \to 0$. Pak $\{\delta_n V;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.

Věta 16

Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X má spočetnou bázi okolí 0.*

(ii) *X je pseudometrizovatelný.*

Lemma 15

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \to 0$. Pak $\{\delta_n V;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.

Věta 16

Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X má spočetnou bázi okolí 0.*

(ii) *X je pseudometrizovatelný.*

(iii) *X je pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou.*

Lemma 15

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \to 0$. Pak $\{\delta_n V;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.

Věta 16

Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X má spočetnou bázi okolí 0.*

(ii) *X je pseudometrizovatelný.*

(iii) *X je pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou.*

Je-li X Hausdorffův, pak lze výše předponu pseudo- vynechat.

Definice 17

Nechť X je topologický vektorový prostor. Řekneme, že X je lokálně omezený, pokud ke každému $x \in X$ existuje omezené okolí x.

Definice 17

Nechť X je topologický vektorový prostor. Řekneme, že X je lokálně omezený, pokud ke každému $x \in X$ existuje omezené okolí x.

Věta 18

Nechť X je lokálně omezený topologický vektorový prostor. Pak X je pseudometrizovatelný.

3. Totální omezenost a kompaktnost

Definice 19

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$.
Množina A se nazývá totálně omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$.

Tvrzení 20

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.*

Tvrzení 20

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.*

(b) *Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.*

Tvrzení 20

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.*

(b) *Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.*

(c) *Jsou-li A, B totálně omezené, pak jsou i $A \cup B$ a $A + B$ totálně omezené.*

Tvrzení 20

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.*

(b) *Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.*

(c) *Jsou-li A, B totálně omezené, pak jsou i $A \cup B$ a $A + B$ totálně omezené.*

(d) *Je-li A totálně omezená a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak je i λA totálně omezená.*

Tvrzení 20

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.*

(b) *Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.*

(c) *Jsou-li A, B totálně omezené, pak jsou i $A \cup B$ a $A + B$ totálně omezené.*

(d) *Je-li A totálně omezená a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak je i λA totálně omezená.*

(e) *Je-li A totálně omezená, pak je i $\bar{A}$ totálně omezený.*

Tvrzení 21

Nechť X je topologický vektorový prostor. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené

Tvrzení 21

Nechť X je topologický vektorový prostor. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.

Tvrzení 21

Nechť X je topologický vektorový prostor. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.

Fakt 22

Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou ρ. Pak $A \subset X$ je τ-totálně omezená, právě když je ρ-totálně omezená.

Definice 23

Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f\colon X \to Y$. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$.

Definice 23

Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f\colon X \to Y$. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$.

Tvrzení 24

Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f\colon X \to Y$ je stejnoměrně spojité. Je-li $A \subset X$ totálně omezená, je i $f(A)$ totálně omezená.

Lineárním obrazem vyvážené množiny je opět vyvážená množina.

Věta 25

Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme násl. tvrzení:

(i) *T je omezené na nějakém okolí 0.*

(ii) *T je spojité v 0.*

(iii) *T je spojité.*

(iv) *T je stejnoměrně spojité.*

(v) *T je sekvenciálně spojité.*

(vi) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

(vii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to 0$ je množina $\{T(x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.*

Pak (i)$\Rightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi)$\Leftrightarrow$(vii).

Věta 25

Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme násl. tvrzení:

(i) *T je omezené na nějakém okolí 0.*

(ii) *T je spojité v 0.*

(iii) *T je spojité.*

(iv) *T je stejnoměrně spojité.*

(v) *T je sekvenciálně spojité.*

(vi) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

(vii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to 0$ je množina $\{T(x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.*

Pak (i)$\Rightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi)$\Leftrightarrow$(vii). Je-li Y lokálně omezený, pak (i)–(iv) jsou ekvivalentní.

Věta 25

Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme násl. tvrzení:

(i) *T je omezené na nějakém okolí 0.*

(ii) *T je spojité v 0.*

(iii) *T je spojité.*

(iv) *T je stejnoměrně spojité.*

(v) *T je sekvenciálně spojité.*

(vi) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

(vii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to 0$ je množina $\{T(x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.*

Pak (i)⇒(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v)⇒(vi)⇔(vii). Je-li Y lokálně omezený, pak (i)–(iv) jsou ekvivalentní. Je-li X pseudometrizovatelný, pak (ii)–(vii) jsou ekvivalentní.

Lemma 26

Nechť X je pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor. Jestliže $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0, pak existuje posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{N}$ taková, že $\gamma_n \to +\infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$.

Věta 27

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $f\colon X \to \mathbb{K}$ je nenulová lineární forma. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *f je spojitá.*

(ii) *$\operatorname{Ker} f$ je uzavřené.*

(iii) *$\overline{\operatorname{Ker} f} \neq X$.*

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) funkcionály.

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) funkcionály.

Definice 28

Nechť X je topologický vektorový prostor. Symbolem $X^{\#}$ budeme značit prostor všech lineárních forem (funkcionálů) na X a budeme jej nazývat algebraickým duálem.

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) funkcionály.

Definice 28

Nechť X je topologický vektorový prostor. Symbolem $X^{\#}$ budeme značit prostor všech lineárních forem (funkcionálů) na X a budeme jej nazývat algebraickým duálem. Symbolem X^{*} budeme značit podprostor $X^{\#}$ sestávající z lineárních funkcionálů, které jsou spojité na X, a budeme jej nazývat topologickým duálem (či jenom duálem).

Definice 29

Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Říkáme, že T je izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je homeomorfismus X na Y;

Definice 29

Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Říkáme, že T je izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je homeomorfismus X na Y; říkáme, že T je izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$.

Fakt 30

Nechť X je vektorový prostor, Y je topologický vektorový prostor, a $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je net lineárních zobrazení z X do Y. Je-li $T\colon X \to Y$ bodovou limitou netu $\{T_\gamma\}$, pak T je lineární.

Věta 31

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X je Hausdorffův a $\dim X < \infty$.*

Věta 31

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X je Hausdorffův a* $\dim X < \infty$.

(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.*

Věta 31

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X je Hausdorffův a* $\dim X < \infty$.

(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.*

(iii) *X je Hausdorffův a existuje v něm totálně omezené okolí* 0.

Věta 31

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X je Hausdorffův a* $\dim X < \infty$.

(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.*

(iii) *X je Hausdorffův a existuje v něm totálně omezené okolí* 0.

(iv) *X je pseudometrizovatelný a každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité.*

Věta 31

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X je Hausdorffův a* $\dim X < \infty$.

(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.*

(iii) *X je Hausdorffův a existuje v něm totálně omezené okolí* 0.

(iv) *X je pseudometrizovatelný a každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité.*

(v) *X je pseudometrizovatelný a každá lineární forma na X je spojitá.*

Důsledek 32

Nechť X je konečněrozměrný vektorový prostor. Pak na X existuje jedna jediná Hausdorffova vektorová topologie.

6. Lokálně konvexní prostory

Fakt 33

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A, B \subset X$ jsou konvexní a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak množiny αA a $A + B$ jsou konvexní.

Definice 34

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina $A \subset X$ se nazývá absolutně konvexní, pokud je konvexní a vyvážená.

Definice 34

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina $A \subset X$ se nazývá absolutně konvexní, pokud je konvexní a vyvážená.

Fakt 35

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li A vyvážená, je $\operatorname{conv} A$ vyvážená, a tedy absolutně konvexní.*

Definice 34

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina $A \subset X$ se nazývá absolutně konvexní, pokud je konvexní a vyvážená.

Fakt 35

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li A vyvážená, je* conv A *vyvážená, a tedy absolutně konvexní.*

(b) *A je absolutně konvexní, právě když pro každé $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ platí $\alpha x + \beta y \in A$.*

Fakt 36

Nechť X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X. Pak platí následující tvrzení:

(a) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ *pro všechna* $x, y \in X$.

Fakt 36

Nechť X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X. Pak platí následující tvrzení:

(a) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ *pro všechna* $x, y \in X$.

(b) *Množina* $Z = p^{-1}(0)$ *je podprostor* X. *Pro libovolná* $x, y \in X$ *taková, že* $x - y \in Z$, *je* $p(x) = p(y)$.

Fakt 36

Nechť X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X. Pak platí následující tvrzení:

(a) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ *pro všechna* $x, y \in X$.

(b) *Množina* $Z = p^{-1}(0)$ *je podprostor* X. *Pro libovolná* $x, y \in X$ *taková, že* $x - y \in Z$, *je* $p(x) = p(y)$.

(c) *Množiny* $\{x \in X;\ p(x) < c\}$ *a* $\{x \in X;\ p(x) \leq c\}$ *jsou absolutně konvexní pro každé* $c \in [0, +\infty)$.

Definice 37

Nechť X je vektorový prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je nezáporně homogenní, jestliže $f(tx) = tf(x)$ pro každé $t \geq 0$.

Definice 37

Nechť X je vektorový prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je nezáporně homogenní, jestliže $f(tx) = tf(x)$ pro každé $t \geq 0$.

Fakt 38

Nechť X je vektorový prostor a f je nezáporně homogenní funkce na X. Označme $F_c = \{x \in X;\ f(x) \leq c\}$ a $G_c = \{x \in X;\ f(x) < c\}$ pro $c \in \mathbb{R}$. Pro každé $c > 0$ jsou množiny F_c a G_c pohlcující a navíc $F_c = cF_1$, $G_c = cG_1$.

Definice 39

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující.
Minkowského funkcionál množiny A je funkce
$\mu_A \colon X \to [0, +\infty)$ definovaná předpisem

$$\mu_A(x) = \inf \{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\}.$$

Věta 40

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.*

Věta 40

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.*

(b) *μ_A je nezáporně homogenní.*

Věta 40

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.*

(b) *μ_A je nezáporně homogenní.*

(c) *Je-li A konvexní, je μ_A nezáporný sublineární funkcionál.*

Věta 40

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.*

(b) *μ_A je nezáporně homogenní.*

(c) *Je-li A konvexní, je μ_A nezáporný sublineární funkcionál.*

(d) *Je-li A absolutně konvexní, je μ_A pseudonorma.*

Věta 40

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.*

(b) *μ_A je nezáporně homogenní.*

(c) *Je-li A konvexní, je μ_A nezáporný sublineární funkcionál.*

(d) *Je-li A absolutně konvexní, je μ_A pseudonorma.*

(e) $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.

Věta 40

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.*

(b) *μ_A je nezáporně homogenní.*

(c) *Je-li A konvexní, je μ_A nezáporný sublineární funkcionál.*

(d) *Je-li A absolutně konvexní, je μ_A pseudonorma.*

(e) $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.

(f) *Je-li A vyvážená nebo konvexní, pak $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.*

Věta 40

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.*

(b) *μ_A je nezáporně homogenní.*

(c) *Je-li A konvexní, je μ_A nezáporný sublineární funkcionál.*

(d) *Je-li A absolutně konvexní, je μ_A pseudonorma.*

(e) $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.

(f) *Je-li A vyvážená nebo konvexní, pak $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.*

(g) *Je-li $p\colon X \to [0, +\infty)$ nezáporně homogenní, pak pro každou $B \subset X$ takovou, že $\{x \in X;\ p(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X;\ p(x) \leq 1\}$, je $\mu_B = p$.*

Tvrzení 41

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak $\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$.

Tvrzení 41

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak $\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$*. Je-li navíc A vyvážená nebo konvexní, pak*

$$\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} \subset \overline{A}.$$

Lemma 42

Nechť X je topologický vektorový prostor a p je sublineární funkcionál na X. Pak p je stejnoměrně spojitý, právě když je shora omezený na nějakém okolí 0.

Lemma 42

Nechť X je topologický vektorový prostor a p je sublineární funkcionál na X. Pak p je stejnoměrně spojitý, právě když je shora omezený na nějakém okolí 0.

Důsledek 43

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující konvexní množina. Pak μ_A je spojitý, právě když A je okolím 0. V tom případě pak platí, že

$$\operatorname{Int} A = \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} = \overline{A}.$$

Věta 44

Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak $X^* \neq \{0\}$, právě když v X existuje konvexní okolí 0 různé od X.

Definice 45

- Řekneme, že topologický vektorový prostor je lokálně konvexní, pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami.

Definice 45

- Řekneme, že topologický vektorový prostor je lokálně konvexní, pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami.
- Lokálně konvexní prostor, jehož topologie je indukovaná translačně invariantní úplnou metrikou, nazveme Fréchetův.

Definice 45

- Řekneme, že topologický vektorový prostor je lokálně konvexní, pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami.
- Lokálně konvexní prostor, jehož topologie je indukovaná translačně invariantní úplnou metrikou, nazveme Fréchetův.
- Dále řekneme, že topologický vektorový prostor je normovatelný, pokud je jeho topologie generovaná normou.

Tvrzení 46

Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $U \in \tau(0)$ konvexní, pak existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$.

Tvrzení 46

Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $U \in \tau(0)$ konvexní, pak existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$.

Důsledek 47

V lokálně konvexním prostoru má $\tau(0)$ bázi sestávající z otevřených absolutně konvexních pohlcujících množin.

Nechť X je vektorový prostor, $p_1, \dots, p_n$ jsou pseudonormy na X a $\varepsilon > 0$. Označme

$$U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} = \{x \in X;\ p_1(x) < \varepsilon, \dots, p_n(x) < \varepsilon\}.$$

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0.

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:

(a) *Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá.*

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:

(a) *Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá.*

(b) *Množina $A \subset X$ je τ-omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.*

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:

(a) *Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá.*

(b) *Množina $A \subset X$ je τ-omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.*

(c) *Net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.*

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:

(a) *Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá.*

(b) *Množina $A \subset X$ je τ-omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.*

(c) *Net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.*

Topologii τ budeme nazývat topologií generovanou systémem pseudonorem $\mathcal{P}$.

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:

(a) *Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá.*

(b) *Množina $A \subset X$ je τ-omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.*

(c) *Net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.*

Topologii τ budeme nazývat topologií generovanou systémem pseudonorem $\mathcal{P}$.
Na druhou stranu, je-li (X, τ) lokálně konvexní prostor a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin, pak τ je generována systémem pseudonorem $\{\mu_V;\ V \in \mathcal{V}\}$.

Tvrzení 49

Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X je Hausdorffův.*

Tvrzení 49

Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *X je Hausdorffův.*

(ii) *Každý systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ má následující vlastnost:*
Pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ takové, že $p(x) > 0$.

Tvrzení 49

Nechť (X, τ) *je lokálně konvexní prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X *je Hausdorffův.*

(ii) *Každý systém pseudonorem* $\mathcal{P}$ *generující* τ *má následující vlastnost:*
Pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ *existuje* $p \in \mathcal{P}$ *takové, že* $p(x) > 0$.

(iii) *Existuje systém pseudonorem* $\mathcal{P}$ *generující* τ *s vlastností z tvrzení (ii).*

Lemma 50

Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor generovaný spočetným systémem pseudonorem $\{p_n\}$. Pak

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x - y), 1\}$$

je translačně invariantní pseudometrika na X generující τ.

Věta 51 (A. N. Kolmogorov (1934))

Nechť (X, τ) *je topologický vektorový prostor. Pak* X *je pseudonormovatelný (resp. normovatelný, je-li* X *Hausdorffův) právě tehdy, když v něm existuje omezené konvexní okolí* 0*.*

Tvrzení 52

Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li A omezená, je i množina* $\operatorname{conv} A$ *omezená.*

Tvrzení 52

Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li A omezená, je i množina* $\operatorname{conv} A$ *omezená.*

(b) *Je-li A totálně omezená, je i množina* $\operatorname{conv} A$ *totálně omezená.*

Lemma 53

Nechť X je topologický vektorový prostor a $f \in X^* \setminus \{0\}$. Pak f je otevřené zobrazení.

Věta 54

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.*

Věta 54

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.*

(b) *Je-li X lokálně konvexní, A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$. Je-li navíc A absolutně konvexní, pak dokonce $\sup_A |f| < \inf_B \operatorname{Re} f$.*

Důsledek 55

Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X.*

Důsledek 55

Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X.*

(b) *Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \notin Y$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = 1$.*

Důsledek 55

Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X.*

(b) *Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \notin Y$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = 1$.*

(c) *Je-li Y podprostor X a $f \in Y^*$, pak existuje $F \in X^*$ takový, že $F\restriction_Y = f$.*

8. Slabé topologie a poláry

Lemma 56

Nechť X je vektorový prostor a $f, f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy na X. Pak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$, právě když $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} f$.

Lemma 56

Nechť X je vektorový prostor a $f, f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy na X. Pak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$, právě když $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} f$.

Fakt 57

Nechť X, Y, Z jsou vektorové prostory a $L\colon X \to Y$ a $S\colon X \to Z$ jsou lineární zobrazení. Pak existuje lineární zobrazení $T\colon Z \to Y$ takové, že $L = T \circ S$, právě když $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} L$.

Definice 58

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in M\}$.

Definice 58

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in M\}$.

Tvrzení 59

Nechť X je vektorový prostor a $M, N \subset X^{\#}$. Pak $\sigma(X, M) = \sigma(X, N)$, právě když $\operatorname{span} M = \operatorname{span} N$. Speciálně, $\sigma(X, M) = \sigma(X, \operatorname{span} M)$.

Definice 58

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in M\}$.

Tvrzení 59

Nechť X je vektorový prostor a $M, N \subset X^{\#}$. Pak $\sigma(X, M) = \sigma(X, N)$, právě když $\operatorname{span} M = \operatorname{span} N$. Speciálně, $\sigma(X, M) = \sigma(X, \operatorname{span} M)$.

Tvrzení 60

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Pak topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když M odděluje body X.

Věta 61

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Pak $(X, \sigma(X, M))^* = \operatorname{span} M$.

Definice 62

Nechť X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá slabou topologií (též w-topologií) na X.

Definice 62

Nechť X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá slabou topologií (též w-topologií) na X.
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá slabou s hvězdičkou topologií (též w^*-topologií) na X^*.

Definice 62

Nechť X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá slabou topologií (též w-topologií) na X.
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá slabou s hvězdičkou topologií (též w^*-topologií) na X^*.

Důsledek 63

Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:

(a) $w \subset \tau$ *a* $(X, w)^* = X^*$.

Definice 62

Nechť X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá slabou topologií (též w-topologií) na X.
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá slabou s hvězdičkou topologií (též w^*-topologií) na X^*.

Důsledek 63

Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:

(a) $w \subset \tau$ *a* $(X, w)^* = X^*$.

(b) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

Tvrzení 64

Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X. Označme w_{XY} restrikci topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y. Pak $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$. Je-li X lokálně konvexní, pak $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$. Jinými slovy, v lokálně konvexním prostoru X splývá originální slabá topologie na Y se slabou topologií zděděnou z X.

Věta 65

Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\overline{A}^{w} = \overline{A}$.

Věta 65

Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\overline{A}^{w} = \overline{A}$.

(b) *A je slabě uzavřená, právě když je uzavřená.*

Věta 65

Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\overline{A}^{w} = \overline{A}$.

(b) *A je slabě uzavřená, právě když je uzavřená.*

(c) *Je-li X pseudometrizovatelný a $x_n \to x$ slabě, pak existují $y_n \in \operatorname{conv}\{x_j;\ j \geq n\}$ takové, že $y_n \to x$.*

Věta 66

Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak A je omezená právě tehdy, když je slabě omezená.

Věta 67

Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Pak T je w–w spojité, tj. spojité jakožto zobrazení $T\colon (X, w) \to (Y, w)$.

Tvrzení 68

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Pak $\sigma(X, M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když span M *má spočetnou algebraickou bázi.*

Tvrzení 68

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Pak $\sigma(X, M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když span M *má spočetnou algebraickou bázi.*

Tvrzení 69

Nechť X je nekonečněrozměrný topologický vektorový prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Pak X nemá spočetnou algebraickou bázi.

Tvrzení 68

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Pak $\sigma(X, M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když span M *má spočetnou algebraickou bázi.*

Tvrzení 69

Nechť X je nekonečněrozměrný topologický vektorový prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Pak X nemá spočetnou algebraickou bázi.

Důsledek 70

(a) *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak (X, w) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný. V tom případě slabá topologie splývá s normovou.*

Tvrzení 68

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Pak $\sigma(X, M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když span M *má spočetnou algebraickou bázi.*

Tvrzení 69

Nechť X je nekonečněrozměrný topologický vektorový prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Pak X nemá spočetnou algebraickou bázi.

Důsledek 70

(a) *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak (X, w) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný. V tom případě slabá topologie splývá s normovou.*

(b) *Nechť X je Fréchetův prostor. Pak (X^*, w^*) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný.*

Definice 71

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$. Absolutně konvexní obal množiny A definujeme jako

$$\operatorname{aconv} A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je absolutně konvexní}\}.$$

Definice 71

Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$. Absolutně konvexní obal množiny A definujeme jako

$$\operatorname{aconv} A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je absolutně konvexní}\}.$$

Tvrzení 72

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak

$$\operatorname{aconv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in A, \right.$$
$$\left. \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definice 73

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak definujeme uzavřený absolutně konvexní obal A jako

$$\overline{\operatorname{aconv}} A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je uzavřená absolutně konvexní}\}.$$

Definice 73

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak definujeme uzavřený absolutně konvexní obal A jako

$$\overline{\operatorname{aconv}} A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je uzavřená absolutně konvexní}\}.$$

Tvrzení 74

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, A = \overline{\operatorname{span} A}$, $\overline{\operatorname{conv}}\, A = \overline{\operatorname{conv} A}$ a $\overline{\operatorname{aconv}}\, A = \overline{\operatorname{aconv} A}$.

Definice 75

Je-li X topologický vektorový prostor a $A \subset X$, pak definujeme (absolutní) poláru množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*;\ |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Definice 75

Je-li X topologický vektorový prostor a $A \subset X$, pak definujeme (absolutní) poláru množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*;\ |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme zpětnou (absolutní) poláru jako

$$B_\circ = \{x \in X;\ |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Definice 75

Je-li X topologický vektorový prostor a $A \subset X$, pak definujeme (absolutní) poláru množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*;\ |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme zpětnou (absolutní) poláru jako

$$B_\circ = \{x \in X;\ |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Fakt 76

Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Uvažujeme-li na X^* topologii w^*, pak $A^\circ = \varepsilon(A)_\circ$, $\varepsilon(B_\circ) = B^\circ$ a $(B^\circ)_\circ = (B_\circ)^\circ$.

Tvrzení 77

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Množina A° je absolutně konvexní a w^*-uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.*

Tvrzení 77

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Množina A° je absolutně konvexní a w^*-uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.*

(b) *Je-li A podprostor X, pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^*, pak $B_\circ = B_\perp$.*

Tvrzení 77

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Množina A° je absolutně konvexní a w^*-uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.*

(b) *Je-li A podprostor X, pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^*, pak $B_\circ = B_\perp$.*

(c) *$\{0\}^\circ = X^*$, $X^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = X$ a pokud X^* odděluje body X, pak $(X^*)_\circ = \{0\}$.*

Tvrzení 77

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Množina A° je absolutně konvexní a w^*-uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.*

(b) *Je-li A podprostor X, pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^*, pak $B_\circ = B_\perp$.*

(c) *$\{0\}^\circ = X^*$, $X^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = X$ a pokud X^* odděluje body X, pak $(X^*)_\circ = \{0\}$.*

(d) *Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ a $(\lambda B)_\circ = \frac{1}{\lambda} B_\circ$.*

Tvrzení 77

Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Množina A° je absolutně konvexní a w^*-uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.*

(b) *Je-li A podprostor X, pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^*, pak $B_\circ = B_\perp$.*

(c) $\{0\}^\circ = X^*$, $X^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = X$ *a pokud X^* odděluje body X, pak $(X^*)_\circ = \{0\}$.*

(d) *Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ a $(\lambda B)_\circ = \frac{1}{\lambda} B_\circ$.*

(e) *Je-li $A_\gamma \subset X$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^\circ = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^\circ$. Je-li $B_\gamma \subset X^*$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)_\circ = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma)_\circ$.*

Věta 78 (O bipoláře; Jean Dieudonné (1950))

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Je-li $A \subset X$, pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\mathrm{aconv}}^{\,w} A$ ($= \overline{\mathrm{aconv}}\, A$, pokud X je lokálně konvexní).*

Věta 78 (O bipoláře; Jean Dieudonné (1950))

Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) *Je-li $A \subset X$, pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\mathrm{aconv}}^{w} A$ ($= \overline{\mathrm{aconv}}\, A$, pokud X je lokálně konvexní).*

(b) *Je-li $B \subset X^*$, pak $(B_\circ)^\circ = \overline{\mathrm{aconv}}^{w^*} B$.*

Lemma 79

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

(a) *$A^\perp$ je w^*-uzavřený podprostor X^*,*

(b) *$B_\perp$ je slabě uzavřený podprostor X,*

(c) *$(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}^{w} A$ ($= \overline{\operatorname{span}}\, A$, pokud X je lokálně konvexní),*

(d) *$(B_\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}^{w^*} B$.*

Věta 80

Jsou-li X, Y topologické vektorové prostory takové, že Y^* odděluje body Y, a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení, pak platí, že

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T}^{w} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*}^{w^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Věta 81 (Herman Heine Goldstine (1938))

Je-li X normovaný lineární prostor, pak $\overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.

Věta 82 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)

Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li U okolí 0 v X, pak U° je w^*-kompaktní množina.

Věta 82 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)

Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li U okolí 0 v X, pak U° je w^*-kompaktní množina.

Důsledek 83

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak B_{X^*} je w^*-kompaktní.

Tvrzení 84

Nechť X je separabilní topologický vektorový prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá v X. Je-li $U \subset X$ okolí 0, pak (U°, w^*) je topologický prostor metrizovatelný metrikou

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{|(f-g)(x_n)|, 1\}.$$

Fakt 85

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je izomorfismem lokálně konvexních prostorů (X, w) a $(\varepsilon(X), w^*)$.

Fakt 85

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je izomorfismem lokálně konvexních prostorů (X, w) a $(\varepsilon(X), w^*)$. Speciálně, ε je homeomorfismem topologických prostorů (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$.

Tvrzení 86

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li X separabilní a $\{x_n\}$ je hustá v S_X, pak (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná metrikou*

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-g)(x_n)|.$$

Tvrzení 86

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li X separabilní a $\{x_n\}$ je hustá v S_X, pak (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná metrikou*

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-g)(x_n)|.$$

(b) *Je-li X^* separabilní a $\{f_n\}$ je hustá v S_{X^*}, pak (B_X, w) je metrizovatelná metrikou*

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x-y)|.$$

Věta 87

Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní.

Věta 87

Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní.

Důsledek 88

Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když slabá a w^* topologie na X^* splývají.

Věta 87

Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní.

Důsledek 88

Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když slabá a w^* topologie na X^* splývají.

Věta 89

Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak B_X je slabě sekvenciálně kompaktní. Tedy z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.

II. Distribuce II

Věta 90

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a neprázdná. Položme*

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní}, \\ U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ *je bází okolí* 0 *pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii* τ *na* $\mathcal{D}(\Omega)$*, která má následující vlastnosti:*

Věta 90

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a neprázdná. Položme

$$\mathcal{U} = \big\{ U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní,}\\ U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega \big\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ je bází okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

(a) $\tau_\rho\restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.

Věta 90

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a neprázdná. Položme*

$$\mathcal{U} = \big\{U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní}, \qquad U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\big\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ *je bází okolí* 0 *pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii* τ *na* $\mathcal{D}(\Omega)$*, která má následující vlastnosti:*

(a) $\tau_\rho\restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.

(b) *Pro každou kompaktní* $K \subset \Omega$ *je* $\mathcal{D}(K)$ *uzavřený podprostor* $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ *a* $\tau\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

Věta 90

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a neprázdná. Položme

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní}, \\ U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ je bází okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

(a) $\tau_\rho\restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.

(b) *Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je $\mathcal{D}(K)$ uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ a $\tau\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.*

(c) *Je-li $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ omezená, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $A \subset \mathcal{D}(K)$.*

Věta 90

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a neprázdná. Položme*

$$\mathcal{U} = \big\{ U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní,} \\ U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega \big\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ *je bází okolí* 0 *pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii* τ *na* $\mathcal{D}(\Omega)$*, která má následující vlastnosti:*

(a) $\tau_\rho\restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.

(b) *Pro každou kompaktní* $K \subset \Omega$ *je* $\mathcal{D}(K)$ *uzavřený podprostor* $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ *a* $\tau\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

(c) *Je-li* $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ *omezená, pak existuje* $K \subset \Omega$ *kompaktní taková, že* $A \subset \mathcal{D}(K)$.

(d) *Nechť* $\{\varphi_n\}$ *je posloupnost v* $\mathcal{D}(\Omega)$ *a* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Pak* $\varphi_n \to \varphi$ *v* τ*, právě když existuje kompakt* $K \subset \Omega$ *takový, že* $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$*, a pro každý multiindex* α *délky* d *platí, že* $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ *stejnoměrně na* $\mathbb{R}^d$.

Věta 90

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a neprázdná. Položme

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní}, \\ U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ je bází okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

(a) $\tau_\rho\restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.

(b) *Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je $\mathcal{D}(K)$ uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ a $\tau\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.*

(c) *Je-li $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ omezená, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $A \subset \mathcal{D}(K)$.*

(d) *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \to \varphi$ v τ, právě když existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(e) *$(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ je první kategorie v sobě.*

Tvrzení 91

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená,* Y *je lokálně konvexní prostor a* $T\colon (\mathcal{D}(\Omega), \tau) \to Y$ *je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T *je spojité.*

(ii) *Pro každou posloupnost* $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *konvergující k* 0 *v* τ *je množina* $\{T(\varphi_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ *omezená.*

(iii) *Pro každou kompaktní* $K \subset \Omega$ *je restrikce* $T\restriction_{\mathcal{D}(K)}$ *spojitá.*

2. Schwartzův prostor

Lemma 92

Pro $N \in \mathbb{N}$ *je funkce* $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ *polynom na* $\mathbb{R}^d$*. Pro každý polynom* P *na* $\mathbb{R}^d$ *existují* $N \in \mathbb{N}$ *a* $C > 0$ *taková, že* $|P(x)| \leq C(1 + \|x\|^2)^N$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$*.*

Definice 93

Schwartzův prostor na $\mathbb{R}^d$ je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C});\ PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ \text{a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d \Big\}.$$

Lemma 94

Nechť $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ *a* $h(x) = \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ *pro* $x \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $h \in L_p(\mu_d)$.

Tvrzení 95

Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p\in[1,\infty)} L_p(\mu_d)$.

Tvrzení 95

Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p\in[1,\infty)} L_p(\mu_d)$.

(b) *Je-li* $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ *a* $h(x) = f(ax + b)$, *pak* $h \in \mathcal{S}_d$.

Tvrzení 95

Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p\in[1,\infty)} L_p(\mu_d)$.

(b) *Je-li* $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ *a* $h(x) = f(ax+b)$, *pak* $h \in \mathcal{S}_d$.

(c) *Je-li* $f \in \mathcal{S}_d$ *a* α *multiindex délky* d, *pak* $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.

Tvrzení 95

Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p\in[1,\infty)} L_p(\mu_d)$.

(b) *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ a $h(x) = f(ax + b)$, pak $h \in \mathcal{S}_d$.*

(c) *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a α multiindex délky d, pak $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.*

(d) *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a jestliže $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li $g \in \mathcal{S}_d$), pak $fg \in \mathcal{S}_d$.*

Tvrzení 95

Schwartzův prostor má následující vlastnosti:

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p\in[1,\infty)} L_p(\mu_d)$.

(b) *Je-li* $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ *a* $h(x) = f(ax + b)$, *pak* $h \in \mathcal{S}_d$.

(c) *Je-li* $f \in \mathcal{S}_d$ *a* α *multiindex délky* d, *pak* $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.

(d) *Je-li* $f \in \mathcal{S}_d$ *a jestliže* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li* $g \in \mathcal{S}_d$*), pak* $fg \in \mathcal{S}_d$.

(e) *Je-li* $f \in \mathcal{S}_d$ *a* $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *polynom, pak* $Pf \in \mathcal{S}_d$.

Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \left\| x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f(x) \right\|_\infty .$$

Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \left\| x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f(x) \right\|_\infty .$$

Hausdorffovu lokálně konvexní topologii na $\mathcal{S}_d$ generovanou systémem $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ označíme σ. Tato topologie je metrizovatelná metrikou z Lemmatu 50.

Věta 96

Metrika z Lemmatu 50 příslušná systému $\{\nu_N\}_{N=0}^{\infty}$ *je úplná. Prostor* $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ *je tedy Fréchetův prostor.*

Věta 96

Metrika z Lemmatu 50 příslušná systému $\{\nu_N\}_{N=0}^{\infty}$ je úplná. Prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je tedy Fréchetův prostor. Topologie σ má následující vlastnosti:

(a) *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *$f_n \to f$ v topologii σ.*

(ii) *Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a každý multiindex α délky d platí, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(iii) *Pro každý polynom P a každý multiindex α délky d platí, že $PD^\alpha f_n \to PD^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

Věta 96

Metrika z Lemmatu 50 příslušná systému $\{\nu_N\}_{N=0}^{\infty}$ je úplná. Prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je tedy Fréchetův prostor. Topologie σ má následující vlastnosti:

(a) *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   - (i) *$f_n \to f$ v topologii σ.*
   - (ii) *Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a každý multiindex α délky d platí, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*
   - (iii) *Pro každý polynom P a každý multiindex α délky d platí, že $PD^\alpha f_n \to PD^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Jestliže $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \to f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.*

Věta 96

Metrika z Lemmatu 50 příslušná systému $\{\nu_N\}_{N=0}^{\infty}$ je úplná. Prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je tedy Fréchetův prostor. Topologie σ má následující vlastnosti:

(a) *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
  (i) $f_n \to f$ *v topologii* σ.
  (ii) *Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a každý multiindex α délky d platí, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*
  (iii) *Pro každý polynom P a každý multiindex α délky d platí, že $PD^\alpha f_n \to PD^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Jestliže $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \to f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.*

(c) *Je-li α multiindex délky d, P polynom na $\mathbb{R}^d$ a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ a $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ do $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.*

Tvrzení 97

Nechť $f \in \mathcal{S}_d$ *a* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

(a) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$.

Tvrzení 97

Nechť $f \in \mathcal{S}_d$ *a* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

(a) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$.

(b) $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, *kde* $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

Věta 98

Fourierova transformace je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ na sebe. Navíc pro f $\in \mathcal{S}_d$ platí, že

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad a \quad \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}} = f.$$

3. Temperované distribuce

Lemma 99

Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní. Pak $\sigma\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

Lemma 99

Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní. Pak $\sigma\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

Tvrzení 100

Podprostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ a pro topologii τ platí, že $\sigma\restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \subset \tau$. Jinými slovy, vnoření $Id\colon (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojité a na hustou podmnožinu.

Definice 101

Distribuce na $\mathbb{R}^d$, které jsou restrikcemi funkcionálů z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, se nazývají temperované distribuce.

Tvrzení 102

Nechť Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $g \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $D^\alpha \Lambda$, $g\Lambda$ a $P\Lambda$ jsou též temperované distribuce a vzorce

- $D^\alpha \Lambda(f) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha f)$,
- $(g\Lambda)(f) = \Lambda(gf)$ *a*
- $(P\Lambda)(f) = \Lambda(Pf)$

platí pro každou $f \in \mathcal{S}_d$.

Tvrzení 102

Nechť Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $g \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $D^\alpha\Lambda$, $g\Lambda$ a $P\Lambda$ jsou též temperované distribuce a vzorce

- $D^\alpha\Lambda(f) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha f)$,
- $(g\Lambda)(f) = \Lambda(gf)$ *a*
- $(P\Lambda)(f) = \Lambda(Pf)$

platí pro každou $f \in \mathcal{S}_d$. Dále zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha\Lambda$, $\Lambda \mapsto g\Lambda$ a $\Lambda \mapsto P\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení z prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ do sebe.

Definice 103

Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Definice 103

Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Věta 104

(a) *Je-li $g \in L_1(\mu_d)$, pak $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{\widehat{g}}$.*

Definice 103

Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Věta 104

(a) *Je-li $g \in L_1(\mu_d)$, pak $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{\widehat{g}}$. Je-li $g \in L_2(\mu_d)$, pak $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$, kde F je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty.*

Definice 103

Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Věta 104

(a) *Je-li $g \in L_1(\mu_d)$, pak $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{\widehat{g}}$. Je-li $g \in L_2(\mu_d)$, pak $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$, kde F je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty.*

(b) *Je-li Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak*
- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = s_\alpha \widehat{\Lambda}$, *kde* $s_\alpha(x) = (ix)^\alpha$, *a*
- $D^\alpha \widehat{\Lambda} = \widehat{m_\alpha \Lambda}$, *kde* $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

Definice 103

Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Věta 104

(a) *Je-li $g \in L_1(\mu_d)$, pak $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{\widehat{g}}$. Je-li $g \in L_2(\mu_d)$, pak $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$, kde F je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty.*

(b) *Je-li Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak*
- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = s_\alpha \widehat{\Lambda}$, kde $s_\alpha(x) = (ix)^\alpha$, a
- $D^\alpha \widehat{\Lambda} = \widehat{m_\alpha \Lambda}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

(c) *Fourierova transformace $\mathcal{F}$ temperovaných distribucí je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ na sebe. Platí pro ni, že $\mathcal{F}^4 = Id$.*

III. Bochnerův integrál

Tvrzení 105

Nechť Ω je měřitelný prostor a X je metrický prostor. Pak bodová limita posloupnosti měřitelných zobrazení z Ω do X je měřitelné zobrazení.

Definice 106

Nechť Ω a X jsou množiny. Zobrazení $f\colon \Omega \to X$ se nazývá jednoduché, pokud $f(\Omega)$ je konečná množina.

Definice 106

Nechť Ω a X jsou množiny. Zobrazení $f\colon \Omega \to X$ se nazývá jednoduché, pokud $f(\Omega)$ je konečná množina.

Věta 107

Nechť Ω je měřitelný prostor a X je separabilní metrický prostor. Pak $f\colon \Omega \to X$ je měřitelné, právě když je bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X.

Je-li (Ω, μ) prostor s mírou a *M* je množina, pak symbolem *Æ*$(\Omega,$ *M*) označíme množinu všech zobrazení definovaných μ-s. v. na Ω s hodnotami v *M*.

Je-li (Ω, μ) prostor s mírou a *M* je množina, pak symbolem *Æ*(Ω, M) označíme množinu všech zobrazení definovaných μ-s. v. na Ω s hodnotami v *M*.

Definice 108 (Salomon Bochner (1933))

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou a *X* je metrický prostor. Zobrazení z *Æ*(Ω, X) nazveme silně měřitelným (též bochnerovsky měřitelným) vzhledem k μ, pokud je μ-s. v. bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do *X*.

Je-li (Ω, μ) prostor s mírou a M je množina, pak symbolem $\text{Æ}(\Omega, M)$ označíme množinu všech zobrazení definovaných μ-s. v. na Ω s hodnotami v M.

Definice 108 (Salomon Bochner (1933))

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou a X je metrický prostor. Zobrazení z $\text{Æ}(\Omega, X)$ nazveme silně měřitelným (též bochnerovsky měřitelným) vzhledem k μ, pokud je μ-s. v. bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X.

Lemma 109

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je metrický prostor a* $f \in \text{Æ}(\Omega, X)$*. Pak* f *je silně měřitelné, právě když je měřitelné a existuje* $E \subset \Omega$ *taková, že* $\mu(E) = 0$ *a* $f(\Omega \setminus E)$ *je separabilní.*

Důsledek 110

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a* $\{f_n\} \subset \text{Æ}(\Omega, X)$ *je posloupnost silně měřitelných zobrazení, která konverguje bodově s. v. k* $f \in \text{Æ}(\Omega, X)$. *Pak f je silně měřitelné.*

Lemma 111

Nechť Ω a X jsou je měřitelné prostory, X je zároveň vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \colon \Omega \to X$ jsou jednoduchá měřitelná zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou jednoduchá měřitelná zobrazení.

Lemma 111

Nechť Ω a X jsou je měřitelné prostory, X je zároveň vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g\colon \Omega \to X$ jsou jednoduchá měřitelná zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou jednoduchá měřitelná zobrazení.

Důsledek 112

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in Æ(\Omega, X)$ jsou silně měřitelná a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou silně měřitelná zobrazení.

Definice 113 (Izrail Moisejevič Gelfand (1938), Billy James Pettis (1938))

Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f \in Æ(\Omega, X)$ nazveme slabě měřitelným, pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f$ měřitelná funkce.

Definice 114

Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující, pokud $\|x\| = \sup_{f \in A} |f(x)|$ pro každé $x \in X$.

Definice 114

Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující, pokud $\|x\| = \sup_{f \in A} |f(x)|$ pro každé $x \in X$.

Lemma 115

Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li $A \subset B_{X^*}$ množina w^*-hustá v B_{X^*}, pak A je 1-normující.

Lemma 116

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující. Pak $A_\circ = B_X$.

Lemma 116

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující. Pak $A_\circ = B_X$. Dokonce pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že $B(x, r) = \bigcap_{f \in A} \{y \in X;\ |f(y) - f(x)| \leq r\}$.

Lemma 116

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující. Pak $A_\circ = B_X$. Dokonce pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že $B(x,r) = \bigcap_{f \in A} \{y \in X;\ |f(y) - f(x)| \leq r\}$.

Lemma 117

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustý v $\operatorname{span} A$ a $B_X \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustá v $B_X \cap \operatorname{span} A$.

Věta 118

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je normovaný lineární prostor a* $f \in Æ(\Omega, X)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f *je silně měřitelné.*

Věta 118

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je normovaný lineární prostor a* $f \in Æ(\Omega, X)$*. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f *je silně měřitelné.*

(ii) f *je měřitelné a existuje* $E \subset \Omega$ *taková, že* $\mu(E) = 0$ *a* $f(\Omega \setminus E)$ *je separabilní.*

Věta 118

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je normovaný lineární prostor a* $f \in Æ(\Omega, X)$*. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f *je silně měřitelné.*

(ii) f *je měřitelné a existuje* $E \subset \Omega$ *taková, že* $\mu(E) = 0$ *a* $f(\Omega \setminus E)$ *je separabilní.*

(iii) f *je slabě měřitelné a existuje* $E \subset \Omega$ *taková, že* $\mu(E) = 0$ *a* $f(\Omega \setminus E)$ *je separabilní.*

Věta 118

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je normovaný lineární prostor a* $f \in Æ(\Omega, X)$*. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f *je silně měřitelné.*

(ii) f *je měřitelné a existuje* $E \subset \Omega$ *taková, že* $\mu(E) = 0$ *a* $f(\Omega \setminus E)$ *je separabilní.*

(iii) f *je slabě měřitelné a existuje* $E \subset \Omega$ *taková, že* $\mu(E) = 0$ *a* $f(\Omega \setminus E)$ *je separabilní.*

(iv) *Existují* $E \subset \Omega$, $Y \subset X$ *separabilní podprostor a* $A \subset B_{Y^*}$ *spočetná tak, že* $\mu(E) = 0$, $f(\Omega \setminus E) \subset Y$, $B_{Y^*} \cap \operatorname{span} A$ *je* w^**-hustá v* B_{Y^*} *a* $\phi \circ f$ *je měřitelná pro každé* $\phi \in A$*.*

Tvrzení 119

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f = 0$ s. v., pak $f = 0$ s. v.

Definice 120

Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f\colon \Omega \to X$ se nazývá schodovité, jestliže je jednoduché, měřitelné a pro každé $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $\mu(f^{-1}(x)) < +\infty$.

Definice 120

Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f\colon \Omega \to X$ se nazývá schodovité, jestliže je jednoduché, měřitelné a pro každé $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $\mu(f^{-1}(x)) < +\infty$.

Definice 121

Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon \Omega \to X$ je schodovité. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ definujeme Bochnerův integrál f přes E jako

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{x \in f(\Omega) \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E) x.$$

Lemma 122

Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon \Omega \to X$ je schodovité. Jsou-li $A, B \subset \Omega$ disjunktní měřitelné podmnožiny, pak $\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$.

Lemma 122

Nechť (Ω, μ) *je prostor s mírou,* X *je normovaný lineární prostor a* $f\colon \Omega \to X$ *je schodovité. Jsou-li* $A, B \subset \Omega$ *disjunktní měřitelné podmnožiny, pak* $\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$.

Věta 123

Nechť (Ω, μ) *je prostor s mírou,* X *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$, $f, g\colon \Omega \to X$ *jsou schodovitá zobrazení a* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Pak* $f + g$ *a* αf *jsou schodovitá a* $\int_E (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_E g \,\mathrm{d}\mu$ *a* $\int_E \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}\mu$ *pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$.

Je-li (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je měřitelné zobrazení, pak funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je měřitelná na Ω, neboť je složením spojité funkce $\|\cdot\|$ a měřitelného zobrazení f. Tuto funkci budeme značit $\|f\|$.

Je-li (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je měřitelné zobrazení, pak funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je měřitelná na Ω, neboť je složením spojité funkce $\|\cdot\|$ a měřitelného zobrazení f. Tuto funkci budeme značit $\|f\|$.

Lemma 124

Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon \Omega \to X$ je jednoduché měřitelné zobrazení. Pak f je schodovité, právě když $\int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. V tom případě je $\left\| \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.

Lemma 125

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor,* $f \in Æ(\Omega, X)$ *je silně měřitelné a* $f_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ *je posloupnost schodovitých zobrazení taková, že* $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\| \,\mathrm{d}\mu(t) = 0$*. Pak pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$ *existuje* $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$*.*

Lemma 125

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor,* $f \in Æ(\Omega, X)$ *je silně měřitelné a* $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ *je posloupnost schodovitých zobrazení taková, že* $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\| \,\mathrm{d}\mu(t) = 0$. *Pak pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$ *existuje* $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. *Navíc je-li* $g_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ *posloupnost schodovitých zobrazení se stejnou vlastností, jako má* $\{f_n\}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Definice 126

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \text{Æ}(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Řekneme, že je f je bochnerovsky integrovatelné, pokud existuje posloupnost $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ pak definujeme Bochnerův integrál f přes E jako

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 127

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor nad* $\mathbb{K}$*,* $f, g \in \mathcal{AE}(\Omega, X)$ *jsou bochnerovsky integrovatelná,* $\alpha \in \mathbb{K}$ *a* $E \subset \Omega$ *je měřitelná.*

(a) *Zobrazení* $f + g$ *a* αf *jsou bochnerovsky integrovatelná a* $\int_E (f + g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu$ *a* $\int_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu$*.*

Věta 127

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor nad* $\mathbb{K}$*,* $f, g \in Æ(\Omega, X)$ *jsou bochnerovsky integrovatelná,* $\alpha \in \mathbb{K}$ *a* $E \subset \Omega$ *je měřitelná.*

(a) *Zobrazení* $f + g$ *a* αf *jsou bochnerovsky integrovatelná a* $\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu$ *a* $\int_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu$.

(b) $\left\| \int_E f\,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_E \|f\|\,\mathrm{d}\mu$.

Věta 128

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in$ Æ(Ω, X) je silně měřitelné. Pak f je bochnerovsky integrovatelné, právě když $\|f\|$ je lebesgueovsky integrovatelná.

Věta 129

Nechť (Ω, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset$ Æ(Ω, X) je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in$ Æ(Ω, X) je bochnerovsky integrovatelné takové, že $f_n \to f$ stejnoměrně s. v. na Ω. Pak $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Věta 129

Nechť (Ω, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné takové, že $f_n \to f$ stejnoměrně s. v. na Ω. Pak $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Věta 130 (o majorizované konvergenci)

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in Æ(\Omega, X)$ je takové, že $f_n \to f$ bodově s. v., a nechť $g \in L_1(\mu)$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná a $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \, \mathrm{d}\mu = 0$. Speciálně, $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Věta 131 (absolutní spojitost Bochnerova integrálu)

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a f* $\in$ *Æ*(Ω, X) *je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že* $\left\| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right\| < \varepsilon$ *kdykoli* $E \subset \Omega$ *je taková, že* $\mu(E) < \delta$*.*

Věta 132

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *a* Y *jsou Banachovy prostory,* $f \in Æ(\Omega, X)$ *je bochnerovsky integrovatelné a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Pak* $T \circ f$ *je bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$ *platí, že*

$$\int_E T \circ f \, \mathrm{d}\mu = T\left(\int_E f \, \mathrm{d}\mu\right).$$

Fakt 133

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor,* $x \in X$ *a* $f \in L_1(\mu)$*. Pak* $\int_E f(t)x \,\mathrm{d}\mu(t) = \left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right)x$ *pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$*.*

Věta 134

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor a* $f \in Æ(\Omega, X)$ *je bochnerovsky integrovatelné. Je-li* $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$ *pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$*, pak* $f = 0$ *s. v.*

Věta 135

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor a* $f \in Æ(\Omega, X)$ *je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každou* $E \subset \Omega$ *kladné míry je*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\, f(E).$$

Věta 136 (Fubiniova věta pro Bochnerův integrál)

Nechť (Ω_1, μ_1) *a* (Ω_2, μ_2) *jsou prostory se* σ*-konečnými úplnými mírami a nechť* ν *je zúplněním součinové míry* $\mu_1 \times \mu_2$*. Nechť* X *je Banachův prostor a* $f \in Æ(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$ *je bochnerovsky integrovatelné vzhledem k* ν*. Potom pro s. v.* $s \in \Omega_1$ *je zobrazení* $t \mapsto f(s,t)$ *bochnerovsky interovatelné na* Ω_2*, pro s. v.* $t \in \Omega_2$ *je zobrazení* $s \mapsto f(s,t)$ *bochnerovsky interovatelné na* Ω_1*;*

Věta 136 (Fubiniova věta pro Bochnerův integrál)

Nechť (Ω_1, μ_1) *a* (Ω_2, μ_2) *jsou prostory se* σ*-konečnými úplnými mírami a nechť* ν *je zúplněním součinové míry* $\mu_1 \times \mu_2$*. Nechť* X *je Banachův prostor a* $f \in Æ(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$ *je bochnerovsky integrovatelné vzhledem k* ν*. Potom pro s. v.* $s \in \Omega_1$ *je zobrazení* $t \mapsto f(s, t)$ *bochnerovsky interovatelné na* Ω_2*, pro s. v.* $t \in \Omega_2$ *je zobrazení* $s \mapsto f(s, t)$ *bochnerovsky interovatelné na* Ω_1*; zobrazení* $\psi_1(s) = \int_{\Omega_2} f(s, t)\, \mathrm{d}\mu_2(t)$ *a* $\psi_2(t) = \int_{\Omega_1} f(s, t)\, \mathrm{d}\mu_1(s)$ *definovaná s. v. na* Ω_1*, resp.* Ω_2 *jsou bochnerovsky integrovatelná a*

$$\int_{\Omega_1} \psi_1 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, \mathrm{d}\nu = \int_{\Omega_2} \psi_2 \, \mathrm{d}\mu_2.$$

3. Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

Definice 137

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$. Symbolem $L_p(\mu, X)$ označíme množinu všech silně měřitelných zobrazení z $Æ(\Omega, X)$ takových, že $\|f\| \in L_p(\mu)$, faktorizovanou podle rovnosti μ-s. v.

Definice 137

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$. Symbolem $L_p(\mu, X)$ označíme množinu všech silně měřitelných zobrazení z $Æ(\Omega, X)$ takových, že $\|f\| \in L_p(\mu)$, faktorizovanou podle rovnosti μ-s. v.

Dále pro $f \in L_p(\mu, X)$ definujeme $\|f\|_{L_p(\mu,X)} = \big\| t \mapsto \|f(t)\| \big\|_{L_p(\mu)}$.

Věta 138

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor a* $1 \leq p \leq \infty$*.*

(a) $L_p(\mu, X)$ *je Banachův prostor s normou* $\|f\|_{L_p(\mu,X)}$*.*

Věta 138

Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$.

(a) *$L_p(\mu, X)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_{L_p(\mu,X)}$.*

(b) *Je-li X Hilbertův prostor, pak $L_2(\mu, X)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem*

$$\langle f, g\rangle_{L_2(\mu,X)} = \int_\Omega \langle f(t), g(t)\rangle \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 139

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor a* $1 \leq p < \infty$*.*

(a) *Množina schodovitých zobrazení z* Ω *do* X *je hustá v* $L_p(\mu, X)$*.*

Věta 139

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor a* $1 \leq p < \infty$*.*

(a) *Množina schodovitých zobrazení z* Ω *do* X *je hustá v* $L_p(\mu, X)$*.*

(b) *Jsou-li* X *i* $L_p(\mu)$ *separabilní, je* $L_p(\mu, X)$ *také separabilní.*

IV. Banachovy algebry

Definice 140

Řekneme, že $(A, +, -, 0, \cdot_{\mathrm{s}}, \cdot)$ je algebra nad $\mathbb{K}$, pokud $(A, +, -, 0, \cdot_{\mathrm{s}})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $(A, +, -, \cdot, 0)$ je okruh, a navíc platí, že $(\alpha \cdot_{\mathrm{s}} a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot_{\mathrm{s}} b) = \alpha \cdot_{\mathrm{s}} (a \cdot b)$ pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 140

Řekneme, že $(A, +, -, 0, \cdot_{\mathrm{s}}, \cdot)$ je algebra nad $\mathbb{K}$, pokud $(A, +, -, 0, \cdot_{\mathrm{s}})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $(A, +, -, \cdot, 0)$ je okruh, a navíc platí, že $(\alpha \cdot_{\mathrm{s}} a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot_{\mathrm{s}} b) = \alpha \cdot_{\mathrm{s}} (a \cdot b)$ pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Algebra nad $\mathbb{K}$ se nazývá komutativní, pokud je její okruhové násobení $\cdot$ komutativní.

Tvrzení 141

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Položme $A_e = A \times \mathbb{K}$ a definujme vektorové operace na A_e obvyklým způsobem (tj. po složkách) a dále násobení prvků A_e pomocí vzorce

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) \quad \text{pro } a, b \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pak A_e je algebra s jednotkou $(0,1)$ a A lze identifikovat s její podalgebrou $A \times \{0\}$. Je-li A komutativní, je A_e též komutativní.

Nechť A, B jsou algebry nad $\mathbb{K}$. (Algebrový) homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ je zobrazení, které je homomorfismem mezi příslušnými vektorovými prostory (tj. je lineární) a zároveň je homomorfismem mezi příslušnými okruhy (tj. je multiplikativní, neboli $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$).

Nechť A, B jsou algebry nad $\mathbb{K}$. (Algebrový) homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ je zobrazení, které je homomorfismem mezi příslušnými vektorovými prostory (tj. je lineární) a zároveň je homomorfismem mezi příslušnými okruhy (tj. je multiplikativní, neboli $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$).
Φ nazýváme (algebraickým) izomorfismem algeber A a B, pokud Φ je bijekce.

Fakt 142

Nechť A je algebra, B je algebra s jednotkou e a $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus. Pak $\widetilde{\Phi}\colon A_{\mathrm{e}} \to B$, $\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x) + \lambda e$ je homomorfismus rozšiřující Φ.

Fakt 142

Nechť A je algebra, B je algebra s jednotkou e a $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus. Pak $\widetilde{\Phi}\colon A_{\mathrm{e}} \to B$, $\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x) + \lambda e$ je homomorfismus rozšiřující Φ.

Tvrzení 143

Nechť A je algebra s jednotkou a B je podalgebra A neobsahující e. Pak $C = B + \operatorname{span}\{e\}$ je podalgebra A a zobrazení $\Phi\colon B_{\mathrm{e}} \to C$, $\Phi(x,\lambda) = x + \lambda e$ je izomorfismus.

Definice 144

Dvojici $(A, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaná algebra, pokud A je algebra, $(A, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, a pro každé $a, b \in A$ platí, že $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Je-li metrika generovaná $\|\cdot\|$ úplná, pak $(A, \|\cdot\|)$ se nazývá Banachovou algebrou.

Tvrzení 145

Nechť $(A, \|\cdot\|)$ *je normovaná algebra. Násobení prvků* A *je lipschitzovské na omezených množinách (a tedy spojité) jakožto zobrazení z* $A \times A$ *do* A*.*

Tvrzení 145

Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Násobení prvků A je lipschitzovské na omezených množinách (a tedy spojité) jakožto zobrazení z $A \times A$ do A.

Důsledek 146

Nechť A je normovaná algebra a B je podalgebra A. Pak $\overline{B}$ je též podalgebra A.

Tvrzení 145

Nechť $(A, \|\cdot\|)$ *je normovaná algebra. Násobení prvků* A *je lipschitzovské na omezených množinách (a tedy spojité) jakožto zobrazení z* $A \times A$ *do* A.

Důsledek 146

Nechť A *je normovaná algebra a* B *je podalgebra* A. *Pak* $\overline{B}$ *je též podalgebra* A.

Důsledek 147

Pro každou normovanou algebru A *existuje její zúplnění, tj. Banachova algebra taková, že* A *je její hustá podalgebra. Toto rozšíření je určeno jednoznačně až na izometrii. Má-li algebra* A *jednotku* e, *pak* e *je i jednotkou v zúplnění* A.

Tvrzení 148

Nechť $(A, \|\cdot\|)$ *je normovaná algebra. Definujeme-li na* A_{e} *normu předpisem* $\|(a, \alpha)\|_{A_{\mathrm{e}}} = \|a\| + |\alpha|$ *(tj.* $A_{\mathrm{e}} = A \oplus_1 \mathbb{K}$*), pak* A_{e} *s touto normou je normovaná algebra. Je-li* $(A, \|\cdot\|)$ *Banachova algebra, je i* A_{e} *s výše uvedenou normou Banachova algebra.*

Definice 149

Nechť A a B jsou normované algebry a $\Phi\colon A \to B$ je (algebrový) homomorfismus. Říkáme, že Φ je izomorfismus normovaných algeber A a B (nebo jen izomorfismus), pokud Φ je homeomorfismus A na B; říkáme, že Φ je izomorfismus A do B (nebo jen izomorfismus do), pokud Φ je izomorfismus A na $\operatorname{Rng}\Phi$.

Věta 150

Nechť A je normovaná algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a \colon A \to A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I \colon A \to \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leq 1$.

Věta 150

Nechť A je normovaná algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a\colon A \to A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leq 1$. Má-li A jednotku e, pak I je izomorfismus do a $I(e) = Id$.

Věta 150

Nechť A je normovaná algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a\colon A \to A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leq 1$. Má-li A jednotku e, pak I je izomorfismus do a $I(e) = Id$. Platí-li $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$ (např. je-li A podalgebra $\ell_\infty(\Gamma)$), pak I je izometrie do.

Věta 150

Nechť A je normovaná algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a\colon A \to A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leq 1$. Má-li A jednotku e, pak I je izomorfismus do a $I(e) = Id$. Platí-li $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$ (např. je-li A podalgebra $\ell_\infty(\Gamma)$), pak I je izometrie do.

Důsledek 151

Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je netriviální normovaná algebra s jednotkou. Pak na A existuje ekvivalentní norma $|||\cdot|||$ taková, že $(A, |||\cdot|||)$ je normovaná algebra a $|||e||| = 1$.

Připomeňme, že v okruhu s jednotkou (stačí dokonce v monoidu) jsou inverzní prvky k invertibilním prvkům jednoznačně učeny a invertibilní prvky tvoří grupu, tj. jsou-li $x, y \in A$ invertibilní, pak i xy je invertibilní a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Tuto grupu invertibilních prvků budeme značit $A^{\times}$.

Připomeňme, že v okruhu s jednotkou (stačí dokonce v monoidu) jsou inverzní prvky k invertibilním prvkům jednoznačně učeny a invertibilní prvky tvoří grupu, tj. jsou-li $x, y \in A$ invertibilní, pak i xy je invertibilní a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Tuto grupu invertibilních prvků budeme značit $A^{\times}$.

Fakt 152

Nechť A je algebra s jednotkou a B je její podalgebra obsahující e. Pak $B^{\times} \subset A^{\times} \cap B$.

Lemma 153

Nechť A je normovaná algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x)^{-1}$.

Lemma 153

Nechť A je normovaná algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x)^{-1}$.

Lemma 154

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou.

(a) *Pokud $x \in U_A$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje absolutně, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x)^{-1}$.*

Lemma 153

Nechť A je normovaná algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x)^{-1}$.

Lemma 154

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou.

(a) *Pokud $x \in U_A$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje absolutně, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x)^{-1}$.*

(b) *Nechť $x \in A^\times$ a nechť $h \in A$ je takové, že $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Pak $x + h \in A^\times$. Pokud navíc $\|h\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, pak $\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2$.*

Definice 155

Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Řekneme, že (G, τ) je topologická grupa, pokud jsou grupové operace (tj. násobení $\cdot\colon G \times G \to G$ a inverze ${}^{-1}\colon G \to G$) spojité.

Definice 155

Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Řekneme, že (G, τ) je topologická grupa, pokud jsou grupové operace (tj. násobení $\cdot\colon G \times G \to G$ a inverze ${}^{-1}\colon G \to G$) spojité.

Věta 156

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Pak $A^\times$ je otevřená podmnožina A a je to topologická grupa.

Tvrzení 157

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a B je její uzavřená podalgebra obsahující e. Pak $(\partial_B B^\times) \cap A^\times = \emptyset$ a

$$B^\times = \bigcup \left\{ C \subset B;\ C \text{ je komponenta } A^\times \cap B \text{ protínající } B^\times \right\}.$$

Definice 158

Nechť A je algebra s jednotkou a $x \in A$. Pro $x \in A$ definujeme rezolventní množinu prvku x jako

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda e - x \in A^\times\},$$

a spektrum prvku x jako

$$\sigma(x) = \mathbb{K} \setminus \rho(x).$$

Definice 158

Nechť A je algebra s jednotkou a $x \in A$. Pro $x \in A$ definujeme rezolventní množinu prvku x jako

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda e - x \in A^{\times}\},$$

a spektrum prvku x jako

$$\sigma(x) = \mathbb{K} \setminus \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak pro $x \in A$ definujeme výše uvedené pojmy vzhledem k algebře A_{e}.

Fakt 159

Nechť A, B jsou pologrupy, $\Phi \colon A \to B$ je homomorfismus na a nechť A je navíc monoid s jednotkou e. Pak B je monoid s jednotkou $\Phi(e)$ a je-li $x \in A$ invertibilní, pak $\Phi(x)$ je invertibilní a $\Phi(x)^{-1} = \Phi(x^{-1})$. Je-li navíc Φ bijekce, pak $\Phi\restriction_{A^\times}$ je izomorfismus grup $A^\times$ a $B^\times$.

Fakt 159

Nechť A, B jsou pologrupy, $\Phi\colon A \to B$ *je homomorfismus na a nechť A je navíc monoid s jednotkou e. Pak B je monoid s jednotkou* $\Phi(e)$ *a je-li* $x \in A$ *invertibilní, pak* $\Phi(x)$ *je invertibilní a* $\Phi(x)^{-1} = \Phi(x^{-1})$*. Je-li navíc* Φ *bijekce, pak* $\Phi\restriction_{A^\times}$ *je izomorfismus grup* $A^\times$ *a* $B^\times$*.*

Důsledek 160

Nechť A, B jsou algebry a $\Phi\colon A \to B$ *je algebraický izomorfismus. Pak* $\sigma(\Phi(x)) = \sigma(x)$ *pro každé* $x \in A$*.*

Lemma 161

Nechť M je monoid a $x, y \in M$. Jsou-li alespoň dva z prvků x, y, xy a yx invertibilní, pak jsou invertibilní všechny čtyři.

Tvrzení 162

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$.

(a) *Je-li A netriviální, pak $\sigma(0) = \{0\}$.*

(b) *Má-li A jednotku, pak $\sigma(\alpha e + \beta x) = \alpha + \beta\sigma(x)$ pro každé $x \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

(c) *Je-li $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda \in \sigma(x)$, pak $\lambda^n \in \sigma(x^n)$.*

(d) *Je-li $x \in A^\times$, pak $\lambda \in \sigma(x)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(x^{-1})$.*

(e) *Jsou-li $x, y \in A$, pak množiny $\sigma(xy)$ a $\sigma(yx)$ se liší nejvýše o prvek 0.*

Fakt 163

Nechť A je algebra a B je ideál v A. Pak B je ideál i v A_{e}.

Tvrzení 164

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$.

(a) *Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_e}(x)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.*

Tvrzení 164

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$*.*

(a) *Pro každé* $x \in A$ *je* $0 \in \sigma_{A_e}(x)$*. Nemá-li tedy A jednotku, pak* $0 \in \sigma(x)$ *pro každé* $x \in A$*.*

(b) *Má-li A jednotku, pak* $\sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ *pro každé* $x \in A$*.*

Tvrzení 164

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$.

(a) *Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_e}(x)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.*

(b) *Má-li A jednotku, pak $\sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.*

(c) *Nechť A má jednotku, B je podalgebra A neobsahující e a $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Pak $\sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ pro každé $x \in B$.*

Tvrzení 164

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$.

(a) *Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_e}(x)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.*

(b) *Má-li A jednotku, pak $\sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.*

(c) *Nechť A má jednotku, B je podalgebra A neobsahující e a $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Pak $\sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ pro každé $x \in B$.*

(d) *Nechť B je podalgebra A a $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A, pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostaních případech je $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.*

Tvrzení 164

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$.

(a) *Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_e}(x)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.*

(b) *Má-li A jednotku, pak $\sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.*

(c) *Nechť A má jednotku, B je podalgebra A neobsahující e a $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Pak $\sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ pro každé $x \in B$.*

(d) *Nechť B je podalgebra A a $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A, pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostaních případech je $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.*

(e) *Je-li B vlastní ideál v A, pak $\sigma_{B_e}(x) = \sigma_A(x)$ pro každé $x \in B$.*

Tvrzení 165

Nechť A, B jsou algebry, $\Phi\colon A \to B$ *je homomorfismus a* $x \in A$. *Má-li A jednotku e a* $\Phi(e)$ *není jednotkou v B, pak* $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x) \cup \{0\}$, *v ostatních případech je* $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$.

Definice 166

Nechť A je algebra. Pro $x \in A$ definujeme spektrální poloměr prvku x jako

$$r(x) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Věta 167

Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\rho(x)$ je otevřená, $\sigma(x)$ je kompaktní a

$$r(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Věta 167

Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\rho(x)$ je otevřená, $\sigma(x)$ je kompaktní a

$$r(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Lemma 168

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

(a) *Pokud $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} < +\infty$.*

Věta 167

Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\rho(x)$ je otevřená, $\sigma(x)$ je kompaktní a

$$r(x) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Lemma 168

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

(a) *Pokud $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} < +\infty$.*

(b) *Pokud $\{a_n\}$ je nezáporná a $a_{m+n} \leq a_m a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$.*

Věta 169

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\partial\rho_B(x) \subset \partial\rho_A(x)$ *a*

$$\rho_B(x) = \bigcup\{C \subset \mathbb{K};\ C \text{ je komponenta } \rho_A(x) \text{ protínající } \rho_B(x)\}.$$

Věta 169

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\partial\rho_B(x) \subset \partial\rho_A(x)$ *a*

$$\rho_B(x) = \bigcup\{C \subset \mathbb{K};\ C \text{ je komponenta } \rho_A(x) \text{ protínající } \rho_B(x)\}.$$

(b) *Je-li C komponenta $\rho_A(x)$, pak buď $C \subset \sigma_B(x)$, nebo $C \cap \sigma_B(x) = \emptyset$. Dále je $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$.*

Věta 169

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\partial\rho_B(x) \subset \partial\rho_A(x)$ *a*

$$\rho_B(x) = \bigcup\{C \subset \mathbb{K};\ C \text{ je komponenta } \rho_A(x) \text{ protínající } \rho_B(x)\}.$$

(b) *Je-li C komponenta $\rho_A(x)$, pak buď $C \subset \sigma_B(x)$, nebo $C \cap \sigma_B(x) = \emptyset$. Dále je $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$.*

(c) *Je-li $\rho_A(x)$ souvislá, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Věta 169

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\partial\rho_B(x) \subset \partial\rho_A(x)$ *a*

$$\rho_B(x) = \bigcup\{C \subset \mathbb{K};\ C \textit{ je komponenta } \rho_A(x) \textit{ protínající } \rho_B(x)\}.$$

(b) *Je-li C komponenta $\rho_A(x)$, pak buď $C \subset \sigma_B(x)$, nebo $C \cap \sigma_B(x) = \emptyset$. Dále je $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$.*

(c) *Je-li $\rho_A(x)$ souvislá, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

(d) *Má-li $\sigma_B(x)$ prázdný vnitřek, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Definice 170

Nechť Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in Y$, pak tuto limitu nazýváme derivací zobrazení f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Definice 170

Nechť Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in Y$, pak tuto limitu nazýváme derivací zobrazení f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Fakt 171

Nechť Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Pokud existuje $f'(a)$, pak pro každé $\phi \in Y^*$ je $(\phi \circ f)'(a) = \phi(f'(a))$.

Definice 172

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou. Na $\rho(x)$ definujeme rezolventu (též rezolventní zobrazení) prvku x předpisem

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Definice 172

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou. Na $\rho(x)$ definujeme rezolventu (též rezolventní zobrazení) prvku x předpisem

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak definujeme rezolventu vzhledem k algebře A_{e}.

Definice 172

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou. Na $\rho(x)$ definujeme rezolventu (též rezolventní zobrazení) prvku x předpisem

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak definujeme rezolventu vzhledem k algebře A_{e}.

Tvrzení 173

Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak zobrazení $\lambda \mapsto R_x(\lambda)$ má derivaci v každém bodě množiny $\rho(x)$.

Definice 174

Nechť Y je komplexní normovaný lineární prostor, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f\colon \Omega \to Y$. Řekneme, že f je **holomorfní** na Ω, jestliže pro každé $z \in \Omega$ existuje $f'(z)$.

Definice 174

Nechť Y je komplexní normovaný lineární prostor, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f\colon \Omega \to Y$. Řekneme, že f je holomorfní na Ω, jestliže pro každé $z \in \Omega$ existuje $f'(z)$.

Věta 175 (Liouvilleova věta)

Nechť Y je komplexní normovaný lineární prostor a $f\colon \mathbb{C} \to Y$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Je-li f omezené, pak je konstantní.

Věta 176

Nechť A je komplexní Banachova algebra a $x \in A$.

(a) *Rezolventní zobrazení R_x je holomorfní na $\rho(x)$.*

(b) *Je-li A netriviální, pak $\sigma(x) \neq \emptyset$.*

(c) $r(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ *(tzv. Beurlingův-Gelfandův vzorec).*

Věta 176

Nechť A je komplexní Banachova algebra a $x \in A$.

(a) *Rezolventní zobrazení R_x je holomorfní na $\rho(x)$.*

(b) *Je-li A netriviální, pak $\sigma(x) \neq \emptyset$.*

(c) $r(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ *(tzv. Beurlingův-Gelfandův vzorec).*

Důsledek 177

Je-li A komplexní Banachova algebra, $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r(x)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$ konverguje absolutně. Má-li tedy A jednotku, pak $R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.

Věta 178 (S. Mazur (1938), I. M. Gelfand (1941))

Nechť A je netriviální komplexní Banachova algebra s jednotkou. Pokud $A^{\times} = A \setminus \{0\}$*, pak A je izomorfní* $\mathbb{C}$*. Pokud navíc* $\|e\| = 1$*, pak A je izometricky izomorfní* $\mathbb{C}$*.*

Nechť X je komplexní Banachův prostor, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta a $f\colon \langle\gamma\rangle \to X$ spojité zobrazení. Integrál f podél γ definujeme předpisem

$$\int_\gamma f = \int_{[a,b]} \gamma'(t) f(\gamma(t)) \,\mathrm{d}\lambda(t).$$

Nechť X je komplexní Banachův prostor, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta a $f\colon \langle\gamma\rangle \to X$ spojité zobrazení. Integrál f podél γ definujeme předpisem

$$\int_\gamma f = \int_{[a,b]} \gamma'(t) f(\gamma(t)) \,\mathrm{d}\lambda(t).$$

Integrál podél řetězce $\Gamma = \gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_n$ v $\mathbb{C}$ ze spojitého zobrazení $f\colon \langle\Gamma\rangle \to X$ definujeme předpisem

$$\int_\Gamma f = \int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f.$$

Lemma 179

Nechť Γ je řetězec v $\mathbb{C}$, X je komplexní Banachův prostor, $f\colon \langle\Gamma\rangle \to X$ je spojité a $\phi \in X^*$. Pak $\phi\left(\int_\Gamma f\right) = \int_\Gamma \phi \circ f$.

Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak řekneme, že cykl Γ obíhá K v Ω, pokud $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K$, $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ pro $z \in K$ a $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Věta 180

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená,* X *je komplexní Banachův prostor a* $f : \Omega \to X$ *je holomorfní. Jsou-li* Γ_1, Γ_2 *dva cykly v* Ω *takové, že* $\mathrm{ind}_{\Gamma_1}(z) = \mathrm{ind}_{\Gamma_2}(z)$ *pro každé* $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$*, pak* $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$*.*

Věta 180

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, X je komplexní Banachův prostor a $f\colon \Omega \to X$ je holomorfní. Jsou-li Γ_1, Γ_2 dva cykly v Ω takové, že $\operatorname{ind}_{\Gamma_1}(z) = \operatorname{ind}_{\Gamma_2}(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, pak $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.

Definice 181

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li $f \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak definujeme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f R_x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\alpha)(\alpha e - x)^{-1} \, \mathrm{d}\alpha,$$

kde Γ je libovolný cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω.

Lemma 182

Nechť (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou, A je Banachova algebra a* $f \in L_1(\mu, A)$*. Pak pro každé* $x \in A$ *a každou měřitelnou* $E \subset \Omega$ *platí, že*

$$x \left(\int_E f d\mu \right) = \int_E x f(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \quad a \quad \left(\int_E f \, \mathrm{d}\mu \right) x = \int_E f(t) x \, \mathrm{d}\mu(t).$$

Fakt 183

Nechť G je grupa. Jsou-li $u, v \in G$ takové, že $uv = vu$, pak i $u^{-1}v^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, $uv^{-1} = v^{-1}u$ a $u^{-1}v = vu^{-1}$.

Fakt 183

Nechť G je grupa. Jsou-li $u, v \in G$ takové, že $uv = vu$, pak i $u^{-1}v^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, $uv^{-1} = v^{-1}u$ a $u^{-1}v = vu^{-1}$.

Lemma 184

Nechť A je algebra s jednotkou, $x \in A$ a $\mu, \nu \in \rho(x)$.

(a) $R_x(\mu)R_x(\nu) = R_x(\nu)R_x(\mu)$.

(b) $R_x(\mu) - R_x(\nu) = (\nu - \mu)R_x(\mu)R_x(\nu)$ *(tzv. rezolventní identita).*

Věta 185 (holomorfní kalkulus)

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 181, má následující vlastnosti:

(a) Φ *je algebrový homomorfismus, pro který navíc* $\Phi(1) = e$ *a* $\Phi(Id) = x$.

Věta 185 (holomorfní kalkulus)

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 181, má následující vlastnosti:

(a) *Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \to f(x)$.*

Věta 185 (holomorfní kalkulus)

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 181, má následující vlastnosti:

(a) *Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \to f(x)$.*

(c) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

Věta 185 (holomorfní kalkulus)

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 181, má následující vlastnosti:

(a) *Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \to f(x)$.*

(c) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (tzv. věta o obrazu spektra).*

Věta 185 (holomorfní kalkulus)

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$*,* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřené okolí* $\sigma(x)$ *a* $f \in H(\Omega)$*. Zobrazení* $\Phi\colon H(\Omega) \to A$*, kde* $\Phi(g) = g(x)$ *z Definice 181, má následující vlastnosti:*

(a) Φ *je algebrový homomorfismus, pro který navíc* $\Phi(1) = e$ *a* $\Phi(Id) = x$*.*

(b) *Pokud* $f_n \to f$ *lokálně stejnoměrně v* $H(\Omega)$*, pak* $f_n(x) \to f(x)$*.*

(c) $f(x) \in A^\times$*, právě když* $f(\lambda) \neq 0$ *pro každé* $\lambda \in \sigma(x)$*. V tom případě je* $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$*.*

(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ *(tzv. věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud* $g \in H(\Omega_1)$*, kde* Ω_1 *je otevřené okolí* $f(\sigma(x))$*, pak* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$*.*

Věta 185 (holomorfní kalkulus)

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 181, má následující vlastnosti:

(a) *Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \to f(x)$.*

(c) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (tzv. věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $g \in H(\Omega_1)$, kde Ω_1 je otevřené okolí $f(\sigma(x))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

(f) *Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.*

Věta 185 (holomorfní kalkulus)

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 181, má následující vlastnosti:

(a) *Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \to f(x)$.*

(c) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (tzv. věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $g \in H(\Omega_1)$, kde Ω_1 je otevřené okolí $f(\sigma(x))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

(f) *Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.*

Navíc pokud zobrazení $\Psi\colon H(\Omega) \to A$ splňuje (a) a (b), pak $\Psi = \Phi$.

Definice 186

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Homomorfismus $\varphi\colon A \to \mathbb{K}$ nazýváme multiplikativním lineárním funkcionálem (tedy φ je lineární a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pro všechna $x, y \in A$).

Definice 186

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Homomorfismus $\varphi\colon A \to \mathbb{K}$ nazýváme multiplikativním lineárním funkcionálem (tedy φ je lineární a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pro všechna $x, y \in A$). Množinu všech nenulových multiplikativních lineárních funkcionálů na A značíme $\Delta(A)$.

Tvrzení 187

Nechť A je algebra. Každý multiplikativní lineární funkcionál φ na A má jednoznačné rozšíření $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$ dané vzorcem $\widetilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda$ a $\Delta(A_e) = \{\widetilde{\varphi};\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\}$.

Tvrzení 188

Nechť A je algebra a $\varphi \in \Delta(A)$. *Pro každé* $x \in A$ *je* $\varphi(x) \in \sigma(x)$, *a tedy* $|\varphi(x)| \leq r(x)$.

Tvrzení 188

Nechť A je algebra a $\varphi \in \Delta(A)$*. Pro každé* $x \in A$ *je* $\varphi(x) \in \sigma(x)$*, a tedy* $|\varphi(x)| \leq r(x)$*.*

Důsledek 189

Nechť A je Banachova algebra. Pak $\Delta(A) \subset B_{A^*}$ *(speciálně, každý multiplikativní lineární funkcionál na A je automaticky spojitý). Pokud A má jednotku, pak* $\|\varphi\| \geq \frac{1}{\|e\|}$ *pro každé* $\varphi \in \Delta(A)$*. Speciálně, je-li* $\|e\| = 1$*, pak* $\Delta(A) \subset S_{A^*}$*.*

Definice 190

Nechť A je algebra. **Maximálním ideálem** v A nazveme takový vlastní ideál v A, který je maximální vzhledem k uspořádání všech vlastních ideálů v A inkluzí.

Definice 190

Nechť A je algebra. Maximálním ideálem v A nazveme takový vlastní ideál v A, který je maximální vzhledem k uspořádání všech vlastních ideálů v A inkluzí.

Tvrzení 191

Nechť A je algebra s jednotkou. Pak každý vlastní ideál v A je obsažen v nějakém maximálním ideálu v A.

Definice 190

Nechť A je algebra. Maximálním ideálem v A nazveme takový vlastní ideál v A, který je maximální vzhledem k uspořádání všech vlastních ideálů v A inkluzí.

Tvrzení 191

Nechť A je algebra s jednotkou. Pak každý vlastní ideál v A je obsažen v nějakém maximálním ideálu v A.

Tvrzení 192

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Je-li I vlastní ideál v A, je i $\overline{I}$ vlastní ideál v A. Tedy každý maximální ideál v A je uzavřený.

Lemma 193

Nechť A je komutativní algebra s jednotkou a $x \in A$ není invertibilní. Pak hlavní ideál xA je vlastní.

Věta 194

Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou. Pak zobrazení $\Phi\colon \varphi \mapsto \operatorname{Ker}\varphi$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a množinou všech maximálních ideálů v A.

Věta 194

Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou. Pak zobrazení $\Phi\colon \varphi \mapsto \operatorname{Ker}\varphi$ *je bijekce mezi* $\Delta(A)$ *a množinou všech maximálních ideálů v A.*

Důsledek 195

Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou a I je vlastní ideál v A. Pak existuje $\varphi \in \Delta(A)$ *takový, že* $\varphi\restriction_I = 0$.

Věta 196

Nechť A je Banachova algebra a $M = \Delta(A) \cup \{0\} \subset (B_{A^*}, w^*)$ je množina všech lineárních multiplikativních funkcionálů na A. Pak M je kompaktní, $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní a má-li A jednotku, pak $\Delta(A)$ je kompaktní. Není-li $\Delta(A)$ kompaktní, pak M je Alexandrovova kompaktifikace $\Delta(A)$.

Věta 196

Nechť A je Banachova algebra a $M = \Delta(A) \cup \{0\} \subset (B_{A^*}, w^*)$ *je množina všech lineárních multiplikativních funkcionálů na A. Pak M je kompaktní,* $\Delta(A)$ *je lokálně kompaktní a má-li A jednotku, pak* $\Delta(A)$ *je kompaktní. Není-li* $\Delta(A)$ *kompaktní, pak M je Alexandrovova kompaktifikace* $\Delta(A)$*.*
Zobrazení $\Phi\colon M \to \Delta(A_\mathrm{e})$*, kde* $\Phi(\varphi) = \widetilde{\varphi}$ *je jednoznačné rozšíření* φ *na prvek* $\Delta(A_\mathrm{e})$*, je homeomorfismus.*

Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak definujeme algebraicky duální zobrazení $T^{\#}\colon Y^{\#} \to X^{\#}$ předpisem $T^{\#}f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^{\#}$ a $x \in X$.

Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak definujeme algebraicky duální zobrazení $T^{\#}\colon Y^{\#} \to X^{\#}$ předpisem $T^{\#}f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^{\#}$ a $x \in X$.

Lemma 197

Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární bijekce. Pak $T^{\#}$ je bijekce a $(T^{\#})^{-1} = (T^{-1})^{\#}$.

Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak definujeme algebraicky duální zobrazení $T^{\#}\colon Y^{\#} \to X^{\#}$ předpisem $T^{\#}f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^{\#}$ a $x \in X$.

Lemma 197

Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární bijekce. Pak $T^{\#}$ je bijekce a $(T^{\#})^{-1} = (T^{-1})^{\#}$.

Tvrzení 198

Nechť A, B jsou Banachovy algebry a $\Phi\colon A \to B$ je algebraický izomorfismus. Pak zobrazení $\Psi = \Phi^{\#}\restriction_{\Delta(B)}$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ na $\Delta(A)$.

Tvrzení 199

Nechť S, T jsou topologické prostory a $h\colon S \to T$ je spojité a na. Pak $\Phi\colon C_{\mathrm{b}}(T) \to C_{\mathrm{b}}(S)$, $\Phi(f) = f \circ h$ je izometrický izomorfismus Banachovy algebry $C_{\mathrm{b}}(T)$ do Banachovy algebry $C_{\mathrm{b}}(S)$.

Tvrzení 199

Nechť S, T jsou topologické prostory a $h\colon S \to T$ je spojité a na. Pak $\Phi\colon C_{\mathrm{b}}(T) \to C_{\mathrm{b}}(S)$, $\Phi(f) = f \circ h$ je izometrický izomorfismus Banachovy algebry $C_{\mathrm{b}}(T)$ do Banachovy algebry $C_{\mathrm{b}}(S)$. Jsou-li S a T lokálně kompaktní Hausdorffovy prostory a h je homeomorfismus, pak $\Phi\restriction_{C_0(T)}$ je izometrický izomorfismus Banachových algeber $C_0(T)$ a $C_0(S)$.

Věta 200

Nechť K, L jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Banachovy algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou izometricky izomorfní.*

(ii) *Algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou algebraicky izomorfní.*

(iii) *Prostory K a L jsou homeomorfní.*

Definice 201

Komutativní algebra A se nazývá polojednoduchá, pokud $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. pokud $\bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi;\ \varphi \in \Delta(A)\} = \{0\}$.

Definice 201

Komutativní algebra A se nazývá polojednoduchá, pokud $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. pokud $\bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi;\ \varphi \in \Delta(A)\} = \{0\}$.

Věta 202

Nechť A, B jsou Banachovy algebry. Pokud B je komutativní a polojednoduchá, pak každý homomorfismus z A do B je automaticky spojitý.

Definice 201

Komutativní algebra A se nazývá polojednoduchá, pokud $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. pokud $\bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi;\ \varphi \in \Delta(A)\} = \{0\}$.

Věta 202

Nechť A, B jsou Banachovy algebry. Pokud B je komutativní a polojednoduchá, pak každý homomorfismus z A do B je automaticky spojitý.

Důsledek 203

Nechť A je komutativní polojednoduchá algebra. Pak všechny normy na A, ve kterých je A Banachova algebra, jsou ekvivalentní.

Definice 204

Nechť A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$. Pro $x \in A$ definujeme $\widehat{x} \colon \Delta(A) \to \mathbb{K}$ předpisem $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, tj. $\widehat{x} = \varepsilon_x\restriction_{\Delta(A)}$. Funkci $\widehat{x}$ říkáme Gelfandova transformace prvku x.

Definice 204

Nechť A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$. Pro $x \in A$ definujeme $\widehat{x}\colon \Delta(A) \to \mathbb{K}$ předpisem $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, tj. $\widehat{x} = \varepsilon_x\restriction_{\Delta(A)}$. Funkci $\widehat{x}$ říkáme Gelfandova transformace prvku x.

Věta 205

Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Má-li A jednotku, pak $\operatorname{Rng}\widehat{x} = \sigma(x)$. Nemá-li A jednotku, pak $\sigma(x) \setminus \{0\} \subset \operatorname{Rng}\widehat{x} \subset \sigma(x)$.

Definice 204

Nechť A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$. Pro $x \in A$ definujeme $\widehat{x}\colon \Delta(A) \to \mathbb{K}$ předpisem $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, tj. $\widehat{x} = \varepsilon_x\restriction_{\Delta(A)}$. Funkci $\widehat{x}$ říkáme Gelfandova transformace prvku x.

Věta 205

Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Má-li A jednotku, pak $\operatorname{Rng}\widehat{x} = \sigma(x)$. Nemá-li A jednotku, pak $\sigma(x) \setminus \{0\} \subset \operatorname{Rng}\widehat{x} \subset \sigma(x)$.

Důsledek 206

Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\|\widehat{x}\| = r(x)$.

Definice 207

Nechť A je Banachova algebra. Zobrazení $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$, $\Gamma(x) = \widehat{x}$ nazýváme Gelfandovou transformací algebry A.

Definice 207

Nechť A je Banachova algebra. Zobrazení $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$, $\Gamma(x) = \widehat{x}$ nazýváme Gelfandovou transformací algebry A.

Tvrzení 208

Nechť A je Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Γ je homomorfismus.*

(b) *Podalgebra $\Gamma(A) \subset C_0(\Delta(A))$ odděluje body $\Delta(A)$.*

(c) *Γ je prostá, právě když $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. právě tehdy, pokud A je komutativní a polojednoduchá.*

Věta 209

Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:

(a) Γ *je spojitý homomorfismus a* $\|\Gamma\| \leq 1$.

(b) Γ *je izomorfismus do, právě když existuje* $K > 0$ *takové, že* $\|x^2\| \geq K\|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

(c) Γ *je izometrie do právě tehdy, když* $\|x^2\| = \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

Definice 210

Nechť A je pologrupa a $M \subset A$. Pak množina $M^{\mathrm{c}} = \{a \in A;\ ax = xa \text{ pro každé } x \in M\}$, tj. množina všech prvků A komutujících s každým prvkem M, se nazývá komutant množiny M.

Definice 210

Nechť A je pologrupa a $M \subset A$. Pak množina $M^{\mathrm{c}} = \{a \in A;\ ax = xa$ pro každé $x \in M\}$, tj. množina všech prvků A komutujících s každým prvkem M, se nazývá komutant množiny M.

Tvrzení 211

Nechť A je pologrupa a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $M \subset (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$.

(b) *Množina* $M^{\mathrm{c}} \cap (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ *komutuje.*

(c) *Pokud komutuje M, pak komutuje též* $(M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$.

Tvrzení 212

Nechť A je algebra a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *M^c je podalgebra A.*

(b) *Má-li A jednotku, pak $e \in M^c$.*

(c) *Je-li A normovaná, pak M^c je uzavřená.*

Tvrzení 212

Nechť A je algebra a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *M^{c} je podalgebra A.*
(b) *Má-li A jednotku, pak $e \in M^{\mathrm{c}}$.*
(c) *Je-li A normovaná, pak M^{c} je uzavřená.*

Tvrzení 213

Nechť A je algebra s jednotkou e a nechť $M \subset A$ komutuje. Pak $B = (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ je komutativní algebra s jednotkou e, $M \subset B$ a $B^{\times} = A^{\times} \cap B$. Tedy pro každé $x \in B$ platí, že $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Věta 214

Nechť A je komplexní Banachova algebra a $x, y \in A$ spolu komutují. Pak platí následující:

(a) $\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$ *a* $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.

(b) $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$ *a* $r(xy) \leq r(x)r(y)$.

Věta 215

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y\rangle_{H_1}.$$

Věta 215

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j \colon H_j \to H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Löwigovy-Fréchetovy-Rieszovy věty.

Věta 215

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j \colon H_j \to H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Löwigovy-Fréchetovy-Rieszovy věty.

Definice 216

Operátor $T^\star$ z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T.

Věta 217

Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.*

(c) *Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. Dále $(Id_{H_1})^\star = Id_{H_1}$.*

(d) *Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak $\|T^\star \circ T\| = \|T \circ T^\star\| = \|T\|^2$.*

(e) *$T^\star$ je izomorfismus, právě když T je izomorfismus.*

(f) *$T^\star$ je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

Definice 218

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $^\star\colon A \to A$ se nazývá algebrová involuce, pokud má následující vlastnosti:

- $(x+y)^\star = x^\star + y^\star$ pro každé $x, y \in A$,
- $(\lambda x)^\star = \overline{\lambda} x^\star$ pro každé $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $(xy)^\star = y^\star x^\star$ pro každé $x, y \in A$,
- $(x^\star)^\star = x$ pro každé $x \in A$ (tj. zobrazení * je involuce).

Definice 218

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $^\star\colon A \to A$ se nazývá algebrová involuce, pokud má následující vlastnosti:

- $(x+y)^\star = x^\star + y^\star$ pro každé $x, y \in A$,
- $(\lambda x)^\star = \overline{\lambda} x^\star$ pro každé $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $(xy)^\star = y^\star x^\star$ pro každé $x, y \in A$,
- $(x^\star)^\star = x$ pro každé $x \in A$ (tj. zobrazení * je involuce).

Algebře, na které je definována algebrová involuce, budeme říkat algebra s involucí.

Fakt 219

Nechť A je algebra s involucí. Pak $(a, \alpha)^\star = (a^\star, \overline{\alpha})$ pro $(a, \alpha) \in A_\mathrm{e}$ je involuce na A_e rozšiřující involuci z A.

Fakt 219

Nechť A je algebra s involucí. Pak $(a, \alpha)^\star = (a^\star, \overline{\alpha})$ pro $(a, \alpha) \in A_e$ je involuce na A_e rozšiřující involuci z A.

Tvrzení 220

Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li e levá nebo pravá jednotka v A, pak e je jednotka a $e^\star = e$.*

(b) *Nechť A má jednotku. Pak $x \in A^\times$ právě tehdy, když $x^\star \in A^\times$. V tomto případě pak $(x^\star)^{-1} = (x^{-1})^\star$.*

(c) *$\lambda \in \sigma(x)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma(x^\star)$.*

Tvrzení 221

Nechť A je komutativní polojednoduchá Banachova algebra. Pak každá involuce na A je spojitá.

Definice 222

Banachova algebra A s involucí se nazývá B*-algebra, pokud pro každé $x \in A$ je

$$\|x^\star x\| = \|x\|^2.$$

Definice 222

Banachova algebra A s involucí se nazývá B*-algebra, pokud pro každé $x \in A$ je

$$\|x^\star x\| = \|x\|^2.$$

Lemma 223

Nechť A je normovaná algebra s involucí. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\|x^\star x\| \geq \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

(ii) $\|xx^\star\| \geq \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

(iii) $\|x^\star x\| = \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

(iv) $\|xx^\star\| = \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

Ve všech případech je pak $\|x^\star\| = \|x\|$ *pro každé* $x \in A$.

Tvrzení 224

Nechť A je $B^\star$-algebra bez jednotky. Pak na A_e s involucí z Faktu 219 existuje norma $|||\cdot|||$ rozšiřující původní normu na A (a ekvivalentní normě z Tvrzení 148) taková, že A_e je $B^\star$-algebra.

Definice 225

Nechť A je algebra s involucí. Prvek $x \in A$ se nazývá **samoadjungovaný**, pokud $x^\star = x$.

Definice 225

Nechť A je algebra s involucí. Prvek $x \in A$ se nazývá samoadjungovaný, pokud $x^\star = x$.

Fakt 226

Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Prvky $x + x^\star$, $x^\star x$, $xx^\star$, a v komplexním případě i prvek $i(x - x^\star)$ jsou samoadjungované.*

Definice 225

Nechť A je algebra s involucí. Prvek $x \in A$ se nazývá samoadjungovaný, pokud $x^\star = x$.

Fakt 226

Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Prvky $x + x^\star$, $x^\star x$, $xx^\star$, a v komplexním případě i prvek $i(x - x^\star)$ jsou samoadjungované.*

(b) *Je-li x samoadjungovaný, je samoadjungovaný i prvek tx pro $t \in \mathbb{R}$.*

Definice 225

Nechť A je algebra s involucí. Prvek $x \in A$ se nazývá **samoadjungovaný**, pokud $x^\star = x$.

Fakt 226

Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Prvky $x + x^\star$, $x^\star x$, $xx^\star$, a v komplexním případě i prvek $i(x - x^\star)$ jsou samoadjungované.*

(b) *Je-li x samoadjungovaný, je samoadjungovaný i prvek tx pro $t \in \mathbb{R}$.*

(c) *Je-li A komplexní, pak existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$. Pro ně pak platí, že $x^\star = u - iv$.*

Definice 227

Nechť A je algebra s involucí.

- Prvek $x \in A$ se nazývá normální, pokud komutuje s $x^\star$, tj. pokud $x^\star x = xx^\star$.

Definice 227

Nechť A je algebra s involucí.

- Prvek $x \in A$ se nazývá normální, pokud komutuje s $x^\star$, tj. pokud $x^\star x = xx^\star$.
- Pokud A má jednotku, pak prvek $x \in A$ se nazývá unitární, splňuje-li rovnosti $x^\star x = xx^\star = e$, neboli $x^{-1} = x^\star$.

Věta 228

Nechť A je $B^\star$-algebra a $x \in A$.

(a) *Je-li x normální, pak $\|x^n\| = \|x\|^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro A komplexní je $r(x) = \|x\|$.*

Věta 228

Nechť A je $B^\star$-algebra a $x \in A$.

(a) *Je-li x normální, pak $\|x^n\| = \|x\|^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro A komplexní je $r(x) = \|x\|$.*

(b) *Je-li A komplexní, pak $r(x^\star x) = r(xx^\star) = \|x\|^2$.*

Věta 228

Nechť A je $B^\star$-algebra a $x \in A$.

(a) *Je-li x normální, pak $\|x^n\| = \|x\|^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro A komplexní je $r(x) = \|x\|$.*

(b) *Je-li A komplexní, pak $r(x^\star x) = r(xx^\star) = \|x\|^2$.*

(c) *Má-li A jednotku a x je unitární, pak $\|x\| = 1$ a $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| = 1\}$.*

Věta 228

Nechť A je $B^\star$-algebra a $x \in A$.

(a) *Je-li x normální, pak $\|x^n\| = \|x\|^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro A komplexní je $r(x) = \|x\|$.*

(b) *Je-li A komplexní, pak $r(x^\star x) = r(xx^\star) = \|x\|^2$.*

(c) *Má-li A jednotku a x je unitární, pak $\|x\| = 1$ a $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| = 1\}$.*

(d) *Je-li x samoadjungovaný, pak $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.*

Důsledek 229

Nechť A je komplexní algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma, se kterou A je $B^\star$-algebra.

Definice 230

Nechť A a B jsou algebry s involucí. Pak algebrový homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ nazýváme *-homomorfismus, pokud zachovává operaci *, tj. $\Phi(x^\star) = \Phi(x)^\star$ pro každé $x \in A$.

Definice 230

Nechť A a B jsou algebry s involucí. Pak algebrový homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ nazýváme *-homomorfismus, pokud zachovává operaci *, tj. $\Phi(x^\star) = \Phi(x)^\star$ pro každé $x \in A$.

Důsledek 231

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra. Pak každý multiplikativní lineární funkcionál na A je *-homomorfismus.

Definice 230

Nechť A a B jsou algebry s involucí. Pak algebrový homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ nazýváme *-homomorfismus, pokud zachovává operaci *, tj. $\Phi(x^\star) = \Phi(x)^\star$ pro každé $x \in A$.

Důsledek 231

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra. Pak každý multiplikativní lineární funkcionál na A je *-homomorfismus.

Důsledek 232

Nechť A, B jsou komplexní $B^\star$-algebry a $\Phi\colon A \to B$ je *-homomorfismus. Pak Φ je automaticky spojitý a navíc $\|\Phi\| \leq 1$.

Důsledek 233

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a B je její $B^\star$-podalgebra. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $B^\times = A^\times \cap B$.

Důsledek 233

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a B je její $B^\star$-podalgebra. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $B^\times = A^\times \cap B$. Dále nechť $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Věta 234 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943))

Nechť A je komplexní komutativní $B^\star$-algebra. Pak Gelfandova transformace je izometrický $\star$-izomorfismus A na $C_0(\Delta(A))$.

Důsledek 235

Komplexní komutativní B*-algebra A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.

Důsledek 235

Komplexní komutativní $B^\star$-algebra A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.

Důsledek 236

Nechť A a B jsou komplexní komutativní $B^\star$-algebry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *A a B jsou izometricky $\star$-izomorfní.*

(ii) *A a B jsou algebraicky izomorfní.*

(iii) *Prostory $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.*

Věta 237 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943), I. Kaplansky (1953))

Každou komplexní $B^\star$-algebru lze izometrickým $\star$-izomorfismem vnořit do $\mathcal{L}(H)$ pro vhodný komplexní Hilbertův prostor H.

7. Spojitý kalkulus pro normální prvky B*-algeber

Věta 238 (Bent Fuglede (1950), Calvin R. Putnam (1951))

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra, $x \in A$, a nechť $a, b \in A$ jsou normální a platí, že $ax = xb$. Pak $a^\star x = xb^\star$.

Definice 239

Nechť A je algebra a $M \subset A$. Algebrovým obalem M nazveme množinu

$$\operatorname{alg} M = \bigcap \{B \supset M;\ B \text{ je podalgebra } A\}.$$

Definice 239

Nechť A je algebra a $M \subset A$. Algebrovým obalem M nazveme množinu

$$\operatorname{alg} M = \bigcap \{B \supset M;\ B \text{ je podalgebra } A\}.$$

Tvrzení 240

Nechť A je algebra a $M \subset A$. Pak
$\operatorname{alg} M = \operatorname{span}\{x_1 x_2 \cdots x_n;\ x_1, \dots, x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$*.*

Definice 241

Nechť A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak definujeme uzavřený algebrový obal M jako

$$\overline{\operatorname{alg}}\, M = \bigcap \{B \supset M;\ B \text{ je uzavřená podalgebra } A\}.$$

Definice 241

Nechť A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak definujeme uzavřený algebrový obal M jako

$$\overline{\operatorname{alg}} M = \bigcap \{B \supset M;\ B \text{ je uzavřená podalgebra } A\}.$$

Tvrzení 242

Nechť A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak $\overline{\operatorname{alg}} M = \overline{\operatorname{alg} M}$.

Fakt 243

Nechť A, B jsou algebry a $M \subset A$. Pak každý algebrový homomorfismus $\Phi\colon \operatorname{alg} M \to B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M.

Fakt 243

Nechť A, B jsou algebry a $M \subset A$. Pak každý algebrový homomorfismus $\Phi\colon \operatorname{alg} M \to B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M. Jsou-li A, B normované algebry, pak každý spojitý algebrový homomorfismus $\Phi\colon \overline{\operatorname{alg}} M \to B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M.

Tvrzení 244

Nechť A je $B^\star$-algebra a nechť $M \subset A$ komutuje a je uzavřená na involuci. Pak $\overline{\mathrm{alg}}\, M$ je komutativní $B^\star$-podalgebra A.

Nechť A je komplexní B*-algebra s jednotkou a $x \in A$ je normální. Položme $B = \overline{\text{alg}}\{e, x, x^\star\}$. Pak můžeme definovat

$$f(x) = \Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B(x)). \tag{1}$$

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.*

(f) *Je-li $C \subset A$ komutativní $B^\star$-podalgebra obsahující e a x, pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\text{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.*

(f) *Je-li $C \subset A$ komutativní $B^\star$-podalgebra obsahující e a x, pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.*

(g) *Pokud $g \in C\big(f(\sigma(x))\big)$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.*

(f) *Je-li $C \subset A$ komutativní $B^\star$-podalgebra obsahující e a x, pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.*

(g) *Pokud $g \in C\big(f(\sigma(x))\big)$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

(h) *Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g\restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 185.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.*

(f) *Je-li $C \subset A$ komutativní $B^\star$-podalgebra obsahující e a x, pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.*

(g) *Pokud $g \in C\big(f(\sigma(x))\big)$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

(h) *Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g\restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 185.*

(i) *Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.*

(f) *Je-li $C \subset A$ komutativní $B^\star$-podalgebra obsahující e a x, pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.*

(g) *Pokud $g \in C\big(f(\sigma(x))\big)$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

(h) *Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g\restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 185.*

(i) *Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.*

(j) *Je-li $0 \in \sigma(x)$ a $f(0) = 0$, pak $f(x) \in \overline{\mathrm{alg}}\{x, x^\star\}$.*

Věta 245 (spojitý kalkulus)

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.*

(d) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).*

(e) *Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.*

(f) *Je-li $C \subset A$ komutativní $B^\star$-podalgebra obsahující e a x, pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.*

(g) *Pokud $g \in C\big(f(\sigma(x))\big)$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

(h) *Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g{\restriction_{\sigma(x)}}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 185.*

(i) *Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.*

(j) *Je-li $0 \in \sigma(x)$ a $f(0) = 0$, pak $f(x) \in \overline{\mathrm{alg}}\{x, x^\star\}$.*

Nemá-li A jednotku, provedeme celou konstrukci v A_e. Pokud pro $f \in C(\sigma(x))$ platí, že $f(0) = 0$, pak $f(x) \in A$.

Definice 246

Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$ je samoadjungovaný. Řekneme, že x je nezáporný, pokud $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Definice 246

Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$ je samoadjungovaný. Řekneme, že x je nezáporný, pokud $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Tvrzení 247

Nechť A je algebra s involucí a $x, y \in A$ jsou nezáporné.

(a) *Je-li $t \geq 0$, pak tx je nezáporný.*

(b) *Je-li A komplexní B^*-algebra, pak $x + y$ je nezáporný.*

(c) *Je-li A komplexní Banachova algebra a x a y spolu komutují, pak xy je nezáporný.*

Fakt 248

Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a $x \in A$.

(a) *Je-li x nezáporný, pak $|x| = x$.*

(b) *Je-li x samoadjungovaný, pak $|x|^2 = x^2$.*

(c) *Je-li x nezáporný, pak $(\sqrt{x}\,)^2 = x$. Navíc $\sqrt{x}$ je jediné nezáporné $y \in A$ takové, že $y^2 = x$.*

(d) *Je-li x samoadjungovaný, pak $\sqrt{x^2} = |x|$.*

V. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 249

Jsou-li H_1, H_2 Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, pak platí, že

(a) $\operatorname{Ker} T^\star = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^\star)^\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^\star)^\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^\star} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Definice 250

Nechť X, Y jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $S\colon X \times X \to Y$ se nazývá seskvilineární, pokud je lineární v první souřadnici a sdruženě lineární ve druhé souřadnici.

Definice 250

Nechť X, Y jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $S\colon X \times X \to Y$ se nazývá seskvilineární, pokud je lineární v první souřadnici a sdruženě lineární ve druhé souřadnici. V případě, že $Y = \mathbb{K}$, se S nazývá seskvilineární forma.

Tvrzení 251 (polarizační vzorec)

Nechť X, Y jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$ a $S\colon X \times X \to Y$ je seskvilineární zobrazení. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že

$$S(x, y) + S(y, x) = \frac{1}{2}\big(S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y)\big).$$

Tvrzení 251 (polarizační vzorec)

Nechť X, Y jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$ a $S\colon X \times X \to Y$ je seskvilineární zobrazení. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že

$$S(x,y) + S(y,x) = \frac{1}{2}\big(S(x+y,x+y) - S(x-y,x-y)\big).$$

Je-li $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že

$$\begin{aligned} S(x,y) = \frac{1}{4}\big(&S(x+y,x+y) - S(x-y,x-y) + \\ &+ iS(x+iy,x+iy) - iS(x-iy,x-iy)\big). \end{aligned}$$

Věta 252

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $T\colon X \to X$ je lineární operátor. Nechť dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *X je komplexní.*
- *X je Hilbertův a T je spojitý a samoadjungovaný.*

Jestliže $\langle Tx, x\rangle = 0$ pro každé $x \in X$, pak $T = 0$.

Věta 252

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $T\colon X \to X$ je lineární operátor. Nechť dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *X je komplexní.*
- *X je Hilbertův a T je spojitý a samoadjungovaný.*

Jestliže $\langle Tx, x\rangle = 0$ pro každé $x \in X$, pak $T = 0$.

Důsledek 253

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $S, T\colon X \to X$ jsou lineární operátory. Nechť dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *X je komplexní.*
- *X je Hilbertův a S, T jsou spojité a samoadjungované.*

Pokud $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ pro každé $x \in X$, pak $S = T$.

Definice 254

Nechť X je normovaný lineární prostor a S je seskvilineární forma na X. Řekneme, že S je omezená, pokud $\sup_{x,y \in B_X} |S(x,y)| < +\infty$. V tom případě klademe $\|S\| = \sup_{x,y \in B_X} |S(x,y)|$.

Definice 254

Nechť X je normovaný lineární prostor a S je seskvilineární forma na X. Řekneme, že S je omezená, pokud $\sup_{x,y \in B_X} |S(x,y)| < +\infty$. V tom případě klademe $\|S\| = \sup_{x,y \in B_X} |S(x,y)|$.

Tvrzení 255

Nechť H je Hilbertův prostor. Je-li S omezená seskvilineární forma na H, pak existuje jednoznačně určený $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $S(x,y) = \langle Tx, y \rangle$ pro všechna $x, y \in H$. Navíc platí, že $\|T\| = \|S\|$.

Věta 256

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *T je normální.*

(ii) *$\langle T^\star x, T^\star y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle$ pro každé $x, y \in H$.*

(iii) *$\|T^\star x\| = \|Tx\|$ pro každé $x \in H$.*

Definice 257

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme **přibližným vlastním číslem** operátoru T, pokud existuje posloupnost $\{x_n\} \subset S_X$ taková, že $(\lambda I - T)x_n \to 0$.

Definice 257

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme přibližným vlastním číslem operátoru T, pokud existuje posloupnost $\{x_n\} \subset S_X$ taková, že $(\lambda I - T)x_n \to 0$. Množina všech přibližných vlastních čísel operátoru T se nazývá přibližné bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

Definice 257

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme přibližným vlastním číslem operátoru T, pokud existuje posloupnost $\{x_n\} \subset S_X$ taková, že $(\lambda I - T)x_n \to 0$. Množina všech přibližných vlastních čísel operátoru T se nazývá přibližné bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

Fakt 258

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\lambda \in \mathbb{K}$ je přibližným vlastním číslem T, právě když $\lambda I - T$ není izomorfismus do.

Definice 259

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $T \in \mathcal{L}(X)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x\rangle;\ x \in S_X\}$ se nazývá numerický range operátoru T.

Fakt 260

Nechť X je normovaný lineární prostor takový, že $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$ *(tj. X je buď komplexní, nebo reálný dimenze alespoň* 2*). Pak S_X je křivkově souvislá.*

Tvrzení 261

Nechť X je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$.

(a) $N_{\alpha I+\beta T} = \alpha + \beta N_T$ *pro libovolná* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(b) *Je-li* $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$, *pak množina* N_T *je křivkově souvislá.*

(c) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$.

(d) $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \subset \overline{N_T}$. *Je-li X Hilbertův, pak* $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \subset N_T$, *a tedy* $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.

Fakt 262

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou a involucí, $x \in A$ je normální a $\lambda \in \mathbb{K}$. Pak $\lambda e - x$ je normální.

Věta 263

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^\star$.

Věta 263

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^\star$.

(b) $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v* H *právě tehdy, když* T *je prostý.*

Věta 263

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^\star$.

(b) $\mathrm{Rng}\, T$ *je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.*

(c) *T je invertibilní právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$.*

Věta 263

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^\star$.

(b) $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.*

(c) *T je invertibilní právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$.*

(d) $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

Věta 263

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^\star$.

(b) $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.*

(c) *T je invertibilní právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$.*

(d) $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

(e) *$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^\star)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu λ je shodný s vlastním prostorem $T^\star$ příslušným vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$.*

Věta 263

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^\star$.

(b) $\mathrm{Rng}\, T$ *je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.*

(c) *T je invertibilní právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$.*

(d) $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

(e) *$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^\star)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu λ je shodný s vlastním prostorem $T^\star$ příslušným vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$.*

(f) *Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T, pak* $\mathrm{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \mathrm{Ker}(\lambda_2 I - T)$.

Věta 264

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pro každé $x, y \in H$.

Věta 264

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:

(a) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ *pro každé $x \in H$.*

Věta 264

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:

(a) *$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.*

(b) *$N_T \subset \mathbb{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, pak*
$$\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$$
a $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, a tedy číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.

Věta 264

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:

(a) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ *pro každé* $x \in H$.

(b) $N_T \subset \mathbb{R}$ *a označíme-li* $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, *pak*
$\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$
a $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, *a tedy číslo* $\|T\|$ *nebo* $-\|T\|$ *leží v* $\sigma(T)$.

(c) $r(T) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in N_T\} = \|T\|$.

Tvrzení 265

Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $N_T \subset \mathbb{R}$.

Tvrzení 265

Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $N_T \subset \mathbb{R}$.

Důsledek 266

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Je-li T samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$, právě když $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$. Je-li H komplexní, pak T je nezáporný (prvek algebry $\mathcal{L}(H)$), právě když $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$.

Věta 267

Nechť H je Hilbertův prostor a $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *P je samoadjungovaná.*

(ii) *P je normální.*

(iii) *P je ortogonální.*

Věta 267

Nechť H je Hilbertův prostor a $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *P je samoadjungovaná.*

(ii) *P je normální.*

(iii) *P je ortogonální.*

Tvrzení 268

Nechť H je Hilbertův prostor, $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak $\operatorname{Rng} S \perp \operatorname{Rng} T$ *právě tehdy, když* $ST = 0$.

Definice 269

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Operátor $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se nazývá unitární, pokud $T^\star \circ T = I_{H_1}$ a $T \circ T^\star = I_{H_2}$, neboli $T^{-1} = T^\star$.

Definice 269

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Operátor $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se nazývá unitární, pokud $T^\star \circ T = I_{H_1}$ a $T \circ T^\star = I_{H_2}$, neboli $T^{-1} = T^\star$.

Věta 270

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *T je unitární.*

(ii) *T je na a $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in H$.*

(iii) *T je izometrie na.*

Lemma 271

Nechť H_1*,* H_2 *jsou Hilbertovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$*.* *Nechť* Y *je uzavřený podprostor* H_2 *takový, že* $\operatorname{Rng} T \subset Y$ *a* $S \in \mathcal{L}(H_1, Y)$ *je definovaný jako* $Sx = Tx$ *pro* $x \in H_1$*.* *Pak* $S^\star = T^\star\restriction_Y$*.*

Věta 272

Nechť H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jedna dvojice operátorů $A \in \mathcal{L}(H_1)$ a $U \in \mathcal{L}(\overline{\operatorname{Rng} A}, \overline{\operatorname{Rng} T})$ taková, že $T = U \circ A$, A je nezáporný a U je unitární.

Věta 272

Nechť H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jedna dvojice operátorů $A \in \mathcal{L}(H_1)$ a $U \in \mathcal{L}(\overline{\operatorname{Rng} A}, \overline{\operatorname{Rng} T})$ taková, že $T = U \circ A$, A je nezáporný a U je unitární.
Je-li T izomorfismus, pak A je automorfismus H_1. Je-li T kompaktní, pak A je též kompaktní.

Věta 273

Nechť H je Hilbertův prostor. Pak $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{F}(H)}$.

Definice 274

Nechť A je množina a $f\colon A \to A$ je zobrazení. Množina $B \subset A$ se nazývá invariantní vůči f, pokud $f(B) \subset B$, tj. $f\restriction_B\colon B \to B$.

Fakt 275

Nechť H je Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ a $M \subset H$ je množina vlastních vektorů T (ne nutně všech).

(a) *Je-li $Y \subset H$ invariantní vůči T, pak $Y^{\perp}$ je invariantní vůči $T^{\star}$.*

(b) $\overline{\operatorname{span}}\, M$ *je invariantní vůči T.*

(c) *Je-li T normální, pak $\overline{\operatorname{span}}\, M$ i $(\overline{\operatorname{span}}\, M)^{\perp}$ jsou invariantní vůči T i $T^{\star}$.*

(d) *Nechť $Y \subset H$ je uzavřený podprostor invariantní vůči T i $T^{\star}$. Pak $(T\restriction_Y)^{\star} = T^{\star}\restriction_Y$. Je-li tedy T samoadjungovaný, resp. normální, pak $T\restriction_Y \in \mathcal{L}(Y)$ je samoadjungovaný, resp. normální.*

Věta 276 (spektrální rozklad normálního kompaktního operátoru; D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907))

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$. Dále předpokládejme, že

- *T je samoadjungovaný, nebo*
- *H je komplexní a T je normální.*

Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T. Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\operatorname{Rng} T}$ a pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n.

Věta 276 (spektrální rozklad normálního kompaktního operátoru; D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907))

Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$. Dále předpokládejme, že

- *T je samoadjungovaný, nebo*
- *H je komplexní a T je normální.*

Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T. Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\operatorname{Rng} T}$ a pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n. Je-li $\{\lambda_n\}_{n=1}^{M}$ prostá posloupnost všech vlastních čísel T a P_n je ortogonální projekce na $\operatorname{Ker}(\lambda_n I - T)$, pak

$$I = \sum_{n=1}^{M} P_n,$$

kde řada konverguje bodově bezpodmínečně (tj. $x = \sum_{n=1}^{M} P_n x$ bezpodmínečně pro každé $x \in H_1$) a

$$T = \sum_{n=1}^{M} \lambda_n P_n,$$

kde řada konverguje bezpodmínečně v prostoru $\mathcal{L}(H)$.

Věta 277 (reprezentace kompaktního operátoru; E. Schmidt (1907))

Nechť H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Pak existuje $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální systémy $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H_1$ a $\{v_n\}_{n=1}^N \subset H_2$ takové, že pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n \rangle v_n.$$

Věta 277 (reprezentace kompaktního operátoru; E. Schmidt (1907))

Nechť H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Pak existuje $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální systémy $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H_1$ a $\{v_n\}_{n=1}^N \subset H_2$ takové, že pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n \rangle v_n.$$

Dále $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^N$ je posloupnost všech vlastních čísel operátoru $T^\star \circ T$, přičemž $|\{n \in \mathbb{N};\ \lambda_n = \lambda\}| = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Tedy posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ je určena jednoznačně až na permutaci a je-li $N = \infty$, pak $\lambda_n \to 0$.