



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Technická univerzita v Liberci

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Úvod do komplexní analýzy

Miroslav Brzezina, Jiří Veselý
(Katedra aplikované matematiky FP TU v Liberci)

Liberec, 2012

Katedra aplikované matematiky
Technické univerzity v Liberci

Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Miroslav Koucký, CSc.

Tento učební text vznikl jako pomůcka pro přípravu studentů Technické univerzity v Liberci k získání základních znalostí o funkcích komplexní proměnné a dovedností početního charakteru. Teoretická část textu poskytuje minimální nezbytné zázemí pro řešení konkrétních úloh, důraz je kladen na jejich praktické zvládnutí. Text je rozvinutím starších textů obou autorů a je doplněn řešenými příklady i příklady k samostatnému procvičování. Vznikl v rámci projektu 3P - Praxe pro praxi, reg. č. CZ 1.07/2.2.00/15.0097.

Všechna práva vyhrazena. Tento text ani žádná jeho část nesmí být reprodukována nebo šířena v žádné formě bez písemného souhlasu vydavatele.

© MIROSLAV BRZEZINA, JIŘÍ VESELÝ, Liberec 2012

Obsah

Předmluva	v
Úvod	1
1 Základní znalosti	11
1.1 Zavedení komplexních čísel	11
1.2 Topologické a metrické vlastnosti prostoru \mathbb{C}	14
1.3 Základní komplexní funkce	19
1.4 Derivování	25
1.5 Křivky v \mathbb{C}	27
1.6 Křivkový integrál	29
1.7 Konvergence posloupností a řad funkcí	36
2 Mocninné řady	41
2.1 Úvod	41
2.2 Základní vlastnosti	41
2.3 Derivování mocninné řady	45
2.4 Některá další tvrzení	48
3 Derivování v komplexním oboru	51
3.1 Derivování podle komplexní proměnné	51
3.2 Existence derivace	53
3.3 Holomorfní funkce	55
3.4 Primitivní funkce	56
4 Elementární transcendentní funkce	63
4.1 Reálné elementární funkce	63
4.2 Lineární lomené funkce	65

4.3	Lineární lomená funkce	69
4.4	Exponenciála a hyperbolické funkce	79
4.5	Exponenciála a goniometrické funkce	82
4.6	Logaritmus a argument	87
4.7	Obecná (komplexní) mocnina	93
4.8	Funkce tangens a kotangens	94
4.9	Doplňky a komentáře	95
5	Holomorfní funkce	101
5.1	Speciální křivky	101
5.2	Lokální Cauchyho věta	102
5.3	Cauchyho integrál	107
5.4	Index bodu vzhledem ke křivce	108
5.5	Cauchyho vzorec	119
5.6	Věta o průměru	124
5.7	Věta o jednoznačnosti	126
5.8	Otevřené zobrazení	130
5.9	Princip maxima modulu	131
6	Laurentovy řady	137
6.1	Zobecnění Cauchyho vzorce	137
6.2	Laurentovy řady	140
6.3	Vyjádření funkce Laurentovu řadou	143
6.4	Singularity holomorfních funkcí	145
6.5	l'Hospitalovo pravidlo	152
6.6	Ještě o singularitách	153
7	Reziduová věta	159
7.1	Speciální množiny v \mathbb{C}	159
7.2	Reziduová věta	160
7.3	Výpočet reziduí	163
7.4	Výpočet integrálů pomocí reziduové věty	168
8	Historické poznámky a komentář	181
	Věcný rejstřík	197
	Jmenný rejstřík	201

Předmluva

„*Le plus court chemin entre deux énoncés réels passe par le complexe.*“ JACQUES HADAMARD (1865 –1963)

Začněme několika slovy o tomto textu. Vznikl jako pomůcka ke studiu základů analýzy v komplexním oboru a je určen jak pro posluchače některých oborů učitelství matematiky, tak pro posluchače ostatních fakult TUL.

Nejprve je na místě uvést stručný návod, jak s textem pracovat. Byl vytvořen jako pomůcka k zvládnutí základů analýzy v komplexním oboru a je proto věnován převážně základním poznatkům. Omezili jsme se na látku, umožňující relativně rychlý postup k tzv. reziduové větě. Předpokládáme znalost vlastností *mocniných řad v komplexním oboru*; k případnému zopakování je určena Kapitola 2. Nepostradatelné další poznatky obecného charakteru jsou krátce připomenuty v Kapitole 1 a s podstatnou částí potřebných znalostí by se měli studenti setkat již dříve. Zmíněný minimalizovaný program je jádrem Kapitol 3–7.

Velmi často odkazujeme čtenáře na učebnici *Jiří Veselý: Základy matematické analýzy I, II*, Matfyzpress, Praha 2004 (1. díl) a 2009 (2. díl). Důležité pojmy, zejména nově zaváděné, jsou graficky vyznačeny pomocí **polotučného písma**, zatímco *kurziva* je užitá pro zvýrazňování věcí, které by neměly čtenáři uniknout či z jiných důvodů stojí za pozornost; *v kurzivním textu nebo ve skloněném písmu má antikva analogickou funkci*. **Polotučná kurziva** je užitá k vyznačení pojmů, které připomínáme a jejichž znalost se předpokládá; je užitá jen v Kapitole 1.

Historické poznámky a seznam literatury jsou soustředěny na konci textu. Cvičení jsou připojena ke každé kapitole. Doplnující informace a ilustrativní příklady jsou psány *petitem*. V ideálním případě je nutno je promýšlet a propočítávat. Některá cvičení mají „teoretický charakter“ a slouží k prohloubení látky; řešením cvičení se lze připravit na otázky, které bývají součástí zkoušky.

U všech důležitých vět se snažíme čtenáře informovat, ze které doby pocházejí. Hvězdička u údaje, např. (**Cauchy, Goursat 1883***) varuje před ukvapenými závěry: je nutno si přečíst na jiném místě textu, zpravidla v Historických po-

známkách, které tvoří poslední kapitolu, další komentář; vodítkem by měl být i připojený jmenný rejstřík.

Text obsahuje jak řadu řešených příkladů, tak i četná cvičení, která by měla poskytnout čtenáři další možnost samostatného prohlubování znalostí. Čtenář, který dočetl předmluvu až sem, si jistě zaslouží malý komentář k mottu předmluvy. Hadamard byl a dodnes je velmi známým a významným francouzským matematikem. Jeho žáky byli neméně slavní matematici jako např. Maurice Fréchet (1878–1973), Paul Lévy (1886–1971) nebo André Weil (1906–1998); viz monografie [36] v seznamu literatury. Motto tlumočí poznatek, že často se dokazují tvrzení z reálné analýzy pomocí komplexní analýzy a že tyto důkazy bývají elegantní (*Nejkratší cesta mezi dvěma tvrzeními z reálného oboru vede přes komplexku*).

Text vznikl z přednášek, které autoři měli jak na UK v Praze, tak i na TUL v Liberci. Téměř všechny použité obrázky připravil doc. RNDr. Miroslav Dont, CSc. pro jinou publikaci druhého z autorů. Protože potřebujeme referenční text k porovnávání s tvrzeními v reálném oboru, odvoláváme se na starší texty [M], [Z] a [K], citované v [50], [51] a [52].

Autoři uvítají všechna upozornění na nedostatky textu či případný komentář prostřednictvím emailu. Pokud by se měla upozornění týkat možných zobecnění či promeškaných příležitostí uvést další látku, znovu opakujeme, že text má srozumitelně prezentovat pouze základní poznatky tak, aby čtenář v případě potřeby měl usnadněnu cestu k samostatnému získávání dalších užitečných znalostí.

Liberec, listopad 2012
Miroslav Brzezina a Jiří Veselý

Úvod

V předmluvě najde čtenář stručný návod, jak tento text používat. Není nijak složitý a cca dvě minuty navíc se patrně vyplatí.

Trocha historie

Pojem *komplexního čísla* prošel velmi dlouhým vývojem, který započal zhruba v polovině 16. století. R. 1545 vydal GIERONIMO CARDANO (1501–1576) knihu *Ars Magna de Regulis Algebraicis*. Ta byla jedním ze série příspěvků italské školy k řešení rovnice třetího stupně¹⁾. Připomeňme, že po Cardanovi jsou pojmenovány vzorce, pomocí nichž se vyjadřují kořeny rovnice třetího stupně; jejich skutečným objevitelem byl však patrně NICCOLO FONTANA (1499–1557), který je známější pod jménem TARTAGLIA „Koktal“. Byl třicet let profesorem univerzity v Bologni.

Cardano v *Ars Magna* řešil úlohu rozložit číslo 10 na součet dvou sčítanců, jejichž součin je roven 40. Pro rovnici $x(10 - x) = 40$ našel kořeny ve tvaru $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$, $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$ a pro jejich součin obdržel

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40.$$

Výsledek označil jako *elegantní, avšak bez užitku*. Cardano spolu s dalšími italskými matematiky rozšířil tehdejší znalosti o řešení algebraických rovnic a přispěl též k objevu komplexních čísel. Jiným významným matematikem, svázaným s touto problematikou byl SCIPIONE DAL FERRO (1465–1526).

Vývoj však postupoval velmi pomalu. RENÉ DESCARTES (1596–1650) odmítal existenci komplexních kořenů polynomu; od něj pochází trochu nešťastný termín *imaginární*. Také objevitelé infinitezimálního počtu nepřikládali komplexním číslům větší význam: zatímco ISAAC NEWTON (1642–1727) je nepokládal za důležitá, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) s nimi sice pracoval, ale nechápal jejich podstatu. Za zmínku stojí, že jak Leibniz, tak zejména Newton pracovali s mocninnými řadami, avšak jejich konvergenci nevyšetřovali.

¹⁾ Obsáhlý výklad nalezne čtenář u Cantora ve druhém dílu [12] v kapitole 64.

2 ÚVOD

Popišme podstatu problémů, řešených v té době. Když např. JOHANN BERNOULLI (1667–1748) diskutoval s Leibnizem, tvrdil, že logaritmy záporných čísel neexistují a argumentoval přibližně takto: Jelikož logaritmy čísel z intervalu $[1, \infty)$ vyčerpají nezáporná reálná čísla a logaritmy čísel z intervalu $(0, 1)$ vyčerpají všechna záporná reálná čísla, na logaritmy záporných čísel proto již *žádné hodnoty nezbývají*. Leibniz mu oponoval a argumentoval zhruba takto: jelikož $(-x)^2 = x^2$, je $2 \log(-x) = 2 \log(x)$ a tedy $\log(-x) = \log(x)$. Proto je např. $\log(-1) = \log(1) = 0$.

O těchto problémech Johann Bernoulli korespondoval s LEONHARDEM EULEREM (1707–1783) v letech 1727–31. Eulerovy znalosti o komplexních číslech postupně rostly a vyvrcholily v odhalení vztahu mezi exponenciálou, logaritmem a goniometrickými funkcemi v komplexním oboru. Avšak již dříve ROGER COTES (1682–1716) publikoval r. 1714 tvrzení o komplexních číslech, které lze zapsat ve srozumitelnější podobě ve tvaru

$$\sqrt{-1} \varphi = \log_e(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi). \quad (1)$$

U Eulera tedy šlo o završení dlouhodobého vývoje. V dopise z r. 1740 sdělil Euler Johannovi Bernoullimu, že funkce

$$y = 2 \cos x \quad \text{a} \quad y = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}$$

jsou řešeními téže diferenciální rovnice a pro obě platí $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, tedy si musí být rovny. Toto pozorování zveřejnil r. 1743 ve formě vzorců

$$\cos t = (e^{\sqrt{-1}t} + e^{-\sqrt{-1}t})/2, \quad \sin t = (e^{\sqrt{-1}t} - e^{-\sqrt{-1}t})/(2\sqrt{-1}).$$

O něco později, r. 1748, dospěl rovněž ke vztahu (1). Od Eulera také pochází označení imaginární jednotky symbolem i , to však je až z r. 1777.

Bylo by přehnaným optimismem se domnívat, že v polovině 18. stol. bylo zacházení s komplexními čísly dobře zažitou záležitostí. Euler v jedné ze svých prací např. píše:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2, \quad \text{neboť} \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab},$$

ačkoli $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = i \cdot 2i = -2$. Přesto se komplexní čísla často používala, např. při integraci racionálních funkcí; výpočty však byly mnohdy jen formální. Uveďme ilustrativní příklad: Z rovnosti $(t+i)(t-i) = t^2 + 1$ byl formální integrací pomocí rozkladu na parciální zlomky odvozován vzorec

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\int_0^x \frac{dt}{t-i} - \int_0^x \frac{dt}{t+i} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \log \frac{i-x}{i+x} = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{i}{2} \log \frac{i+x}{i-x}, \end{aligned} \quad (2)$$

o kterém jsme se zmínili v [M] na str. 426. Použití těchto úvah však často provázely pochybnosti. Jestliže totiž použijeme (2) a dosadíme $x = 1$, dostaneme po úpravách

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2i} \log \frac{i-1}{i+1} = \frac{1}{4i} \log \left(\frac{i-1}{i+1} \right)^2 = \frac{1}{4i} \log(-1) = \frac{1}{8i} \log(-1)^2 = 0.$$

Tento zdánlivý paradox vysvětlil teprve Euler periodicitou komplexní exponenciály. (V komplexním oboru má exponenciála periodu $2\pi i$ ²⁾)

Zásadní zlom ve vztahu matematiků ke komplexním číslům přišel až na přelomu století, kdy CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) uveřejnil r. 1799 svůj první důkaz tzv. *základní věty algebry*. Jím byla pozice komplexních čísel v matematice značně posílena. Tuto větu dokážeme v Kapitole 5.

Nežli opustíme „algebraické hledisko“, připomeneme, že cesta ke geometrickým představám o komplexních číslech byla sice kratší, ale rovněž ne bez problémů. Euler byl k této interpretaci velice blízko, ale patrně ji nepovažoval za významnou. Stejně jako on, tak i Cotes, ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) a další používali rovinu ke znázorňování komplexních čísel, avšak příslušné ztotožnění nebylo provedeno a nebyl explicitně popsán geometrický smysl operací s komplexními čísly. První práce o tom publikovali r. 1797 CASPAR WESSEL (1745–1818) a o něco později r. 1806 JEAN-ROBERT ARGAND (1768–1822); Argand zavedl dodnes užívaný termín **modul**, resp. *modulus* pro **absolutní hodnotu**. Obě práce vznikly patrně nezávisle a nezbudily žádnou pozornost, první se setkala se zájmem teprve při publikaci francouzského překladu po 100 letech od svého vzniku, tj. r. 1897.

U Gausse nacházíme geometrickou interpretaci komplexních čísel nejprve v korespondenci (1811); záhy však Gauss disponoval uceleným obrazem o souvislostech. Explicitně je popsal v práci z r. 1831. Při této příležitosti napsal, že *geometrická interpretace komplexních čísel vrhá na jejich metafyzické chápání nové světlo*. Užívání termínu **Gaussova rovina** je tedy adekvátní historickému vývoji. R. 1837 zavedl WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865) komplexní čísla jako *uspořádané dvojice reálných čísel*. Poznamenejme, že objevená „názornost“ byla jedním ze stimulů dalšího vývoje vedoucího k vytvoření teorie *komplexních funkcí komplexní proměnné*, tedy té části matematiky, jejímiž základy se dále budeme zabývat.

Základy teorie funkcí komplexní proměnné byly položeny v devatenáctém století. Za největší přínos vděčíme třem velmi významným matematikům; jsou jimi LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857), BERNHARD RIEMANN (1826–1866) a CARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815–1897). Popíšeme stručně rozdíly v jejich přístupu k tzv. **holomorfním funkcím**, tj. komplexním funkcím komplexní proměnné, které mají v každém bodě derivaci.

Cauchy se převážně věnoval integraci, primitivním funkcím a s tím svázanému problému nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě (křivce). Pracoval s funkcemi, které měly *spojitou* derivaci. Pro všechny takové funkce měl k dispozici integrální reprezentaci. Na jeho výsledky navázal a „zúplnil je“ JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882).

Riemannův přístup byl geometrický. Funkce zprostředkovávaly zobrazení oblastí v komplexní rovině, resp. na obecnějších (Riemannových) plochách. Stavěl často na fyzikálně motivované intuici a jeho úvahy byly založeny na později kritizovaném užití tzv. Dirichletova principu pro harmonické funkce, zaručujícího

²⁾ Srovnej s výkladem v Kapitole 4.

4 ÚVOD

existenci řešení jisté extrémní úlohy. Obohatil teorii krásnými a významnými výsledky. Snaha postavit tyto poznatky na solidní matematický základ stimulovala řadu dalších objevů.

Weierstrassův přístup vycházel z poznatků o mocninných řadách a o jejich pokračovatelnosti. Pracoval s funkcemi, které bylo možno lokálně vyjádřit jako součty mocninných řad; navázal tak do jisté míry na JOSEPHA LOUISE LAGRANGE (1736–1813), který zakládal své představy na rozvinutelnosti (všech spojitých) funkcí v mocninné řady.

Již v devatenáctém století se tyto přístupy mísily; byly rychle odhalovány vzájemné souvislosti, a tak zavedené pojmy často postupně splývaly. Dnešní přístup využívá obvykle všech výhod, které vzájemné souvislosti poskytují a tak zpravidla mizí původní terminologie: *holomorfní*, *analytické* a v jistém (velmi speciálním) smyslu *integrovatelné* funkce splývají. My tyto funkce budeme nazývat holomorfní; tvoří základ teorie, kterou se dále budeme zabývat. Poznamenejme, že řada pojmů či jejich vlastností splývá s odpovídajícími analogiemi v reálném oboru. To svádí někdy k ukvapeným závěrům. Budeme se proto snažit čtenáře na rozdíl vždy explicitně upozorňovat.

Kam směřujeme

Teorie funkcí komplexní proměnné patří rozhodně mezi *klasické* partie matematiky; prvá část úvodu to alespoň částečně dokumentuje. Stejně přirozené jako seznámení s historií by mělo být i poznání přínosu této teorie jak v obecné rovině, tak i specificky pro budoucí středoškolské učitele matematiky.

Chceme čtenáři nabídnout kromě hlubšího pochopení role komplexních čísel a vztahů mezi elementárními funkcemi \exp , \log , \sin , \cos apod. také podrobnější studium jejich vlastností. Je zde však mnoho dalších hlubokých výsledků a souvislostí s jinými partii matematiky, které čtenáři stihneme pouze částečně přiblížit. Hned na počátku se pokusíme čtenáři s malým množstvím předchozích znalostí ukázat užitečnost studia funkcí komplexní proměnné a tak alespoň částečně ilustrovat klasický Hadamardův výrok, který jsme použili v Úvodu jako motto.

Základním nástrojem pro práci s komplexními funkcemi komplexní proměnné je teorie mocninných řad, se kterou by měl být čtenář již alespoň částečně seznámen. Proto s ukázkou právě u mocninných řad začneme, nebudeme však každou úvahu podrobně odůvodňovat. Je-li dána posloupnost komplexních čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ (stručněji jen $\{a_k\}$), lze jí přiřadit mocninnou řadu s koeficienty a_k o součtu f , tj.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (3)$$

a položit si otázku, zda spolu souvisí posloupnost $\{a_k\}$ a funkce f . Obecně může řada (3) konvergovat jen pro $z = 0$, avšak často definuje jistou funkci v nějakém

kruhu $U(0, r) = \{z; |z| < r\}$ s $r > 0$. V takovém případě budeme funkci f nazývat **vytvorující funkce** posloupnosti $\{a_k\}$ ³⁾.

Již v [M] na str. 58 jsme se setkali s příkladem, k němuž se nyní vrátíme a osvětlíme ho podrobněji. Začneme dosti obecně: nechť n je přirozené číslo a $\{a_k\}$ je popsána jednoduchým **rekurentním vztahem** (též **rekurencí** nebo **rekurentně**)

$$a_k = c_1 a_{k-1} + \dots + c_n a_{k-n}, \quad k \geq n, \quad (4)$$

kde c_1, \dots, c_n je pevně zvolená n -tice (reálných nebo komplexních) čísel. Předepíšeme-li ještě hodnoty prvních n členů a_0, \dots, a_{n-1} , je jimi a rekurencí (4) posloupnost $\{a_k\}$ jednoznačně určena.

Budeme-li členy a_k hledat ve tvaru z^k , $k = 0, 1, \dots$, $z \neq 0$, budou členy posloupnosti $\{a_k\}$ splňovat rekurenci (4), právě když bude platit

$$z^k = c_1 z^{k-1} + \dots + c_n z^{k-n}$$

pro všechna $k \geq n$, tedy bude-li z vyhovovat algebraické rovnici

$$z^n - c_1 z^{n-1} - \dots - c_{n-1} z - c_n = 0. \quad (5)$$

Na levé straně (5) je tzv. **charakteristický polynom**. Je-li λ kořenem tohoto polynomu, pak $\{\lambda^k\} = \{\lambda^k\}$ je posloupnost vyhovující rekurenci (4). Má-li charakteristický polynom n různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, lze dokonce snadno popsat *každou* posloupnost $\{a_k\}$ vyhovující rekurenci (4). Speciálně tak popíšeme posloupnost, která je (jednoznačně) určena hodnotami a_0, \dots, a_{n-1} . Tohoto aparátu lze využít k řešení mnoha zajímavých úloh, jejichž historii lze stopovat až k Eulerovi. Uvedme nejprve slíbený příklad; srv. [48]. Je svázán s LEONARDEM PISÁNSKÝM (FIBONACCI) (1170–1250). Pro rekurenci

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \quad k \geq 2, \quad (6)$$

kteří vyhovuje např. posloupnost Fibonacciho čísel $\{F_k\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$, je charakteristický polynom tvaru $z^2 - z - 1$. Dospěli jsme tak k rovnici

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad (7)$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. V tomto případě je poměrně jednoduché i určit vytvářející funkce pro Fibonacciho posloupnost $\{F_k\}$; odpovídají jí počáteční hodnoty $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$, takže podle (3) platí rovnost

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k.$$

³⁾ Někdy se za vytvářející (též generující) funkci posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ pokládá *formální* mocninná řada (3), aniž se zkoumá její konvergence.

6 ÚVOD

Výraz $f(z) - zf(z) - z^2f(z)$ upravíme pomocí vztahu (6) pro Fibonacciho čísla a dostaneme z . Dospějeme tak k vyjádření

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Jeden z kořenů rovnice (7) je $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$; tato hodnota se nazývá **zlatý řez**. Druhým je pak číslo $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, pro které platí $\lambda_2 = -1/\lambda_1$. Rozložme $1 - z - z^2 = (1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)$. Pomocí rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{A}{1 - \lambda_1 z} + \frac{B}{1 - \lambda_2 z},$$

kde $A = 1/(\lambda_1 - \lambda_2) = 1/\sqrt{5} = -B$. Proto platí

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \lambda_1 z} - \frac{1}{1 - \lambda_2 z} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\sqrt{5}} z^k,$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1/\lambda_1$. Z jednoznačnosti rozvoje f v mocninnou řadu plyne odtud jiným způsobem **Binetův vzorec**; viz [50], [51]:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

Poznámka: Stejným aparátém lze řešit otázku, kolika způsoby lze vyjádřit přirozené číslo $n \geq 4$ ve tvaru součtu čísel 1, 2, 3 a 4; zde součet sčítanců v jiném pořadí považujeme za jiné vyjádření. Označíme-li B_k počet způsobů vyjádření čísla k , je (netriviální zdůvodnění první rovnosti vynecháváme)

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k = \sum_{m=0}^{\infty} (z + z^2 + z^3 + z^4)^m = \frac{1}{1 - z - z^2 - z^3 - z^4},$$

a pro výpočet čísel B_k lze užít rekurenci

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3} + a_{k-4}.$$

Zajímavé úlohy tohoto typu lze najít např. v [40]. Euler tímto aparátém řešil úlohy podstatně složitější. Vytvořující funkce dnes patří k důležitým nástrojům kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti. S elementárním využitím se čtenář může seznámit v [11], náročnější aplikace nalezne např. v [2].

Přejděme k jiné problematice: V reálné analýze je např. úloha spočítat integrál

$$\int_0^{10\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} \quad (8)$$

řazena k těm „méně příjemným“, neboť se používá pracné substituce $\operatorname{tg}(x/2) = t$, pro $x \in (-\pi, \pi)$. Je-li obecněji F racionální funkce v \sin a \cos , lze ji pomocí tzv. **Eulerových vzorců** (viz např. [Z], str. 505 a také Kapitola 4 tohoto textu)

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (9)$$

převést na tvar $f(e^{ix})$, kde f je racionální funkce, a tak integrál (8) a integrály analogické počítat jako křivkový integrál

$$\int_0^{10\pi} F(\cos x, \sin x) dx = \frac{1}{i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z} dz$$

přes (pětkrát proběhnutou) „jednotkovou kružnici“ φ . Avšak to je jen jeden z několika typů integrálů, které se naučíme počítat pomocí tzv. **reziduové věty**.

Funkce \sin se definuje v komplexní rovině pomocí exponenciály jako v (9), a to pro všechna $x \in \mathbb{C}$. Není složité ukázat, že \sin má v komplexní rovině stejnou množinu všech nulových bodů jako v \mathbb{R} . Odtud plyne, že množinou všech nulových bodů funkce $\sin \pi z$ je množina \mathbb{Z} všech celých čísel a $\sin \pi z$ je „polynomem nekonečného stupně“

$$\sin \pi z = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} + \dots \quad (10)$$

s nekonečně mnoha „kořenovými činiteli“ $(1 - z/k)$ s $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a činitelem z . Tyto historizující úvahy lze zpřesnit; skutečně se dá dokázat, že

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \quad (11)$$

přičemž vzorec lze dát přesný smysl. Toto vyjádření obdržel již Euler; úvahami, odpovídajícími tehdejšímu stupni přesnosti, o analogii s vlastnostmi koeficientů polynomů (porovnejte ve vzorcích (10) a (11) koeficienty u mocniny z^3), dospěl k vyjádření součtu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

srv. [Z], str. 505. Pomocí metod funkcí komplexní proměnné lze mj. sčítat další poměrně komplikované řady, řešit úlohy z oblasti rovinného proudění apod.

Zmínili jsme se krátce o vývoji teorie funkcí komplexní proměnné. Ta se postupně rodila z prací Eulera, Lagrange, PIERRE-SIMONA LAPLACE (1749 – 1827), SIMEONA DENISE POISSONA (1781 – 1840) a mnoha dalších, avšak hlavní zásluhy na konstituování této matematické disciplíny mají bezesporu Cauchy, Riemann a Weierstrass.

I když první ze zvolených ukázek užití metody vytvořujících funkcí je spojena se jménem Moivrovým, na jejím uvedení do matematiky ve formě obecněji použitelného nástroje má hlavní zásluhu Laplace. Ten rozpracoval *metodu* vytvořujících funkcí a povýšil ji na jeden ze základních prostředků teorie pravděpodobnosti. Přispěl k tomu zejména přednáškami na *l'École Normale Supérieure* konanými od r. 1795. Druhé vydání jeho knihy [30] z r. 1814 obsahuje jako předmluvu text těchto přednášek. První kapitola knihy [30] obsahuje poměrně propracovaný výklad metody vytvořujících funkcí, jsou jí však věnovány i celé monografie, např. [55].

8 ÚVOD

Výslovně poznamenáváme, že jde o podstatně více než o teorii mocninných řad. Přístupný výklad a příklady aplikací této metody jsou uvedeny v článku [48]; formálním mocninným řadám důležitým z hlediska aplikací (tyto řady mohou být divergentní) je věnována velká pozornost v [22].

Ač hlavní zásluhu na vytvoření teorie elementárních funkcí v komplexním oboru má patrně Euler, teprve Cauchy jí dodal r. 1821 v [16] dostatečnou přesnost. Ten také propracoval v sérii prací teorii křivkového integrálu v komplexním oboru a umožnil tak počítat integrály z reálných funkcí „přechodem do komplexního oboru“. I v tomto případě lze nalézt řadu výsledků, které tomu předcházely, avšak nejdůležitější pro rozvoj celé teorie elementárních funkcí v tomto kontextu jsou nesporně Cauchyho práce z období 1823–1833.

U Gausse a Eulera nacházíme vyjádření některých funkcí nekonečným součinem, samy nekonečné součiny čísel jsou však značně starší. Vyjádření π pomocí nekonečného součinu objevil již FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Poznamenejme, že šlo o první analytický popis π . Tento „proces“, který poměrně rychle konverguje, nacházíme ve Vièteově práci z r. 1593, jeho konvergence však byla dokázána teprve r. 1891.

V dnešní době je známa řada vzorců tohoto typu. Uvedme např. vzorec, pocházející od JOHNA WALLISE (1616–1703), se kterým se čtenář patrně již setkal v reálné analýze:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots};$$

viz [Z], str. 325. Ve vzorci se nevyskytují „iracionality“ jako ve vyjádření, které našel Viète. Euler na úvahách o nekonečných součinech založil i metodu výpočtu součtů řad $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}$, a pro malá $n \in \mathbb{N}$ tyto řady s poměrně velkou přesností sečetl. Celé funkce typu (11) považoval za polynomy nekonečného stupně a také s nimi tak zacházel. Cauchy se rozkladům celých funkcí na součiny věnoval v práci z r. 1829: zde uvedl, že takový rozklad je možný např. pro polynomy, nebo pro funkce \sin a \cos , ne však obecně.

Zvolené ukázky použití teorie funkcí komplexní proměnné jsou vybrány tak, aby byly dle možnosti přístupné začátečníkům; zdaleka nedokumentují oblast možných aplikací této teorie. V tomto směru odkazujeme čtenáře na třídílnou monografii [22].

Je vhodné se krátce zmínit o prvních učebnicích teorie funkcí komplexní proměnné. Zde je těžké rozlišit: V době jejího zrodu vycházely monografie, které obsahovaly mnoho původních dílčích výsledků (např. práce Lagrange, Eulera, Cauchyho, Laplace apod.), a také knihy, věnované jen speciálním partiím. I ty měly na rozvoj teorie funkcí komplexní proměnné veliký vliv. Takové dílo o eliptických

funkcích napsal r. 1829 CARL GUSTAV JAKOB JACOBI (1804–1851). Veliký význam měly přednášky, které konal JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) r. 1847. Poznámky z nich publikoval CARL WILHELM BORCHARDT (1817–1880) až r. 1880. Pod vlivem Liouvillových přednášek však vznikla kniha [8] z r. 1875, která má blízko k monografii. Tuto knihu a také text [15] z r. 1868, který napsal FELICE CASORATI (1835–1890) a který obsahuje dokonce více než 140 stran o *historii* teorie funkcí komplexní proměnné, lze zařadit k prvním učebnicím. Jinou práci, která obsahovala mnoho podnětných myšlenek (jde o soubor článků, předmluvu napsal Gauss), vydal r. 1847 FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN (1823–1852). Na konci minulého století již existovala celá řada obsáhlých prací z teorie funkcí komplexní proměnné. Za zmínku snad stojí text [31] z pera českého autora VÁCLAVA LÁSKY (1862–1943), který však vyšel v němčině.

Na rozdíl od teorie reálných funkcí reálné proměnné lze v literatuře poměrně snadno nalézt mnoho materiálu o historii teorie funkcí komplexní proměnné. Čtenáře s hlubším zájmem o historii odkazujeme zejména na krásnou dvojdílnou knihu [41], [42]; mnoho historických komentářů obsahuje též [10] a samozřejmě [39]. Z obecných knih věnovaných historii matematiky lze doporučit jako četbu [25], podrobnější informace lze nalézt např. v [6], [24], [34], [49]. V otázce priorit nebylo u některých tvrzení jednoduché rozhodnout, vše však bylo v případech rozporů konfrontováno s dalšími prameny. Otázka autorství by však neměla být pro čtenáře podstatná, větší důležitost má doba vzniku pro orientaci ve vývoji teorie, a případně i cesta, která k objevu vedla. Snažili jsme se vyhýbat „trikovým“, namnoze elegantnějším postupům a dávali přednost těm, které považujeme za přirozené, ať již z hlediska historického vývoje nebo zařazení do elementárního textu.

Cvičení

Cvičení uvedená v této části by měl čtenář vyřešit bez přípravy pouze na základě znalostí látky ze střední školy a ze základního kurzu analýzy v \mathbb{R} . Autoři jsou si vědomi toho, že si někteří uživatelé textu budou muset část znalostí připomenout či doplnit.

1. Uvědomte si, jak se provádějí operace s komplexními čísly. Spočtete

$$(3 + 2i) \pm (2 - i), \quad (2 - i) \cdot (-3 + 4i), \quad \frac{1 - i}{1 + i}, \quad \frac{2}{1 - 3i}, \quad (1 + i\sqrt{3})^3!$$

$$[(5 + i), (1 + 3i), (-2 + 11i), -i, \frac{1}{5}(1 + 3i), -8.]$$

2. Určete absolutní hodnotu (modul) a argument komplexních čísel

$$3i, \quad (1 + i), \quad (2 + 5i), \quad (-2 + 5i), \quad (a + ib), \quad a, b \in \mathbb{R}!$$

$$[3, \pi/2; \sqrt{2}, \pi/4; \sqrt{29}, \arctg \frac{5}{2}; \sqrt{29}, \pi - \arctg \frac{5}{2}; \sqrt{a^2 + b^2}, \arctg \frac{b}{a}.]$$

3. Vyjádřete následující komplexní čísla v goniometrickém tvaru (tj. pomocí modulu a argumentu)

$$(2 + 2i), \quad (1 + \sqrt{3}i), \quad (2 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}i)!$$

10 ÚVOD

[$\sqrt{8}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.]

4. Určete hodnotu součinu čtyř komplexních čísel

$$(1+i), (-1+i), (-1-i), (1+i)! \quad [4]$$

5. Určete obsah trojúhelníka o vrcholech $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, 3$!

[Využijte znalostí z analytické geometrie v \mathbb{R}^2 : obsah P je dán např. vzorcem

$$P = \frac{1}{2} |(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)|.$$

6. Určete komplexní čísla z_1, z_2, z_3 , jestliže

$$4|z_1| = 2|z_2| = |z_3| = 4, \quad \arg z_1 = 2 \arg z_2 = 4 \arg z_3 = \frac{2}{3}\pi!$$

[$z_1 = (\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$, $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$, $z_3 = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.]

7. Jaký rovinný obrazec tvoří všechna $z = [x, y] \in \mathbb{C}$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, pro něž je

$$|z - (1+i)| \leq 2?$$

[Kruh popsáný nerovností $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq \sqrt{2}$.]

8. Určete podmínku, které musí vyhovovat všechna $z = x + iy \in \mathbb{C}$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, která vyhovují vztahům

$$(a) |z - (2-3i)| = 1, \quad (b) |z+i| = |z-1|, \quad (c) \left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = 3!$$

[(a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$, (b) $x+y=0$, (c) Apoloniova kružnice vzhledem k bodům z_1, z_2 , $z_1 \neq z_2$, tj. kružnice o rovnici

$$2(x^2 + y^2) + 2x(x_1 - x_2) + 2y(y_1 - y_2) + (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0.$$

Při $z_1 = z_2$ nevyhovuje podmínce žádné $z \in \mathbb{C}$.]

9. Určete všechna $z = [x, y] \in \mathbb{C}$, pro něž při $0 \leq \arg z < 2\pi$ platí

$$|z| < \arg z!$$

Změní se něco na výsledku při modifikaci podmínky na tvar $0 < \arg z \leq 2\pi$?

[Všechny body z , které splňují danou podmínku, vyplní *oblast* omezenou jedním závitěm Archimedovy spirály o rovnici (volíme popis v polárních souřadnicích) $\rho = \varphi$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, a úsečkou spojující body $[0, 0]$ a $[0, 2\pi]$. Uvažujeme-li druhou podmínku, vyhovují kromě bodů této oblasti ještě body na části hranice, tvořené úsečkou.]

Pokud se čtenář při řešení předcházejících cvičení setkal s vážnějšími problémy, neměl by rozhodně přeskóčit ani úvodní část Kapitoly 1, která je příležitostí si některé věci zopakovat. I když jsou pojmy zaváděny v \mathbb{C} často jen přirozeným zobecněním pojmů známých z reálné analýzy, je nutno si je znovu důkladně promýšlet.

Kapitola 1

Základní znalosti

Tato kapitola obsahuje základní poznatky, které budeme v dalším považovat za známé. Je mezi nimi patrně jen málo věcí, s nimiž se čtenář dosud nesešel; kapitolu si lze tedy jen „prohlédnout“, aby se čtenář seznámil s terminologií apod. Pokud bude potřeba něco si připomenout, stačí sáhnout k nějakému elementárnímu textu, např. [Z]. Ty pojmy, které nedefinujeme, ale pouze připomínáme, jsou graficky vyznačeny *kurzivou*, pro pojmy definované v textu užíváme zvýraznění *antikvou*. To usnadní čtenáři rychlejší seznámení se všemi potřebnými pojmy. Protože mnoho věcí *pouze opakujeme*, budeme postupovat méně formálně než v dalších kapitolách textu.

1.1 Zavedení komplexních čísel

Připomeňme nejprve některá označení. Symbolem \mathbb{N} budeme značit množinu všech *přirozených čísel*, tj. $\{1, 2, \dots\}$. Dále klademe $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Množinu všech *celých čísel* budeme značit \mathbb{Z} , všech *racionálních čísel* \mathbb{Q} a všech *reálných čísel* \mathbb{R} ; pro množinu všech kladných reálných čísel budeme používat symbol \mathbb{R}_+ .

Symbolem \mathbb{R}^m budeme značit m -rozměrný eukleidovský prostor, tj. prostor všech uspořádaných m -tic reálných čísel, přičemž pro stručnost píšeme \mathbb{R} místo \mathbb{R}^1 . Z algebraického hlediska je \mathbb{R} **komutativní těleso (pole)**, které je uspořádané a má tzv. Archimedovu vlastnost, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $K > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n\varepsilon > K$. Je však navíc oproti \mathbb{Q} *úplné*. Prostor \mathbb{R}^m chápeme nejen jako *lineární prostor* nad \mathbb{R} , ale v případě potřeby rovněž jako *m -rozměrný normovaný lineární prostor*. Pro každý bod $x = [x_1, \dots, x_m] \in \mathbb{R}^m$ definujeme (eukleidovskou) normu

$$\|x\| := (|x_1|^2 + \dots + |x_m|^2)^{1/2} ;$$

metrika generovaná touto normou nám umožňuje chápat \mathbb{R}^m rovněž jako **metrický prostor**. Připomínáme, že tento prostor je **úplný** a má řadu dalších vlastností; tyto vlastnosti pokládáme za známé, čtenáře odkazujeme na [Z], Kapitoly 12 a 13. Speciálně jsou prostory \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}$, **separabilní**, **lokálně kompaktní**, **souvislé** a také **lokálně souvislé**. Platí toto jednoduché **kritérium kompaktnosti**: Množina $M \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená; viz [Z], Věta 13.3.25. Protože konvergence v \mathbb{R}^m je „konvergence po souřadnicích“, je spojitost zobrazení do \mathbb{R}^m „spojitostí po složkách“. To nám opět usnadňuje situaci a umožňuje přenést řadu tvrzení, které známe z reálné analýzy, na případy, jimiž se budeme zabývat.

Znalost oboru komplexních čísel \mathbb{C} je nezbytným předpokladem studia komplexních funkcí komplexní proměnné. Je to „v podstatě“ prostor \mathbb{R}^2 , v němž je navíc definováno násobení a do něhož je vnořen i prostor \mathbb{R} . Proto jsme se nejprve zabývali vlastnostmi prostorů \mathbb{R}^m pro obecné m .

Komplexní čísla jsou uspořádané dvojice reálných čísel, tedy prvky \mathbb{R}^2 . Je-li $z = [x, y] \in \mathbb{C}$, pak číslo x nazýváme **reálná část** čísla z a číslo y **imaginární část** čísla z . Čísla x a y nazýváme též **složky** čísla z . Píšeme

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Komplexní číslo $[0, 1]$ značíme krátce i ; je tedy třeba zapomenout historickou „nedefinici“ i pomocí $\sqrt{-1}$. Komplexní čísla geometricky znázorňujeme pomocí bodů v rovině: číslu $[x, y]$ odpovídá bod roviny o souřadnicích x, y . Proto pro \mathbb{C} užíváme též názvu **komplexní rovina** nebo **rovina komplexních čísel** nebo **Gaussova rovina**. Pro komplexní čísla připomeneme definici operace **sčítání**, které se definuje jako v \mathbb{R}^2 , a nově definujeme **násobení**: Jsou-li $z_1 = [x_1, y_1]$, $z_2 = [x_2, y_2]$ komplexní čísla, klademe

$$z_1 + z_2 := [x_1 + x_2, y_1 + y_2], \quad z_1 z_2 := [x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1].$$

Pro dvojice s nulovou imaginární částí korespondují tyto operace s těmi operacemi, které již známe z \mathbb{R} :

$$[x_1, 0] + [x_2, 0] = [x_1 + x_2, 0], \quad [x_1, 0] \cdot [x_2, 0] = [x_1 x_2, 0].$$

To umožňuje ztotožnit dvojici $[x, 0]$ s číslem $x \in \mathbb{R}$; po tomto ztotožnění je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. V definici násobení komplexních čísel je tak zahrnuto i násobení vektoru z \mathbb{R}^2 skalárem z \mathbb{R} . Komplexní čísla tvoří s oběma operacemi **komutativní těleso**¹⁾. Prvkem opačným k číslu $z = [x, y] \in \mathbb{C}$ je číslo $-z = [-x, -y] \in \mathbb{C}$ a prvkem inverzním k číslu $z = [x, y] \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ (kde píšeme 0 místo $[0, 0]$), je zřejmě číslo

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right] \in \mathbb{C}.$$

¹⁾ V zahraniční literatuře se užívají ekvivalenty termínu pole, u nás se přidržujeme tradiční terminologie ovlivněné v tomto případě němčinou.

Rozepsáním do složek čtenář může ověřit, že rovnice $zw = 1$ s neznámou $w \in \mathbb{C}$ má právě jedno řešení, a to $w = 1/z$. Mnoho pojmů, které budeme dále používat, se zavede analogicky jako v \mathbb{R} , tedy např. induktivně zavedeme **celočíslné mocniny s nezáporným exponentem**

$$z^0 = 1, z^1 = z, z^2 = z \cdot z, \dots, z^{n+1} = z \cdot z^n, \quad (1.1)$$

a dále pro všechna $z \neq 0$ **celočíslné mocniny se záporným exponentem** $z^{-n} = 1/z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pověšimněte si, že je $1^2 = (-1)^2 = 1$. Podobně je

$$i^2 = i \cdot i = [0, 1] \cdot [0, 1] = [-1, 0] = -1, \quad (-i)^2 = -1.$$

Je-li $[x, y] \in \mathbb{C}$, pak

$$x + iy = [x, 0] + [0, 1] \cdot [y, 0] = [x, 0] + [0, y] = [x, y],$$

takže komplexní čísla lze zapisovat i ve tvaru, který čtenář jistě zná již ze střední školy. Z rovnosti $z = x + iy$ obecně neplyne, že $x, y \in \mathbb{R}$, tj. že $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$; kdykoli však dále použijeme zápis komplexního čísla ve tvaru $x + iy$, pak *předpokládáme*, že již platí $x, y \in \mathbb{R}$.

Je-li $z = x + iy$, nazýváme číslo $\bar{z} := x - iy$ číslem **komplexně sdruženým k číslu z** . Snadno lze ověřit, že pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí rovnosti:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{\bar{z}} = z, \quad z^{-1} = \bar{z}/(z\bar{z}).$$

Poznamenejme, že číslo $z\bar{z} = x^2 + y^2$ je vždy nezáporné.

Pro každé číslo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** $|z|$ vztahem

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Poznamenejme, že funkce $f : z \mapsto |z|$, $z \in \mathbb{C}$ je jednoduchým a důležitým příkladem reálné funkce komplexní proměnné.

Jestliže komplexní čísla interpretujeme jako body roviny, pak je $|z|$ vzdálenost bodu $z = [x, y]$ od počátku (eukleidovská norma vektoru (x, y)). Analogicky jako v reálném oboru definujeme funkci signum; klademe $\operatorname{sgn} z := z/|z|$ pro $z \neq 0$, $\operatorname{sgn} 0 := 0$. Definice $|z|$ a $\operatorname{sgn} z$ jsou rozšířením definic z oboru \mathbb{R} na \mathbb{C} .

Velmi důležitý je fakt, že pro absolutní hodnotu platí i v \mathbb{C} **trojúhelníková nerovnost**. Pro každá dvě čísla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ je

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

viz [Z], Lemma 8.1.4. Tam lze též na str. 213 nalézt stručné zavedení komplexních čísel.

V \mathbb{C} *nezavádíme* relaci $<$ či \leq jako v \mathbb{R} . Komplexní čísla lze uspořádat např. lexicograficky apod., ale ne tak, aby se všechny vlastnosti relace „ $<$ “ či relace „ \leq “ z \mathbb{R} přenesly do \mathbb{C} . Stačí uvážit, že $i \neq 0$ a že z každé z obou nerovností $i > 0$

14 KAPITOLA 1. Základní znalosti

a $i < 0$ by plynulo $i^2 = -1 > 0$, což vede ke sporu. V \mathbb{C} lze tedy porovnávat pomocí relací $<$, \leq , $>$ a \geq pouze *reálná* čísla; napíšeme-li tedy pro dvě komplexní čísla např. nerovnost $z_1 < z_2$, je v tom implicitně zahrnut předpoklad, že $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Poznamenejme ještě, že pro $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platí nerovnosti

$$0 \leq |x| \leq |z|, \quad 0 \leq |y| \leq |z|, \quad 0 \leq |z| \leq |x| + |y|. \quad (1.2)$$

Je-li $z \neq 0$, $z = x + iy$, existuje jednoznačně určené $t \in (-\pi, \pi]$ tak, že

$$x = |z| \cos t, \quad y = |z| \sin t, \quad \text{tj. } z = |z|(\cos t + i \sin t).$$

Pokud pracujeme se všemi $t \in \mathbb{R}$, je korespondence $z \mapsto t$ jednoznačná modulo 2π . Při $z_1 z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos t_1 + i \sin t_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos t_2 + i \sin t_2)$, pak je

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)).$$

Číslo $|z|$ se z historických důvodů nazývá někdy **modul** z a číslo t **argument** z . K tomuto vyjádření komplexních čísel v tzv. **goniometrickém tvaru** se ještě podrobněji vrátíme později.

Poznámka 1.1.1. Rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá v \mathbb{R} žádné řešení, avšak táž rovnice má v \mathbb{C} dvě řešení, i a $-i$. Platí dokonce více: v \mathbb{C} má alespoň jedno řešení *každá algebraická rovnice alespoň prvního stupně*. Toto dokážeme v Kapitole 5. Avšak tato dobrá vlastnost \mathbb{C} přináší i negativní vlastnosti: Uspořádání $z \in \mathbb{R}$ na \mathbb{C} nelze rozšířit bez ztráty jeho základních vlastností. Čtenáře však může napadnout, proč nepostupujeme obecněji a nedefinujeme analogickou strukturu, tj. komutativní těleso \mathbb{R}^m i pro $m > 2$. Zajímavou odpověď dává *Frobeniova věta*: taková podobná struktura existuje ještě pro $m = 4$ a $m = 8$. V prvním případě pro její prvky, které se nazývají **kvaterniony**, není příslušné násobení komutativní; ve druhém případě, tj. pro $m = 8$, není příslušné násobení dokonce ani asociativní. Pro ostatní $m \in \mathbb{N}$ již ani takové struktury neexistují. Viz např. [5].

1.2 Topologické a metrické vlastnosti prostoru \mathbb{C}

Z teorie normovaných lineárních prostorů je známo, že na množině všech dvojic reálných čísel můžeme definovat normu či metriku mnoha způsoby. Definujme **vzdálenost** $\rho(z_1, z_2)$ dvou komplexních čísel $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ vzorcem

$$\rho(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1.3)$$

Snadno nahlédneme, že \mathbb{C} s touto metrikou a eukleidovský prostor \mathbb{R}^2 jsou **izometricky izomorfní** a jsou to **úplné prostory**. Budeme to využívat: Stačí proto některé věci pouze připomenout. Zároveň můžeme definovat již zmíněné „ztotožnění“ \mathbb{R} s množinou $\{z \in \mathbb{C}; z = [x, 0], x \in \mathbb{R}\}$: Zobrazení, které přiřazuje prvku $[x, 0]$ množiny $\{[x, 0]; x \in \mathbb{R}\}$ reálné číslo x , je izometrické, izomorfní a „zachovává“ i násobení, tj. prvku $[x, 0] \cdot [y, 0]$ přiřazuje součin xy . Pro další výklad zavedeme nejprve některá označení.

Označení 1.2.1. Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ označme

$$U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C}; |w - z| < \varepsilon\}, \quad P_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C}; 0 < |w - z| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(z) \setminus \{z\}.$$

Často budeme psát $U(z, \varepsilon)$ místo $U_\varepsilon(z)$ a také $P(z, \varepsilon)$ místo $P_\varepsilon(z)$. Není-li poloměr ε podstatný, budeme někdy stručněji psát pouze $U(z)$ a $P(z)$. Množinu $U_\varepsilon(z)$ nazýváme ε -**okolí bodu** z a množinu $P_\varepsilon(z)$ **prstencové ε -okolí bodu** z , přičemž slovo „epsilonové“ při stručnějším vyjádření vynecháváme.

Limita posloupnosti v \mathbb{C} se definuje analogicky jako v \mathbb{R} , resp. v \mathbb{R}^m . Symbol $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ pro $z_n, z \in \mathbb{C}$ znamená

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(z_n \in U_\varepsilon(z)). \quad (1.4)$$

Tak jako v reálném oboru říkáme, že posloupnost $\{z_n\}$ **konverguje** k z ; často píšeme $z_n \rightarrow z$. Protože je \mathbb{C} úplný prostor, platí: $z_n \rightarrow z$, právě když posloupnost splňuje **Bolzano-Cauchyho podmínku**

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(|z_m - z_n| < \varepsilon).$$

Protože má absolutní hodnota v \mathbb{R} i v \mathbb{C} analogické vlastnosti, platí v \mathbb{C} řada čtenáři již známých vět o limitách posloupností; nebudeme je uvádět, neboť by to bylo nudné opakování něčeho, co musíme jako základ pro další výklad předpokládat. V případě $z_n \in \mathbb{R}$ předpokládáme, že čtenář zná definice $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \pm\infty$ a také základní tvrzení o nevlastních limitách posloupností v \mathbb{R} .

Také součet s řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ komplexních čísel a_k definujeme analogicky jako v \mathbb{R} : Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme n -**tý částečný součet** rovností $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$, a pokud existuje v \mathbb{C} limita posloupnosti $\{s_n\}$, položíme

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Toto číslo s se nazývá **součet řady**; symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ se užívá i pro součet s . Je výhodné se domluvit o vynechávání sčítacích mezí vždy v případě, že sčítáme *od indexu 0 do ∞* . To znamená, že budeme psát

$$\sum a_k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Jestliže $\sum |a_k| < \infty$, říkáme jako v \mathbb{R} , že řada $\sum a_k$ **konverguje absolutně**. Pokud řada $\sum a_k$ konverguje a $\sum |a_k| = +\infty$, potom říkáme, že řada $\sum a_k$ **konverguje neabsolutně**. Připomeneme, že platí např. toto jednoduché tvrzení:

$$\sum |a_k| < \infty \Rightarrow \sum a_k \text{ konverguje,}$$

tj. že každá absolutně konvergentní řada konverguje. To vyplývá z odhadu pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, pomocí trojúhelníkové nerovnosti

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|,$$

který pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky dává konvergenci $\sum a_k$. Pro řady v \mathbb{C} nebudeme formulovat a dokazovat **kritéria konvergence** a tvrzení analogická tvrzením pro řady v \mathbb{R} . Jak později uvidíme, budou pro nás podstatná zejména tvrzení o **absolutní konvergenci**; srv. [Z], Kapitola 8.

V \mathbb{C} jsme dosud nezavedli žádné nevlastní body, takže $\sum (k+1)^{-1} = +\infty$ je zápis v \mathbb{R} , v rovině komplexních čísel \mathbb{C} postrádá smysl. Nyní se této otázce budeme věnovat podrobněji.

Systém $\mathcal{O}(P)$ všech otevřených množin v metrickém prostoru (P, ρ) tvoří jeho **topologii**. Tento systém obsahuje prázdnou množinu \emptyset , celý prostor P , spolu s každým podsystémem množin i jejich sjednocení a s každým *konečným* podsystémem množin i jejich průnik. **Topologický prostor** je dvojice, skládající se z neprázdné množiny P a ze systému jejích podmnožin τ , který má stejné vlastnosti jako systém všech otevřených množin v metrickém prostoru. Obsahuje tedy \emptyset , P a je uzavřený vzhledem ke sjednocení libovolných podsystémů a průniku konečných podsystémů. V topologickém prostoru se prvky τ nazývají **otevřené množiny**, a tak je pojem otevřené množiny přímo součástí definice (P, τ) . Další pojmy se definují analogicky jako v metrických prostorech: **uzavřené množiny** jsou doplňky otevřených množin, **kompaktní množiny** v (P, τ) jsou ty, z jejichž každého pokrytí otevřenými množinami lze vybrat *konečné* pokrytí, apod.

Je-li $x \in U$, $U \in \tau$, říkáme, že U je **okolím bodu** x . Volbou vhodného systému okolí σ_x bodů $x \in P$ lze popsat topologii τ : Platí $G \in \tau$, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje okolí $U \in \sigma_x$ tak, že $U \subset G$. Systém σ_x musí mít některé vlastnosti analogické vlastnostem systému všech okolí bodu x v metrickém prostoru, např. je-li $U, V \in \sigma_x$, je také $U \cap V \in \sigma_x$. Tím máme k dispozici všechny potřebné pojmy k zavedení „komplexního nekonečna“.

Rozšíření \mathbb{C} o (nevlastní) bod ∞ je vlastně **kompaktifikací** roviny \mathbb{C} , tedy vnořením \mathbb{C} do topologického prostoru, který je kompaktní. Položme nejprve $\mathbb{S} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pro každý bod $z \in \mathbb{C}$ definujeme okolí $U(z)$ pomocí úmluvy z Označení 1.2.1 a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ položíme

$$U_\varepsilon(\infty) := \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1/\varepsilon\} = \mathbb{S} \setminus \overline{U(0, 1/\varepsilon)}, \quad P_\varepsilon(\infty) = U_\varepsilon(\infty) \setminus \{\infty\};$$

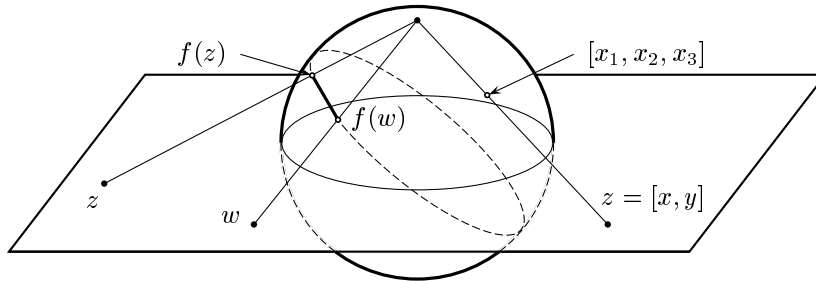
tyto množiny budeme též značit $U(\infty, \varepsilon)$, $P(\infty, \varepsilon)$. V \mathbb{S} určují právě zavedená okolí topologii, přičemž množiny otevřené v \mathbb{C} jsou otevřené i v \mathbb{S} . Přitom \mathbb{S} je kompaktní prostor; lze to snadno dokázat: Je-li $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ otevřené pokrytí \mathbb{S} , existuje $\alpha_0 \in A$ tak, že $\infty \in G_{\alpha_0}$; dále existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ takové, že $\overline{U(\infty, \varepsilon)} \subset G_{\alpha_0}$. Pak je množina $K := \mathbb{S} \setminus G_{\alpha_0}$ uzavřená a omezená v \mathbb{C} , resp. \mathbb{R}^2 (leží totiž v $\mathbb{S} \setminus U(0, 1/\varepsilon)$), a je tedy kompaktní; je pokryta systémem $\{G_\alpha; \alpha \in (A \setminus \{\alpha_0\})\}$, z něhož lze vybrat konečné pokrytí $\{G_{\alpha_j}; j = 1, \dots, k\}$. Pak $\{G_{\alpha_j}; j = 0, 1, \dots, k\}$ je konečné pokrytí \mathbb{S} .

Poznámka 1.2.2. Čtenář, obeznámený se základy topologie snadno shledá, že analogickou konstrukci lze provést nejen v \mathbb{R}^2 či \mathbb{R}^m , ale obecněji v každém lokálně kompaktním topologickém prostoru X . Potřebná okolí „ideálního“ bodu ∞ definujeme jako doplňky kompaktních podmnožin prostoru X v $X^* := X \cup \{\infty\}$. Výsledkem je tzv. **Aleksandrova (jednobodová) kompaktifikace** X^* prostoru X , v níž je původní prostor hustým podprostorem vzniklé kompaktifikace; viz též [33].

Ze vztahu (1.4) popisujícího definici limity pomocí okolí je zřejmé, co znamená $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, a že je to totéž, co lze popsat vztahem $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$, resp. vztahem $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{-1} = 0$.

Snadno též nahlédneme, že lze z každé posloupnosti $\{z_n\}$ bodů z \mathbb{S} vybrat posloupnost, která má limitu v \mathbb{S} . Z každé omezené posloupnosti to lze provést „po složkách“ pomocí Weierstrassovy věty; viz [Z], Věta 2.4.4. Pokud $\{z_n\}$ není omezená, lze vybrat $\{z_{n_k}\}$ tak, že $z_{n_k} \in U_{1/k}(\infty)$. Z toho je patrné, že $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = \infty$. Odtud plyne, že \mathbb{S} je **sekvenciálně kompaktní**. Není to příliš překvapující, neboť v následující Poznámce 1.2.3 ukážeme, že na \mathbb{S} lze definovat metriku, která generuje právě zavedenou topologii a v metrickém prostoru sekvenciální kompaktnost a kompaktnost splývají; viz [Z], Věta 13.3.24. Poznamenáváme, že pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme předpokládat, že čtenář podle kontextu rozliší mezi „komplexním“ ∞ a reálným $+\infty$, u něhož budeme zpravidla vynechávat znaménko ‘+’. Nebudeme však užívat slovní spojení typu „ $\{z_k\}$ konverguje k ∞ “, ačkoli by to bylo z hlediska prostoru \mathbb{S} možné, termín „konverguje“ si ponecháme pouze pro případ, kdy hodnota limity leží v \mathbb{C} .

Poznámka 1.2.3. Topologický přístup je mnohem jednodušší než metrický, založený na tzv. stereografické projekci, při níž vzdálenost bodů z \mathbb{C} definujeme pomocí vzdálenosti bodů na jednotkové sféře.



Obr. 1.1: Schéma stereografické projekce

Popišme to analyticky: Pišme body z \mathbb{R}^3 ve tvaru $[x_1, x_2, x_3]$ a buď S_3 „jednotková sféra“ v \mathbb{R}^3 , tj. množina všech bodů v \mathbb{R}^3 splňujících rovnici $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Najdeme průsečík sféry S_3 s přímkou, procházející body $[x, y, 0]$, $[0, 0, 1]$; jak snadno zjistíme,

18 KAPITOLA 1. Základní znalosti

má souřadnice

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Pomocí těchto vztahů je určeno zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow S_3$. Zřejmě je $x_3 \in [-1, 1]$ a f je zobrazení na $S_3 \setminus \{[0, 0, 1]\}$. Nyní Gaussovu rovinu \mathbb{C} doplníme o bod ∞ a definujeme $f(\infty) = [0, 0, 1]$. Pro z, w v kompakťované rovině \mathbb{S} položíme vzdálenost $\varrho^*(z, w)$ v \mathbb{S} rovnou vzdálenosti obrazů $f(z)$ a $f(w)$ v \mathbb{R}^3 . Pak je ϱ^* metrika na \mathbb{S} . Množinově tedy je $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, současně však chápeme \mathbb{S} i jako metrický nebo topologický prostor. Snadno nahlédneme, že pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí jednoduché vzorce

$$\varrho^*(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}, \quad \varrho^*(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Opět odtud vidíme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$; podstatnější je však zjištění, že topologie, kterou jsme zavedli v \mathbb{S} , je **metrizovatelná**, tj. je možné ji **generovat metrikou**.

Někdy bývá S_3 nazývána **Riemannova sféra**. Zobrazení $f^{-1} : S_3 \rightarrow \mathbb{S}$ se nazývá **stereografická projekce**. Dá se dokázat, že přímkám v \mathbb{S} (tj. přímkám v \mathbb{C} , k nimž byl přidán bod ∞), odpovídají na sféře S_3 v zobrazení f kružnice procházející „pólem“ $[0, 0, 1]$ a že obráceně při stereografické projekci každé kružnici na S_3 odpovídá v \mathbb{S} kružnice nebo přímka spolu s bodem ∞ . Čtenář si to může i lehce představit: kružnice na S_3 procházející „pólem“ $[0, 0, 1]$ určuje rovinu, která protne \mathbb{C} v přímce apod. Viz dále výklad v Kapitole 4. Jak se dále ukáže, pro bod ∞ lze zavést řadu operací a pojmů tak, že se stane „rovnoprávným bodem“ \mathbb{S} ; toto pojetí je z konce 19. stol.

Pracujeme-li v \mathbb{S} , chápeme \mathbb{S} jako topologický prostor; ač je jeho topologie metrizovatelná pomocí metriky ρ^* , nebudeme \mathbb{S} považovat za metrický prostor. Naopak $\mathbb{C} \subset \mathbb{S}$ považujeme *vždy* za metrický prostor s metrikou ρ určenou pomocí (1.3). To znamená, že metrické pojmy, které nejsou topologické, tj. např. omezenost množiny či funkce, vzdálenost množin, stejnoměrná spojitost, jsou vždy chápány vzhledem k metrice ρ . Omezená množina M v \mathbb{S} je ve smyslu této úmluvy taková podmnožina \mathbb{C} , pro kterou existuje $r \in \mathbb{R}$ tak, že $M \subset U(0, r)$. Žádná množina obsahující bod ∞ není omezená (tedy ani jednobodová množina $\{\infty\}$).

Připomeňme dále, že podle definice **souvislá množina** v (P, ρ) není sjednocením žádných dvou neprázdných disjunktních podmnožin P otevřených v P ; viz [Z], str. 390. Definice ukazuje, že tento pojem lze bez nesnází přenést do libovolného topologického prostoru.

Jak \mathbb{S} , tak i Gaussova rovina \mathbb{C} a $\mathbb{P} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jsou souvislé prostory. To znamená, že jedinými podmnožinami, které jsou v nich současně otevřené a uzavřené, jsou celý prostor a prázdná množina. Otevřené souvislé množiny v \mathbb{C} a v \mathbb{S} se nazývají **oblasti**. Maximální souvislé podmnožiny množiny $M \subset (P, \varrho)$ se nazývají **komponenty** množiny M . Předpokládáme, že čtenář zná kromě vyjmenovaných pojmů i základní tvrzení o souvislosti, např. že je obeznámen s tvrzením: *Je-li G oblast v \mathbb{R}^m nebo v \mathbb{C} , lze každé její dva body spojit lomenou čarou v G , a že zná i základní důkazový princip, založený na tom, že je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ oblast*

a je-li $H \subset G$ neprázdná množina zároveň otevřená i uzavřená v G , je $H = G$. Důležitými příklady souvislých množin v \mathbb{R}^m jsou množiny **hvězdovité** a množiny **konvexní**; viz [Z], str. 392. Připomínáme, že v hvězdovité množině $M \subset \mathbb{R}^m$ existuje takový bod x , pro který každá úsečka, která spojuje x s jiným bodem $z \in M$, leží celá v M ; někdy též říkáme, že M je **hvězdovitá vzhledem k x** . Pokud je množina M hvězdovitá vzhledem ke každému $x \in M$, říkáme, že je konvexní.

Není obtížné dokázat, že komponentami otevřené množiny G v \mathbb{R}^m nebo v \mathbb{C} nebo \mathbb{S} jsou oblasti a že těchto komponent je jen spočetně mnoho. Pro $G = \emptyset$ je tvrzení triviální; je-li $G \neq \emptyset$, lze v každé komponentě množiny G zvolit bod $z = x + iy$ s $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$, a tyto body jsou navzájem různé, čímž dostáváme prosté zobrazení množiny všech komponent množiny G do spočetné množiny.

Oblast $G \subset \mathbb{S}$, jejíž doplněk $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislý, se nazývá **jednoduše souvislá**; oblast $G \subset \mathbb{S}$, jejíž doplněk má právě dvě komponenty, je **dvojnásobně souvislá**. Obecněji říkáme, že oblast $G \subset \mathbb{S}$ je **n -násobně souvislá** pro $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, pokud má $\mathbb{S} \setminus G$ právě n komponent.

Poznámka 1.2.4. Pokud bychom nezavedli kompaktifikaci \mathbb{S} , byla by definice jednoduše souvislé nebo n -násobně souvislé oblasti složitější: Oblast $G \subset \mathbb{C}$ je n -násobně souvislá, pokud $\mathbb{C} \setminus G$ má právě $(n - 1)$ omezených komponent²⁾.

Pro naše potřeby je nejdůležitější definice jednoduše souvislé oblasti a dvojnásobně souvislé oblasti. Snadno nahlédneme, že \mathbb{S} , \mathbb{C} a $U(z_0, \varepsilon)$ jsou jednoduše souvislé oblasti, zatímco \mathbb{P} , $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ a $P(z_0, \varepsilon)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, jsou dvojnásobně souvislé oblasti.

1.3 Základní komplexní funkce

Nyní uvedeme další definice, ve kterých vystupuje „nevlastní bod“ ∞ . Zde nejde už jen o pouhé připomenutí. Budou pro čtenáře patrně nové a jsou *odlišné* od těch, které zná čtenář z reálné analýzy; nejprve rozšíříme definici aritmetických operací z \mathbb{C} na \mathbb{S} .

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{S}$. Pak definujeme $z_1 + \dots + z_n = \infty$, je-li *právě jeden* ze sčítanců z_1, \dots, z_n roven ∞ . V případě, že alespoň dva ze sčítanců jsou rovny ∞ , říkáme, že **součet** $z_1 + \dots + z_n$ **nemá smysl**. Speciálně není definován výraz $\infty + \infty$.

Podobně klademe $z_1 \dots z_n = \infty$, jestliže *alespoň jeden* z činitelů z_1, \dots, z_n je roven ∞ a *žádný není roven 0*; je-li mezi činiteli jak 0, tak i ∞ , **součin** $z_1 \dots z_n$ **nemá smysl**. Speciálně je $(-1)(\infty) = -(\infty) = \infty$, avšak výrazy $0 \cdot \infty$ a $\infty \cdot 0$ nejsou definovány³⁾. Úmluvy o dělení se mohou zdát začátečníkovi podivné. Klademe totiž $z/\infty = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a $z/0 = \infty$ pro všechna $z \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$;

²⁾ Zhruba řečeno, jistým způsobem počítáme „díry“ v G : je-li těchto „děr“ právě $(n - 1)$, je $G \subset \mathbb{C}$ n -násobně souvislá.

³⁾ Čtenář by si měl uvědomit, že odlišnost úmluv o aritmetických operacích s ∞ proti reálnému oboru souvisí s tím, že pracujeme s *jedním* nevlastním bodem.

20 KAPITOLA 1. Základní znalosti

o podílech $0/0$ a ∞/∞ opět říkáme, že nemají smysl. V tomto duchu rovněž definujeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\infty^n = 0^{-n} = \infty, \quad \infty^{-n} = 0^n = 0,$$

a konečně také $0^0 = \infty^0 = 1$; to se nám hodí při práci s mocninnými řadami: do $\sum z^k$ lze pak dosadit $z = 0$ a do $\sum z^{-k}$ i $z = \infty$. Z algebraického hlediska není tedy \mathbb{S} s takto zavedenými operacemi „hezkou“ strukturou, avšak užité definice se ukáží velmi užitečné.

Při práci v komplexním oboru je vhodné přiřazovat ∞ k číslům z \mathbb{R} a nazývat prvky z $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *reálnými* a prvky z \mathbb{S} *komplexními* čísly. V duchu této úmluvy definujeme $x < \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a také

$$\operatorname{Re} \infty = \infty, \quad \operatorname{Im} \infty = 0, \quad \overline{\infty} = \infty, \quad |\infty| = \infty.$$

Poznámka 1.3.1. Ač se může zdát na první pohled nelogické zařazovat ∞ mezi reálná čísla a přitom nedefinovat $\infty + \infty$, je to užitečné. Je však třeba vždy *velmi přesně* vymežit kontext, ve kterém pracujeme; nelze tedy argumentovat tak, že jelikož jsou reálná čísla „vnořena“ do komplexních čísel a v reálné analýze je $+\infty + (+\infty) = +\infty$, plyne odtud $\infty + \infty = \infty$ i v \mathbb{S} .

Abychom mohli zformulovat základní tvrzení o limitách, ve kterých hrají zavedené definice podstatnou roli, musíme definovat též základní pojmy, se kterými budeme dále pracovat.

Komplexní funkce komplexní proměnné jsou zobrazení z \mathbb{S} do \mathbb{S} . Jestliže je obor hodnot komplexní funkce f podmnožinou \mathbb{C} , říkáme, že je funkce f je **konečná**. Stejnou úmluvu užíváme i pro zobrazení z \mathbb{C} nebo z \mathbb{R} do \mathbb{S} . Budeme převážně pracovat s konečnými funkcemi a tak, *pokud tomu tak nebude, výslovně na to upozorníme*.

Protože již víme, co znamená $z_k \rightarrow z_0$, není složité definovat limitu a spojitost funkce. Uděláme to přímo pro funkce, nebudeme tedy užívat analogu Heineho definice limity. Definice limity komplexní funkce komplexní proměnné pomocí okolí je formálně stejná jako ta, kterou již známe: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ znamená, že

$$(\forall U(A, \varepsilon))(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(f(z) \in U(A, \varepsilon)). \quad (1.5)$$

Čtenář si jistě dokáže představit, že stejná definice „funguje“ pro komplexní funkce na obecném metrickém nebo dokonce topologickém prostoru, stačí jen vymežit význam symbolů pro okolí; připomínáme však, že limitu *nedefinujeme* v izolovaných bodech prostoru, neboť by nebyla definována jednoznačně. V metrickém prostoru lze pracovat i s parametrem δ , který určuje prstencové okolí $P(z_0)$. Připomeňme si ještě poznatek, že $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$, právě když $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$; v reálné analýze taková ekvivalence platila jen v případě $z_k \rightarrow 0$. Jak se ukáže, jsou věty o limitách v komplexním oboru vlastně *jednodušší*.

Tvrzení 1.3.2. *Nechť P je metrický (topologický) prostor a necht' $M \subset P$ a w je hromadný bod M . Necht' f, g jsou zobrazení M do \mathbb{S} . Potom platí ty z rovností*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{z \rightarrow w} |f(z)| = \left| \lim_{z \rightarrow w} f(z) \right|, \\ (2) \quad & \lim_{z \rightarrow w} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \rightarrow w} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow w} g(z), \\ (3) \quad & \lim_{z \rightarrow w} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow w} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow w} g(z), \\ (4) \quad & \lim_{z \rightarrow w} (f(z) : g(z)) = \lim_{z \rightarrow w} f(z) : \lim_{z \rightarrow w} g(z), \end{aligned}$$

pro něž má příslušná pravá strana rovnosti smysl. Speciálně: definujeme-li pro $\{z_n\}$, $z_n \rightarrow w$, posloupnosti $a_n := f(z_n)$, $b_n := g(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme postupně pro posloupnosti bodů z \mathbb{S} např.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \dots$$

a eventuálně další analogická tvrzení.

Tvrzení je sice jen zčásti nové, přesto ho však budeme dokazovat. Protože má absolutní hodnota v \mathbb{S} analogické vlastnosti jako v \mathbb{R} a definice limity (1.5) je formálně stejná jako ta, kterou již známe, dokážeme podrobněji jen ty části tvrzení, které jsou nové.

Důkaz Tvrzení 1.3.2. Část (1) dokážeme i pro případ $A \in \mathbb{C}$, který pro nás není nový. Jako v „reálném případě“ je základem odhad $||f(z)| - |A|| \leq |f(z) - A|$, vyplývající z trojúhelníkové nerovnosti; podrobněji, platí-li (budeme pracovat v bodě $w = z_0$ pro přiblížení k tradičnímu označení)

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists P(z_0)) (\forall z \in P(z_0)) (|f(z) - A| < \varepsilon),$$

plyne z uvedeného odhadu

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists P(z_0)) (\forall z \in P(z_0)) (||f(z)| - |A|| < \varepsilon).$$

Jestliže $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, znamená to

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists P(z_0)) (\forall z \in P(z_0)) (|f(z)| > 1/\varepsilon),$$

a protože je $||f(z)| = |f(z)|$, znamená tato podmínka, že $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

V (2) předpokládáme, že součet (příp. rozdíl) $\lim_{z \rightarrow w} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow w} g(z)$ má smysl, tj. alespoň jedna z limit je konečná. V případě, kdy jsou *obě* limity konečné, se rovnost dokáže tak, jako v základním kurzu analýzy, proto to již nebudeme uvádět. Necht' je tedy např. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ a $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) =: B \in \mathbb{C}$. Protože pak $\infty + B = \infty$, máme podle definice dokázat

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists P(z_0)) (\forall z \in P(z_0)) (|f(z) \pm g(z)| > 1/\varepsilon).$$

22 KAPITOLA 1. Základní znalosti

Z podmínky $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B \in \mathbb{C}$ plyne, že v nějakém okolí $P_1(z_0)$ platí pro všechna z odhad $|g(z)| < |B| + 1$. Je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ dáno, zvolme $P(z_0) \subset P_1(z_0)$ tak, aby v $P(z_0)$ platilo $|f(z)| > 1/\varepsilon + |B| + 1$. Pak také platí

$$|f(z) \pm g(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 1/\varepsilon + |B| + 1 - (|B| + 1) = 1/\varepsilon,$$

což dává dokazovaný případ tvrzení. Zbytek úvahy se redukuje na záměnu rolí funkcí f a g , které vystupují v tvrzení symetricky.

Při důkazu (3) se budeme bez újmy na obecnosti zabývat opět pouze případem, kdy alespoň jedna z limit na pravé straně rovnosti (3) má smysl, nutně platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Protože pravá strana rovnosti (3) má smysl, nutně platí $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) =: B \neq 0$. Zvolme $P_1(z_0)$ tak, aby pro všechna $z \in P_1(z_0)$ platilo $|g(z)| > |B|/2$. Nyní zvolíme k $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ takové $P(z_0) \subset P_1(z_0)$, aby všude v $P(z_0)$ platilo $|f(z)| > 2/|B|\varepsilon$. Potom však $|f(z)g(z)| > (2/|B|\varepsilon)(|B|/2) = 1/\varepsilon$ pro všechna tato z , a tedy skutečně $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \infty \cdot B = \infty$.

Pro (4) stačí zabývat případem $f \equiv 1$, tedy případem převrácené hodnoty funkce g . Nebudeme vyšetřovat případ $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \in \mathbb{P}$, který je opět triviální. Jestliže je $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$, potom

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|g(z)| < \varepsilon)$$

platí právě když

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|1/g(z)| > 1/\varepsilon).$$

Podobně v případě $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \infty$

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|g(z)| > 1/\varepsilon)$$

platí právě když

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|1/g(z)| < \varepsilon).$$

Odtud a z (3) plyne (4). Protože tvrzení o posloupnostech obdržíme z předchozího jako speciální případ, je tím důkaz dokončen. \square

Poznamenejme, že z předchozího Tvrzení 1.3.2 dostaneme snadno tvrzení o spojitosti komplexních funkcí vzhledem k množině. Funkce *je spojitá v hromadném bodě* z_0 *množiny* M *vzhledem k* M , jestliže

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in M} f(z) = f(z_0).$$

Pokud bude přitom $f(z_0) = \infty$, budeme mluvit vždy explicitně o **spojitosti v rozšířeném smyslu**. Poznamenejme ještě, že pokud je bod z_0 izolovaným bodem M , bude f **spojitá v bodě** z_0 , jakmile bude v tomto bodě definovaná; s touto situací se však dále prakticky nesetkáme.

Pro výpočty limit jsou někdy užitečné vzájemné vztahy mezi limitami, ve kterých vystupuje bod ∞ , a jinými limitami. Snadno lze nahlédnout, že platí:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A, \quad \text{právě když} \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(1/z) = A, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty, \quad \text{právě když} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (1/f(z)) = 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty, \quad \text{právě když} \quad \lim_{z \rightarrow 0} (f(1/z))^{-1} = 0; \end{aligned}$$

připomínáme, že funkce $z \mapsto 1/z$ zobrazí $P(0, r)$ na $P(\infty, r) = \mathbb{C} \setminus \overline{U(0, 1/r)}$.

Řada výsledků o komplexních funkcích vyplývá z poznatků o reálných funkcích rozkladem komplexní funkce na složky. Analogicky jako v (1.2) dostaneme obdobné odhady pro komplexní funkce, tj. jestliže je $f = f_1 + if_2$, kde f_1, f_2 jsou reálné funkce, platí opět ⁴⁾

$$f_1 \leq |f_1| \leq |f|, \quad f_2 \leq |f_2| \leq |f| \quad \text{a také} \quad |f| \leq |f_1| + |f_2|. \quad (1.6)$$

Je užitečné uvědomit si též vztahy $f_1 = (f + \bar{f})/2$, $f_2 = (f - \bar{f})/2i$. Jelikož předpokládáme, že je čtenář obeznámen s teorií reálných funkcí reálné proměnné, lze snadno získat základní znalosti o *komplexních funkcích reálné proměnné* rozkladem na složky. Analogicky pracujeme s (vlastní) derivací, takže tyto pojmy lze pro komplexní funkce *reálné proměnné* (podobně jako u zobrazení intervalů do \mathbb{R}^n) považovat za známé. Je-li např. $f = f_1 + if_2$ funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, pak $f \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b])$ znamená, že složky f_1, f_2 mají spojité derivace na *uzavřeném intervalu* $[a, b]$; v krajních bodech a, b pracujeme s jednostrannými derivacemi. Snadno se dokáží vzorce pro derivování komplexních funkcí reálné proměnné:

$$\begin{aligned} (f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \\ (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f \circ g)' = (f' \circ g)g'; \end{aligned} \quad (1.7)$$

u podílu předpokládáme navíc, že g je všude v uvažovaném oboru nenulová. Čtenář by si měl tyto „přenosy poznatků“ samostatně promyslet. S komplexními funkcemi reálné proměnné se budeme setkávat v souvislosti s křivkami v \mathbb{C} a s křivkovým integrálem. Opět předpokládáme, že čtenář jeho základní vlastnosti zná, proto je níže pouze připomeneme. Některé méně běžné vlastnosti jsou však v dalším textu vyloženy.

Příklady 1.3.3. 1. V (1.1) jsme zavedli mocniny. **Polynomy** v \mathbb{C} jsou lineární kombinace mocnin z^k , $k \in \mathbb{N}_0$, s koeficienty z \mathbb{C} , tj. funkce tvaru

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

⁴⁾ V dalším, tak jako u úmluvy o komplexních číslech, zápis $f = f_1 + if_2$ automaticky znamená, že $f_1 = \operatorname{Re} f$ a $f_2 = \operatorname{Im} f$, tj. f_1 je reálná a f_2 imaginární složka f .

Připomínáme, že při $a_n \neq 0$ je P polynom n -tého stupně. Pokud jsou všechny **koeficienty** a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 polynomu P rovny 0, je $P \equiv 0$ a P nemá stupeň, zatímco každá *nenulová konstantní funkce* je polynomem stupně 0. Jestliže pro polynom P a čísla $z_0 \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, platí identita $P(z) = (z - z_0)^p P_1(z)$, kde P_1 je polynom, pro který $P_1(z_0) \neq 0$, budeme z_0 nazývat **p -násobný kořen** polynomu P .

Jedním z našich cílů bude mj. *dokázat* základní větu algebry; viz Větu 5.7.8 v Kapitole 5. Ta říká, že každý polynom stupně alespoň jedna má alespoň jeden kořen; jejím důsledkem je pak fakt, že polynom n -tého stupně má pro $n \geq 1$ právě n kořenů, je-li každý z nich počítán tolikrát, kolik činí jeho násobnost. Poznamenejme, že polynomy jsou spojité funkce.

2. Je-li $R(z) = P(z)/Q(z)$ podílem dvou polynomů, přičemž $Q \not\equiv 0$, nazýváme funkci R **racionální funkce**. Jejím definičním oborem je $\mathbb{C} \setminus \{w; Q(w) = 0\}$ a R je na něm spojitá. Speciálně $z^{-k} = 1/z^k$, $k \in \mathbb{N}$, jsou funkce definované v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zatím nebudeme definovat další funkce a připomeneme několik základních pojmů a vlastností funkcí. Jejich definice jsou analogií definic známých z teorie reálných funkcí.

Poznámka 1.3.4. Snadno nahlédneme, že je-li P polynom, pak $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z)$ vždy existuje: je-li P konstantní, lze P hodnotou této konstanty *spojitě* rozšířit na \mathbb{S} . Je-li P polynom stupně alespoň prvního, $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, je

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n (a_0 + a_1/z + \dots + a_n/z^n) = \infty$$

a P lze rozšířit spojitě (v rozšířeném smyslu) na \mathbb{S} tím, že položíme $P(\infty) = \infty$. Někdy je vhodné pohlížet na polynomy jako na funkce spojité na \mathbb{S} ⁵⁾.

Obdobná je situace s racionálními funkcemi. Analogicky lze tedy opět každou racionální funkci R rozšířit jednoznačně na spojitě zobrazení \mathbb{S} do \mathbb{S} . Za určitých okolností je to velmi výhodné (srovnejte např. s Kapitolou 10). Pokud označíme např. $m_{-k}(z) = z^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, je speciálně $m_{-k}(0) = \infty$ a $m_{-k}(\infty) = 0$. Jak již však bylo řečeno, pokud úmluvu o spojitosti v rozšířeném smyslu použijeme, *výslovně na to upozorníme*.

Poznámka 1.3.5. Zavedení dalších elementárních funkcí je složitější, budeme se mu věnovat v Kapitole 4. Poznamenejme, že i zavedení mocnin s obecnějším exponentem (a to i pro exponenty tvaru $1/n$, $n \in \mathbb{N}$) není v \mathbb{C} tak jednoduché jako v \mathbb{R} . Protože tato poznámka má jen informativní charakter, použijeme nedokázané tvrzení, známé ze střední školy pod jménem *Moivrova formule*; srv. (4.48). Snadno nahlédneme, že jednoduchá rovnice s neznámou z

$$z^n = w \tag{1.8}$$

má pro $w = 0$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jediné řešení $z = 0$; to plyne z toho, že při $z \neq 0$ je $|z^n| = |z|^n > 0$. V obecnějším případě vyjádříme z i w v goniometrickém

⁵⁾ Pozor, \mathbb{S} je kompaktní, ale ze spojitosti funkce f v rozšířeném smyslu na \mathbb{S} neplyne její omezenost na \mathbb{S} .

tvary $z = r(\cos t + i \sin t)$, $w = \varrho(\cos \theta + i \sin \theta)$ a z rovnosti $z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$ porovnáním absolutních hodnot dostaneme $r^n = \varrho$ a též $nt = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, neboť druhá rovnost $nt = \theta$ platí modulo 2π . Tak dospějeme k vyjádření všech řešení rovnice (1.8)

$$z_k = \sqrt[n]{\varrho} \cdot (\cos((\theta + 2k\pi)/n) + i \sin((\theta + 2k\pi)/n))$$

s $k = 0, 1, \dots, n-1$. Pak každé z těchto n čísel lze považovat za „ n -tou odmocninu z w “. Řešíme-li paralelně s touto úlohou rovnici $z^n = 1$, pak její „základní“ řešení $z = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ má významné postavení, neboť postupným násobením čísla $\sqrt[n]{\varrho}(\cos(\theta/n) + i \sin(\theta/n))$ tímto speciálním číslem dostaneme všechna řešení rovnice (1.8). Podrobnější vyšetření této problematiky provedeme v Kapitole 4. Viz též např. [28].

Poznámka 1.3.6. Jak již bylo řečeno, některé poznatky o komplexních funkcích lze získat pomocí rozkladu na reálnou a imaginární část. Je však vhodné si uvědomit, že v případě limit funkcí pro $f = f_1 + if_2$ z $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = \infty$ *neplyne* jako v „konečném případě“ mechanickým rozkladem na reálnou a imaginární část $\lim_{z \rightarrow w} f_1(z) = \infty$ a zároveň $\lim_{z \rightarrow w} f_2(z) = 0$. Při zacházení s ∞ je nutno být vždy opatrný. Ačkoli např. $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ neexistuje, pokud ji chápeme jako limitu funkce *reálné proměnné*, protože jednostranné limity jsou různé, je $\lim_{z \rightarrow 0} 1/z = 1/0 = \infty$, pokud pracujeme v \mathbb{S} .

1.4 Derivování

Podstatně odlišná je situace s derivováním, na tomto místě však připomeneme pouze definici a její důsledky; definice je jednoduchá a po formální stránce stejná jako v \mathbb{R} . Odlišnosti, se kterými se dále setkáme, neleží v oblasti kalkulu, ale v „teoretických“ důsledcích definice; budeme se jimi podrobněji zabývat v následující Kapitole 2.

Pro funkci f definovanou v nějakém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ definujeme derivaci $f'(z_0)$ funkce f v bodě z_0 jedním z (ekvivalentních) vztahů

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \text{nebo} \quad f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

je-li limita vpravo konečná. Díky formálně stejné definici jako v \mathbb{R} platí (a obdobně se i dokáže) tvrzení o derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu a složené funkce, a podobně platí i vzorce (1.7), tentokrát však pro funkce komplexní proměnné. Důkaz tvrzení o derivování složené funkce provedeme detailně v Kapitole 2. Vyšší derivace f'' , resp. $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, \dots definujeme tak jako v \mathbb{R} rekurentně, tj. pomocí vztahu $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, $n \in \mathbb{N}$. Pokud existuje $f'(z_0)$, říkáme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** z_0 .

Tvrzení následujícího lemmatu je vcelku zřejmé, ale přesto je velmi užitečné. Bylo by možné vystačit s menším počtem v něm uvedených ekvivalentních podmínek, avšak užití vhodně vybrané podmínky umožňuje často snazší a průhlednější důkaz některých tvrzení. S podmínkou uvedenou v (3) se čtenář mohl již setkat při vyšetřování funkcí více proměnných.

Lemma 1.4.1. *Nechť funkce f je definována v jistém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom jsou ekvivalentní tyto tři výroky:*

(1) *Existuje derivace*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}; \quad (1.9)$$

(2) *existuje $A \in \mathbb{C}$, pro něž je*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah}{h} = 0, \quad (1.10)$$

tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U(0) \subset \mathbb{C}$ tak, že pro všechna $h \in U(0)$ je

$$|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah| \leq \varepsilon|h|; \quad (1.11)$$

(3) *(Carathéodoryho podmínka) existuje funkce ϑ definovaná v nějakém okolí $U(z_0)$, spojitá v bodě z_0 taková, že pro všechna $z \in U(z_0)$ je*

$$f(z) - f(z_0) = \vartheta(z)(z - z_0). \quad (1.12)$$

Je-li splněna kterákoli z uvedených podmínek, platí rovnosti $f'(z_0) = A = \vartheta(z_0)$.

Důkaz. Platí-li (1.9), platí též (1.10) a naopak: stačí položit $h := z - z_0$, $A = f'(z_0)$ a provést jednoduchou úpravu. Podmínka (1.11) je jen ekvivalentním přepisem (1.10) podle definice limity. Porovnáním s (1.9) vidíme, že spojitost ϑ z (1.12) v bodě z_0 dává (1.9) a $\vartheta(z_0) = f'(z_0)$. Jednoduchou úpravou z (1.9) plyne, že

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0),$$

takže za $\vartheta(z)$ lze volit podíl $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ pro $z \neq z_0$ spojitě rozšířený do bodu z_0 hodnotou $\vartheta(z_0) = f'(z_0)$. Tím je důkaz ekvivalence dokončen. \square

Poznámka 1.4.2 (důležitá). Podmínka s nerovností (1.11) z Lemmatu 1.4.1 se často zapisuje ve tvaru ⁶⁾

$$f(z_0 + h) - f(z) = f'(z_0)h + o(h).$$

Tento zápis je vyjádřením faktu, že pro funkci $g(h) := f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h$ platí $g(h)/h \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$. Zápis pomocí (1.11) vyžaduje užití absolutních hodnot. Konkrétní tvar funkce g v mnoha případech nepotřebujeme; v „reálné“ analýze se toto vyjádření často užívá při práci s Taylorovými polynomy, při počítání limit apod.

⁶⁾ Připomínáme čtenáři symboly $O(\cdot)$ a $o(\cdot)$ z Definice 7.4.22 v [Z].

Dále se budeme postupně seznamovat s teorií, ve které hraje diferencovatelnost funkcí centrální roli. Zavedeme speciální terminologii.

Definice 1.4.3. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Říkáme, že **funkce f je holomorfní v G** , jestliže existuje $f'(z)$ pro všechna $z \in G$.

Příklad 1.4.4. Existence derivace mocniny $m_n(z) := z \rightarrow z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, všude v \mathbb{C} vyplývá jednoduše z Lemmatu 1.4.1, a to takto: Je-li $n = 0$, je tvrzení triviální. Pro $n \geq 1$ a pro libovolně zvolené $z_0 \in \mathbb{C}$ je

$$z^n - z_0^n = \vartheta(z)(z - z_0),$$

kde $\vartheta(z) = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}$, a to pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Ze spojitosti polynomů a z Carathéodoryho podmínky (3) z Lemmatu 1.4.1 vyplývá, že funkce m_n je diferencovatelná v bodě z_0 a je tedy holomorfní v \mathbb{C} ; protože platí rovnost $\vartheta(z_0) = n z_0^{n-1}$, je $m'_n(z) = (z^n)' = n z^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Snadno též nahlédneme, že odtud vyplývá pomocí vět o derivování součtu a součinu, že polynomy jsou funkce holomorfní v \mathbb{C} . Podobně racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$, je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus K$, kde K je (konečná) množina nulových bodů Q .

U holomorfních funkcí užíváme pro izolované nulové body v \mathbb{C} analogickou terminologii jako u polynomů: je-li $w \in \mathbb{C}$ a existuje-li okolí $U(w)$ tak, že $f(z) = 0$ v $U(w)$ právě tehdy, když je $z = w$, říkáme, že w je **izolovaný nulový bod** funkce f . Je-li $p \in \mathbb{N}$ a $f(z) = (z - w)^p g(z)$, g je holomorfní v nějakém okolí $U(w)$ a $g(w) \neq 0$, je číslo p **násobnost nulového bodu w funkce f** . U holomorfních funkcí budeme užívat termín *nulový bod*, u polynomů budeme dávat přednost tradičnímu termínu **kořen**.

1.5 Křivky v \mathbb{C}

Jedním z nejdůležitějších pojmů bude pro nás v dalším *pojmem křivky*. V této kapitole připomeneme terminologii a několik jednoduchých pojmů a zavedeme některé úmluvy. Intuitivně je patrně čtenáři nejbližší pohlížet na křivku v \mathbb{C} jako na *podmnožinu* \mathbb{C} . Tak například pro $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r \in \mathbb{R}_+$ se množina

$$K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$$

nazývá obvykle **kružnice** o středu z_0 a poloměru r . Pro $z = x + iy$ platí však rovněž

$$K(z_0, r) = \{[x, y] \in \mathbb{C}; x = x_0 + r \cos t, y = y_0 + r \sin t, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Tento popis v sobě zahrnuje i jisté „pořadí“ bodů, které je určeno zobrazením $\varphi(t) = r(\cos t + i \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$; toto zobrazení je tzv. **parametrizace** množiny $K(z_0, r)$. I když budeme studovat vlastnosti do jisté míry nezávislé na parametrizaci, je pro nás mnohem výhodnější pracovat přímo se *spojitými zobrazeními intervalů* nežli s jejich obory hodnot. Proto zavedeme následující terminologii.

Spojité zobrazení φ kompaktního intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ do \mathbb{C} budeme nazývat ⁷⁾ **křivka**. Bod $\varphi(a)$ se nazývá **počáteční bod** křivky φ ; budeme ho značit $\text{pb}(\varphi)$. Bod $\varphi(b)$ se nazývá **koncový bod** křivky φ a budeme ho značit $\text{kb}(\varphi)$. Oba body $\varphi(a), \varphi(b)$ jsou **krajní body** křivky φ . Je-li $\varphi(a) = \varphi(b)$, říkáme, že φ je **uzavřená křivka**. Obor hodnot φ značíme $\langle \varphi \rangle$, tj. klademe $\langle \varphi \rangle := \varphi([a, b])$, a nazýváme ho **geometrický obraz** křivky φ . Uzavřený interval je souvislá kompaktní množina a φ je spojitá funkce. Proto z tvrzení o spojitém obrazu kompaktu vyplývá, že $\langle \varphi \rangle$ je souvislá kompaktní množina; viz [Z], Věty 13.3.17 a 13.4.5. Množina $\langle \varphi \rangle$ může být jednobodová, pokud je φ konstantní, ale třeba i čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ v případě, že φ je tzv. *Peanova křivka*.

Je-li křivka φ prostá, nazýváme $\langle \varphi \rangle$ **oblouk**. Pokud je φ uzavřená křivka a restrikce $\varphi|_{[a, b]}$ je prosté zobrazení, budeme φ nazývat **Jordanova křivka** a její geometrický obraz **topologická kružnice**. Velmi často, zejména v mluveném projevu, *bývá rozlišování mezi funkcí $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ a množinou $\langle \varphi \rangle \subset \mathbb{C}$ poněkud nedůsledné*.

Poznámka 1.5.1. Ve všech popsaných případech je $\langle \varphi \rangle$ souvislá kompaktní množina. Obecněji, každý souvislý kompaktní K nazýváme **kontinuum**, a pokud obsahuje alespoň dva různé body, **vlastní kontinuum**. Zjistit, zda lze takové kontinuum $K \subset \mathbb{R}^2$ „parametrizovat“, není triviální. Tzv. *Hahn-Mazurkiewicz-Sierpińského věta* říká, že K je geometrický obraz nějaké křivky, právě když je K kompaktní, souvislá a *lokálně souvislá*, což ilustruje důležitost pojmu lokální souvislosti.

Příklad 1.5.2. Jsou-li z, w komplexní čísla, pak křivku φ definovanou vztahem

$$\varphi(t) = z + (w - z)t, \quad t \in [0, 1],$$

nazýváme **orientovaná úsečka** $[z; w]$, podrobněji orientovaná úsečka s počátečním bodem z a koncovým bodem w ⁸⁾. **Opačně orientovanou úsečkou** k úsečce $[z; w]$ je úsečka $[w; z]$. Stručněji mluvíme o úsečce $[z; w]$ místo o orientované úsečce $[z; w]$.

Připomínáme čtenáři, že se patrně již na střední škole setkal se vzorcem (v tomto okamžiku ho chápeme jen jako *zkrácení zápisu* po složkách, později však ukážeme, že vzorec platí i pro všechna $t \in \mathbb{C}$)

$$e^{it} := \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

a že platí

$$(\cos t + i \sin t)' = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = ie^{it}.$$

⁷⁾ Někdy se též užívá podrobnější označení *křivka v Jordanově smyslu*; my toto označení užívat nebudeme.

⁸⁾ Čtenáře upozorňujeme, že při označení dvojic, uzavřených intervalů v \mathbb{R} apod. užíváme jako oddělovací znaménko čárku, u úseček a polygonálních křivek, které zavedeme později, budeme užívat středník.

Nyní vzorec využijeme: Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r \in \mathbb{R}_+$, pak křivka definovaná rovností

$$\varphi(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

se nazývá **kladně orientovaná kružnice** se středem z_0 a poloměrem r . V úvahách, kde není nebezpečí z nedorozumění, se často *mluví* stručně o kružnici či úsečce a označují se tak jak *křivky*, tak i *jejich geometrické obrazy*.

Jelikož se s geometrickými obrazy kružnice a úsečky velmi často pracuje, domluvíme se na tom, že pokud není řečeno něco jiného, jsou parametrizovány přesně tak, jako v předcházejícím Příkladu 1.5.2. Tyto parametrizace budeme někdy nazývat **standardní**.

Křivka definovaná velmi obecně, pouze jako spojitě zobrazení uzavřeného intervalu do \mathbb{C} , by vyžadovala speciální definici křivkového integrálu. Vyhňeme se jí a budeme se zabývat převážně *speciálními křivkami*, které jsou spojitě diferencovatelné, nebo po částech spojitě diferencovatelné, neboť to v mnoha případech postačí. Nebudeme se však vázat na geometrický význam, tj. existenci tečen či polotečen, a těmito otázkami se hlouběji nebudeme zabývat.

Derivaci φ v intervalu $[a, b]$ rozumíme funkci, rovnou $\varphi'(t)$ pro $t \in (a, b)$, $\varphi'_+(a)$ v bodě a , $\varphi'_-(b)$ v bodě b . Je-li takto definovaná derivace spojitá v $[a, b]$, říkáme, že křivka $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je **regulární**. Křivku φ budeme nazývat **po částech regulární**, existuje-li dělení $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ tak, že každá z restrikcí $\varphi|_{[t_{k-1}, t_k]}$, $1 \leq k \leq n$, je regulární. Odtud plyne že derivace $\varphi'(t)$ neexistuje v (a, b) nejvýše v bodech tohoto dělení D ; tam však existují příslušné jednostranné derivace (speciálně pracujeme vždy s křivkami *konečné délky*; viz dále). Nyní uzavřeme tuto dodatečnou úmluvu:

Úmluva 1.5.3 (důležitá). Pokud nebude řečeno něco jiného, znamená v dalším výkladu **křivka** vždy *po částech regulární křivka*. Proto tam, kde budeme pracovat s obecnějším pojetím křivky, *výslovně na to upozorníme*.

1.6 Křivkový integrál

Při zavádění integrálu reálných funkcí reálné proměnné se obvykle dokazuje, že Newtonův integrál je jakožto funkcionál na prostoru $\mathcal{C}([a, b])$ všech spojitých funkcí na $[a, b]$ nezáporný, spojitý a lineární⁹⁾. Dále se dokazuje „aditivita vůči integračnímu oboru“, odvozují se pravidla pro výpočet (metoda per partes a substituční metoda) a zkoumá se vztah k integrálu Riemannovu. Některé z těchto vlastností se snadno přenesou i na případ křivkového integrálu v \mathbb{C} ¹⁰⁾.

Připomeneme ještě tvrzení, která nám umožňovala integrály počítat:

⁹⁾ Funkcionály jsou funkce, které jsou definovány např. na normovaných lineárních prostorech, systémech funkcí apod. Nezápornost zde znamená, že *nezáporným funkcím* jsou přiřazována *nezáporná čísla*.

¹⁰⁾ Monotonii např. rozumně přenést nemůžeme, neboť na \mathbb{C} nemáme uspořádání.

Lemma 1.6.1. *Nechť f, g jsou spojitě diferencovatelné reálné či komplexní funkce na intervalu I . Potom pro $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in I$ platí*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t)dt = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)g(t)dt .$$

Nechť J je interval a $h : I \rightarrow J$ je funkce spojitě diferencovatelná na $I \subset \mathbb{R}$. Potom pro každou spojitou funkci f na J a $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in I$ platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t)dt = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(u)du .$$

Důkaz. Stačí zvážit, že je-li $H' = f'g$, je $(fg - H)' = fg'$. Podobně, je-li ve druhém případě $F' = f$, pak $(F \circ h)' = (F' \circ h)h' = (f \circ h)h'$, z čehož lehce plyne tvrzení. \square

Definice 1.6.2. Je-li $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá, definujeme (Newtonův) integrál

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt . \quad (1.13)$$

Stejnou rovností definujeme samozřejmě integrál i v případě, že f je spojitá na (a, b) a lze ji spojitě rozšířit na $[a, b]$. V obecnějším případě, kdy existuje dělení $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ tak, že každou z restrikcí $f|_{(t_{k-1}, t_k)}$ lze spojitě rozšířit na $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$, klademe

$$\int_a^b f(t)dt := \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt . \quad (1.14)$$

Také v tomto případě, a to i když není f definována v bodech dělení D , říkáme, že f je **po částech spojitá** v intervalu $[a, b]$.

Poznámka 1.6.3. Poslední vzoreček (1.14) je zbytečný, pokud čtenář disponuje obecnější definicí Newtonova integrálu z omezené funkce f spojitě v $[a, b] \setminus K$, kde K je konečná množina. Na hodnotách f v bodech množiny K pak hodnota integrálu nezávisí. Čtenář by si měl uvědomit, že minimálním prostředkem, s nímž vystačíme, je integrál ze spojitě funkce na uzavřeném intervalu: ten jsme pouze nepodstatně zobecnili.

Definice 1.6.4. Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ je křivka a f je spojitá (komplexní) funkce na $\langle \varphi \rangle$. **Integrál z funkce f podél křivky φ** definujeme rovností

$$\int_{\varphi} f(z)dz := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Poslední integrál lze upravit na tvar

$$\int_a^b ((\operatorname{Re} f \circ \varphi)\varphi'_1 - (\operatorname{Im} f \circ \varphi)\varphi'_2) + i \int_a^b ((\operatorname{Im} f \circ \varphi)\varphi'_1 + (\operatorname{Re} f \circ \varphi)\varphi'_2) ;$$

pro čtenáře, který se zatím setkal pouze s integrálem reálných funkcí reálné proměnné, slouží toto vyjádření jako podrobnější vysvětlení; všechny integrály samozřejmě chápeme jako integrály Newtonovy.

Při integraci komplexních funkcí je užitečné mít k dispozici nerovnost mezi absolutní hodnotou integrálu a integrálem z absolutní hodnoty integrandu. Dokažme, že pro každou po částech spojitou *komplexní* funkci f na intervalu $[a, b]$ platí nerovnost

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt. \quad (1.15)$$

Označme w integrál na levé straně nerovnosti (1.15). Je-li $w = 0$, nerovnost platí. V následujícím odhadu využíváme toho, že integrál z reálné části funkce je roven reálné části integrálu. Pokud $w \neq 0$, pak

$$|\bar{w}| |w| = \int_a^b \bar{w} f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(\bar{w} f(t)) dt \leq \int_a^b |\bar{w}| |f(t)| dt = |\bar{w}| \int_a^b |f(t)| dt,$$

a stačí obdrženou nerovnost dělit hodnotou $|\bar{w}|$. Speciálně, pro křivkový integrál z $f = 1$ dostaneme:

$$\left| \int_{\varphi} dz \right| \leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_a^b ((\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2)^{1/2} dt =: L(\varphi); \quad (1.16)$$

poslední integrál v (1.16) je **délka křivky** φ , kterou značíme $L(\varphi)$; viz [Z], Definici 10.4.5 a Příklad 10.4.7.

Spojité funkce na $\langle \varphi \rangle$ tvoří komplexní normovaný lineární prostor $C := \mathcal{C}(\langle \varphi \rangle)$, definujeme-li standardně

$$\|f\|_C = \max\{|f(z)|; z \in \langle \varphi \rangle\} = \max\{|f(\varphi(t))|; t \in [a, b]\};$$

je-li z kontextu zřejmé, ve kterém prostoru pracujeme, index u označení normy vynecháváme.

Důsledek 1.6.5. *Pro křivku $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ a $f \in \mathcal{C}(\langle \varphi \rangle)$ platí nerovnost¹¹⁾*

$$\left| \int_{\varphi} f(z) dz \right| \leq \|f\| L(\varphi). \quad (1.17)$$

Důkaz. Stačí uvážit, že z (1.15) plyne, že

$$\left| \int_{\varphi} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \|f\| \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \|f\| L(\varphi), \quad (1.18)$$

což dává (1.17). □

¹¹⁾ Budeme-li se na následující odhad odvolávat, budeme užívat označení „základní odhad“.

Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$, $c \in \mathbb{C}$, pak zřejmě platí

$$\int_{\varphi} (f + g) = \int_{\varphi} f + \int_{\varphi} g, \quad \int_{\varphi} cf = c \int_{\varphi} f$$

a křivkový integrál z Definice 1.6.4 je (komplexním) lineárním funkcionálem na prostoru $\mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$.

Často je užitečné umět nahradit křivku φ jinou křivkou ψ s tímtež geometrickým obrazem tak, aby např. pro každou funkci f spojitou na $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$ platila rovnost $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.

Definice 1.6.6. Nechť φ je křivka definovaná na $[a, b]$ a necht' ω je rostoucí funkce se spojitou derivací na $[a_1, b_1]$ ¹²⁾, zobrazující $[a_1, b_1]$ na $[a, b]$. Potom říkáme, že křivka $\psi := \varphi \circ \omega$ vznikla z φ **změnou parametru**.

Tvrzení 1.6.7. Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka a necht' ω je rostoucí funkce se spojitou derivací na $[a_1, b_1]$, zobrazující interval $[a_1, b_1]$ na $[a, b]$. Definujeme $\psi := \varphi \circ \omega$. Je-li $f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$, platí

$$\int_{\psi} f(z) dz = \int_{\varphi} f(z) dz. \quad (1.19)$$

Důkaz. Stačí uvážit, že ψ je dle věty o derivování složené funkce (po částech regulární) křivka: následující rovnosti

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\psi(t)) \psi'(t) dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\varphi(\omega(t))) \varphi'(\omega(t)) \omega'(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

dávají (1.19) přepisem podle definice křivkového integrálu. \square

Poznámka 1.6.8 (důležitá). Je-li $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ regulární křivka, lze změnou parametru přejít k regulární křivce $\psi : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ tak, že platí (1.19). Stačí volit např. *lineární funkci* ω tvaru

$$\omega(t) := \frac{(b_1 - a_1)t + (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{b_2 - a_2}, \quad t \in [a_2, b_2].$$

Uvedme několik speciálních případů: Jestliže volíme $\omega(u) = a_1 + u(b_1 - a_1)$, $u \in [0, 1]$, je $\psi = \varphi \circ \omega$ definována na $[0, 1]$. Opačný přechod mezi intervaly $[0, 1]$ a $[a_1, b_1]$ umožňuje volba $\omega(u) = (u - a_1)/(b_1 - a_1)$, $u \in [a_1, b_1]$.

Pro změnu parametru je užitečná i volba funkce $\omega : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$, pro kterou $\omega'(a_1+) = \omega'(b_1-) = 0$. Potom pro křivku ψ je $\psi'_+(a_1) = \psi'_-(b_1) = 0$. Např. pro $[a_1, b_1] = [a, b] = [-1, 1]$ stačí volit $\omega(u) = \sin(\pi u/2)$. Postupným skládáním již popsaných zobrazení lze pro libovolné intervaly $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ a regulární křivku $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ přejít změnou parametru k takové křivce $\psi : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$, pro kterou $\psi'_+(a_2) = \psi'_-(b_2) = 0$.

¹²⁾ V krajních bodech a_1, b_1 uvažujeme jednostranné derivace.

Příklad 1.6.9. Pro orientovanou úsečku $[z, w]$ s počátečním bodem z a koncovým bodem w je její délka rovna $|w - z|$ a platí rovnost

$$\int_{\varphi} f(z) dz = (w - z) \int_0^1 f(z + (w - z)t) dt.$$

Příklad 1.6.10. Je-li φ kladně orientovaná kružnice se středem z_0 a poloměrem r , pak jako v Příkladu 1.5.2 položíme $\varphi(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, a dostaneme

$$\int_{\varphi} f(z) dz = ir \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{it} dt. \quad (1.20)$$

Spočteme-li délku křivky φ , je ve shodě s naší zkušeností rovna $2\pi r$; viz [Z], Příklad 11.4.11. V případě, že $f(z) = 1/(z - z_0)$, je integrál v (1.20) roven

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z - z_0} = ir \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i; \quad (1.21)$$

na tomto místě by si čtenář měl povšimnout, že tento integrál z „krásné“ funkce, na $\langle \varphi \rangle$ spojitě a dokonce v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorfní, není pro uzavřenou křivku roven 0.

Definice 1.6.11. Splývá-li koncový bod $\text{kb}(\varphi_1)$ křivky $\varphi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ s počátečním bodem $\text{pb}(\varphi_2)$ křivky $\varphi_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$, potom definujeme

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &:= \varphi_1(t), & t &\in [a_1, b_1], \\ \psi_2(t) &:= \varphi_2(t - b_1 + a_2), & t &\in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{aligned}$$

a položíme

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= \psi_1(t), & t &\in [a_1, b_1], \\ \psi(t) &:= \psi_2(t), & t &\in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{aligned}$$

V tomto případě budeme psát $\psi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ a ψ budeme nazývat **orientovaný součet křivek** φ_1 a φ_2 .

Tento pojem lze zřejmým způsobem rozšířit na libovolný konečný počet křivek $\varphi_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, pokud pro $k = 1, \dots, (n - 1)$ platí rovnosti $\text{kb}(\varphi_k) = \text{pb}(\varphi_{k+1})$. Píšeme pak $\psi = \varphi_1 \dot{+} \dots \dot{+} \varphi_n$.

Lemma 1.6.12. Je-li $f \in \mathcal{C}(\langle \psi \rangle)$ a $\psi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$, potom platí

$$\int_{\psi} f(z) dz = \int_{\varphi_1} f(z) dz + \int_{\varphi_2} f(z) dz. \quad (1.22)$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že při označení z Definice 1.6.11 platí pro křivky φ_k , ψ_k , $k = 1, 2$, $\psi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ a každou $f \in \mathcal{C}(\psi)$ s ohledem na Tvzení 1.6.7

$$\int_{\psi} f(z) dz = \int_{\psi_1} f(z) dz + \int_{\psi_2} f(z) dz = \int_{\varphi_1} f(z) dz + \int_{\varphi_2} f(z) dz ;$$

tím je důkaz dokončen. \square

Indukcí dostaneme z Lemmatu 1.6.12 tvrzení pro libovolný konečný počet křivek φ_k , $k = 1, \dots, n$:

Důsledek 1.6.13. *Je-li $f \in \mathcal{C}(\langle\psi\rangle)$ a $\psi = \varphi_1 \dot{+} \dots \dot{+} \varphi_n$, potom platí*

$$\int_{\psi} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\varphi_k} f(z) dz . \quad (1.23)$$

Poznámky 1.6.14. 1. Využijeme-li označení z Definice 1.6.11, pak je křivka $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (podrobněji: po částech regulární křivka) orientovaným součtem konečně mnoha regulárních křivek φ_k , $k = 1, \dots, n$, které vzniknou restrikcí φ na intervaly $[x_{k-1}, x_k]$ dělení $D = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$, na nichž má φ spojitou derivaci.

2. V mnoha případech, které budeme dále vyšetřovat, budeme pracovat s pojmy nezávislými na změně parametru křivky. Zavádění ekvivalence křivek vůči změně parametru by však bylo pro naše potřeby neúčelné, ač této ekvivalence často využíváme.

3. Není příliš podstatné, že jsme křivky „spojili“, stejně můžeme zacházet se souborem konečně mnoha (uzavřených) křivek, které na sebe „nenavazují“; pro tento případ však zavedeme další označení. Viz pojem **cyklu** v Kapitole 11 v [K].

Poznámka 1.6.15 (důležitá). V Poznámce 1.6.8 jsme popsali, jak sestrojít pro libovolné intervaly $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ a regulární křivku $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ změnou parametru křivku $\psi : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$, pro kterou $\psi'_+(a_2) = \psi'_-(b_2) = 0$.

Nechť φ je křivka na $[a, b]$ a nechť $D = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ je takové dělení intervalu $[a, b]$, že pro $\varphi_k := \varphi|_{(x_{k-1}, x_k)}$ lze φ'_k spojitě rozšířit na interval $[x_{k-1}, x_k]$ pro všechna $k = 1, \dots, n$. Jestliže nyní změnou parametru pomocí $\omega_k : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow [x_{k-1}, x_k]$ přejdeme od křivek $\varphi_k : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{C}$ ke křivkám $\psi_k : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{C}$ takovým, že $(\psi_k)'_+(x_{k-1}) = (\psi_k)'_-(x_k) = 0$, pak pro křivku $\psi = \psi_1 \dot{+} \dots \dot{+} \psi_n$ existuje spojitá derivace ψ' na $[a, b]$. Je-li $\omega : [a, b] \rightarrow [a, b]$ taková, že $\omega|_{[x_{k-1}, x_k]} = \omega_k$, pak změnou parametru pomocí ω lze přejít od křivky φ k *regulární* křivce ψ . V případě potřeby to budeme využívat.

Křivku ψ , která z $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ vznikne složením s $\omega(t) = -t$, kde $t \in [-b, -a]$, tj. $\psi = \varphi \circ \omega$, budeme značit $\dot{-}\varphi$ a budeme ji nazývat **opačnou křivkou** nebo

podrobněji **opačně orientovanou křivkou** ke křivce φ . Potom snadno obdržíme

$$\begin{aligned}\int_{\psi} f(z)dz &= \int_{-b}^{-a} f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int_{-b}^{-a} f(\varphi(\omega(u)))\varphi'(\omega(u))\omega'(u)du = \\ &= - \int_a^b f(\varphi(v))\varphi'(v)dv = - \int_{\varphi} f(z)dz .\end{aligned}$$

Zavedeme zkrácené označení a pro $\varphi = \varphi_1 \dot{+} (\dot{-} \varphi_2)$ píšeme pouze $\varphi = \varphi_1 \dot{-} \varphi_2$. Analogicky postupujeme i při větším počtu sčítanců.

Je-li φ uzavřená křivka, jsou body jejího geometrického obrazu v jistém smyslu rovnocenné: ať ji „proběhneme“ od kteréhokoliv bodu jakožto počátku, křivkový integrál se nezmění v následujícím smyslu:

Lemma 1.6.16. *Nechť $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ je uzavřená křivka a $\psi = \varphi_2 \dot{+} \varphi_1$. Pak je*

$$\int_{\psi} f(z)dz = \int_{\varphi} f(z)dz$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$.

Důkaz. Stačí uvážit, že

$$\int_{\varphi} f(z)dz = \int_{\varphi_1} f(z)dz + \int_{\varphi_2} f(z)dz$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$. □

Lemma 1.6.17. *Nechť f je spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Pak jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

- (1) *Pro každé dvě křivky φ, ψ v G , pro které $\text{pb}(\varphi) = \text{pb}(\psi)$, $\text{kb}(\varphi) = \text{kb}(\psi)$, platí rovnost $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.*
- (2) *Pro každou uzavřenou křivku ω v G je $\int_{\omega} f = 0$.*

Důkaz. Zvolme libovolně body $z, w \in G$ a dvojici křivek φ, ψ v G s počátečním bodem w a koncovým bodem z . Potom $\omega = \varphi \dot{-} \psi$ je uzavřená křivka v G ; zbytek je zřejmý. □

Úmluva 1.6.18. Nastane-li jeden z případů, popsaných v předcházejícím Lemmatu 1.6.17, říkáme, že (**křivkový**) **integrál z funkce f nezávisí na cestě v G** .

Definice 1.6.19. Jsou-li dány body $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, pak křivku

$$\varphi := [z_0; z_1] \dot{+} [z_1; z_2] \dot{+} \dots \dot{+} [z_{n-1}; z_n]$$

nazýváme **lomená čára** nebo též **polygonální křivka**. Budeme ji zapisovat ve tvaru $[z_0; z_1; \dots; z_n]$. Abychom se vyhnuli oddělenému vyšetřování speciálních případů, je užitečné připustit, že počáteční a koncový bod některé z úseček splývají; pak je standardní parametrizace takové „úsečky“ konstantní zobrazení intervalu $[0, 1]$.

Poznámka 1.6.20. V partii o metrických prostorech jsme v [Z], Věta 13.4.16, dokázali, že je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ oblast, lze každé dva body G spojit lomenou čarou ležící v G . Speciálně, porovnáme-li použitou terminologii, dostáváme tvrzení, že každé dva body oblasti $G \subset \mathbb{C}$ lze spojit polygonální křivkou v G .

Se speciálními polygonálními křivkami, které „ohraničují“ trojúhelníky nebo obdélníky, budeme dále často pracovat. Budeme také potřebovat relativně hlubokou větu z topologie \mathbb{R}^2 , kterou však dokazovat *nebudeme*. Poznamenejme, že existují i elementární, ale značně pracné důkazy této věty.

Věta 1.6.21 (Jordan 1887*). *Nechť φ je Jordanova křivka. Potom $\mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$ má právě dvě komponenty, z nichž právě jedna je omezená. Hranicí každé z těchto oblastí je $\langle \varphi \rangle$.*

Připomínáme, že v kontextu předcházející věty je omezenou komponentou $\mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$ ta, která neobsahuje bod ∞ . Neomezená komponenta $\mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$ obsahuje ∞ .

Definice 1.6.22. V kontextu předcházející věty nazýváme omezenou komponentu množiny $\mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$ **vnitřkem** a neomezenou komponentu množiny $\mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$ **vnějškem** křivky φ . Definice 5.4.9 je zobecněním tohoto speciálního případu. Pro vnitřek se užívá označení $\text{Int } \varphi$ a pro vnějšek $\text{Ext } \varphi$.

1.7 Konvergence posloupností a řad funkcí

Připomeneme několik poznatků o konvergenci posloupností a řad funkcí. Analogicky jako u funkcí reálné proměnné zavádíme i pro komplexní funkce komplexní proměnné **stejněměrnou** a také **lokálně stejněměrnou** konvergenci.

Definice 1.7.1. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (komplexních) funkcí definovaných na (libovolné) množině $A \neq \emptyset$. Potom říkáme, že posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje stejněměrně na A k funkci f** , je-li splněna podmínka

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon). \quad (1.24)$$

Píšeme pak $f_n \rightrightarrows f$ na A . Zápis $f_n \Rightarrow$ na A znamená, že *existuje* taková f definovaná na A , že $f_n \rightrightarrows f$ na A .

Říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ konverguje **lokálně stejněměrně na G k funkci f** , jestliže ke každému $z \in G$ existuje

okolí $U(z) \subset G$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $U(z)$. Píšeme pak $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na G . Podobně zápis $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na G znamená, že existuje taková funkce f definovaná na G , že $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na G ¹³⁾.

Je vhodné si uvědomit, že pro funkce f_n a f omezené¹⁴⁾ na A je $f_n \rightrightarrows f$ na A , právě když $\alpha_n := \sup\{|f_n(z) - f(z)|; z \in A\} \rightarrow 0$; α_n je „supremová norma“ $\|f_n - f\|$ rozdílu funkcí f_n a f . Nutnou a postačující podmínkou pro $f_n \rightrightarrows f$ na A je **Bolzano-Cauchyho podmínka**, tj. posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině A , právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(\forall z \in A)(|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon). \quad (1.25)$$

Čtenáři by měly být tyto pojmy spolu s jejich vlastnostmi známé v daleko větší obecnosti, např. v \mathbb{R}^m nebo na metrických prostorech. Tak např. je křivkový integrál *spojitým* lineárním funkcioálem v následujícím smyslu:

Lemma 1.7.2. *Jestliže $f_n \in C(\langle \varphi \rangle)$, $n \in \mathbb{N}$, a funkce f_n konvergují stejnoměrně k f na $\langle \varphi \rangle$, je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi} f_n = \int_{\varphi} f.$$

Důkaz. Stačí uvážit, že pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$\left| \int_{\varphi} f_n - \int_{\varphi} f \right| \leq \left| \int_{\varphi} (f_n - f) \right| \leq \|f_n - f\| L(\varphi) \rightarrow 0,$$

což již dokazuje tvrzení. □

Poznámka 1.7.3. Předcházející tvrzení umožňuje záměnu pořadí limity a integrace podél křivky φ . Analogické tvrzení platí zřejmě i pro stejnoměrně konvergentní řadu spojitých funkcí. Srovnej se [Z], Kapitola 14.

Patrně nejdůležitějším typem konvergence, se kterým budeme dále převážně pracovat, je *lokálně stejnoměrná konvergence*. Budeme ji také nazývat **kompaktní konvergencí**¹⁵⁾, a to vzhledem k následujícímu důležitému tvrzení, které říká, že v podmínkách, v jakých budeme dále pracovat, tyto dva pojmy splývají. Speciální případ je dokázán např. v Lemmatu 16.2.2 v [Z], důkaz však připomeneme.

Lemma 1.7.4. *Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, právě když pro každou kompaktní množinu $K \subset G$ je*

$$f_n \rightrightarrows na K. \quad (1.26)$$

¹³⁾ V symbolu $\rightrightarrows_{\text{loc}}$ je „loc“ odvozeno z anglického „locally“.

¹⁴⁾ Připomínáme definici: říkáme, že funkce f je omezená, pokud je omezená funkce $|f|$.

¹⁵⁾ Tento termín je běžný v anglických učebnicích (*compact convergence*).

Důkaz. Necht' platí (1.26) pro každou kompaktní $K \subset G$. Zvolme libovolně $z \in G$ a pak (omezené) okolí $U(z)$ tak, aby $\overline{U(z)} \subset G$. Tento uzávěr je kompaktní, takže platí podle (1.26) $f \rightrightarrows$ na $\overline{U(z)}$, a tím spíše $f_n \rightrightarrows$ na $U(z)$. Odtud vyplývá, že ze stejnoměrné konvergence na každé kompaktní množině $K \subset G$ plyne $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na G .

Obrácenou implikaci obdržíme z definice kompaktnosti: Necht' $K \subset G$ je kompaktní; z podmínky $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na G plyne, že existuje pokrytí K systémem okolí $\{U(z); z \in K\}$ tak, že $U(z) \subset G$ pro každé $z \in K$ a je $f_n \rightrightarrows$ na $U(z)$ pro každé $z \in G$. Z tohoto pokrytí K vybereme konečné pokrytí $\{U(z_1), \dots, U(z_m)\}$ kompaktní K . Pak k danému $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ určíme čísla $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall w \in U(z_j))(\forall n \geq k_j)(|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m,$$

a zvolíme $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Pak pro všechna $z \in K \subset \bigcup_{j=1}^m U(z_j)$ je při $n \geq k$ splněna nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. \square

Analogická tvrzení platí i pro řady komplexních funkcí; jejich formulaci přenecháme čtenáři jako cvičení. Na závěr této části připomeneme tvrzení analogické Weierstrassovu M-testu (viz např. Větu 14.3.5 v [Z]).

Věta 1.7.5 (M-test). *Necht' $A \neq \emptyset$, necht' $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ a necht' existují čísla M_n tak, že $|f_n| \leq M_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a že řada $\sum M_n$ konverguje. Pak řady $\sum |f_n|$ a $\sum f_n$ konvergují stejnoměrně na A .*

Důkaz. Pro částečné součty s_n řady $\sum f_k$ platí při $m > n$ odhad

$$\sup\{|s_m(z) - s_n(z)|; z \in A\} \leq M_{n+1} + \dots + M_m$$

a vzhledem ke konvergenci $\sum M_n$ je posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ „stejněmálně Cauchyovská“. \square

Úmluva 1.7.6. Lokálně stejnoměrná konvergence řady spojitých funkcí zaručuje spojitost součtu (srv. [Z], Věta 14.1.5), avšak její přerovnání může změnit hodnotu součtu a dokonce i její konvergenci. Možnost přerovnávat řady beze změny jejich konvergence a součtu zaručuje absolutní konvergence. Je vhodné mít k dispozici současně i absolutní konvergenci řady v každém bodě. Budeme říkat, že řada funkcí $f_k : X \rightarrow \mathbb{C}$ **normálně konverguje v X** , jestliže ke každému bodu $x \in X$ existuje okolí $U = U(x)$ tak, že pro $\|f_k\|_{U(x)} := \sup\{|f_k(w)|; w \in U(x)\}$ řada $\sum \|f_k\|_{U(x)}$ konverguje.

Zde přívlastek *normální* vyznačuje „konvergenci supremových norem“ na každém okolí U ¹⁶⁾. Takto konvergují např. mocninné řady v kruhu konvergence apod. Jestliže řada funkcí $\sum f_k$ konverguje normálně v G , pak zřejmě konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v G . Normální konvergence se zřejmě přenáší i na „vybrané řady“ a my ji budeme mnohokrát využívat.

¹⁶⁾ Index u normy tedy značí množinu, na které jsou funkce definovány, ne příslušný prostor.

Cvičení

1. Ukažte, že pro libovolnou dvojici čísel $z, w \in \mathbb{C}$ platí rovnost

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Tento fakt souvisí s rovností $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, tj. že absolutní hodnota je definována pomocí jakéhosi skalárního součinu $(z, w) = z\bar{w}$.

2. V další kapitole se seznámíme blíže s derivováním komplexních funkcí komplexní proměnné. S ním souvisí fakt, že funkce $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$ mají velmi „pěkné“ vlastnosti. Jestliže je $z = x + iy$, pak tyto funkce, uvažované jako funkce reálných proměnných, vyhovují rovnici

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0. \quad (1.27)$$

Ověřte to přímým výpočtem pro identitu na \mathbb{C} !

3. Vyjádřete v parametrickém tvaru (a) přímku, (b) polopřímku a (c) úsečku, určenou body $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq w$; u polopřímky uvažujte případ, kdy počátkem polopřímky je bod z .
4. Jaký je graf zobrazení $\varphi(t) = t^2 + it^4$, $t \in \mathbb{R}$? Je zobrazení φ prosté?

[Je to množina všech $z = x + iy$ ležících na oblouku paraboly $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$. Zobrazení není prosté, každý bod tohoto oblouku má dva vzory.]

5. Zparametrizujte hranici dvourozměrného intervalu $[-1, 1] \times [-1, 1]$ Jordanovou (regulární) křivkou φ tak, aby počátečním bodem křivky byl bod $(1 + i)$ a aby parametr probíhal interval $[0, 8]$. Je těmito požadavky křivka jednoznačně určena? Zintegrujte pak vzhledem k této křivce funkce $f(z) = z^{-1}$ a $g(z) = (z - 2)^{-1}$. Jsou výsledky této integrace jednoznačně určeny?

[Experiment ukáže, že v případě funkce g patrně ano. Jedním z našich cílů bude prozkoumat, jakými zákonitostmi se taková integrace vzhledem k povaze integrandu řídí (např. f v bodě 0, „kolem kterého obcházíme“, nemá konečnou limitu).]

6. Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí $\{z^n\}$! Určete maximální množinu, kde tato posloupnost bodově konverguje a na jaké její maximální části je tato konvergence stejnoměrná nebo lokálně stejnoměrná!

[Posloupnost konverguje bodově na $U_1(0) \cup \{1\}$. Na $U_1(0)$ konverguje lokálně stejnoměrně.]

7. Vyšetřování neabsolutní konvergence je někdy složitější záležitost. Číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} (i)^k/k$ konverguje. Pokuste se to dokázat!

[Odhadněte velikost zbytku po n -tém členu řady a dokažte, že tento zbytek konverguje k 0.]

8. Vyšetřete podrobně konvergenci řad (bodovou, absolutní, stejnoměrnou, lokálně stejnoměrnou (kompaktní), normální)

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

[(a) Řada konverguje bodově a absolutně právě v $U_1(0)$. Konvergence na této množině není stejnoměrná, je však kompaktní a normální. (c) Řada konverguje bodově na $\overline{U_1(0)}$. Na této množině konverguje také absolutně, stejnoměrně a normálně. Vyšetření případu (b) vyžaduje jemnější věty (viz [Z]), řada konverguje neabsolutně na $U_1(0) \setminus \{1\}$.]

9. Situace s mocninnými řadami může být velmi složitá, o trochu složitější nežli vyšetření řad v předcházejícím cvičení je případ řady ($p \in \mathbb{N}, p \geq 2$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{pk}}{k};$$

vraťte se k němu ev. později po zvládnutí základních poznatků teorie.

10. Rozviňte v mocninnou řadu o středu $z_0 = 1 + i$ funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z}$$

a určete její poloměr konvergence R !

[Druhé vyjádření ve formě rozdílu je jistou nápovědou: Je

$$\frac{1}{z - 1} = - \sum i^{k+1} (z - 1 - i)^k, \quad \text{a} \quad \frac{1}{z} = - \sum \frac{1}{(1 + i)^{k+1}} (z - 1 - i)^k,$$

je-li jednak $|z - z_0| < |1 - z_0| = 1$, jednak $|z - z_0| < |z_0| = \sqrt{2}$. Odtud dostaneme

$$\frac{1}{z^2 - z} = \sum \left(-i^{k+1} + \frac{1}{(1 + i)^{k+1}} \right) (z - 1 - i)^k, \quad \text{a} \quad R = 1.$$

11. Rozviňte v mocninnou řadu o středu v počátku funkci

$$f(z) = \frac{z + 1}{z - 1}!$$

Jaký je poloměr konvergence R této řady? Je tato funkce prostá na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$? Jaký tvar má funkce f^{-1} inverzní k f ? Určete pevné body tohoto zobrazení, tj. ta $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $f(z) = z$! Funkcemi tohoto tvaru se budeme podrobněji zabývat v Kapitole 4.

[Řada má tvar $-1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2z^k$ a její poloměr konvergence je $R = 1$. Zobrazuje $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ na \mathbb{C} a

$$f^{-1}(w) = \frac{w + 1}{w - 1},$$

takže je svou inverzní funkcí na \mathbb{C} . Pevnými body zobrazení f jsou body $1 \pm \sqrt{2}$.]

12. V předcházejícím cvičení jsme se seznámili s funkcí f , pro kterou platilo $f \circ f = \text{Id}$, tj. složením f s f jsme dostali identitu Id na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ukažte, že pro zobrazení

$$g(z) = \frac{1}{1 - z}$$

je $g \circ g \circ g = \text{Id}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$! Jakmile začneme pracovat na \mathbb{S} , jsou zobrazení f ze Cvičení 10 a zobrazení g z tohoto cvičení prostými zobrazeními \mathbb{S} na \mathbb{S} .

[Je $(g \circ g)(z) = (z - 1)/z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ a $(g \circ g \circ g)(z) = z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.]

Kapitola 2

Mocninné řady

2.1 Úvod

V této kapitole je vyložen aparát mocninných řad. Shrnujeme v ní vlastnosti obecně známé z elementárních učebnic (reálné) analýzy a uvádíme i některé vlastnosti složitější; viz např. [Z], Kapitola 16. Čtenář ji může zběžně projít a vrátit se k ní pouze v případě, že by něčemu o mocninných řadách dále nerozuměl. Pokud je s mocninnými řadami v komplexním oboru již seznámen, může tuto kapitolu přeskocit. Důležité pojmy jsou opět graficky vyznačeny **polotučnou antikvou**, i když patrně nebudou pro čtenáře nové. Připomínáme, že u sumačních znaků budeme opět *vynechávat meze v případě, že se sčítá od 0 do ∞* . Na konci kapitoly připomínáme užitečné věty, které se *někdy* v reálné analýze dokazují; my je dokážeme později, jakmile budeme mít k dispozici základní tvrzení teorie komplexních funkcí komplexní proměnné.

2.2 Základní vlastnosti

Definice 2.2.1. Necht' $z_0, a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Řada funkcí (proměnné z) tvaru

$$\sum a_k(z - z_0)^k, \quad (2.1)$$

se nazývá **mocninná řada**. Čísla a_k , $k \in \mathbb{N}_0$, jsou **koeficienty** řady (2.1) a číslo z_0 je její **střed**.

Příklad 2.2.2. Nejjednodušším netriviálním příkladem mocninné řady (a zároveň velmi důležitým) je **geometrická řada** s prvním členem rovným 1, která zřejmě konverguje právě pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1 - z} = \sum z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Tento vzorec je pro $z \in (-1, 1)$ standardní částí středoškolské látky, často se však uvádí bez odůvodnění konvergence; viz [Z], Příklad 3.1.4, str. 76.

Mocninná řada (2.1) konverguje vždy alespoň v bodě z_0 ; v komplexní rovině \mathbb{C} má přitom velmi jednoduché konvergenční chování. To vyplývá z následujícího tvrzení, které pochází od NIELSE HENRIKA ABELA (1802 – 1829).

Lemma 2.2.3 (Abel 1826). *Jestliže mocninná řada (2.1) konverguje v bodě $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta \neq z_0$, pak konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$, vyhovující nerovnosti*

$$|z - z_0| < |\zeta - z_0|. \quad (2.2)$$

Důkaz. Nechtě $\zeta \neq z_0$ a nechtě $z \in \mathbb{C}$ vyhovuje nerovnosti (2.2). Protože řada (2.1) konverguje v bodě ζ , platí $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k(\zeta - z_0)| = 0$ a existuje tedy číslo $M \in \mathbb{R}_+$ tak, že $|a_k(\zeta - z_0)| \leq M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Je tedy

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k(\zeta - z_0)^k| \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^k \quad (2.3)$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Pro (2.1) jsme tak našli konvergentní majorantu; je jí geometrická řada s kvocientem menším než 1. \square

Definice 2.2.4. Říkáme, že **mocninná řada konverguje** nebo **je konvergentní**, konverguje-li alespoň ve *dvou různých* bodech. Číslo R , $0 \leq R \leq +\infty$,

$$R := \sup_{z \in \mathbb{C}} \{ |z - z_0|; \sum a_n(z - z_0)^n \text{ konverguje v bodě } z \} \quad (2.4)$$

se nazývá **poloměr konvergence** řady (2.1). Je-li $R > 0$, nazývá se množina

$$U(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$$

kruh konvergence řady (2.1).

Tato terminologie je vcelku přirozená. Z Lemmatu 2.2.3 a z definice suprema vyplývá, že řada (2.1) konverguje v kruhu $U(z_0, R)$ a diverguje pro všechna z , $|z - z_0| > R$ ¹⁾. Zdůrazněme ještě jednu důležitou vlastnost: U geometrické řady je v kruhu konvergence $U(0, 1)$ *posloupnost členů řady omezená* a vně $U(0, 1)$ *není omezená*. Tuto vlastnost mají i obecné mocninné řady.

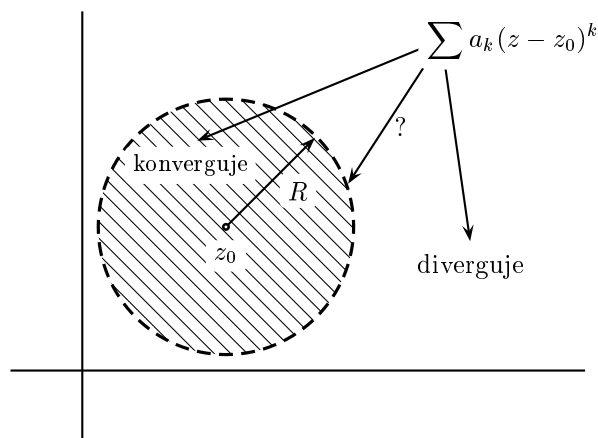
Lemma 2.2.5. *Posloupnost členů mocninné řady (2.1) je v každém bodě kruhu konvergence omezená a není omezená v žádném bodě z doplňku jeho uzávěru. Platí tedy*

$$R = \sup \{t \geq 0; \text{posloupnost } \{|a_k|t^k\} \text{ je omezená}\}.$$

¹⁾ Jestliže pro poloměr konvergence R platí $0 < R < \infty$, nazývá se někdy množina $\{z; |z - z_0| = R\}$ **konvergenční kružnice**; tento název není příliš šťastně utvořen, neboť vzbuzuje dojem, že řada v bodech této množiny konverguje. Právě pro ně však *nelze* o konvergenci mocninné řady (2.1) obecně nic říci.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že předpoklad zaručuje možnost odhadu (2.3) z důkazu Lemmatu 2.2.3. \square

Příklady 2.2.6. 1. Řady $\sum (k!)z^k$ a $\sum z^k/k!$ ukazují, že pro poloměr konvergence mohou nastat i extrémní případy $R = 0$ a $R = +\infty$. Poloměr konvergence R těchto dvou řad lze určit např. pomocí podílového (d'Alembertova) kritéria.



Obr. 2.1: Konvergence mocninné řady

2. Řada $\sum z^k/a^k$ pro $a \in (0, \infty)$ má poloměr konvergence $R = a$. Z limitní verze Cauchyho odmocninového kritéria (viz [Z], str. 89) plyne s ohledem na rovnost

$$\sqrt[k]{|z^k/a^k|} = |z|/a$$

konvergence pro všechna $z \in U(0, a)$ a divergence pro všechna z , pro něž je $|z| > a$.

3. Uvažte, že řady

$$\sum z^k, \quad \sum z^{k+1}/(k+1), \quad \sum z^{k+2}/((k+1)(k+2))$$

mají poloměr konvergence $R = 1$ a na hranici $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ kruhu konvergence $U(0, 1)$ se chovají rozdílně; první na ní všude diverguje, protože neplatí $z^k \rightarrow 0$, druhá konverguje v bodě -1 a diverguje v bodě 1 , třetí na ní konverguje všude.

Úmluva 2.2.7. Absolutní konvergence řady (2.1) v bodě z závisí v následujícím smyslu na vzdálenosti $|z - z_0|$: Substitucí $z = z_0 + w$ lze vyšetřování konvergence řady (2.1) převést na vyšetřování řady $\sum a_k w^k$ se středem 0 . Proto se v dalším textu budeme omezovat na řady o středu $z_0 = 0$. Tvzení budeme vždy vyslovovat pro řady v obecném tvaru (2.1), budeme je však dokazovat pouze pro případ $z_0 = 0$, tj. pro řadu

$$\sum a_k z^k, \tag{2.5}$$

44 KAPITOLA 2. Mocninné řady

čímž se zápis formálně zjednoduší. Na případ řady (2.5) se obecný případ (2.1) převede jednoduchou substitucí: Stačí zaměnit $z - z_0$ za z .

Lemma 2.2.8. *Nechť řada $\sum a_k(z-z_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom konverguje v $U(z_0, R)$ normálně, tedy i absolutně a lokálně stejnoměrně, k funkci spojitě v $U(z_0, R)$.*

Důkaz. Připomeňme předchozí úmluvu, že v důkazu se automaticky omezujeme na případ (2.5) a že předpokládáme $R > 0$. Absolutní konvergence v $U(0, R)$ je důsledkem Lemmatu 2.2.3 a Definice 2.2.4, v níž jsme definovali kruh konvergence. Je-li $0 < r < R$, existuje podle (2.4) číslo z_1 tak, že $r < |z_1| < R$ a že řada $\sum |a_k z_1^k|$ konverguje. Z toho plyne existence $M \in R_+$ tak, že $|a_k z_1^k| \leq M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Je-li $|z| < r$, je

$$|a_k z^k| \leq |a_k r^k| \leq \left(\frac{r}{|z_1|}\right)^k |a_k z_1^k| \leq M \left(\frac{r}{|z_1|}\right)^k,$$

tj. členy řady $\sum a_k z^k$ lze majorizovat členy konvergentní geometrické řady (s kvocientem $r/|z_1| < 1$). Řada (2.5) konverguje na $U(0, r)$ absolutně a stejnoměrně podle Weierstrassova M-testu, a tedy lokálně stejnoměrně na $U(0, R)$; speciálně je součet spojitá funkce v $U(0, R)$. \square

Poznámka 2.2.9. V souladu s Poznámkou 1.7.6 z Kapitoly 1 lze říci, že konverguje-li řada (2.1) v bodě $\zeta \neq z_0$, konverguje **normálně** v $U(z_0, |\zeta - z_0|)$. Připomeňme, že pomocí M-testu dokazujeme současně jak absolutní, tak i lokálně stejnoměrnou konvergenci řady v kruhu $U(z_0, |\zeta - z_0|)$.

Úmluva 2.2.10. Pro mocninné řady budeme používat tuto úmluvu: pokud není řečeno něco jiného, vztahem

$$f(z) := \sum a_n(z - z_0)^n \tag{2.6}$$

je definována funkce $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$ je množina všech z , pro něž řada v (2.6) konverguje. Je-li R poloměr konvergence řady, je zřejmě $U(z_0, R) \subset M$, avšak M může navíc obsahovat i některé body na hranici kruhu konvergence mocninné řady.

Poznámka 2.2.11. Jestliže $R_1, R_2 > 0$ jsou po řadě poloměry řad

$$f(z) := \sum a_k(z - z_0)^k \quad \text{a} \quad g(z) := \sum b_k(z - z_0)^k,$$

pak řady pro součet či rozdíl $f \pm g$ vzniklé sečtením či odečtením „člen po členu“ mají poloměr konvergence *alespoň* $\min\{R_1, R_2\}$. Také mocninná řada o středu z_0 , jejíž koeficienty tvoří Cauchyho součin řad $\sum a_k$, $\sum b_k$, má poloměr konvergence *alespoň* $\min\{R_1, R_2\}$ a konverguje k fg . Připomeňme, že jde o řadu, která vznikne formálně násobením obou mocninných řad a sloučením členů se stejnými mocninami $(z - z_0)$.

2.3 Derivování mocninné řady

Připomeňme, že pro posloupnost $\{x_k\}$, $x_k \in \mathbb{R}$, definujeme **limes superior** neboli **horní limitu** $\limsup x_k$ jako *největší* (v $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) z hromadných bodů posloupnosti $\{x_k\}$. Je-li $\alpha := \limsup x_k \in \mathbb{R}$, platí:

- je-li $a < \alpha$, je množina $\{k \in \mathbb{N}_0; x_k > a\}$ nekonečná,
- je-li $b > \alpha$, je množina $\{k \in \mathbb{N}_0; x_k > b\}$ konečná.

Pomocí těchto vlastností lze limes superior i definovat. Poznamenejme, že při $\alpha = +\infty$ je druhá podmínka prázdná, neboť neexistuje $b > \alpha$.

Lemma 2.3.1 (Cauchy 1821, Hadamard 1888*). *Pro poloměr konvergence R mocninné řady (2.1) platí vzorec (zde klademe $1/+\infty = 0$ a $1/0 = +\infty$)*

$$R = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}. \quad (2.7)$$

Důkaz. Lemma plyne z obecné formy odmocninového kritéria; viz [Z], str. 230. Vzorec (2.7) dokážeme nyní jen na základě výše popsaných vlastností limes superior. Položme

$$L = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1};$$

dokážeme nerovnosti $L \leq R$ a $R \leq L$. K tomu postačí dokázat, že pro každé $c \in (0, L)$ je $c \leq R$ a pro každé $d \in (L, \infty)$ je $d \geq R$.

Nejprve volme c , $0 < c < L$; potom platí $c^{-1} > \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, a proto existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že pro všechna $k \geq n$ platí $\sqrt[k]{|a_k|} < c^{-1}$. Proto je posloupnost $\{|a_k|c^k\}$ omezená, a tedy podle Lemmatu 2.2.5 je $c \leq R$. Je-li $d \in (L, \infty)$, je $d^{-1} < \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Proto nerovnost $d^{-1} < \sqrt[k]{|a_k|}$, tj. nerovnost $|a_k|d^k > 1$, platí pro nekonečně mnoho indexů $k \in \mathbb{N}_0$. Avšak odtud plyne, že $\{|a_k|d^k\}$ *nekonverguje* k 0 a tudíž $d \geq R$. Tím je důkaz dokončen. \square

Poznámka 2.3.2. Čtenář patrně již zná některé metody výpočtu poloměru konvergence mocninné řady. Vzorec (2.7) nemá velký význam pro *praktický výpočet* poloměru konvergence R řady (2.1), platí však pro *každou* mocninnou řadu. Připomeneme si, jak lze určit poloměr konvergence mocninné řady tvaru (2.1) v některých speciálních případech. Často lze použít vzorec

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \quad (2.8)$$

pokud ovšem limita vpravo existuje. To plyne z absolutní konvergence řady (2.1) v kruhu konvergence a divergence mimo jeho uzávěr. Z limitního podílového kritéria plyne, že řada (2.5) absolutně konverguje pro $z \neq 0$, pokud

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}z^{k+1}|}{|a_k z^k|} = |z| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$$

a diverguje, pokud předcházející limita je > 1 . Analogicky můžeme použít i limitní odmocninové kritérium: Platí

$$R = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}, \quad (2.9)$$

pokud existuje limita ve vzorci (2.9) vpravo. Je vhodné si však uvědomit, že vzorec (2.7) je použitelný i v případě, že limita v (2.8) ani limita v (2.9) neexistuje. Podrobněji se touto otázkou nebudeme zabývat.

Definice 2.3.3. Nechť funkce f je definována v nějakém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Jestliže existují derivace $f^{(n)}(z_0)$ komplexní funkce f pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, pak mocninnou řadu

$$T_{f, z_0}(z) = \sum \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu z_0** .

Čtenář se již s mnohými Taylorovými řadami v reálné analýze setkal, jak však poznáme, je situace v reálné analýze a v komplexní analýze značně rozdílná.

Lemma 2.3.4. *Je-li $R \in [0, \infty]$ poloměr konvergence řady (2.1), mají tentýž poloměr konvergence i řady vzniklé derivováním a integrováním „člen po členu“, tj.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}. \quad (2.10)$$

Důkaz. Tvrzení o poloměru stačí dokázat pro první z řad v (2.11); plyne snadno např. ze vzorce (2.7) pro poloměr konvergence a z poznatku, že $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ při $k \rightarrow +\infty$. Je totiž

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \right) \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right);$$

platnost této rovnosti přenecháme čtenáři k rozmyšlení. \square

Věta 2.3.5. *Jestliže je řada (2.1) konvergentní, $R > 0$ je její poloměr konvergence, je její součet f holomorfní v $U(z_0, R)$, přičemž funkce*

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}, \quad G(z) := \sum \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1} \quad (2.11)$$

splňují rovnosti $g(z) = f'(z)$ a $G'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in U(z_0, R)$. Obecněji platí pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $z \in U(z_0, R)$ rovnost

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} n! \binom{k}{n} a_n (z - z_0)^{k-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{p!} a_{n+p} (z - z_0)^p \quad (2.12)$$

a pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ je

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k, \quad (2.13)$$

Poznámka 2.3.6. Řada (2.1) je tedy Taylorovou řadou svého součtu. Její koeficienty jsou **koeficienty Taylorova rozvoje** funkce f v bodě z_0 .

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat rovnost $g(w) = f'(w)$ v libovolně zvoleném bodě $w \in U(z_0, R)$. Odtud dostaneme vzorec $G'(w) = f(w)$ a vícenásobným opakováním též vzorec (2.12); stačí pouze připomenout, že

$$n! \binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!} = k(k-1) \cdots (k-n+1).$$

S ohledem na předcházející Lemma 2.3.1 je funkce g definována v $U(z_0, R)$. Bez újmy na obecnosti budeme opět předpokládat $z_0 = 0$. Položme dále pro $z \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$

$$q_k(z) = z^{k-1} + z^{k-2}w + \cdots + z^{k-l}w^{l-1} + \cdots + w^{k-1}.$$

Pak je $z^k - w^k = (z - w)q_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, a

$$f(z) - f(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z^k - w^k) = (z - w) \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k(z), \quad z \in U(z_0, R).$$

Položme $\vartheta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k(z)$. Z předcházející rovnosti dostáváme identitu

$$f(z) - f(w) = \vartheta(z)(z - w), \quad z \in U(z_0, R),$$

a dosazením w do q_k ověříme, že

$$f'(w) = \vartheta(w) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k w^{k-1} = g(w);$$

použili jsme Lemma 1.4.1, musíme však ještě dokázat *spojitost* ϑ v bodě w . Řada, kterou je definována funkce ϑ , je řadou spojitých funkcí. Dokážeme její stejnoměrnou konvergenci na okolí $U(0, r)$, kde $|w| < r < R$ (stále pracujeme za předpokladu $z_0 = 0$). Protože $\sup\{|a_k q_k(z)|; z \in U(0, r)\} \leq |a_k| k r^{k-1}$, je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k q_k(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| r^{k-1} < \infty, \quad z \in U(0, r),$$

přičemž poslední nerovnost plyne opět z předcházejícího Lemmatu 2.3.4. Tím je důkaz dokončen. \square

Důsledek 2.3.7. Je-li $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ a řada vpravo má poloměr konvergence $R > 0$, pak má f v $U(z_0, R)$ derivace všech řádů, lze je všechny vyjádřit mocninnými řadami a platí

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k z^{k-n}, \quad z \in U(z_0, R).$$

Důsledek 2.3.8 (o jednoznačnosti). Necht $\sum a_k(z - z_0)^k = \sum b_k(z - z_0)^k$ pro všechna $z \in U(z_0, r)$ s nějakým $r \in \mathbb{R}_+$. Potom platí $a_k = b_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz. Pro $c_k = a_k - b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, je součet řady $g(z) = \sum c_k(z - z_0)^k$ roven 0 v okolí bodu z_0 a je tedy $g^{(k)}(z_0) = k!c_k = 0$. \square

Příklad 2.3.9 (důležitý). Velmi často používáme znalosti o geometrické řadě k odvození rozvoju dalších funkcí. Tak např. pro navzájem různá čísla $z, \zeta, z_0 \in \mathbb{C}$ plynou ze zřejmé identity

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - \zeta} &= \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{1 - (\zeta - z_0)/(z - z_0)} \right) = \\ &= \frac{1}{-(\zeta - z_0)} \left(\frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \right) \end{aligned}$$

snadno rovnosti

$$\frac{1}{z - \zeta} = \sum \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad \frac{1}{z - \zeta} = - \sum \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \quad (2.14)$$

První platí pro všechna z, ζ , pro něž je $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$, a druhá pro všechna z, ζ , pro něž $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$. Tato vyjádření jsou velmi užitečná. Budeme je v dalším výkladu používat.

2.4 Některá další tvrzení

Uvedeme ještě věty, které se někdy o mocninných řadách elementárně, tj. bez rozvíjení teorie funkcí komplexní proměnné, dokazují. Zájemce odkazujeme např. na [Z], Kapitulu 16. My je budeme mít k dispozici později, dostaneme je jako důsledek obecnějších vět.

Věta 2.4.1. Za stejných předpokladů jako ve Větě 2.3.5 lze funkci f v každém bodě $w \in U(z_0, R)$ rozvinout v Taylorovu řadu

$$f(z) = \sum \frac{f^{(k)}(w)}{k!} (z - w)^k, \quad (2.15)$$

jejíž poloměr konvergence je alespoň $R - |w - z_0|$.

Důkaz. Viz např. [Z], důkaz Lemmatu 16.3.2, str. 487. \square

Poznámka 2.4.2. Věta říká, že řada (2.15) *musí* konvergovat alespoň pro ta z , která vyhovují podmínce $|z - w| < R - |w - z_0|$; *může však konvergovat* i pro další z , která tuto podmínku nesplňují. Jinak řečeno, poloměr konvergence řady (2.15) může být větší než $R - |w - z_0|$. Toho se využívá k rozšiřování f metodou tzv. *analytického pokračování*.

Také velmi užitečnou následující **větu o jednoznačnosti** pro mocninné řady, založenou na předcházející Větě 2.4.1, dokážeme později, při důkazu lokálního vyjádření každé holomorfní funkce mocninnou řadou. Avšak i tuto větu lze dokázat před rozvinutím vlastní teorie funkcí komplexní proměnné. Pak lze ovšem některé poznatky této teorie odvodit podstatně dříve.

Věta 2.4.3. *Nechť $R > 0$, nechť řady $\sum a_k(z - z_0)^k$ a $\sum b_k(z - z_0)^k$ konvergují v kruhu $U(z_0, R)$ a nechť M je množina všech $z \in U(z_0, R)$ takových, pro něž platí*

$$\sum a_k(z - z_0)^k = \sum b_k(z - z_0)^k. \quad (2.16)$$

Je-li M' množina všech hromadných bodů M a je-li $M' \cap U(z_0, R) \neq \emptyset$, je $a_k = b_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a rovnost (2.16) platí pro všechna $z \in U(z_0, R)$.

Důkaz. Viz např. [Z], důkaz Věty 16.3.4 na str. 488. □

Příklad 2.4.4. Pro $k \in \mathbb{N}$ definujme k -tý částečný součet $s(k) = \sum_{n=0}^k n^2$. Platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s(k)}{k!} = \frac{17e}{6}.$$

Řešení čtenář nalezne v [Z], str. 227. Zde podáme jen stručný návod. Uvažte, že

$$\sum_{n=0}^k n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

takže stačí dokázat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)(2k+1)}{k!} = 17e.$$

Je

$$xe^x = \sum \frac{x^{k+1}}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{z čehož plyne } (2+x)e^x = \sum \frac{k(k+1)x^{k-1}}{k!}.$$

Dosadíme x^2 za x , obě strany rovnosti násobíme x^3 a pak derivujeme:

$$(2x^6 + 9x^4 + 6x^2)e^{x^2} = \sum \frac{k(k+1)(2k+1)}{k!} x^{2k} \quad .x \in \mathbb{R}.$$

Dosazením $x = 1$ dostaneme žádaný výsledek.

Poznámka 2.4.5. Pomocí mocninných řad lze „sčítat“ i některé divergentní řady pomocí tzv. Abelovy metody. Protože se mocninné řady probírají poměrně podrobně v základním kurzu matematické analýzy, nebudeme více řešených příkladů uvádět.

Cvičení

1. Ve cvičeních k minulé kapitole jsme (v podstatě) vystačili se znalostmi o geometrické řadě, nyní si všimneme obecnějších mocninných řad. Určete kruh konvergence mocninných řad

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} (z-2)^k, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} (z+i)^k, \quad (c) \sum [3 + (-1)^k]^k z^k.$$

[Poloměry konvergence spočteme např. (a) odmocninovým nebo podílovým limitním kritériem, (b) podílovým limitním kritériem, (c) pomocí Cauchy-Hadamardova vzorce (2.7). Kruhy konvergence jsou pak (a) $U_2(2)$, (b) $U_e(-i)$ a (c) $U_{1/4}(0)$.]

2. Určete poloměr konvergence R mocninné řady v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$

$$\sum [k + a^k] z^k$$

[V případě $|a| \leq 1$ je $R = 1$ a v případě $|a| > 1$ je $R = |a|^{-1}$.]

3. Určete funkci f , která je součtem řady $\sum kz^k$!

[$f(z) = z/(1-z)^2$, $z \in U_1(0)$.]

4. Určete poloměr konvergence řad

$$(a) \sum 3^k z^{k!}, \quad (b) \sum (3 + (-1)^k)^k (z-3)^k, \quad (c) \sum \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

[(a) $R = 1$, (b) $R = 1/4$, (c) $R = +\infty$.]

5. Určete poloměr konvergence R mocninné řady v závislosti na parametru $n \in \mathbb{N}$!

$$\sum \frac{(k!)^n}{(nk)!} z^k! \quad [n^n]$$

6. Řada $\sum a_k z^k$ má poloměr konvergence R_1 a řada $\sum b_k z^k$ má poloměr konvergence R_2 . Odhadněte velikosti poloměrů konvergence řad

$$(a) \sum (a_k \pm b_k) z^k, \quad (b) \sum (a_k b_k) z^k, \quad (c) \sum \frac{a_k}{b_k} z^k$$

[Příslušné poloměry konvergence těchto tří řad jsou postupně odhadnuty takto: (a) $R \geq \min\{R_1, R_2\}$, (b) $R \geq R_1 R_2$, (c) $R \leq R_1/R_2$. V případech (b) a (c) zkuste použít Cauchy-Hadamardův vzorec (2.7) z Lemmatu 2.3.1.]

Kapitola 3

Derivování v komplexním oboru

V této kapitole se poprvé setkáme s *podstatnými rozdíly* mezi teorií komplexních funkcí komplexní proměnné a teorií funkcí reálné proměnné.

3.1 Derivování podle komplexní proměnné

Připomeňme standardní definici derivace $f'(z_0)$: Je-li funkce f definována v nějakém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, definujeme

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \left(\text{neboli } f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right),$$

pokud limita existuje v \mathbb{C} . Pak říkáme, že f je v bodě z_0 (komplexně) diferencovatelná. V Kapitole 1 jsme v Lemmatu 1.4.1 dokázali ekvivalenci několika podmínek, mj. též Carathéodoryho podmínky (3). Jako *ukázkou* jejího využití uvedeme dříve slíbený důkaz věty o derivování složené funkce.

Věta 3.1.1. *Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce g v bodě $f(z_0)$. Potom složená funkce $g \circ f$ má v bodě z_0 derivaci*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Je-li f funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, g funkce holomorfní v otevřené množině $D \subset \mathbb{C}$ a $f: G \rightarrow D$, je $g \circ f$ funkce holomorfní v G .

Důkaz. Protože existují derivace f v bodě z_0 , a g v bodě $w_0 := f(z_0)$, existují okolí $U(z_0)$, $U(w_0)$ a funkce ϑ_1 a ϑ_2 tak, že platí

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \vartheta_1(z)(z - z_0), & z \in U(z_0), \\ g(w) - g(w_0) &= \vartheta_2(w)(w - w_0), & w \in U(w_0). \end{aligned}$$

To plyne z Carathéodoryho podmínky pro existenci derivace. Funkce ϑ_2 je přitom spojitá v bodě w_0 a funkce ϑ_1 je spojitá v bodě z_0 . Dále využijeme větu o spojitosti složené funkce. Po eventuálním zmenšení okolí $U(z_0)$ platí díky spojitosti funkce f v bodě z_0 inkluze $f(U(z_0)) \subset U(w_0)$, a je

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = \vartheta_2(f(z))(f(z) - f(z_0)) = \vartheta_2(f(z))\vartheta_1(z)(z - z_0)$$

pro všechna $z \in U(z_0)$. Avšak podle věty o spojitosti složené funkce je funkce $\vartheta_2 \circ f$ spojitá v z_0 , takže součin $(\vartheta_2 \circ f)\vartheta_1$ je spojitou funkcí v bodě z_0 . Dosazením pak snadno dostaneme

$$(g \circ f)'(z_0) = ((\vartheta_2 \circ f)\vartheta_1)(z_0) = \vartheta_2(f(z_0))\vartheta_1(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Druhá část tvrzení o skládání holomorfních funkcí je jen důsledkem již dokázané části a definice holomorfní funkce. \square

Poznámka 3.1.2. Větu 3.1.1 lze snadno modifikovat pro případ, že je „vnitřní funkce“ diferencovatelnou funkcí reálné proměnné. Nechtě např. $z, w \in \mathbb{C}$ a

$$h(t) := g(z + t(w - z)), \quad t \in [0, 1].$$

Jestliže má funkce g derivaci ve všech bodech úsečky $[z; w]$, platí pro všechna $t \in (0, 1)$ vzorec $h'(t) = g'(z + t(w - z))(w - z)$.

Nyní dokážeme, že mezi derivací $f'(w)$ komplexní funkce komplexní proměnné f v bodě w a parciálními derivacemi jejích složek f_1, f_2 , které chápeme jako reálné funkce dvou reálných proměnných, je velmi úzký vztah.

Lemma 3.1.3 (Cauchy-Riemannovy podmínky, 1814*). *Nutnou podmínkou pro existenci derivace $f'(z)$ funkce $f = f_1 + if_2$ v bodě $z = [x, y]$ je existence obou prvních parciálních derivací každé z funkcí f_1 a f_2 v bodě z a splnění rovností*

$$D_1f_1(z) = D_2f_2(z), \quad D_2f_1(z) = -D_1f_2(z). \quad (3.1)$$

Pokud derivace $f'(z)$ existuje, platí

$$f'(z) = D_1f_1(z) + iD_1f_2(z) = D_2f_2(z) - iD_2f_1(z).$$

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $f'(z)$; podle definice je pro $h \in \mathbb{R}$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih},$$

takže po přepisu předchozí rovnosti a úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h, y) - f_1(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(x+h, y) - f_2(x, y)}{h} &= \\ = -i \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y+h) - f_1(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(x, y+h) - f_2(x, y)}{h} \right). \end{aligned}$$

Poslední rovnost dá $D_1f(z) = -iD_2f(z)$, resp. pro složky

$$f'(z) = D_1f_1(z) + iD_1f_2(z) = -i(D_2f_1(z) + iD_2f_2(z)); \quad (3.2)$$

Tím je tvrzení dokázáno. \square

Poznámka 3.1.4. Cauchy-Riemannovy podmínky (3.1) se často zapisují pomocí jediné rovnice

$$D_1f(z) = -iD_2f(z). \quad (3.3)$$

V dříve užívané symbolice se pro $f = f_1 + if_2$ psalo v bodě $z = x + iy$ „po složkách“

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

3.2 Existence derivace

Protože zobrazení z \mathbb{C} do \mathbb{C} lze interpretovat při „ztotožnění“ \mathbb{C} s \mathbb{R}^2 jako zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 , porovnáme derivaci funkce komplexní proměnné se *silnou derivací* zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 . Používáme opět označení D_1 pro derivování podle první proměnné a D_2 pro derivování podle druhé proměnné.

Poznámka 3.2.1. Připomeňme, že při vyšetřování zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ jsme popisovali derivaci (tj. **silnou derivaci** neboli **totální diferenciál**) $Df(x)$ funkce f v bodě $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ maticí typu $k \times m$ o k řádcích a m sloupcích. Její řádky tvořily derivace složek zobrazení f , tj. vektory Df_1, \dots, Df_k . Přitom derivace $Df(x)$ existuje, právě když existují derivace Df_1, \dots, Df_k ; stačí se tedy zabývat každou složkou f_s zvlášť. Např. pro složku f_1 existuje $Df_1(x)$, právě když existuje vektor $A = (a_{11}, \dots, a_{1m})$ tak, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_1(x+h) - f_1(x) - (a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m)|}{|h|} = 0.$$

V takovém případě je $A = (D_1f_1(x), \dots, D_mf_1(x)) = \text{grad } f_1(x)$. V obecnějším případě $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ je A matice (a_{rs}) , $r = 1, \dots, k$, $s = 1, \dots, m$, a mezi jednotlivými řádky této matice není žádný vztah. V případě funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je situace rozdílná, závislost mezi řádky vyjadřují právě Cauchy-Riemannovy podmínky (3.1).

Věta 3.2.2. *Nutnou a postačující podmínkou pro existenci derivace komplexní funkce $f = f_1 + if_2$ v bodě z je existence derivace každé z funkcí f_1 a f_2 v bodě z , a splnění Cauchy-Riemannových podmínek (3.1), tj.*

$$D_1f_1(z) = D_2f_2(z), \quad D_2f_1(z) = -D_1f_2(z).$$

Důkaz. Podle podmínky (3) z Lemmatu 1.4.1 je diferencovatelnost funkce f v bodě z ekvivalentní s podmínkou

$$f(z+h) - f(z) = Ch + o(h), \quad h \rightarrow 0, \quad (3.4)$$

kde $C = a + ic = f'(z)$. Je tedy

$$f(z+h) - f(z) = (a+ic)(h_1+ih_2) + o(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Uvědomíme si, že $g(h) = o(h)$ pro $h \rightarrow 0$, tj. $g(h)/|h| \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$, právě když pro složky g_1, g_2 funkce g platí $g_1(h)/|h| \rightarrow 0$ a $g_2(h)/|h| \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$. Užíváme proto pouze symbol $o(h)$. Z (3.5) pro složky f_1, f_2 funkce $f = f_1 + if_2$ tak dostáváme

$$f_1(z+h) - f_1(z) = ah_1 - ch_2 + o(h), \quad h \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

$$f_2(z+h) - f_2(z) = ch_1 + ah_2 + o(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Odtud vidíme, že z existence $f'(z)$ plyne, že f_1, f_2 jsou funkce diferencovatelné v bodě z a že platí (3.1).

Jsou-li v bodě z diferencovatelné obě složky f_1 a f_2 a jsou-li současně splněny Cauchy-Riemannovy podmínky, platí (3.6) a (3.7), přičemž $a = D_1f_1(z)$ a $c = D_1f_2(z)$. Násobíme vztah (3.7) číslem i . Po „sečtení“ s (3.6) a po úpravě tak dostaneme (3.4) a tedy existenci derivace $f'(z)$. \square

Poznámka 3.2.3. Stojí za povšimnutí, že pro determinant matice z derivací složek platí

$$\begin{vmatrix} a & -c \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 + c^2 = (D_1f_1(z))^2 + (D_1f_2(z))^2 = |f'(z)|^2.$$

Poznámka 3.2.4 (důležitá). Podívejme se na předchozí problém ještě z jiného zorného úhlu. Pokud „ztotožníme“ \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 tak, že bodu $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ odpovídá bod $[h_1, h_2] \in \mathbb{R}^2$, a pokud uijeme maticové vyjádření

$$h = h_1 + ih_2 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

kde A je matice s reálnými prvky, pak je z lineární algebry známo, že zobrazení $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které je (vzhledem ke standardní bázi) popsáno pomocí vztahu

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah_1 + bh_2 \\ ch_1 + dh_2 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

je lineární. Při tomto označení je

$$L_A(1) = a + ic \quad \text{a} \quad L_A(i) = b + id. \quad (3.10)$$

Rovněž je známo, že každé lineární zobrazení lze popsat pomocí matice A tímto způsobem, přičemž A určuje zobrazení L_A pomocí (3.9) a L_A určuje sloupce matice A pomocí (3.10).

V případě, že zacházíme se lineárním zobrazením L_A prostoru \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 , žádáme, aby mj. platilo

$$L_A(\alpha) = \alpha L_A(1) \quad (3.11)$$

pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. Při práci s L_A v \mathbb{C} však žádáme, aby (3.11) platilo pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, tedy speciálně aby platilo $L_A(i) = iL_A(1)$. To však znamená ve shodě s (3.10)

$$iL_A(1) = i(a + ic) = b + id = L_A(i), \quad \text{neboli} \quad a = d, \quad b = -c.$$

Jsou to právě Cauchy-Riemannovy podmínky, které váží prvky A rovnostmi $a = d$, $-c = b$, pokud je A „komplexně lineární“, takže

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \text{přičemž} \quad L_A(h) = (a + ic)(h_1 + ih_2) = Ch.$$

Zvídavého čtenáře odkazujeme např. na [41], kde jsou tyto souvislosti rozebrány ještě podrobněji.

Příklad 3.2.5. Je vhodné uvědomit si, že *existence* příslušných parciálních derivací složek spolu se splněním Cauchy-Riemannových podmínek nezaručuje ještě existenci derivace. Pro $z = x + iy$ definujeme

$$f(z) := \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(0) := 0.$$

Funkce f má identicky nulovou imaginární složku f_2 a reálná složka f_1 se anuluje na obou osách (na množině $\{x + iy; xy = 0\}$); v bodě $z = 0$ jsou tedy splněny Cauchy-Riemannovy podmínky, avšak derivace (totální diferenciál) $Df_1(0)$ neexistuje, neboť $f_1 = f$ není v bodě 0 dokonce ani spojitá.

3.3 Holomorfní funkce

V této části se budeme zabývat vlastnostmi holomorfních funkcí. Připomeňme nejprve, že funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže pro všechna $z \in G$ existuje derivace $f'(z)$. Vyšší derivace f'' , resp. $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, \dots definujeme pomocí vztahu $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$, $n \in \mathbb{N}$. Jako důsledek poznatků o derivování součtu, součinu a podílu jsme obdrželi tvrzení:

Důsledek 3.3.1. *Nechť f, g jsou funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Potom též součet $f + g$ a součin fg jsou funkce holomorfní v G a je*

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + g'f;$$

je-li navíc $g(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$, je podíl f/g holomorfní v G , přičemž

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2.$$

Úmluva 3.3.2. Abychom v důkazech stále neopakovali vyjádření typu „funkce f je holomorfní v množině G “, zavedeme pro tuto situaci *označení* $f \in H(G)$. Nebudeme ho užívat ve *znění vět*, ale např. v důkazech, poznámkách apod., aby

věty byly lépe srozumitelné i bez čtení celého textu od začátku. Uzavřenost $H(G)$ vzhledem k aritmetickým operacím dále používáme bez vysvětlujícího komentáře. Poznamenejme, že vzhledem k tomu, že konstantní funkce jsou holomorfní, je $H(G)$ (komplexní) lineární prostor.

Definice 3.3.3. Funkce f je **holomorfní v bodě** $z \in \mathbb{C}$, jestliže pro nějaké okolí $U(z)$ bodu z je f holomorfní na $U(z)$. Říkáme, že funkce f definovaná na nějakém okolí $U(\infty)$ je **holomorfní v bodě** ∞ , pokud je f funkce holomorfní v nějakém $P(\infty)$ a existuje *konečná* $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty)$. Funkce f je **holomorfní v otevřené množině** $G \subset \mathbb{S}^1$, pokud je holomorfní v každém bodě množiny G .

Poznámka 3.3.4. Nedefinovali jsme explicitně $f'(\infty)$, neboť z pojmů, které souvisejí s bodem ∞ , budeme potřebovat jen některé.

Příklad 3.3.5. Snadno nahlédneme, že je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a $f \in \mathcal{C}(G)$, tj. f je funkce spojitá na G , pak i $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$ a \bar{f} leží v $\mathcal{C}(G)$. V případě $H(G)$ analogické tvrzení *obecně neplatí*. Srovnajte s Důsledkem 3.4.7 a s Příklady 3.4.8 níže.

Poznámky 3.3.6. 1. Jak později uvidíme, lze funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ lokálně vyjádřit jako součty mocninných řad. Zatím je však zřejmé pouze to, že součet mocninné řady je holomorfní funkce v jejím kruhu konvergence.

2. Na \mathbb{R} lze sestavit funkci $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, tj. funkci, která má spojitě derivace všech řádů, která však *není v okolí žádného bodu* $x \in \mathbb{R}$ součtem mocninné řady. Jak dále dokážeme, v \mathbb{C} tato situace nemůže nastat, takže f je zároveň příkladem „nekonečně hladké“ funkce na \mathbb{R} , kterou nelze holomorfně rozšířit na okolí žádného bodu $z \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.3.7. Polynomy jsou funkce holomorfní v \mathbb{C} . Podle uzavřených dohod je polynom $f \equiv 0$ spolu s polynomy nultého stupně holomorfní také v \mathbb{S} . Racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy a $Q \not\equiv 0$, je obecně funkce holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{z; Q(z) = 0\}$. O chování v bodě ∞ rozhoduje vztah stupňů p, q polynomů P, Q : je-li $p \leq q$, je R holomorfní i v bodě ∞ . Speciálně mocniny z^{-n} , $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce holomorfní v $\mathbb{S} \setminus \{0\}$.

3.4 Primitivní funkce

Před četbou této části by si měl čtenář připomenout alespoň základní fakta o křivkovém integrálu v rozsahu Kapitoly 1.

Definice 3.4.1. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Platí-li pro nějakou funkci F rovnost $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$, je F **primitivní funkce k f na G** .

Poznámka 3.4.2. Připomeňme nejprve zřejmý fakt, že podle předcházející definice je funkce F holomorfní funkcí na G . Na rozdíl od „reálného případu“ zavádíme primitivní funkci na *obecné* otevřené množině G . Funkce konstantní na každé komponentě G má

¹⁾ Srovnajte s poznámkami za Definicí 1.4.3.

derivaci rovnou 0 všude v G ; odtud snadno vyplývá, že rozdíl dvou primitivních funkcí k téže funkci f na G *obecně není* konstantní funkce na G .

Připomeňme dále, že v reálném případě je pomocí primitivní funkce definován Newtonův integrál; pokud existuje primitivní funkce k f na intervalu (a, b) , lze ji pomocí Newtonova integrálu „spočítat“ z f : Zvolíme $c \in (a, b)$ a položíme

$$F(x) := \int_c^x f(t) dt, \quad x \in (a, b).$$

Je-li $G \subset \mathbb{C}$ oblast, $w \in G$ a f funkce na G , vede nás předchozí úvaha k myšlence *definovat*

$$F(z) := \int_{\varphi} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, \quad z \in G,$$

kde $\varphi : [a, b] \rightarrow G$ je libovolná křivka s počátečním bodem w a koncovým bodem z . Aby však byla tato definice korektní, integrál musí existovat a jeho hodnota musí být pro každé $z \in G$ nezávislá na volbě φ .

Věta 3.4.3. *Je-li f spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{C}$, jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

- (1) *funkce F je primitivní funkcí k f v G ;*
- (2) *pro každou dvojici bodů $z, w \in G$ a každou křivku φ v G s počátečním bodem w a koncovým bodem z je*

$$\int_{\varphi} f(u) du = F(z) - F(w).$$

Důkaz. Dokažme nejprve (1) \Rightarrow (2). Zvolme body $z, w \in G$ a křivku $\varphi : [a, b] \rightarrow G$, pro niž $\text{pb}(\varphi) = w$ a $\text{kb}(\varphi) = z$. Křivka je obecně po částech regulární a tak pomocí vzorce (1.14) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f(u) du &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(z) - F(w). \end{aligned}$$

Pro důkaz implikace (2) \Rightarrow (1) zvolme libovolně bod $\zeta \in G$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; protože funkce f je spojitá v bodě ζ , existuje okolí $U(\zeta) = U(\zeta, r) \subset G$ tak, že pro všechna $z \in U(\zeta)$ je $|f(z) - f(\zeta)| \leq \varepsilon$. Je-li $z \in U(\zeta)$, $z \neq \zeta$, položme $\varphi_z(t) := \zeta + t(z - \zeta)$, $t \in [0, 1]$, a

$$F(z) = F(\zeta) + \int_{\varphi_z} f(u) du$$

pro každé $z \in U(\zeta)$. Potom pro každé $z \neq \zeta$ dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) \right| &= \left| \frac{1}{z - \zeta} \left(\int_{\varphi_z} f(u) du - \int_{\varphi_z} f(\zeta) du \right) \right| = \\ &= \left| \int_0^1 (f(\zeta + t(z - \zeta)) - f(\zeta)) dt \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud již plyne $F'(\zeta) = f(\zeta)$. Tím je věta dokázána. \square

Příklad 3.4.4. V návaznosti na Příklad 1.6.10 plyne z Věty 3.4.3 pro funkci $f(z) = (z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, a kladně orientovanou kružnici $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, rovnost

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^k dz = 0, \quad (3.12)$$

protože f má pro všechna $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ primitivní funkci v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (ta je rovna $(z - z_0)^{k+1}/(k+1)$).

Věta 3.4.5. *Nechť f je funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (1) *funkce f je lokálně konstantní v G ,*
- (2) *pro všechna $z \in G$ je $f'(z) = 0$.*

Důkaz. Z (1) zřejmě plyne (2), stačí tedy dokázat opačnou implikaci. Využijeme k tomu základní poznatky o křivkovém integrálu. Zvolme libovolně bod $z \in G$ a jeho okolí $U(z, r) \subset G$. Potom pro každé $w \in U(z, r)$ leží geometrický obraz úsečky $[z; w]$ v okolí $U(z, r)$ a pro $[z; w]$ se standardní parametrizací φ platí

$$f(w) - f(z) = \int_{[z; w]} f'(u) du = \int_0^1 f'(\varphi(t))(w - z) dt = 0,$$

a tedy $f(w) = f(z)$. Tím je dokázána vlastnost (1). \square

Důkazový princip, který použijeme při odvození následujícího důsledku, se v teorii funkcí komplexní proměnné často užívá. Je založen na jednoduchém poznatku o souvislých metrických prostorech. Připomněli jsme si ho v Kapitole 1.

Důsledek 3.4.6. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a nechť platí $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in G$. Potom je funkce f konstantní v G .*

Důkaz. Zvolme $w \in G$. Protože funkce f je lokálně konstantní v oblasti G , je množina $M := \{z \in G; f(z) = f(w)\}$ neprázdná, otevřená v G , a ze spojitosti f plyne, že je také uzavřená v G . Je tedy $M = G$. \square

Důsledek 3.4.7. *Nechť f je funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Potom je f konstantní v G právě tehdy, když je splněna některá z těchto podmínek*

- (a) \bar{f} je holomorfní v G (b) $\operatorname{Re} f$ je holomorfní v G ,
 (c) $\operatorname{Im} f$ je holomorfní v G , (d) $f' \equiv 0$,
 (e) $|f|$ je konstantní v G .

Důkaz. Je-li \bar{f} holomorfní v G , je $\operatorname{Re} f = (f + \bar{f})/2$ funkce holomorfní v G . Z (a) tedy plyne (b). Pak ale také je také $\operatorname{Im} f = (f - \bar{f})/i$ holomorfní v G a tak dostáváme (c) z (b). Přitom $\operatorname{Im} f$ je reálná holomorfní funkce a podle Cauchy-Riemannových podmínek je $f' \equiv 0$, z (c) tedy dostáváme (d). Odtud podle Důsledku 3.4.6 vyplývá, že f je konstantní a tedy i $|f|$ je konstantní, neboli platí (e). Pokud je $|f| \equiv 0$, je $f = 0$ a $\bar{f} = f$ je holomorfní, platí tedy (a). Pokud je $|f| = k > 0$, pak $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$ a $|f|^2/f = \bar{f}$ je opět jakožto podíl holomorfních funkcí opět holomorfní, takže opět dostáváme (a). Tím jsme dokázali všechny implikace (a) \Rightarrow (b) $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ (e) \Rightarrow (a) a podmínky (a) – (e) jsou tedy ekvivalentní. \square

Příklady 3.4.8. K dobrému porozumění podmínek existence derivace a pojmu holomorfní funkce přispěje, když si čtenář promyslí několik následujících příkladů:

1. Funkce $f(z) := z = x + iy$ má derivaci všude v \mathbb{C} . Pro její reálnou a imaginární část f_1 a f_2 platí $D_1 f_1(z) = D_2 f_2(z) = 1$ a současně $D_2 f_1(z) = -D_1 f_2(z) = 0$. Odtud vidíme, že pro $g(z) := \bar{z} = x - iy$, $z \in \mathbb{C}$, nejsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$, takže g , ač je spojitá v \mathbb{C} (zobrazení $z \mapsto \bar{z}$ je dokonce izometrie), nemá v žádném bodě \mathbb{C} derivaci. Srovnajte tuto jednoduchou úvahu s poměrně komplikovanou konstrukcí spojitě nikde diferencovatelné funkce na \mathbb{R}^2 [Z], str. 425 a násl..

2. Pro funkci $f(z) := |z|$ jsou $D_1 f_1(z)$, $D_2 f_1(z)$ nenulové v $\mathbb{P} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a platí pro ně rovnosti $D_1 f_2(z) = D_2 f_2(z) = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, takže pro žádné $z \neq 0$ nejsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky; v bodě $z = 0$ neexistuje navíc ani jedna z prvních parciálních derivací reálné části f . Podobně také funkce $g(z) := |z|^2 = z\bar{z}$ nemůže mít derivaci v žádném bodě $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, neboť pak by podle měl derivaci i podíl $g(z)/z = \bar{z}$. Avšak podle předchozí úvahy funkce $z \mapsto \bar{z}$ nemá v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$ derivaci. Porovnáním rovnosti

$$|z|^2 - 0 = \bar{z}(z - 0)$$

s Carathéodoryho podmínkou (nebo přímo z definice derivace) vidíme, že funkce g má derivaci v počátku. Má tedy derivaci v právě jediném bodě a platí $g'(0) = 0$.

Poznámka 3.4.9. Větu 3.4.3 někdy charakterizujeme jako **nezávislost integrálu z holomorfní funkce na cestě**. Připomíná nám to potenciální pole v reálném případě a podmínku, kladenou na složky pole, pomocí níž zkoumáme, zda je pole potenciální. Omezíme se však jen na konstatování, že nejde jen o náhodnou podobnost. Za předpokladu, že $f = f_1 + if_2 \in C^{(\infty)}(G)$ pro otevřenou množinu G (brzo dokážeme, že to platí pro každou $f \in H(G)$), se snadno ukáže pomocí Cauchy-Riemannových podmínek, že f_1, f_2 jsou harmonické funkce, tj. vyhovují

Laplaceově rovnici $\Delta u = 0$; srovnajte se Cvičením 2 na str. 39: Smíšené derivace druhého řádu funkcí f_1, f_2 jsou záměnné ve všech bodech $[x; y] = x + iy \in G$ a z Cauchy-Riemannových podmínek

$$D_1 f_1 = D_2 f_2, \quad D_2 f_1 = -D_1 f_2.$$

obdržíme dalším derivováním a jednoduchou úpravou rovnice

$$D_{11} f_1 + D_{22} f_1 = D_{11} f_2 + D_{22} f_2 = 0,$$

což je už pouze jiná forma zápisu Laplaceovy rovnice (1.27) pro f_1, f_2 .

Cvičení

1. Při standardním označení $z = x + iy$ určete reálnou část p_1 a imaginární část p_2 polynomu $p(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ a přesvědčte se, že p_1, p_2 jsou harmonické polynomy v proměnných x, y !

$$[\text{Je } p_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1 \text{ a } p_2(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2xy + y.]$$

2. Je reálná funkce $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ reálnou částí nějaké holomorfní funkce f na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$?

[Zkuste využít informace z Poznámky 3.4.9.]

3. Je reálná funkce $f_1(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ reálnou částí nějaké holomorfní funkce f na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$?

[Tentokrát možnost existence takové holomorfní funkce f pomocí Poznámky 3.4.9 nevyloučíte. Je $D_1 f_1(x, y) = 2x$, což by podle Cauchy-Riemannových podmínek měla být parciální derivace $D_2 f_2(x, y)$. Tuto podmínku splňuje jakákoli funkce $f_2(x, y) = 2xy + C$, $C \in \mathbb{R}$. Snadno se přesvědčíte, že každá funkce tvaru

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2) + i(2xy + C) = (x + iy)^2 + iC = z^2 + iC$$

je hledaným řešením úlohy.]

4. Jsou funkce

$$(a) \quad f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{a} \quad (b) \quad g(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

rozvinutelné v jejich kruhu konvergence $U(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ v mocninné řadě, stejnoměrně spojitě na $U(0, 1)$?

[Pro f je $\lim_{z \rightarrow 1, z \in U(0,1)} f(z) = \infty$ a pro g je $\lim_{z \rightarrow \pm i, z \in U(0,1)} g(z) = \infty$, takže ani jedna z těchto funkcí není stejnoměrně spojitá na $U(0, 1)$. Pokud by to platilo, existovaly by konečné limity vzhledem k $U(0, 1)$ ve všech bodech hranice $U(0, 1)$. Přitom lze funkci f evidentně rozšířit holomorfně na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ a funkci g na na $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$]

5. Dá se ukázat, že mocninná řada

$$\sum \frac{1}{k!} z^{2k}$$

má za kruh konvergence $U(0, 1)$, avšak její součet f nelze holomorfně rozšířit na jakoukoli otevřenou množinu G , pro kterou by $U(0, 1)$ byla její vlastní podmnožina. V tomto případě je hranice množiny $U(0, 1)$ tzv. **přirozenou hranicí** f . (Cvičení má charakter doplňující informace, podrobnosti a důkaz lze nalézt v [4], str. 121; viz též Příklad 6.6.5 v Kapitole 6 tohoto textu.)

6. Kdy je funkce $F(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ s koeficienty $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ prostá?

[Upravujte rovnost $F(z) = F(w)$ a použijte též rovnost čísel komplexně sdružených. Přes větu o řešitelnosti soustav se dostanete k podmínce $\alpha\bar{\alpha} \neq \beta\bar{\beta}$.]

7. Pro $a \in \mathbb{P}$ definujeme tzv. **Žukovského funkci**

$$F_a(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

(pro $a = 1$ se index 1 zpravidla vynechává). Ukažte, že $F(= F_1)$ je prostá na každé $G \subset \mathbb{P}$, která neobsahuje dva body z, w , $z \neq w$, pro něž je $z = w^{-1}$.

[Postupujte od definice: Ukažte, že

$$F_a(z) - F_a(w) = \frac{1}{2} \left((z - w) \left(1 - \frac{a^2}{zw} \right) \right) = 0,$$

a pro $a = 1$ a různá z, w odtud dostaneme $z = w^{-1}$.]

8. Zjistěte, jestli je funkce $f(z) = z/|z|^2$ holomorfní na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbb{P}$!

[Snadno zjistíte, že $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ nespĺňují Cauchy-Riemannovy podmínky, i když jsou z $C^{(\infty)}(\mathbb{P})$. Rychleji lze postupovat sporem: Pokud by byla f diferencovatelná v $G \subset \mathbb{P}$, byla by tam diferencovatelná i funkce f/z , tedy i její převrácená hodnota $|z|^2$. Ta však evidentně (bez počítání) Cauchy-Riemannovy podmínky nespĺňuje, její imaginární část je nulová a $D_1(\operatorname{Re} f)(x, y) = 2x$.]

9. Předpokládejte, že funkci, pro kterou je $f(z) = f'(z)$, lze v nějakém okolí bodu 0 rozvinout v mocninnou řadu. Určete její koeficienty a zjistěte definiční obor f !

[$\sum z^k/k!$, $z \in \mathbb{C}$.]

10. Spočtete integrál z funkce $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ přes oblouk kružnice popsané vztahem $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$, kde $r > 0$ a $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2\pi$.

[Použijte definici a výsledek porovnejte s Příkladem 1.6.10. Všimněte si, že výsledek *nezávisí* na r .]

11. Zobrazení $f(z) = z^{-1}$ je zobrazením \mathbb{P} na \mathbb{P} , které se nazývá **inverze**. Ukažte, že zobrazení f je prosté a spojitě na \mathbb{P} a že je lze rozšířit na prosté a spojitě zobrazení (v rozšířeném smyslu) $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$. Má f invariantní body?

[Uvažte, jak se pro $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ zobrazují okolí $U(0, \varepsilon)$ a $U(\infty, \varepsilon)$. Všimněte si, že inverze speciálně zobrazuje $P(0, 1)$ na $P(\infty, 1)$ a také jak zobrazuje jednotkovou kružnici.]

62 KAPITOLA 3. Derivování

12. Zobrazení $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, pro něž existují čísla $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ taková, že

$$ad - bc \neq 0, \quad (3.13)$$

pro které

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ je-li } z \in \mathbb{C}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad (3.14)$$

se nazývá **Möbiova funkce** nebo též **lineární lomené zobrazení**. Ukažte, že f je prosté a spojité na \mathbb{S} ! Popište, co nastává, pokud není splněna podmínka (3.13).

[Jde, stejně jako v několika dalších cvičeních, o přípravu k další kapitole, ve které se k Möbiovým funkcím ještě vrátíme.]

13. Ukažte, že pokud funkci f definujeme pomocí (3.14), je rovněž

$$f(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \text{ je-li } z \in \mathbb{C}, \quad f(\infty) = \frac{a_1}{c_1},$$

právě když je vektor (a_1, b_1, c_1, d_1) násobkem vektoru (a, b, c, d) číslem $\alpha \in \mathbb{P}$. Proto nejsou čísla a, b, c, d ve vyjádření Möbiovy funkce f určena jednoznačně. Möbiova funkce z (3.14) je jistou „třídou funkcí $(az + b)/(cz + d)$.“

14. Ukažte, že pro $c \neq 0$ je inverzní funkcí k Möbiově funkci (3.14) na \mathbb{S} opět Möbiova funkce

$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}, \text{ je-li } w \in \mathbb{C}, \quad f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}! \quad (3.15)$$

15. Ukažte, že Möbiovy funkce tvoří vzhledem ke skládání grupu! Popište jednotkový prvek a inverzní prvek k Möbiově funkci (3.14)!

[Čtenář snadno spočítá, že složením dvou Möbiových funkcí dostaneme opět Möbiovu funkci; pro jejich reprezentace

$$f(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \quad g(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}, \quad \text{je } f(g(z)) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

platí

$$\alpha = a_1a_2 + b_1c_2, \quad \beta = a_1b_2 + b_1d_2, \quad \gamma = c_1a_2 + d_1c_2, \quad \delta = c_1b_2 + d_1d_2, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2).]$$

16. Nechť $f = f_1 + if_2 \in H(G)$. Je-li $c > 0$ a utvoříme-li funkce $g = f_1 + i(f_2 + c)$ a $h = cf_1 + if_2$, leží obecně g a h také v $H(G)$?

[Je lehké nahlédnout, že $g \in H(G)$, zatímco h obecně ležet v $H(G)$ nemusí.]

Kapitola 4

Elementární transcendentní funkce

Až dosud jsme se seznámili pouze s velmi jednoduchými funkcemi. Označují se zpravidla, spolu s dalšími, s nimiž se seznámíme v této kapitole, názvem *elementární funkce*. Polynomy i racionální funkce jsou elementární funkce, které jsou holomorfní ve svých definičních oborech. Jsou to nejjednodušší *algebraické funkce*¹⁾. V Kapitole 2 jsme si připomněli základní poznatky o mocninných řadách. Pomocí nich budeme nyní definovat další holomorfní funkce, které jsou však již podstatně složitější: sčítání mocninné řady v sobě skrývá limitní přechod, takže mocninné řady nám poskytnou přístup i k tzv. *transcendentním elementárním funkcím*.

4.1 Reálné elementární funkce

Úmluva 4.1.1. Abychom odlišili nově zaváděné funkce v komplexním oboru od jejich restrikcí na \mathbb{R} , budeme (pouze) v této kapitole používat dvojí označení. Pro reálné funkce reálné proměnné budeme užívat označení *exp*, *cos*, *sin* apod., a pro jejich „komplexní verze“ *exp*, *cos*, *sin* apod. V dalších kapitolách budeme užívat již jen standardní značení *exp*, *cos*, *sin* apod.

Pokud čtenář dobře zvládl základní poznatky o reálných funkcích *exp*, *sin*, *cos*, apod., nemusí Poznámku 4.1.2 číst, je určena pouze k opakování. Budeme speciálně potřebovat Maclaurinovy rozvoje těchto funkcí.

Poznámka 4.1.2. Jaké jsou základní vlastnosti reálných elementárních funkcí? Funkce *exp* je spojitá rostoucí (a tedy prostá) funkce na \mathbb{R} , pro kterou $\exp' = \exp$, a tudíž $\exp \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$; dále je $\exp(0) = 1$. Funkce k reálné exponenciále *exp*

¹⁾ Srovnejte např. s poznámkami v [Z], str. 151 a násl..

inverzní je funkce logaritmus, $\log : (0, \infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$. Platí rovnosti

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

Zpravidla se též při zkoumání součinu absolutně konvergentních řad dokazuje, že pro funkci \exp platí identita

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

a že vyhovuje podmínce $\lim_{x \rightarrow 0} ((\exp x - 1)/x) = 1$. Dále zavádíme $e := \exp(1)$, takže $\log(e) = 1$ ²⁾. Pro $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$ definujeme mocninu o základu a vztahem

$$a^b := \exp(b \log a) = e^{b \log a}.$$

Funkce \sin a \cos jsou funkce spojité na \mathbb{R} , pro jejichž derivace platí $\sin' = \cos$ a $\cos' = -\sin$; obě funkce tedy leží v $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Nejmenší kladný nulový bod funkce \cos slouží jako *definice* $\pi/2$ a 2π je pak *nejmenší kladná perioda* každé z funkcí \sin a \cos . Funkce \cos je sudá a funkce \sin lichá; \sin je funkce rostoucí v $[0; \pi/2]$ a kladná v $(0, \pi)$, $\sin 0 = \sin \pi = 0$, $\sin \pi/2 = 1$. Označíme-li

$$N_c(\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{R}; \cos x = 0\}, \quad N_s(\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{R}; \sin x = 0\}, \quad (4.1)$$

lze tyto množiny lehce popsat pomocí π ; je

$$N_c(\mathbb{R}) = \{(2k+1)\pi/2; k \in \mathbb{Z}\}, \quad N_s(\mathbb{R}) = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.2)$$

Dále je

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

a obě funkce jsou tedy omezené; zobrazují \mathbb{R} na $[-1; 1]$. Lze je vyjádřit pomocí jejich Maclaurinových rozvojų

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Obě řady konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně na \mathbb{R} . Tyto poznatky z reálné analýzy budeme používat, některé věci však dokážeme znova, odlišným způsobem než v [Z]. Jak uvidíme, komplexní exponenciála má řadu analogických vlastností jako \exp , ale některé jsou nové: např. *není* prostá a je periodická.

Poznámka 4.1.3. Většina funkcí, které se chystáme zavést, jsou pouze *holomorfní rozšíření* funkcí, které již známe z reálné analýzy. Budeme předpokládat, že čtenář je obeznámen s elementárními funkcemi v reálném oboru a že zná i jejich Taylorovy rozvoje. Pomocí nich lze tyto funkce *snadno* rozšířit na \mathbb{C} .

²⁾ Je $e = 2,7182818284 \dots$. Snadno se dokáže, že je to iracionální číslo; srv. [Z], str. 88. Podstatně náročnější je dokázat, že je to číslo transcendentní.

4.2 Lineární lomené funkce

Poznámka 4.2.1. Při ztotožnění \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 lze pomocí komplexních funkcí komplexní proměnné vyšetřovat zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 . Přitom je výhodné studovat tyto funkce opět jako (spojitá) zobrazení z \mathbb{S} do \mathbb{S} ; proto se v této části *neomezujeme na konečné funkce*. Tato látka je z velké části elementární a její základy lze ovládnout velmi brzo, tj. např. když se čtenář teprve seznamuje s vlastnostmi \mathbb{C} a \mathbb{S} ; viz např. [13]. Elementární zpracování je voleno i v [18], tam je však výklad založen na názoru. S řadou poznatků se čtenář patrně již setkal v jiné formě v elementární geometrii.

Začneme trochu obecněji. Tak jako jsou holomorfní funkce podobné polynomům, jsou tzv. meromorfní funkce podobné racionálním funkcím.

Definice 4.2.2. Nechť $G \subset \mathbb{S}$ je otevřená množina. Budeme říkat, že $f: G \rightarrow \mathbb{S}$ je **funkce meromorfní v G** , jestliže f je spojitě zobrazení G do \mathbb{S} a existuje množina $P(f)$ izolovaná v G tak, že f je holomorfní v $G \setminus P(f)$ a má *pól* v každém bodě množiny $P(f)$.³⁾ Množinu všech meromorfních funkcí $f: G \rightarrow \mathbb{S}$ budeme značit $M(G)$.

Definice 4.2.3. Nechť $G \subset \mathbb{S}$ je otevřená množina a necht' $f: G \rightarrow \mathbb{S}$ je *prostá* meromorfní funkce na G . Potom f nazýváme **konformní zobrazení**. Dále říkáme, že funkce je **meromorfní**, resp. **konformní v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$** , je-li meromorfní, resp. konformní v nějakém okolí $U(z_0)$. Množinu všech konformních zobrazení $f: G \rightarrow \mathbb{S}$ budeme značit $K(G)$.

Poznámky 4.2.4. 1. Při studiu konformních zobrazení z \mathbb{S} do \mathbb{S} budeme používat vždy proměnnou z v „množině vzorů“ a proměnnou w v „množině obrazů“, což usnadní čtenáři orientaci v textu.

2. Název „konformní zobrazení“ souvisí s tím, že konformní zobrazení „zachovává úhly mezi křivkami“. Viz Věta 4.2.8.

3. Funkce holomorfní v $G \subset \mathbb{S}$, resp. v bodě z_0 , je meromorfní v G , resp. v bodě z_0 . Funkce f je meromorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$, právě když je holomorfní v nějakém $P(z_0)$ a je *spojitá* v bodě z_0 . Přitom funkce f meromorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$ je holomorfní v bodě z_0 , právě když je v tomto bodě *konečná*.

Definice 4.2.5. Body, pro které je $f(z_0) = z_0$, budeme nazývat **invariantní body** zobrazení f .

Nejprve se seznámíme se zobrazeními pomocí polynomů prvního stupně. Je-li $a \in \mathbb{P}$, $b \in \mathbb{C}$, je⁴⁾

$$f(z) = az + b, \quad z \in \mathbb{S},$$

³⁾ Název meromorfní funkce opět zavedli, tak jako u holomorfních funkcí, CHARLES AUGUST ALBERT BRIOT (1817 – 1882) spolu s JEANEM CLODEM BOUQUETEM (1819 – 1885) již r. 1875.

⁴⁾ Příklad $a = 0$ není zajímavý, konstantní zobrazení není prosté.

lineární funkce neboli **lineární zobrazení**. Snadno zjistíme, že f je prosté spojitě zobrazení \mathbb{S} na \mathbb{S} , $f(\infty) = \infty$ a že $f^{-1}(w) = (w - b)/a$, $w \in \mathbb{S}$. Dále je

$$f(z) = \frac{a}{|a|} |a|z + b,$$

z čehož plyne možnost vyjádření funkce f ve tvaru $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, kde

$$f_1(z) = z + b, \quad f_2(z) = \frac{a}{|a|} z, \quad f_3(z) = |a|z, \quad z \in \mathbb{S}.$$

Z elementární geometrie je znám geometrický význam zobrazení f_1 , f_2 a f_3 . Zobrazení f_1 nazýváme **posunutí** (o vektor b). Je-li $b = 0$, je $f_1 : z \mapsto z$, $z \in \mathbb{S}$, **identické zobrazení**, krátce **identita**. Pro identitu jsou všechny body \mathbb{S} invariantní, ve všech ostatních případech kdy $b \neq 0$, má f_1 jediný invariantní bod ∞ .

Je-li $a = |a|e^{i\vartheta}$, je $\vartheta \in \text{Arg } a$ a f_2 je **otočení (kolem počátku)** o úhel ϑ , přičemž úhel ϑ je určen modulo 2π . Speciálními případy pro $\vartheta = 0$ a $\vartheta = \pi$ (modulo 2π) jsou *identita* a **středová symetrie**. V netriviálních případech, kdy f_2 není identita, má toto zobrazení dva invariantní body, 0 a ∞ .

Zobrazení f_3 je **stejnolehlost**. Je-li $|a| > 1$, jde o **dilataci**, při $|a| < 1$ jde o **kontrakci** a při $|a| = 1$ o *identitu*. Kromě posledního případu jsou jedinými invariantními body stejnolehlosti opět 0 a ∞ .

Každé lineární zobrazení je tedy homeomorfní zobrazení \mathbb{S} na \mathbb{S} a inverzní zobrazení k lineárnímu zobrazení je opět lineární. Je také zřejmé, že složením dvou lineárních zobrazení dostaneme lineární zobrazení. Budeme-li chápat skládání zobrazení jako binární operaci na množině \mathcal{L} všech lineárních zobrazení, tvoří \mathcal{L} s touto operací *grupu*; roli jednotkového prvku hraje identita a roli inverzního prvku inverzní zobrazení. Konečně pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{S}$ je restrikce lineární funkce na G konformním zobrazením.

Definice 4.2.6 (úhel křivek). Necht' $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou dvě křivky se společným počátečním bodem $z_0 = \varphi(a) = \psi(c)$, a necht' dále existují nenulové jednostranné derivace $\varphi'_+(a)$, $\psi'_+(c)$. Je-li λ argument $\varphi'_+(a)$ a μ argument $\psi'_+(c)$, pak říkáme, že křivky φ , ψ **svírají ve svém počátečním bodě úhel** $\omega = \lambda - \mu$.

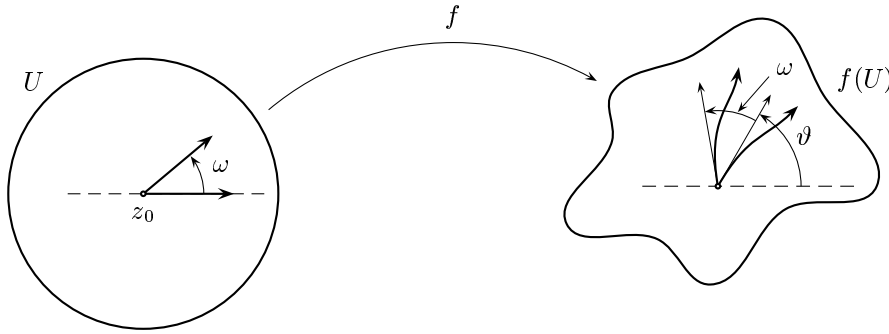
Poznámka 4.2.7. Protože λ , μ z Definice 4.2.6 jsou určeny modulo 2π , platí totéž pro úhel ω obou křivek φ , ψ . Čtenář by si měl povšimnout, že pokud zaměníme pořadí křivek, jejich úhel „změní znaménko“. Definujeme-li přirozeným způsobem **polopřímky**

$$p_\lambda(z_0) = \{z_0 + t e^{i\lambda}; t \in [0, \infty)\}, \quad p_\mu(z_0) = \{z_0 + t e^{i\mu}; t \in [0, \infty)\},$$

odpovídá přijatá definice našim názorným představám: úhel $\lambda - \mu$ je (modulo 2π) úhlem polopřímek, které jsou polotečnami zprava křivek φ , ψ .

Věta 4.2.8. Necht' f je funkce holomorfní v okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a necht' $f'(z_0) \neq 0$. Jsou-li $\varphi : [a, b] \rightarrow U(z_0)$, $\psi : [c, d] \rightarrow U(z_0)$ křivky s počátečním

bodem z_0 , svírající v něm úhel ω , svírají křivky $f \circ \varphi$, $f \circ \psi$ ve svém počátečním bodě rovněž úhel ω .



Obr. 4.1: Zachovávání úhlů – schema

Důkaz. Podle předpokladů existují $\varphi'_+(a)$, $\psi'_+(c)$. Položme např. $\lambda := \arg(\varphi'_+(a))$, $\mu := \arg(\psi'_+(c))$. Je-li $f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\vartheta}$, dostaneme pro křivky $f \circ \varphi$, $f \circ \psi$ rovnosti

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'_+(a) &= |f'(\varphi(a))| \cdot |\varphi'_+(a)| e^{i(\vartheta+\lambda)}, \\ (f \circ \psi)'_+(c) &= |f'(\psi(c))| \cdot |\psi'_+(c)| e^{i(\vartheta+\mu)},\end{aligned}$$

přičemž $\lambda - \mu = (\lambda + \vartheta) - (\mu + \vartheta)$; zhruba řečeno, „sevržený úhel se otočí o úhel ϑ “. Viz Obr. 4.1. \square

Poznámky 4.2.9. 1. Jak již bylo řečeno, konformní zobrazení má mnoho praktických aplikací. Terminologie užívaná v této části textu odráží proto často geometrické nebo fyzikální pojetí: hovoříme o přímkách, parabolách apod. jako o křivkách v rovině komplexních čísel, ač jsou pouze *lokálně* geometrickým obrazem křivek v námi užívaném smyslu. Chceme tuto partii popsat pouze informativně, bez budování *jíného aparátu*. To ovšem předpokládá na straně čtenáře ochotu spolupracovat a některé věci si samostatně promýšlet.

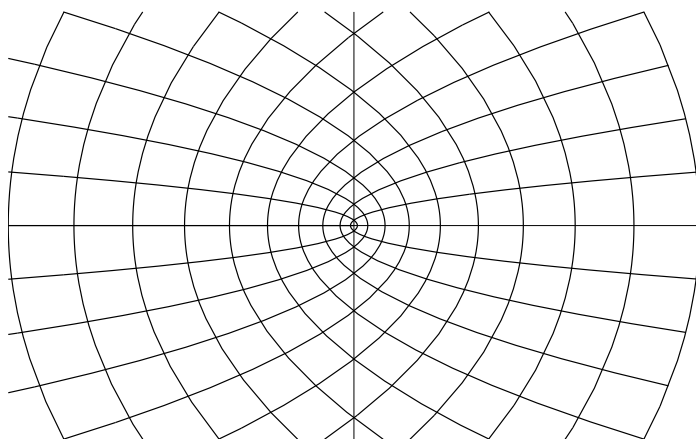
2. Nebudeme detailněji zkoumat „geometrický charakter“ konformních zobrazení. Uvedené minimum nám posloužilo pouze k objasnění, proč konformní zobrazení bylo ve starších učebnicích označováno jako *úhlojevné*. Pokud je funkce f definována v $U(z_0)$ a pro všechna $z \in U(z_0)$ je $f(z) \neq f(z_0)$, souvisí limita (pokud existuje v \mathbb{C})

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\vartheta}) - f(z_0)}{re^{i\vartheta}} \quad (4.3)$$

s polotečnou křivkou, která je obrazem polopřímky s počátkem z_0 , určené „směrem“ $e^{i\vartheta}$. Jestliže vlastní limita v (4.3) existuje a nezávisí na ϑ , říkáme, že f **zachovává úhly v bodě** z_0 .

3. Dá se ukázat, že pokud f zachovává úhly v každém bodě oblasti G , je funkce f „skoro holomorfní“ v následujícím smyslu: buď je $f = f_1 + if_2$ funkce holomorfní v G a $f'(z) \neq 0$ všude v G , nebo je v G holomorfní funkce $\bar{f} = f_1 - if_2$ a $(\bar{f})'(z) \neq 0$ všude v G . Pokud se ještě vhodně zavede pojem zachovávání orientace, je $f \in H(G)$, $f'(z) \neq 0$, všude v G , právě když f zachovává úhly i jejich orientaci.

Úmluva 4.2.10. Svírají-li křivky úhel $\omega = \pm\pi/2$ modulo 2π , říkáme, že jsou navzájem kolmé neboli **ortogonální**.



Obr. 4.2: Zobrazení $z \mapsto z^2$

Příklady 4.2.11. 1. Exponenciála má všude v \mathbb{C} nenulovou derivaci, je však periodická a tudíž není prostá. Její restrikce f na pás $P := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi)\}$ je však konformní. Pokud zobrazíme pomocí $f|_P$ navzájem kolmé systémy přímek p_r o rovnicích $\operatorname{Im} z = r$, $r \in (-\pi, \pi)$, a k nim kolmých „otevřených úseček“ bez koncových bodů $q_s \subset P$ (jsou to části přímek o rovnicích $\operatorname{Re} z = s$, $s \in \mathbb{R}$), zobrazí se na systém oblouků kružnic a polopřímek (bez počátečního bodu 0), které jsou opět navzájem kolmé.

2. Funkce $f(z) = z^2$ není konformní na \mathbb{C} . V bodě $z_0 = 0$ má f totiž dvojnásobný kořen, a není tedy prostá na žádném okolí $U(0)$; čtenář by si měl povšimnout, že *obrazy* dvou ortogonálních polopřímek $\overline{\mathbf{R}}_0$ a $\overline{\mathbf{R}}_{\pi/2}$ nejsou v 0 ortogonální.

Omezíme-li se však na polovinu $G := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$, je restrikce $f|_G$ konformním zobrazením G na $\mathbb{P} \setminus \overline{\mathbf{R}}_+$. Funkce $f(z) = z^2$, $z \in G$, má inverzní funkci, která je konformním zobrazením $\mathbb{P} \setminus \overline{\mathbf{R}}_+$ na G . Protože zachovávání úhlů má lokální charakter, systémy navzájem ortogonálních přímek rovnoběžných s osami, tj. přímek o rovnicích $\operatorname{Re} z = r$, $\operatorname{Im} z = s$, kde $r, s \in \mathbb{R}$, $rs \neq 0$, se zobrazí funkcí $f(z) = z^2$ na systémy navzájem ortogonálních parabol; viz Obr. 4.2, který zachycuje obraz části „ortogonální sítě“ těchto přímek.

4.3 Lineární lomená funkce

Již ve cvičeních k minulé Kapitole 3 jsme se seznamovali s některými vlastnostmi lineárních lomených funkcí. Jsou to speciální meromorfní funkce, které popisují konformní zobrazení \mathbb{S} na \mathbb{S} . Nyní je prozkoumáme podrobněji.

Definice 4.3.1. Zobrazení meromorfní funkcí $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, pro něž existují čísla $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ taková, že

$$ad - bc \neq 0, \quad (4.4)$$

pro která

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ je-li } z \in \mathbb{C}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad (4.5)$$

se nazývá **Möbiová funkce** nebo též **lineární lomené zobrazení**.

Poznámka 4.3.2 (důležitá). Jsou-li dána čtyři čísla a, b, c, d splňující (4.4), je jimi jednoznačně určena funkce f z (4.5). Pro stručnost budeme o této funkci v dalším mluvit jako o „funkci $(az + b)/(cz + d)$ “.

Zřejmě je $f(\infty) = a/c$ i v případě $c = 0$. Dále je $f(-d/c) = \infty$, neboť podmínka (4.4) vylučuje možnost společného nulového bodu čitatele a jmenovatele zlomku v (4.5) a pro každé $\alpha \in \mathbb{P}$ jsme definovali $\alpha/0 = \infty$. Je též $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a/c = f(\infty)$ a zobrazení f definované pomocí (4.5) je spojitě v \mathbb{S} .

Poznámka 4.3.3. Lineární lomené zobrazení lze také, podobně jako lineární funkci, složit z jednodušších zobrazení. Pro $c \neq 0$ je

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right) = \frac{a}{c} + \frac{-(ad - bc)}{c(cz + d)}. \quad (4.6)$$

Z (4.6) vyplývá $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, kde

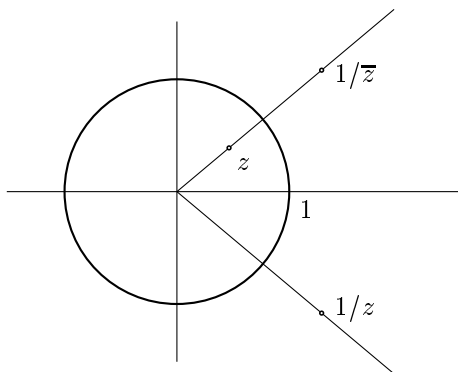
$$f_1(z) = \frac{a}{c} + z, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -\frac{c(cz + d)}{ad - bc}. \quad (4.7)$$

Zobrazení f_1 a f_3 jsou lineární a tedy prostá a spojitá na \mathbb{S} . Zobrazení f_2 se nazývá **inverze**; poznamenejme, že zobrazení $g(z) = 1/\bar{z}$, $z \in \mathbb{P}$, zobrazuje bod z na bod, ležící symetricky k bodu $1/z$ vzhledem k přímce $\operatorname{Re} z = z$. Viz Obr. 4.3.

Poznámka 4.3.4. Všimněme si elementárních vlastností inverze f_2 . Je $|z| < 1$, právě když je $1/|z| > 1$, takže inverze zobrazuje $P(0, 1)$ na $P(\infty, 1)$ a $P(\infty, 1)$ na $P(0, 1)$. Je $f_2(0) = \infty$ a $f_2(\infty) = 0$. Obecněji pro $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ je $f_2(U(0, \varepsilon)) = U(\infty, \varepsilon)$ a $f_2(U(\infty, \varepsilon)) = U(0, \varepsilon)$. Jednotková kružnice se zobrazí na jednotkovou kružnici, přičemž jedinými invariantními body inverze jsou body 1 a -1 . Pro $z_1, z_2 \in \mathbb{P}$, $z_1 \neq z_2$, je

$$\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \neq 0.$$

Z těchto vlastností f_2 vyplývá, že i f_2 je prostým spojitým zobrazením \mathbb{S} na \mathbb{S} .



Obr. 4.3: Schéma inverze a symetrie vzhledem k jednotkové kružnici

Věta 4.3.5. Každá Möbiova funkce je prostým spojitým zobrazením \mathbb{S} na \mathbb{S} .

Důkaz. Nechť f je popsána pomocí (4.5). Podmínka (4.4) vylučuje jednak případ, kdy $c = d = 0$ a také případ konstantní funkce f , která není prostá. Pro $c = 0$ je $d \neq 0$, takže f je lineární, a je tedy prostá a spojitá v \mathbb{S} . Pokud je $c \neq 0$, je Möbiova funkce f složením zobrazení z (4.7), z nichž f_1 a f_3 jsou lineární a tudíž prostá. Protože podle Poznámky 4.3.4 je i f_2 prosté spojitě zobrazení, plyne odtud tvrzení věty. \square

Poznámka 4.3.6. Pro $c = 0$ je Möbiova funkce (4.5) lineárním zobrazením \mathbb{S} na \mathbb{S} , přičemž

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}. \quad (4.8)$$

Vyjádríme nyní inverzní zobrazení k funkci f z (4.5). Jestliže $c = 0$, potom je $f^{-1}(w) = (dw - b)/a$ a f i f^{-1} jsou lineární. Pro $c \neq 0$ je podle definice $f^{-1}(a/c) = \infty$, $f^{-1}(\infty) = -d/c$. Z rovnosti

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.9)$$

vypočteme z pro každé $w \in \mathbb{S} \setminus \{a/c, \infty\}$. Odtud obdržíme jako důsledek:

Důsledek 4.3.7. Pro $c \neq 0$ je inverzní funkcí k Möbiově funkci (4.5) na \mathbb{S} opět Möbiova funkce

$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}, \text{ je-li } w \in \mathbb{C}, \quad f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}. \quad (4.10)$$

Poznámky 4.3.8 (důležité). 1. Čtenář by si měl povšimnout, že pokud funkci f definujeme pomocí (4.5), je rovněž

$$f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \text{ je-li } z \in \mathbb{C}, \quad f(\infty) = \frac{a_1}{c_1},$$

právě když je vektor (a_1, b_1, c_1, d_1) násobkem vektoru (a, b, c, d) číslem $\alpha \in \mathbb{P}$. Proto nejsou čísla a, b, c, d ve vyjádření Möbiovy funkce f určena jednoznačně. Möbiova funkce z Definice 4.3.1 je jistou „třídou funkcí $(az + b)/(cz + d)$ “ z Poznámky 4.3.2. Möbiova funkce je určena třemi komplexními parametry a, b, c, d : žádáme-li např. aby $ad - bc = 1$, lze odtud jeden z parametrů spočítat.

2. Z racionálních funkcí typu (4.5) „vybírám“ podmínka (4.4) Möbiovy funkce, které jsou navíc v \mathbb{S} prosté. Jinými slovy, podmínka (4.4) mj. zaručuje, že se omezujeme na případ konformních zobrazení \mathbb{S} na \mathbb{S} .

3. Zajímavé je, že to jsou všechna konformní zobrazení \mathbb{S} na \mathbb{S} . Platí totiž toto tvrzení: *Funkce f je konformním zobrazením \mathbb{S} na \mathbb{S} , právě když je Möbiovou funkcí.*

4. Uvedeme ještě další zajímavé tvrzení: *Je-li $K \subset \mathbb{S}$ konečná množina a $f: (\mathbb{S} \setminus K) \rightarrow \mathbb{S}$ je konformní, je f restrikcí Möbiovy funkce (definované v \mathbb{S}) na $\mathbb{S} \setminus K$.*

Obě tato tvrzení nebudeme dokazovat, zájemce odkazujeme na [K]. Pokud je budeme potřebovat použít, odvoláme se na tyto poznámky.

5. Je zřejmé, že obrazem množiny $\mathbb{S} \setminus K$ z předcházející Poznámky 4.3.8 (4) je množina $\mathbb{S} \setminus L$. Množina $L \subset \mathbb{S}$ má stejný počet prvků jako K . To vyplývá z toho, že rozšíření funkce f z $\mathbb{S} \setminus K$ na \mathbb{S} z Poznámky 4.3.8 (4) je prosté na \mathbb{S} .

V dalším výkladu využíváme podstatně toho, že o konečné množiny se při práci s Möbiovými funkcemi nemusíme starat, což nám umožní některé úvahy zjednodušit.

Příklad 4.3.9. Přímým výpočtem dostaneme pro f z (4.5) $f'(z) = (ad - bc)/(cz - d)^2$, $z \neq d/c$. Podobně pro $w \neq a/c$ a $w \neq \infty$ dostaneme z (4.10)

$$(f^{-1})'(w) = \frac{ad - bc}{(cw - a)^2}$$

Snadno ověříte, že v tomto případě platí obecnější vzorec

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad (4.11)$$

pro všechna $w \in f(G)$, pro něž je $w \neq \infty \neq f^{-1}(w)$.

Definice 4.3.10 (konformně ekvivalentní oblasti). Je-li f konformní v oblasti $G \subset S$ a zobrazuje G na oblast $D \subset S$, nazýváme G a D **konformně ekvivalentní**.

Zobrazování určitých podmnožin $G \subset \mathbb{C}$ nám umožní lépe chápat způsob, jímž konformní zobrazení z $K(G)$ zobrazují G nebo některé části G . Vraťme se však k vyšetřování vlastností obecných Möbiových funkcí; u nich vidíme, že vztah z předchozí definice je *opravdu ekvivalencí*. Pro obecné oblasti bychom to museli dokazovat.

Definice 4.3.11. Při obvyklém ztotožnění \mathbb{C} s \mathbb{R}^2 položíme pro $z = x + iy$ a reálná čísla $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma$

$$K := \{z \in \mathbb{C}; \alpha(x^2 + y^2) - 2\beta_1x - 2\beta_2y + \gamma = 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha\gamma > 0\}. \quad (4.12)$$

Množinu $K^* := \overline{K}$, kde uzávěr chápeme v \mathbb{S} , nazýváme **zobecněná kružnice**.

Poznámka 4.3.12. Z analytické geometrie je patrný význam předcházející definice. Pokud $\alpha = 0$, je rovnice v (4.12) *lineární* rovnicí v x a y a popisuje tedy přímku v \mathbb{R}^2 . Pokud je $\alpha \neq 0$, lze rovnici v (4.12) upravit na tvar

$$\alpha \left[\left(x - \frac{\beta_1}{\alpha} \right)^2 + \left(y - \frac{\beta_2}{\alpha} \right)^2 \right] = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha\gamma}{\alpha}.$$

Tato rovnice popisuje v \mathbb{R}^2 kružnici, pokud v rovnici na pravé straně je v čitateli zlomku *kladné* číslo. Kružnice má střed $[\beta_1/\alpha, \beta_2/\alpha]$ a kladný poloměr r , pro který platí rovnost $r^2 = (\beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha\gamma)/\alpha^2$. Zobecněná kružnice je tedy buďto kružnice, nebo (uzavřená) přímka, tj. přímka, k níž je „přidán“ bod ∞ . Je vhodné si uvědomit, že je-li $\overline{K} = K \cap \mathbb{P}$, množina $K \cap \mathbb{P}$ se skládá právě ze všech bodů $z \in \mathbb{P}$, pro které $\operatorname{Re} z = x$ a $\operatorname{Im} z = y$. Toho při práci s inverzí dále využíváme.

Přepisem pomocí komplexní proměnné z dospějeme k popisu množiny K z (4.12) pomocí reálných čísel α, γ a komplexního čísla $\beta (= \beta_1 + i\beta_2)$

$$K = \{z \in \mathbb{C}; \alpha z\bar{z} - \bar{\beta}z - \beta\bar{z} + \gamma = 0; \beta\bar{\beta} > \alpha\gamma\}, \quad (4.12^*)$$

kde $\alpha = 0$ odpovídá přímkám a $\alpha \neq 0$ kružnicím. Lineární zobrazení převádí kružnice v kružnice a přímky v přímky, a tedy zobecněné kružnice ve zobecněné kružnice.

Lemma 4.3.13. *Inverze $f(z) = 1/z$ převádí zobecněné kružnice ve zobecněné kružnice.*

Důkaz. Omezíme-li se v (4.12*) na $z \in \mathbb{P}$, K^* se nezmění. Dosazením $1/z$ za z pro $z \in \mathbb{P}$ do rovnice

$$\alpha z\bar{z} - \bar{\beta}z - \beta\bar{z} + \gamma = 0 \quad (4.13)$$

dostaneme po úpravě rovnici

$$\alpha - \bar{\beta}\bar{z} - \beta z + \gamma z\bar{z} = 0,$$

což je rovnice stejného typu; pomocí ní popíšeme $f(K^*)$ analogicky jako v (4.12*), avšak až na konečnou množinu; uzávěr pak dá $f(K^*)$. \square

Za povšimnutí stojí fakt, že pro inverzi $f(z) = 1/z$ obraz zobecněné kružnice K^* obsahuje bod ∞ (a je tedy uzavřenou přímkou), právě když K^* prochází bodem 0. Je-li K^* uzavřená přímka, je $f(K^*)$ „obyčejná“ kružnice procházející počátkem, právě když K^* neprochází počátkem. Je-li K^* „obyčejná“ kružnice, je

$f(K^*)$ uzavřená přímka, právě když $0 \in K^*$. Pro uzavřené přímky K^* procházející počátkem je $f(K^*) = K^*$, avšak pouze dva jejich body jsou invariantní!

Položme si otázku, kolik existuje invariantních bodů Möbiovy funkce; pracujeme opět s její zvolenou reprezentací tvaru (4.5). V triviálním případě identity f ($b = c = 0$, $a = d$ nenulové) je každý bod \mathbb{S} invariantní. Není-li f identita a $c = 0$, jsou jedinými možnými invariantními body 0 a ∞ (při $b = 0$ oba, pro $b \neq 0$ pouze ∞). Pro $c \neq 0$ obdržíme jednoduchou úpravou z rovnice $z = (az + b)/(cz + d)$ kvadratickou rovnici

$$cz^2 - (a - d)z - b = 0.$$

Odtud vyplývá, že v netriviálním případě existují *nejvýše dva* invariantní body. *Má-li tedy Möbiova funkce alespoň tři různé invariantní body, je identitou.* Nyní dokážeme, že Möbiova funkce f je určena informací o zobrazení tří různých bodů kompaktifikované roviny \mathbb{S} .

Poznámka 4.3.14. Čtenář snadno spočítá, že složením dvou Möbiových funkcí dostaneme opět Möbiovu funkci; pro jejich reprezentace

$$f(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \quad g(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}, \quad \text{je} \quad f(g(z)) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

a dále platí

$$\alpha = a_1a_2 + b_1c_2, \quad \beta = a_1b_2 + b_1d_2, \quad \gamma = c_1a_2 + d_1c_2, \quad \delta = c_1b_2 + d_1d_2, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2).$$

Odtud plyne, že Möbiovy funkce tvoří vzhledem k operaci skládání *grupu*, ve které jednotkovým prvkem je identita a inverzní prvek k (4.5) je popsán pomocí (4.10). Každá Möbiova funkce je homeomorfním zobrazením \mathbb{S} na \mathbb{S} . Všechny Möbiovy funkce tvoří speciální podgrupu grupy homeomorfismů \mathbb{S} na \mathbb{S} .

Věta 4.3.15. *Existuje nejvýše jedna Möbiova funkce f , která zobrazí navzájem různé body $z_k \in \mathbb{S}$ na navzájem různé body $w_k \in \mathbb{S}$ tak, že $w_k = f(z_k)$, $k = 2, 3, 4$.*

Důkaz. Nechť Möbiovy funkce f, g zobrazují $z_k \mapsto w_k$, $k = 2, 3, 4$ (důvod číslování indexy 2, 3, 4 bude zřejmý z dalšího výkladu). Potom složená (Möbiova) funkce $h = f^{-1} \circ g$ má tři různé invariantní body z_2, z_3, z_4 a je proto identickým zobrazením. Z $f^{-1}(g(z)) = z$, $z \in \mathbb{S}$ vyplývá dalším složením s funkcí f rovnost $f(f^{-1}(g(z))) = g(z) = f(z)$ pro všechny body $z \in \mathbb{S}$. Tím je jednoznačnost f dokázána. \square

Zobecněná kružnice K^* je jednoznačně určena kterýmikoli svými třemi různými body z_2, z_3, z_4 : Leží-li tyto body na přímce (což se stane např. tehdy, když je jeden z nich roven ∞), je K^* touto (uzavřenou) přímkou; neleží-li body z_2, z_3, z_4 na žádné přímce, určují jednoznačně kružnici a leží všechny v \mathbb{C} .

Lemma 4.3.16. *Nechť z_2, z_3, z_4 jsou navzájem různé body z \mathbb{C} . Potom existuje právě jedna Möbiova funkce*

$$f(z) = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)} = \frac{(z - z_3)}{(z - z_4)} : \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_4)}, \quad (4.14)$$

kteřá zobrazuje body z_2, z_3, z_4 takto:

$$f(z_2) = 1, \quad f(z_3) = 0, \quad f(z_4) = \infty. \quad (4.15)$$

Důkaz. Jednoznačnost f plyne z Věty 4.3.15. Určíme alespoň jednu reprezentaci f tvaru „ $(az + b)/(cz + d)$ “. Z druhé podmínky v (4.15) dostaneme, že čitatel je tvaru $a(z - z_3)$. Ze třetí podmínky plyne, že jmenovatel je tvaru $c(z - z_4)$. Konečně z první podmínky v (4.15) dostaneme dosazením

$$1 = f(z_2) = \frac{a(z_2 - z_3)}{c(z_2 - z_4)},$$

z čehož obdržíme $a/c = (z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)$. Odtud již plyne (4.14). \square

Věta 4.3.17. *Existuje právě jedna Möbiova funkce f , která zobrazí navzájem různé body $z_k \in \mathbb{S}$ na navzájem různé body $w_k \in \mathbb{S}$ tak, že $w_k = f(z_k)$, $k = 2, 3, 4$.*

Důkaz. Pro $z_0 \neq z_k$, $k = 2, 3, 4$, zobrazí Möbiova funkce $z \mapsto z_0 + 1/z$ bod ∞ do bodu z_0 a body z_k , $k = 2, 3, 4$, na body ležící v \mathbb{C} . Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že body z_k i w_k , $k = 2, 3, 4$, leží v \mathbb{C} .

Hledané zobrazení f dostaneme složením dvou Möbiových funkcí: g , pro kterou je $g(z_2) = 1$, $g(z_3) = 0$, $g(z_4) = \infty$, a h^{-1} , pro kterou je $h(w_2) = 1$, $h(w_3) = 0$, $h(w_4) = \infty$. \square

Poznámka 4.3.18. Reprezentaci Möbiovy funkce f z Věty 4.3.17 lze určit tak, že spočítáme w v závislosti na z , a to z rovnice

$$\frac{w - w_3}{w - w_4} \cdot \frac{w_2 - w_4}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_3}{z - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Důsledek 4.3.19. *Möbiova funkce z Věty 4.3.17 zobrazuje zobecněnou kružnici K_1^* určenou body z_2, z_3, z_4 na zobecněnou kružnici K_2^* , určenou body w_2, w_3, w_4 .*

Poznámka 4.3.20. Komponenty množiny $\mathbb{S} \setminus K_1^*$ se Möbiovou funkcí z Věty 4.3.17 zobrazí na komponenty množiny $\mathbb{S} \setminus K_2^*$. Ve zvolené komponentě množiny $\mathbb{S} \setminus K_1^*$ pak stačí zvolit bod a zjistit, do které komponenty množiny $\mathbb{S} \setminus K_2^*$ se zobrazí. Další prostředky k určení korespondence komponent poskytuje Věta 4.3.31.

Definice 4.3.21. Výraz na pravé straně poslední rovnosti v (4.14) budeme nazývat **dvojpoměr** bodů z, z_2, z_3, z_4 a jeho hodnota je definována *hodnotou Möbiovy funkce f určené pomocí (4.14)*. Výraz i jeho hodnotu (je to prvek \mathbb{S}) značíme

$[z, z_2, z_3, z_4]$. Pokud jsou z_2, z_3, z_4 navzájem různé body z \mathbb{C} , klademe tedy pro všechna $z_1 \in \mathbb{S}$

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4};$$

odtud je zřejmý i původ názvu. Poznamenejme, že pro $z_1 = z_4$ platí zřejmě $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \infty$ a pro $z_1 = \infty$ ze spojitosti Möbiovy funkce určující příslušný dvojpoměr dostaneme $[\infty, z_2, z_3, z_4] = (z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)$.

Je-li jeden z bodů z_k , $k = 2, 3, 4$, nevlastní, postupujeme obdobně: definujeme hodnotu $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ pomocí limity. Např. pro $z_2 = \infty$ klademe (s využitím příslušné Möbiovy funkce) pro všechna $z_1 \in \mathbb{S}$

$$[z_1, \infty, z_3, z_4] := \lim_{z_2 \rightarrow \infty} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{1 - z_3/z_2}{1 - z_4/z_2} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}.$$

Podobně klademe

$$[z_1, z_2, \infty, z_4] := \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}, \quad [z_1, z_2, z_3, \infty] := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Snadno nahlédneme, že $z = [z, 1, 0, \infty]$, $z \in \mathbb{S}$, což je často využívané vyjádření identity ve tvaru dvojpoměru.

Důsledek 4.3.22. *Jsou-li w_2, w_3, w_4 tři různé body z \mathbb{S} a je-li g taková Möbiova funkce, že $g(w_2) = 1$, $g(w_3) = 0$, $g(w_4) = \infty$, je $z = [z, g(w_2), g(w_3), g(w_4)]$, tj. funkce $f(z) := [z, g(w_2), g(w_3), g(w_4)]$ je identita.*

Poznámka 4.3.23. Pro dvojpoměr lze dokázat řadu jednoduchých užitečných tvrzení; viz např. Cvičení za Kap. 14 v [44]. Znovu zdůrazňujeme, že pro nás jeho role spočívá ve snadném zápisu Möbiových funkcí, přičemž využíváme Poznámku 4.3.2 a Tvrzení z Poznámky 4.3.8 (4). Položíme-li pro navzájem různé body $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$

$$\alpha = [z, z_2, z_3, z_4] = \frac{z - z_3}{z - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}, \quad (4.16)$$

stačí zřejmě volit

$$a = z_2 - z_4, \quad b = z_3(z_2 - z_4), \quad c = z_2 - z_3, \quad d = z_4(z_2 - z_3) \quad (4.17)$$

a po dosazení obdržíme rovnost

$$\alpha = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4.18)$$

přičemž je $ad - bc = -(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4)$. Z vlastností Möbiových funkcí je patrné, že jsou-li z_2, z_3, z_4 navzájem různé body, lze k libovolnému $\alpha \in \mathbb{S}$ volit čtvrtý bod z tak, aby platilo

$$\alpha = [z, z_1, z_2, z_3].$$

Existují-li $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tak, že Möbiova funkce f je dána vztahem (4.5), je zřejmé obraz $f(\mathbb{R}^*)$ uzavřené reálné osy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ opět množina \mathbb{R}^* . Je-li naopak $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$, jsou vzory z_2, z_3, z_4 bodů $1, 0, \infty$ rovněž z \mathbb{R}^* a vypočteme-li pomocí nich a, b, c, d , jsou to čísla z \mathbb{R} . Möbiova funkce f zobrazuje tedy \mathbb{R}^* na \mathbb{R}^* , právě když pro ni existuje vyjádření ve tvaru $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ s reálnými koeficienty a, b, c, d .

Lemma 4.3.24. Pro každou Möbiovu funkci f a každé tři navzájem různé body $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{S}$ platí pro všechna $z_1 \in \mathbb{S}$ rovnost

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]. \quad (4.19)$$

Důkaz. Je-li $g(z) := [z, z_2, z_3, z_4]$, $z \in \mathbb{S}$, je g Möbiova funkce. Necht $h = g \circ f^{-1}$; potom $h \circ f = g \circ f^{-1} \circ f = g$, a tedy

$$h(f(z_2)) = 1, \quad h(f(z_3)) = 0, \quad h(f(z_4)) = \infty;$$

z Důsledku 4.3.22 plyne, že $[z, f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = g(f^{-1}(z))$ je identita. Pro $z = f(z_1)$ dostaneme odtud

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = g(z_1) = g(f^{-1}(f(z_1))) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)],$$

což je dokazovaná rovnost (4.19). \square

Důsledek 4.3.25. Navzájem různé body $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{S}$ leží na zobecněné kružnici, právě když $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Möbiova funkce f , pro kterou $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = 0$ a $f(z_4) = \infty$ zobrazí bod z_1 zobecněné kružnice určené body z_2, z_3, z_4 do \mathbb{R} , a proto

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] \in \mathbb{R}.$$

Zobrazení f^{-1} přitom přiřadí každému $\alpha \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = \infty$ právě jeden bod zobecněné kružnice určené body z_2, z_3, z_4 . \square

Poznámka 4.3.26. Jestliže z rovnice (4.13) vypočteme z , dostaneme rovnost

$$z = \frac{\beta \bar{z} - \gamma}{\alpha \bar{z} - \beta}. \quad (4.20)$$

Z předpokladu $\beta \bar{\beta} > \alpha \gamma$ plyne, že zlomek vpravo v (4.20) určuje Möbiovu funkci v proměnné \bar{z} ; označme ji h . Bod z tedy leží v množině K z (4.12), právě když $z = h(\bar{z})$, neboli právě když $g(z) := h(\bar{z}) = z$. Odtud plyne tvrzení:

Věta 4.3.27. Je-li K^* zobecněná kružnice popsána pomocí (4.12), existuje právě jedna Möbiova funkce h tak, že $z \in K$, právě když $z = h(\bar{z})$. Pro $g(z) := h(\bar{z})$ je $g(z) = z$, právě když $z \in K$ a platí $g = g^{-1}$, neboli $g \circ g$ je identita.

Důkaz. Pokud by existovaly Möbiovy funkce h_1 a h_2 popisující K ve smyslu Věty 4.3.27, pak dostaneme $g_1(\bar{z}) = g_2(\bar{z})$ pro všechna $z \in K$, z čehož dostáváme $g_1 = g_2$. Pokud g je zobrazení z Věty 4.3.27, je $g(g(z)) = g(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$, takže $g = g^{-1}$. \square

Poznámka 4.3.28. Zobrazení

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \text{ je-li } z \in \mathbb{C}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad (4.21)$$

kteřá vyhovují podmínce $ad - bc \neq 0$, zachovávají stejně jako Möbiovy funkce zobecněné kružnice; to vyplývá z toho, že zobrazení $g(z) := \bar{z}$ zobrazuje přímky na přímky a kružnice na kružnice. Někdy se pro ně užívá název *zobrazení zachovávající zobecněné kružnice druhého druhu*. Věnujeme jim několik poznámek.

I když nejsou tato zobrazení diferencovatelná, zachovávají úhly. Na rozdíl od netriviálních Möbiových funkcí mohou mít nekonečně mnoho invariantních bodů. Hodí se velmi dobře k popisu zrcadlení vzhledem k zobecněným kružnicím a dají se elegantně popisovat pomocí dvojpoměru.

Definice 4.3.29. Nechť g je zobrazení z Věty 4.3.27. Pak říkáme, že body z, z^* jsou **symetrické vzhledem ke K^*** , pokud platí $z^* = g(z)$.

Vztah z^* a z je skutečně symetrický: ze $z^* = g(z)$ vyplývá $g(z^*) = g(g(z)) = z$. Zvolíme-li libovolně tři navzájem různé body $z_2, z_3, z_4 \in K$, lze zobrazení g a symetrické body „spočítat“ z rovnosti

$$[z^*, z_2, z_3, z_4] = [\bar{z}, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4] = \overline{[z, z_2, z_3, z_4]}. \quad (4.22)$$

Bod z^* závisí přitom pouze na z a ne na volbě $z_2, z_3, z_4 \in K$. Připomeňme, že podle Důsledku 4.3.25 je $[z, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}^*$, právě když $z \in K$. Odtud plyne, že $z^* = z$, právě když je $z \in K$. Prozkoumáme vztah z^* a z blíže.

Poznámka 4.3.30. Nechť $K^* = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$ s $r \in \mathbb{R}_+$. Pokud je $z^* = g(z)$, plyne z (4.20) při $\alpha \neq 0$

$$z^* = \frac{\beta\bar{z} - \gamma}{\alpha\bar{z} - \beta} = \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{\beta\bar{z} - \gamma}{\alpha\bar{z} - \beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta\bar{\beta} - \alpha\gamma}{\alpha^2} \left(\bar{z} - \frac{\bar{\beta}}{\alpha} \right)^{-1}. \quad (4.23)$$

Protože podle Poznámky 4.3.12 bod $z_0 := \beta/\alpha$ je střed K a $(\beta\bar{\beta} - \alpha\gamma)/\alpha^2$ je čtverec poloměru r kružnice K , plyne z (4.20) rovnost $(z^* - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$, z níž plyne $z^* = z_0 + r^2/(\bar{z} - \bar{z}_0)$. Pak však je

$$\frac{z^* - z_0}{z - z_0} = \frac{r^2}{|z - z_0|^2} > 0,$$

takže z^* leží na polopřímce $\{z_0 + t(z - z_0); t \in [0, \infty)\}$ s počátečním bodem z_0 a procházejícím bodem z . Dále je

$$|z^* - z_0| \cdot |\overline{z - z_0}| = r^2,$$

a také $|z - z_0||z^* - z_0| = r^2$. Viz též Obr. 4.3. Symetrickými body vzhledem ke kružnici K^* jsou též body z_0 a ∞ . To plyne z definice dvojpoměru pomocí Möbiovy funkce spojitě v \mathbb{S} a odvozených vztahů limitním přechodem pro $z \rightarrow \infty$.

V případě (uzavřené) přímky uijeme vyjádření pomocí dvojpoměru: zvolíme-li přitom $z_4 = \infty$, bude mít (4.22) tvar

$$\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\overline{z_2 - z_3}},$$

ze kterého plyne $|z^* - z_3| = |z - z_3|$. Bod z_3 lze volit libovolně na K^* , jsou tedy z^* i z stejně vzdáleny od kteréhokoli bodu $K^* \cap \mathbb{P}$. Dále je

$$\operatorname{Im} \frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \operatorname{Im} \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\overline{z_2 - z_3}} = -\operatorname{Im} \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Pokud tedy $z \notin K^*$, leží z a z^* v různých polorovinách určených K^* a úsečka spojující z, z^* je kolmá na K^* .

Věta 4.3.31 (princip symetrie). *Jestliže Möbiova funkce f zobrazuje zobecněnou kružnici K_1^* na zobecněnou kružnici K_2^* , pak se každá dvojice bodů symetrických vzhledem ke K_1^* zobrazí na dvojici bodů symetrických vzhledem ke K_2^* .*

Důkaz. Nechtě z_2, z_3, z_4 jsou navzájem různé body K_1^* a nechtě z a z^* jsou symetrické vzhledem ke K_1^* ; potom

$$\begin{aligned} [f(z^*), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= [z^*, z_2, z_3, z_4] = \\ &= \overline{[z, z_2, z_3, z_4]} = \overline{[f(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]}, \end{aligned}$$

takže body $f(z^*)$ a $f(z)$ jsou symetrické vzhledem k $f(K_1^*) = K_2^*$. \square

Pro zobecněnou kružnici lze zavést orientaci, užitečnou při vyšetřování konformních zobrazení.

Definice 4.3.32. Nechtě $K^* \subset \mathbb{S}$ je zobecněná kružnice. Uspořádanou trojici navzájem různých bodů $\{z_2, z_3, z_4\}$ z K^* nazýváme **orientací zobecněné kružnice K^*** . **Pravou stranou K^*** vzhledem k orientaci $\{z_2, z_3, z_4\}$ nazýváme množinu

$$\{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im}[z, z_2, z_3, z_4] > 0\};$$

podobně **levou stranou K^*** vzhledem k orientaci $\{z_2, z_3, z_4\}$ nazýváme množinu

$$\{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im}[z, z_2, z_3, z_4] < 0\}.$$

Poznámka 4.3.33. Čtenář si může samostatně ověřit, že při cyklické záměně bodů z_2, z_3, z_4 v dvojpoměru se jeho znaménko nezmění a při ostatních záměnách se mění na opačné. Odtud vyplývá, že trojice různých bodů kružnice určuje v závislosti na pořadí dvě různé orientace. Kružnicí určený kruh $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ při jedné leží vpravo a při druhé vlevo od K^* .

Poznámka 4.3.34. Pro $K^* = \mathbb{R}^*$ a navzájem různé body $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}^*$ definujeme Möbiovu funkci $f(z) := [z, z_2, z_3, z_4]$. Potom $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$ a podle Poznámky 4.3.23 lze volit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tak, že $f(z) = (az + b)/(cz + d)$. Dále je

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + bc\bar{z} + adz}{|cz + d|^2}.$$

Rozkladem na reálnou a imaginární část odtud dostaneme

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} [z, z_2, z_3, z_4] = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \operatorname{Im} z.$$

Množina $\{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im}[z, z_2, z_3, z_4] > 0\}$ je tedy „horní“ nebo „dolní“ polorovinou, v závislosti na znaménku „determinantu“ $ad - bc$ Möbiovu funkce.

Je-li nyní K^* zobecněná kružnice s orientací určenou trojicí $\{z_2, z_3, z_4\}$, pak pro libovolnou Möbiovu funkci g dostaneme podle Lemmatu 4.3.24

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im}[z, z_2, z_3, z_4] > 0\} &= \{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im}[g(z), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] > 0\} = \\ &= g^{-1}(\{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im}[g(z), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] > 0\}). \end{aligned}$$

Zobrazuje-li g zobecněnou kružnici K^* na \mathbb{R}^* , je

$$\{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im}[z, z_2, z_3, z_4] > 0\}$$

množinou $g^{-1}(\{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im} z > 0\})$, nebo množinou $g^{-1}(\{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im} z < 0\})$.

Terminologie je tedy „přirozená“: je-li $\{1, 0, \infty\}$ orientace \mathbb{R}^* , je $z = [z, 1, 0, \infty]$, a tak je pravou stranou \mathbb{R}^* při orientaci $\{1, 0, \infty\}$ („jdeme od 1 přes 0 do ∞ “) polorovina $\{z \in \mathbb{S}; \operatorname{Im} z > 0\}$, což je ve shodě s naší intuicí.

Věta 4.3.35 (princip zachování orientace). *Nechť K_1^*, K_2^* jsou zobecněné kružnice v \mathbb{S} a necht' f je Möbiovu funkce, pro kterou $f(K_1^*) = K_2^*$. Je-li $\{z_2, z_3, z_4\}$ orientace K_1^* , zobrazuje f levou stranu K_1^* na levou stranu K_2^* a pravou stranu K_1^* na pravou stranu K_2^* , pokud orientujeme K_2^* pomocí $\{f(z_2), f(z_3), f(z_4)\}$.*

Důkaz. Označme g, h Möbiovu funkce, pro něž

$$\begin{aligned} g(z_2) &= 1, & g(z_3) &= 0, & g(z_4) &= \infty, \\ h(f(z_2)) &= 1, & h(f(z_3)) &= 0, & h(f(z_4)) &= \infty. \end{aligned}$$

Potom $f = g \circ h^{-1}$ a funkce g zobrazí podle Poznámky 4.3.34 pravou stranu K_1^* a funkce h pravou stranu K_2^* na pravou stranu (horní polorovinu) vzhledem k \mathbb{R}^* , z čehož již plyne tvrzení pro pravé strany. Analogicky dostaneme druhou část tvrzení. \square

4.4 Exponenciála a hyperbolické funkce

Definice 4.4.1. Funkce \exp , definovaná v \mathbb{C} jako součet řady

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.24)$$

se nazývá (komplexní) **exponenciála**.

Poznámka 4.4.2. Tuto pro matematiku snad nejdůležitější funkci lze v \mathbb{C} , stejně jako v \mathbb{R} , zavést mnoha způsoby. Funkce \exp je holomorfní, což vyplývá z definice díky možnosti derivovat mocninnou řadu „člen po členu“. Platí $\exp' = \exp$; zároveň vidíme, že je $\exp \in C^{(\infty)}(\mathbb{C})$ ⁵). Máme již k dispozici všechny prostředky, které umožňují jednoduše dokázat další vlastnosti exponenciály, známé z „reálné“ analýzy.

Věta 4.4.3. *Exponenciála vyhovuje v \mathbb{C} funkcionální rovnici*

$$\exp(z + w) = (\exp z) \cdot (\exp w), \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (4.25)$$

Speciálně: Pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $\exp z \neq 0$ a $(\exp z)^{-1} = \exp(-z)$.

Důkaz. Zvolme libovolně $w \in \mathbb{C}$ a definujme funkci $g(z) := \exp(z) \exp(w - z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Pak $g'(z) = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a g je tedy podle Důsledku 3.4.6 konstantní v \mathbb{C} . Protože $\exp(0) = 1$ a $g(0) = \exp(w)$, platí rovnost

$$\exp(z) \exp(w - z) = \exp(w); \quad (4.26)$$

dosazením $w = 0$ dostaneme $\exp(z) \exp(-z) = \exp(0) = 1$; z toho ihned plyne, že $\exp z \neq 0$. Zvolme dále libovolně $z \in \mathbb{C}$ a dosadíme do (4.26) $z + w$ za w , čímž dostaneme dokazovanou rovnost (4.25), která tak platí pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$. \square

Poznámka 4.4.4. Příímý důkaz (4.25) bez předcházejícího „triku“, založený na násobení absolutně konvergentních řad, lze nalézt např. v [M] na str. 305. Jak poznáme ještě dále, pomocí poměrně malé části teorie funkcí komplexní proměnné budeme schopni podat jiné velmi jednoduché důkazy již známých poznatků, případně dospět poměrně snadno i k dalším poznatkům. JACQUES HADAMARD (1865 – 1963) je autorem výroku, který nám v originálním znění posloužil jako motto Úvodu k tomuto textu. Jak dále uvidíme, v mnoha případech to vystihuje situaci; viz též [41], str. 137, nebo [25], str. 626.

Poznámka 4.4.5. Necht $f(z) = \sum a_k z^k$. Protože zobrazení $z \mapsto \bar{z}$ je spojitě⁶), plyne z rovnosti

$$\overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \cdots + \bar{a}_k \bar{z}^k$$

pro součet mocninné řady f v kruhu konvergence rovnost $\overline{f(z)} = \sum \bar{a}_k \bar{z}^k$. Jsou-li všechna $a_k \in \mathbb{R}$, pak $\overline{f(z)} = \sum a_k \bar{z}^k$. Speciálně je $\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a

$$|\exp z|^2 = \exp z \cdot \overline{\exp z} = \exp z \cdot \exp \bar{z} = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2 \operatorname{Re} z) = (\exp(\operatorname{Re} z))^2;$$

odmocněním dostaneme rovnost

$$|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z) \quad (4.27)$$

⁵) Tak jako v reálném oboru označujeme tímto symbolem (lineární) prostor všech komplexních funkcí, které mají derivace všech řádů.

⁶) Je to dokonce izometrie.

platnou pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Je tedy $|\exp z| = 1$, právě když $\operatorname{Re} z = 0$, neboli pro všechna $z \in \mathbb{I} := \{it; t \in \mathbb{R}\}$. Odtud také plyne možnost vyjádření ve tvaru

$$\exp z = \exp(x + iy) = (\exp x)(\exp iy) = |\exp z| \exp(i \operatorname{Im} z). \quad (4.28)$$

Některé definice známé z „reálné analýzy“ se na případ funkcí komplexní proměnné jednoduše přenesou:

Definice 4.4.6. Je-li $D_f \subset \mathbb{C}$ definiční obor funkce f , říkáme, že číslo $c \in \mathbb{C}$ je **periodou** funkce f , platí-li $z + nc \in D_f$ a $f(z) = f(z + nc)$ pro všechna $z \in D_f$ a všechna $n \in \mathbb{Z}$. Funkce f je **periodická**, existuje-li nenulová perioda f . Množinu všech period funkce f budeme značit $\operatorname{per}(f)$.

Definice 4.4.7. Funkce f je **sudá**, jestliže pro každé $z \in D_f \subset \mathbb{C}$ je $-z \in D_f$ a zároveň $f(z) = f(-z)$. Podobně je funkce f **lichá**, jestliže pro každé $z \in D_f \subset \mathbb{C}$ je $-z \in D_f$ a $f(z) = -f(-z)$.

Nyní vyjádříme exponenciálu jako součet sudé a liché funkce:

$$\exp z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} + \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.29)$$

Tyto funkce jsou velmi důležité a mají své názvy i speciální označení:

Definice 4.4.8. Základní **hyperbolické funkce** definujeme rovnostmi

$$\cosh z := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh z := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.30)$$

Funkci \cosh nazýváme (komplexní) **hyperbolický kosinus** a funkci \sinh (komplexní) **hyperbolický sinus**.

Ze (4.29) vyplývá vzorec

$$\exp z = \cosh z + \sinh z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.31)$$

a zřejmě \cosh je sudá a \sinh lichá funkce; platí tedy

$$\cosh(-z) = \cosh(z), \quad \sinh(-z) = -\sinh(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.32)$$

Snadno též nahlédneme, že jejich Maclaurinovy rozvoje mají tvar

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.33)$$

Řady konvergují normálně v \mathbb{C} a obě funkce jsou proto holomorfní v \mathbb{C} a leží v $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{C})$. Snadno se ověří i rovnosti

$$\sinh' z = \cosh z, \quad \cosh' z = \sinh z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Lemma 4.4.9 (součtové vzorce). *Pro funkce \cosh , \sinh platí součtové vzorce*

$$\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w, \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad (4.34)$$

$$\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w, \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (4.35)$$

Analogické rozdílové vzorce dostane čtenář pomocí vzorců (4.32).

Důkaz. Dokažme vzorec (4.34). Dosadíme do obou sčítanců na pravé straně (4.34) podle (4.30) a upravíme; dostaneme tak dvě rovnice (jednu s „horními“ a druhou s „dolními“ znaménky)

$$\begin{aligned} & (\exp z \pm \exp(-z))(\exp w \pm \exp(-w)) = \\ & = \exp z \exp w \pm \exp z \exp(-w) \pm \exp(-z) \exp w + \exp(-z) \exp(-w), \end{aligned}$$

kteřé sečteme, násobíme (1/4) a upravíme pomocí (4.25). Tak dostaneme (4.34). Analogicky odvodíme (4.35). \square

Z rovnice (4.34) dosazením $w = -z$ a úpravou dostaneme rovnost

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1; \quad (4.36)$$

Tím jsme odvodili *základní vzorce* pro hyperbolické funkce. Odvození dalších je jednoduchou záležitostí, na kterou stačí znalosti získané na střední škole.

4.5 Exponenciála a goniometrické funkce

Hyperbolické funkce jsou nepatrně jednodušší než funkce goniometrické. Při zavádění goniometrických vyjďeme z rovnosti (4.29), do které dosadíme iz za z . Dostaneme tak po rozšíření druhého zlomku⁷⁾ na pravé straně rovnice číslem i

$$\exp(iz) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} + i \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}. \quad (4.37)$$

To nás vede k následující definici, analogické k vzorcům (4.30):

Definice 4.5.1 (Eulerovy vzorce). Základní **goniometrické funkce** definujeme pomocí vztahů

$$\cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.38)$$

Funkci \cos nazýváme (komplexní) **kosinus** a funkci \sin (komplexní) **sinus**.

Ze (4.31) nebo z Eulerových vzorců (4.38) dostaneme snadno rovnost

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.39)$$

⁷⁾ Bez tohoto rozšíření by zaváděný sinus nebyl na \mathbb{R} reálnou funkcí.

Poznámka 4.5.2. Porovnáním definic goniometrických a hyperbolických funkcí, které jsme zatím zavedli, dostáváme rovnosti

$$\cos z = \cosh(iz), \quad \sin z = -i \sinh(iz), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.40)$$

Z nich vidíme, že funkce \cos je sudá a funkce \sin lichá, tj.

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (4.41)$$

snadno z nich odvodíme s přihlédnutím k chování celočíselných mocnin čísla i Maclaurinovy rozvoje \sin u a \cos inu:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.42)$$

Řady konvergují normálně v \mathbb{C} a tak jsou obě funkce \cos a \sin holomorfní v \mathbb{C} , platí rovnosti

$$\sin' z = \cos z, \quad \cos' z = -\sin z, \quad z \in \mathbb{C},$$

a \cos i \sin leží dokonce v $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{C})$; speciálně řady v (4.42), konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně v \mathbb{C} . Porovnáním z Maclaurinovými rozvoji \cos a \sin vidíme, že jsme opravdu dostali holomorfní *rozšíření* těchto funkcí na \mathbb{C} . Dosadíme-li do součtových vzorců pro hyperbolické funkce iz za z a iw za w , dostaneme např. z (4.34)

$$\cosh(i(z+w)) = \cosh(iz) \cosh(iw) + \sinh(iz) \sinh(iw),$$

což s pomocí vztahů (4.40) dává součtový vzorec

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (4.43)$$

Podobným způsobem dostaneme i druhý součtový vzorec

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (4.44)$$

Speciálně pro $w = \pi/2$ dostaneme rovnosti

$$\cos(z + \pi/2) = -\sin z, \quad \sin(z + \pi/2) = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.45)$$

Z rovnice (4.36) dostaneme dosazením iz za z a jednoduchým výpočtem rovnost

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (4.46)$$

čtenář zná analogický vzorec pro $z \in \mathbb{R}$ ze střední školy. Zde je na místě varování: ze vzorce (4.46) *neplyne* $|\sin z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, neboť čtverec komplexního čísla *nemusí být* nezáporné reálné číslo; později ukážeme, že funkce \sin nabývá všech hodnot z \mathbb{C} . Ze vzorce (4.25) speciálně dostaneme

$$\exp z = \exp(x + iy) = \exp x (\cos y + i \sin y). \quad (4.47)$$

Tím jsme mj. vyjádřili *komplexní* exponenciálu pomocí *reálných* funkcí reálné proměnné \exp , \cos a \sin ; podobně je

$$\begin{aligned}\cos(x + iy) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\ \sin(x + iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y;\end{aligned}$$

hyperbolické funkce tak poskytují pohodlný prostředek pro rozklad „komplexního“ kosinu a sinu na složky.

Ze vzorce (4.25) plyne indukcí rovnost $\exp nz = (\exp z)^n$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$; protože pro $n = 0$ je tato rovnost triviální a protože $z^n = 1/z^{-n}$, $\exp(-z) = 1/\exp z$, je patrné, že rovnost $\exp nz = (\exp z)^n$ platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a všechna $z \in \mathbb{C}$. Odtud plyne pro všechna $z = x + iy \in \mathbb{C}$ identita

$$(\exp(x + iy))^n = (\exp x)^n (\cos ny + i \sin ny).$$

Tento vztah bývá na střední škole uváděn ve zjednodušené formě (pro $x = 0$) pod jménem **Moivrova věta** či **Moivrova formule**:

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos ny + i \sin ny, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.48)$$

Poznámka 4.5.3. Připomeňme již odvozené vzorce (4.46) a (4.36). Dosaďme do nich $t \in \mathbb{R}$ za z a uvažujme body $[x, y] = [\cos t, \sin t]$ a body $[x, y] = [\cosh t, \sinh t]$. V prvním případě leží tyto body na *kružnici* o rovnici $x^2 + y^2 = 1$, ve druhém na *hyperbole* o rovnici $x^2 - y^2 = 1$. Vzorce, které jsme pro hyperbolické a goniometrické funkce odvodili, jsou analogické.

Tato analogie je hluboká a lze jí dát i geometrický charakter. Sledujte Obr. 4.4. Parametr t lze v obou případech interpretovat pomocí obsahu jistých „křivočarých trojúhelníků“. Připomeňme dva vzorce z reálné analýzy

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - \arccos x), \quad (4.49)$$

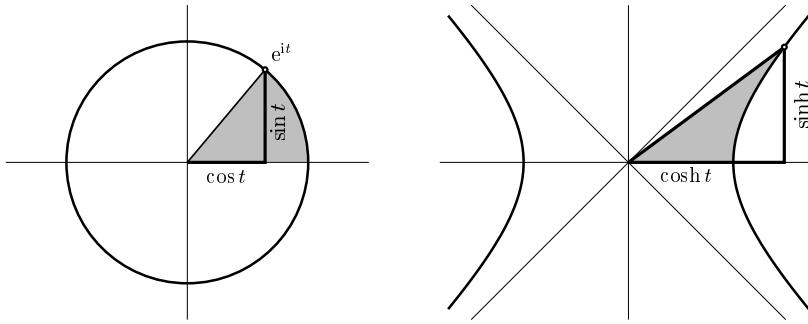
$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})). \quad (4.50)$$

Představme si body $[\cos t, \sin t]$ a $[\cosh t, \sinh t]$ s oběma kladnými souřadnicemi. U goniometrických funkcí lze t interpretovat nejen jako úhel, ale též jako dvojnásobný obsah kruhové výseče odpovídající úhlu o velikosti t ; její obsah spočteme pomocí vzorce (4.49):

$$P = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \int_{\cos t}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - \arccos x) \Big|_{x=\cos t}^1 = \frac{t}{2}$$

U hyperboly lze t interpretovat jako dvojnásobný obsah „trojúhelníku“, omezeného obloukem hyperboly od vrcholu k bodu $[\cosh t, \sinh t]$ a úsečkami, které spojují koncové body tohoto oblouku s bodem $[0, 0]$:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} \sinh t \cosh t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1}) \right) \Big|_{x=\cosh t}^1 = \frac{1}{2} \log e^t = \frac{t}{2}\end{aligned}$$



Obr. 4.4: Popis kružnice a hyperboly

Oba zmíněné „křivočaré trojúhelníky“, odpovídající parametru $(t/2)$, jsou na obrázku graficky zvýrazněny.

Všimněme si ještě dalších vlastností goniometrických funkcí. Tak např. z rovnosti $\cos it = \cosh t$, $t \in \mathbb{R}$, ihned plyne, že

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \cos it = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\exp t + \exp(-t)}{2} = \infty;$$

funkce \cos není tedy na \mathbb{C} omezená. To je jedna z vlastností, které se podstatně liší pro reálný a komplexní případ. Čtenář by si rovněž měl povšimnout, že pro žádné $x \in \mathbb{R}$ není $\cosh x = 0$.

Věta 4.5.4. *Funkce \exp je periodická. Je $\text{per}(\exp) = \{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$. Rovnost $\exp z = \exp w$ nastává, právě když pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ nastává rovnost $z - w = 2k\pi i$. Zobrazení $\varphi(t) = \exp(it)$, $t \in (-\pi, \pi]$, je prosté a*

$$\varphi((-\pi, \pi]) = K(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}.$$

Důkaz. Připomeňme z Poznámky 4.1.2, že 2π je nejmenší kladná perioda funkcí \cos a \sin . Z definice periody plyne, že množina všech period tvoří vzhledem ke sčítání komutativní grupu. Ze vzorce (4.25) vyplývá, že pro každou periodu c funkce \exp platí rovnost

$$\exp(z) = \exp(z + c) = \exp(z) \cdot \exp(c).$$

Číslo c je v $\text{per}(\exp)$, právě když $\exp c = 1$. Protože $1 = |\exp c| = \exp(\text{Re } c)$ a pro $u \in \mathbb{R}$ je $\exp u = 1$, právě když $u = 0$, dostáváme $\text{Re } c = 0$; odtud plyne, že $c = it$ pro nějaké $t \in \mathbb{R}$. Pak však

$$1 = \exp c = \exp(it) = \cos t + i \sin t,$$

tj. $\cos t = 1$, $\sin t = 0$; tento případ nastane, právě když $t = 2k\pi$. Jinak řečeno, $c \in \text{per}(\exp)$, právě když $c/2\pi i \in \mathbb{Z}$. Funkce \exp je proto *periodická funkce* a

$$\text{per}(\exp) = \{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.51)$$

Rovnost $\exp(z) = \exp(w)$ nastává, právě když $\exp(z - w) = 1$, neboli pro $(z - w)/2\pi i \in \mathbb{Z}$. Je-li $1 = |\exp z| = \exp(\text{Re } z)$, pak $z \in \mathbb{I} := \{it; t \in \mathbb{R}\}$. Je tedy $\varphi((-\pi, \pi]) \subset K(0, 1)$. Pro každé $z = x + iy \in K(0, 1)$ mají rovnice $\cos t = x$, $\sin t = y$ jediné řešení v intervalu $(-\pi, \pi]$, což dává zbytek tvrzení. \square

Poznámka 4.5.5. Rovnost $\exp(is) = \exp(it)$ nemůže pro $s, t \in \mathbb{R}$, $s \neq t$, nastat, jestliže $|s - t| < 2\pi$. Proto je funkce \exp prostá pro každé $u \in \mathbb{R}$ v pásu

$$\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \in (u, u + 2\pi]\}. \quad (4.52)$$

Vyjádríme-li nyní $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{P}$ v „goniometrickém tvaru“

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (4.53)$$

je číslo α určeno jednoznačně např. podmínkou $-\pi < \alpha \leq \pi$, ale obecně je určeno jen „jednoznačně mod 2π “. To znamená, že pro $z = x + iy$ můžeme při vyjádření ve tvaru (4.53) pouze říci, že $y \equiv \alpha \pmod{2\pi}$. S oborem $-\pi < \alpha \leq \pi$ budeme nejčastěji pracovat; jak uvidíme v další části této kapitoly, užitečnost této volby souvisí s definicí logaritmu v komplexním oboru.

Lemma 4.5.6. Pro komplexní exponenciálu \exp je $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{P}$.

Důkaz. Podle (4.27) je $\exp z \neq 0$, a tedy zřejmě $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}$. Je-li $w \in \mathbb{P}$, nalezneme řešení rovnice $\exp z = w$ vzhledem k neznámé z v pásu $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \in (-\pi, \pi]\}$. Položme $z = x + iy$. Pak $|\exp z| = \exp x = |w|$, z čehož plyne $x = \log |w|$. Z Věty 4.5.4 plyne existence jediného $y \in (-\pi, \pi]$, pro něž nastává rovnost $\cos y + i \sin y = \varphi(y) = w/|w| \in K(0, 1)$. \square

Označení 4.5.7. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathbf{R}_\alpha = \{z \in \mathbb{P}; z = |z| \exp(i\alpha)\}.$$

Geometricky je \mathbf{R}_α množina všech bodů polopřímky vycházející z bodu 0 a protínající jednotkovou kružnici v bodě $\exp(i\alpha)$; počátek přitom na \mathbf{R}_α neleží. Zřejmě je $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_\beta$, právě když $\alpha = \beta \pmod{2\pi}$. Místo \mathbf{R}_0 používáme již dříve zavedené označení \mathbb{R}_+ . Píšeme tedy \mathbb{R}_+ místo $(0, +\infty)$ a také \mathbf{R}_π místo $(-\infty, 0)$.

Poznámka 4.5.8. Celou situaci se pokusíme přiblížit geometricky. Obecně je nemožné jednoduše znázorňovat komplexní funkce komplexní proměnné graficky: Již znázornění každé ze složek odděleně není jednoduché. Představu nám však může zprostředkovat zobrazování jednoduchých geometrických křivek (přímek, kružnic apod.). Pro získání lepší představy o funkci \exp si všimneme obrazů přímek rovnoběžných s osami. Vyjdeme

ze vztahu (4.47). Protože je $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, je z něj patrné, že přímka o rovnici $y = y_0$ se zobrazí na polopřímku \mathbb{R}_{y_0} . Gaussovu rovinu \mathbb{C} lze vyjádřit jako sjednocení přímek o rovnicích $y = y_0 \in \mathbb{R}$ a množina $\{\exp(iy); y \in \mathbb{R}\}$ je celá jednotková kružnice, proto zobrazuje \exp komplexní rovinu \mathbb{C} na $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{P}$.

Přímka o rovnici $x = x_0 \in \mathbb{R}$ se zobrazí na kružnici $K(0, r)$ o středu 0 a o poloměru $r = \exp x_0 > 0$, avšak „proběhnoutou nekonečněkrát“. Snadno nahlédneme, že obrazem úsečky $[x_0 + iy_0; x_0 + i(y_0 + 2\pi)]$ je táž kružnice.

Poznámka 4.5.9. Funkce \exp , \sinh , \cosh , \sin a \cos jsou důležitými příklady tzv. **celých funkcí**, tj. funkcí holomorfních v celé Gaussově rovině \mathbb{C} .

4.6 Logaritmus a argument

Nejprve dokážeme obecné tvrzení o derivování inverzní funkce. Bezprostředně je pak použijeme k derivování zaváděného logaritmu. Poznamenejme, že je-li $f: F \rightarrow G$ prosté zobrazení F do G a pro $g: G \rightarrow F$ je $g(f(z)) = z$ pro všechna $z \in F$, je restrikce g na $f(F) \subset G$ inverzním zobrazením k f .

Věta 4.6.1. *Nechť F a G jsou otevřené množiny v \mathbb{C} , $f: F \rightarrow \mathbb{C}$ a $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ jsou spojité funkce takové, že $f(F) \subset G$ a $g(f(z)) = z$ pro všechna $z \in F$. Je-li g holomorfní v G a je-li $g'(w) \neq 0$ pro všechna $w \in G$, je i f holomorfní v F a pro všechna $z \in F$ platí rovnost*

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}. \quad (4.54)$$

Důkaz. Zvolme pevně bod $z \in F$ a uvažujme taková $h \in \mathbb{C}$, pro něž je $h \neq 0$, $z + h \in F$. Potom $z = g(f(z))$, $z + h = g(f(z + h))$, takže $f(z) \neq f(z + h)$ a

$$1 = \frac{g(f(z + h)) - g(f(z))}{h} = \frac{g(f(z + h)) - g(f(z))}{f(z + h) - f(z)} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}.$$

Limita levé strany první rovnosti pro $h \rightarrow 0$ je 1, existuje tedy i limita výrazu na pravé straně druhé rovnosti. Protože $\lim_{h \rightarrow 0} (f(z + h) - f(z)) = 0$ a pro $h \neq 0$ je $f(z + h) \neq f(z)$, je podle věty o limitě složené funkce

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(z + h)) - g(f(z))}{f(z + h) - f(z)} = g'(f(z));$$

protože $g'(f(z)) \neq 0$, existuje i limita $\lim_{h \rightarrow 0} (f(z + h) - f(z))/h = f'(z)$ a platí vzorec (4.54). \square

Poznámka 4.6.2. Jak uvidíme později, lze toto tvrzení ještě zesílit, neboť totéž dokážeme za slabších předpokladů; viz Tvrzení 5.8.3. Na druhé straně nám tato jednoduchá verze umožní dokázat tvrzení o souvislosti logaritmu a exponenciály.

Definice 4.6.3. Pro $w \in \mathbb{P} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zavedeme označení⁸⁾

$$\text{Log } w := \{z \in \mathbb{C}; w = \exp z\}. \quad (4.55)$$

Prvky množiny $\text{Log } w$ nazýváme **hodnoty logaritmu** w .

Poznámka 4.6.4. V reálné analýze je funkce $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ prostá a zobrazuje \mathbb{R} na $(0, \infty)$, takže pro dané $y \in (0, \infty)$ existuje právě jedno řešení x rovnice $\exp x = y$; pro každé $w \in \mathbb{P}$ však existuje v \mathbb{C} nekonečně mnoho řešení z rovnice $\exp z = w$. Euler považoval za „logaritmus w “ každý prvek této množiny. Jak jsme ukázali výše, v každém pásu (4.52), závislém na volbě $u \in \mathbb{R}$, leží právě jedno takové řešení.

Abychom se přiblížili pojetí z reálné analýzy, vybereme si jeden z pásů (4.52): na něm určíme k funkci \exp inverzní funkci; ta bude jedním z možných užitečných rozšíření funkce \log , v tomto případě na \mathbb{P} . Je rozumné, aby přímka \mathbb{R} byla uprostřed takového pásu, protože chceme rozšířit reálný logaritmus \log definovaný na \mathbb{R}_+ . Pro $u = -\pi$ tak dostaneme funkci, která se obvykle značí Log , zatímco množina ze vzorce (4.55) se značí obvykle \log . Záměnou tradičního označení dosáhneme analogie: tak jako se značí holomorfní rozšíření \exp na \mathbb{C} opět \exp (grafické rozlišení v dalších kapitolách opustíme), bude \log značit funkci a ne množinu. Naopak velké písmeno v označení Log připomene obvyklé značení množin. Toto hledisko, i když vede k porušení české tradice v označování, by však mělo být pro začátečníka „přirozenější“.

Definice 4.6.5. Označme pás (4.52) pro $u = -\pi$ symbolem M , tj. položme

$$M := \{z = x + iy; x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi]\}. \quad (4.56)$$

Funkci \log definujeme jako funkci inverzní k restrikci $\exp|_M$ funkce \exp na pás M a nazýváme ji **hlavní hodnota logaritmu**. Definujeme $\arg := \text{Im}(\log)$; tuto reálnou funkci nazýváme **hlavní hodnota argumentu**. Dále klademe

$$\text{Arg } z := \{\alpha \in \mathbb{R}; z = |z| \exp(i\alpha)\}, \quad z \in \mathbb{P}. \quad (4.57)$$

Prvky množiny $\text{Arg } z$ nazýváme **hodnoty argumentu** z .

Poznámka 4.6.6. V zavedeném označení jsou tedy $\text{Log } z$ a $\text{Arg } z$ pro každé $z \in \mathbb{P}$ nekonečné množiny, kdežto \log a \arg jsou funkce. Srovnáním s vyjádřením (4.53) zjistíme, jaký je geometrický smysl argumentu; funkci \arg si lze snadno představit: $\arg z$ je velikost orientovaného úhlu $\alpha \in (-\pi, \pi]$, který svírá průvodič bodu z , tj. polopřímka \mathbf{R}_α , s \mathbb{R}_+ . Obecněji, uvažujeme-li všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, je tento úhel je určen modulo 2π ; viz Poznámku 4.5.5. Také reálná část $\log z$ je snadno představitelná: grafem $\log |z|$ je plocha v \mathbb{R}^3 vzniklá „rotací grafu funkce \log “.

Je-li $z \in \mathbb{P}$, má rovnice $\exp w = z$ v pásu M definovaném v (4.56) jediné řešení $w = \log z$; obecněji v každém pásu (4.52) existuje jediné řešení této rovnice. Protože $\exp(\log z) = z$, je $|\exp(\log z)| = \exp(\text{Re}(\log z)) = |z|$, $z \in \mathbb{P}$ a tedy $\text{Re}(\log z) = \log |z|$. Dostáváme tedy

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \quad z \in \mathbb{P}.$$

⁸⁾ Toto označení je netradiční; viz následující Poznámku 4.6.4.

Poznámka 4.6.7. Nyní můžeme pro každé $z \in \mathbb{P}$ snadno popsat množiny $\text{Log } z$ a $\text{Arg } z$ pomocí funkcí \log a \arg : je $\log z = \log |z| + i \arg z$, z čehož dostaneme

$$\text{Log } z = \{\log z + 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{Arg } z = \{\arg z + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nejednoznačnost imaginární části je způsobena tím, že nepracujeme lokálně a zajímáme se o všechna řešení w rovnice $\exp w = z$ ⁹⁾.

Lemma 4.6.8. Funkce \log a \arg zavedené v Definicí 4.6.5 jsou nespojité ve všech bodech množiny $\mathbf{R}_\pi := \{t \exp(i\pi); t \in \mathbb{R}_+\}$ a spojité v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$. Funkce \log je holomorfní na $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ a její derivace je $\log'(z) = 1/z$ pro všechna $z \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$.

Důkaz. Protože funkce $\text{Re}(\log z) = \log |z|$, $z \in \mathbb{P}$, je složením dvou spojitých funkcí a je tedy spojitá, pro vyšetření spojitosti \log se stačí zabývat pouze funkcí $\arg z = \text{Im}(\log z)$. Je-li $z_0 \in \mathbf{R}_\pi$, je $z_0 = \text{Re } z_0 < 0$. Pro $z_k \rightarrow z_0$, $\text{Im } z_k < 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, je $\arg z_k < -\pi/2$, avšak $\arg z_0 = \pi$. Neplatí tedy $\arg z_k \rightarrow \arg z_0$. Lze ukázat, že pro každý bod $z_0 \in \mathbf{R}_\pi$

$$\lim_{z \rightarrow z_0, \text{Im } z \geq 0} \log z = \log z_0, \quad \text{a} \quad \lim_{z \rightarrow z_0, \text{Im } z < 0} \log z = \log z_0 - 2\pi i.$$

Spojitosť v ostatních bodech $z \in \mathbb{P}$ dokážeme sporem: je-li $z_0 \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ a \arg není spojitá v bodě z_0 , existují body $z_k \rightarrow z_0$ tak, že $\arg z_k \rightarrow t \in [-\pi, \pi]$, $t \neq \arg z_0$. Je však $\exp(\log z_k) \rightarrow \exp(\log z_0)$, a tedy platí zároveň

$$\exp(i \arg z_k) \rightarrow \exp(i \arg z_0), \quad \exp(i \arg z_k) \rightarrow \exp(it).$$

Avšak pak $\arg z_0 - t = 2l\pi$ pro nějaké $l \in \mathbb{Z}$ a z $|\arg z_0 - t| < 2\pi$ dostaneme $l = 0$, což je potřebný spor.

Protože \exp je holomorfní a prostá na vnitřku M° , kde M je definována v (4.56), $\exp(M^\circ) = \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ je oblast, na které je funkce $\log = \exp^{-1}$ spojitá, je podle Věty 4.6.1

$$\log'(z) = \frac{1}{\exp'(\log z)} = \frac{1}{\exp(\log z)} = \frac{1}{z},$$

a \log je tedy holomorfní v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$. □

Příklad 4.6.9. Každé číslo $w \in \mathbb{P}$ má (jedinou) hlavní hodnotu logaritmu; s ohledem na $\log w = \log |w| + i \arg w$ dostáváme

$$\log(1) = 0, \quad \log(-1) = \pi i, \quad \log(i) = \pi i/2, \quad \log(-i) = -\pi i/2.$$

Všechny hodnoty komplexního logaritmu $\log w$ dostaneme z $\log w$ přičtením všech násobků $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Je tedy

$$\begin{aligned} \text{Log}(1) &= \{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}, & \text{Log}(-1) &= \{(2k+1)\pi i; k \in \mathbb{Z}\}, \\ \text{Log}(i) &= \{(2k+1/2)\pi i; k \in \mathbb{Z}\}, & \text{Log}(-i) &= \{(2k-1/2)\pi i; k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

⁹⁾ Ve starší literatuře se množiny $\text{Log } z$ a $\text{Arg } z$ často nazývaly „nekonečněznačné funkce“; přiřazovaly každému $z \in \mathbb{P}$ nekonečně mnoho hodnot. Terminologicky to však není v souladu s definicí funkce či zobrazení.

Definice 4.6.10. Je-li $M \subset \mathbb{C}$ a je-li $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ *spojitá* funkce, pro kterou je $f(z) \in \text{Log}(\varphi(z))$ pro všechna $z \in M$, nazýváme ji **spojitá větev logaritmu φ na M** . Podobně spojitá funkce g na M , pro kterou je $g(z) \in \text{Arg}(\varphi(z))$, $z \in M$, se nazývá **spojitá větev argumentu φ na M** . Je-li φ identické zobrazení na M , pak φ vynecháváme a f nazýváme **spojitá větev logaritmu na M** a g **spojitá větev argumentu na M** ¹⁰).

Je-li f spojitá větev logaritmu φ na množině M (tj. $f(z) \in \text{Log}(\varphi(z))$) a f je spojitá na M , pak $\varphi(z) = \exp(f(z))$, $z \in M$, a $\text{Im } f$ je spojitou větví argumentu φ na M . Je-li f spojitá větev argumentu φ na množině M (tj. $f(z) \in \text{Arg}(\varphi(z))$) a f je spojitá na M , potom $\log |\varphi| + if$ je spojitou větví logaritmu φ na M . Budeme se proto dále zabývat převážně spojitými větvemi logaritmu. Analogická tvrzení pro spojité větve argumentu si čtenář snadno dokáže sám.

Poznámky 4.6.11. V těchto poznámkách předpokládáme, že $M \subset \mathbb{C}$ a $\varphi : M \rightarrow \mathbb{P}$ je spojitá funkce vzhledem k M .

1. Je-li f spojitá větev logaritmu nebo argumentu φ na množině M , pak zřejmě $\varphi(z) \neq 0$ pro všechna $z \in M$.
2. Je-li g spojitá větev logaritmu φ na množině M , pak pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je zřejmě $g_k := g + 2k\pi i$ rovněž spojitou větví logaritmu φ na M .

Věta 4.6.12. Je-li $G \subset \mathbb{P}$ *souvislá množina* a $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ je *spojitá větev logaritmu na G* , pak $\mathcal{F} := \{f + 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$ je množina všech spojitých větví logaritmu na G . Je-li navíc G *oblast*, je každá $f \in \mathcal{F}$ funkcí holomorfní v G a platí $f'(z) = z^{-1}$, $z \in G$.

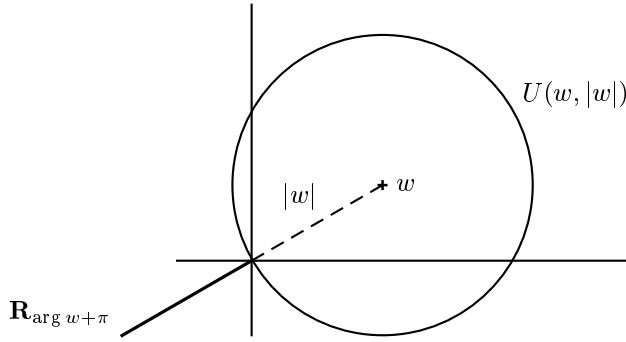
Důkaz. Jsou-li g_1, g_2 spojité větve logaritmu φ na *souvislé* množině G , platí rovnosti $\varphi(z) = \exp(g_1(z)) = \exp(g_2(z))$ a funkce $g_1 - g_2$ je spojitá na M . Podle Věty 4.5.4 je $(g_1(z) - g_2(z))/2\pi i \in \mathbb{Z}$ pro každé z ; avšak spojitá funkce, která na souvislé množině nabývá *pouze celočíselných hodnot* je konstantní. Existuje tedy $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $g_1 = g_2 + 2k\pi i$, což spolu s Poznámkou 4.6.11, (2) dává první část tvrzení. Druhá část plyne analogicky jako v Lemmatu 4.6.8 z Věty 4.6.1 o derivování složené funkce. Stačí pracovat s jednou funkcí $f \in \mathcal{F}$: je $\exp(f(z)) = z$ a

$$f'(z) = \frac{1}{\exp'(f(z))} = \frac{1}{\exp(f(z))} = \frac{1}{z}.$$

Odtud plyne $f'(z) = z^{-1}$ pro každou $g \in \mathcal{F}$, neboť rozdíl $f - g$ je konstantní funkce v G . \square

Ukazuje se, že existence spojitě větve logaritmu (nebo argumentu) je velmi důležitou otázkou, která je klíčovou pro zavedení důležitého pojmu indexu bodu vzhledem k uzavřené křivce, neprocházející tímto bodem. Budeme se nyní tomuto problému věnovat.

¹⁰) Někdy se též užívají termíny *jednoznačná větev logaritmu* a *jednoznačná větev argumentu*. Srv. např. [19].



Obr. 4.5: Vyjádření logaritmu řadou

Lemma 4.6.13. *Je-li $w \in \mathbb{P}$, $\alpha = \arg w$, pak existuje spojitá větev logaritmu v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_{\pi+\alpha}$; její restrikce na $U(w, |w|)$ je na tomto kruhu spojitou větví logaritmu a lze ji vyjádřit mocninnou řadou o středu w a poloměru konvergence $R = |w|$.*

Důkaz. Protože číslo ζ leží v $\mathbf{R}_{\alpha+\pi}$, právě když je $\zeta/w < 0$ (tj. $\zeta/w \in \mathbf{R}_{\pi}$), plyne z podmínky $z \in \mathbf{R}_{\alpha+\pi}$ naopak podmínka $z/w \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_{\pi}$. Proto je korektní definovat

$$f(z) = \log(z/w) + \log w, \quad z \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_{\pi+\alpha},$$

a je pak $f'(z) = (1/(z/w))/w = 1/z$, $f(w) = \log w$; funkce f je zřejmě spojitou větví logaritmu v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_{\alpha+\pi}$.

Rozvoj f v $U(w, |w|)$ (viz Obr. 4.5) lze nalézt např. tak, že rozvineme funkci

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w + (z - w)} = \sum (-1)^k \frac{(z - w)^k}{w^{k+1}}$$

a z tohoto rozvoje získáme rozvoj funkce f integrací řady „člen po členu“. Dostaneme tak

$$f(z) = \log w + \sum \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{z-w}{w}\right)^{k+1}; \quad (4.58)$$

hodnotu aditivní „integrační konstanty“ jsme získali dosazením $z = w$: protože se součet řady anulují pro $z = w$, je $f(w) = \log w$. \square

Lemma 4.6.14. *Je-li $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$ spojitá funkce, pak existuje spojitá větev logaritmu funkce φ na $[a, b]$, tj. spojitá funkce $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$, pro kterou platí*

$$\varphi(t) = \exp(\Phi(t)), \quad t \in [a, b].$$

Jestliže navíc existuje derivace φ' na $[a, b]$, pak existuje i derivace Φ' a platí rovnost $\Phi'(t) = \varphi'(t)/\varphi(t)$, $t \in [a, b]$.

Důkaz. Protože je $\langle \varphi \rangle$ kompaktní množina, je její vzdálenost d od bodu 0 kladná. Protože funkce φ je *stejněměrně* spojitá na $[a, b]$, lze zvolit takové dělení $D \in \mathcal{D}([a, b])$, $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$, že obrazy $\varphi([t_{k-1}, t_k])$ intervalů dělení mají průměr menší než d . Protože pro každé $t \in [t_{k-1}, t_k]$ je $|\varphi(t_{k-1}) - \varphi(t)| < d$, je také $\varphi(t) \in U_k$, kde $U_k := U(\varphi(t_{k-1}), d)$, $k = 1, \dots, n$. Protože $|\varphi(t)| \geq d$ pro všechna $t \in [a, b]$, zřejmě $0 \notin U_k$. Na U_k , $k = 1, \dots, n$, však podle Lemmatu 4.6.13 existují spojitě větve logaritmu. Označme l_k větev na U_k a položme $\Phi_k := l_k \circ \varphi$ na $[t_{k-1}, t_k]$. Funkce Φ_k jsou spojitými větvemi logaritmu φ na $[t_{k-1}, t_k]$.

Základní myšlenkou dalšího postupu nejprve zhruba nastíníme; spočívá ve „slepování“ větví Φ_k . Postupujeme takto: k Φ_2 přičteme $2n_1\pi i$ s takovým $n_1 \in \mathbb{Z}$, aby $\Phi_1(\varphi(t_1)) = \Phi_2(\varphi(t_1)) + 2n_1\pi i$. Tím jsme dosáhli toho, že definice

$$\Phi(t) := \Phi_1(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \Phi(t) := \Phi_2(t) + 2n_1\pi i, \quad t \in [t_1, t_2]$$

je korektní. Pak přičteme vhodnou konstantu k větví Φ_3 atd. Po konečně mnoha krocích tak získáme spojitou větev logaritmu φ na $[a, b]$. Nyní postup formálně popíšeme.

Pro každé $k = 1, \dots, n-1$ jsou $\Phi_k(\varphi(t_k))$, $\Phi_{k+1}(\varphi(t_k))$ dvě hodnoty logaritmu čísla $\varphi(t_k)$ a existuje proto $n_k \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$\Phi_k(\varphi(t_k)) = \Phi_{k+1}(\varphi(t_k)) + 2n_k\pi i.$$

Funkce

$$\Phi(t) := \Phi_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1} 2n_j\pi i, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, \dots, n,$$

je korektně definována a je spojitou větev logaritmu φ na $[a, b]$, neboť pro každé k na $[t_{k-1}, t_k]$ platí

$$\exp(\Phi(t)) = \exp(\Phi_k(t)) = \exp(l_k(\varphi(t))) = \varphi(t).$$

Další část o derivování plyne z Poznámky 3.1.2, neboť skládáme diferencovatelné funkce l_k s „hladkou“ φ . Tím je důkaz dokončen. \square

Poznámky 4.6.15. 1. Je-li h spojitá funkce na $\langle \varphi \rangle$, $h : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{P}$, lze aplikovat Lemma 4.6.14 na funkci $\psi(t) = h(\varphi(t))$, $t \in [a, b]$ a dostat tak spojitou větev logaritmu $h \circ \varphi$ na $[a, b]$. Je-li např. $h(z) = z - z_0$, $z \in \mathbb{C}$, a φ křivka neprocházející bodem z_0 , dostaneme tak existenci spojitě větve logaritmu $\varphi - z_0$.

2. Existuje-li pro křivku $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá větev Φ logaritmu $\varphi - z_0$ na $[a, b]$, nazývá se rozdíl $\Phi(b) - \Phi(a)$ **přírůstkem logaritmu $\varphi - z_0$ podél křivky φ** . Pokud je Ψ spojitá větev argumentu $\varphi - z_0$ na $[a, b]$, nazývá se rozdíl $\Psi(b) - \Psi(a)$ **přírůstkem argumentu $\varphi - z_0$ podél křivky φ** .

4.7 Obecná (komplexní) mocnina

Mocniny z^k s celým exponentem k , přesněji $z \mapsto z^k$, $z \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{Z}$, jsme již definovali. Nyní zavedeme obecnou mocninu z^α i pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. V reálném oboru jsme obecnou mocninu x^a definovali pro $x \in (0, \infty)$ s $a \in \mathbb{R}$ jako funkci $x \mapsto \exp(a \log x)$; v komplexním oboru to se uděláme analogicky, ovšem s nezbytnou opatrností. Kromě funkce \log máme ovšem k dispozici pro každé $z \in \mathbb{P}$ množinu $\text{Log } z$; zavedeme proto dvě definice.

Definice 4.7.1. *Funkci*

$$z \mapsto \exp(\alpha \log(z)), \quad z \in \mathbb{P},$$

kde \log je hlavní větev logaritmu, nazýváme pro $\alpha \in \mathbb{C}$ **hlavní hodnotu α -té mocniny** čísla z a značíme ji symbolem m_α , nebo také z^α , $z \in \mathbb{P}$.

Definice 4.7.2. Pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a každé $z \in \mathbb{P}$ definujeme množinu

$$M_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w); w \in \text{Log } z\}, \quad (4.59)$$

kteřou budeme nazývat **komplexní α -tou mocninou** čísla z . Její prvky jsou hodnoty α -té mocniny čísla z .

Poznámka 4.7.3. Protože \log je rozšířením funkce \log známé z reálné analýzy, je rovněž z^α zobecněním dříve zavedené funkce x^a . Poznamenejme, že pro $\alpha \in \mathbb{Z}$ a $z \in \mathbb{P}$ platí rovnosti

$$\begin{aligned} M_\alpha(z) &= \{\exp(\alpha w); w \in \text{Log } z\} = \{\exp(\alpha(\log w + 2k\pi i))\} = \\ &= \{\exp(\alpha \log w) \cdot \exp(\alpha \cdot 2k\pi i)\} = \{z^\alpha\}, \end{aligned}$$

a je to jednoprvková množina. Ve shodě s označením lze psát místo $\exp z$ symbol e^z pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Je totiž $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$, neboť $\log(e) = \log(e) = 1$ podle definice z reálné analýzy; viz též Poznámku 4.1.2. Tohoto označení budeme v dalším textu často využívat.

Pro každé $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ platí: Funkce z^α je spojitá v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ a pro každé $z_0 \in \mathbf{R}_\pi$

$$\lim_{z \rightarrow z_0, \text{Im } z \geq 0} z^\alpha = z_0^\alpha, \quad \lim_{z \rightarrow z_0, \text{Im } z < 0} z^\alpha = e^{-2\alpha\pi i} z_0^\alpha.$$

Protože $\alpha \notin \mathbb{Z}$, je $e^{-2\alpha\pi i} \neq 1$. Funkce z^α je pro všechna $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ nespojitá ve všech bodech $z \in \mathbf{R}_\pi$. Podle Věty 3.1.1 platí rovnost

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}, \quad z \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi.$$

Je důležité vyšetřit pro všechna uvažovaná $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ i množinu $M_\alpha(z)$. Protože $\text{Log } z = \{\log z + 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$ a $\exp(\alpha \log z) = z^\alpha$, je

$$M_\alpha(z) = \{z^\alpha \cdot \exp(2k\alpha\pi i); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Je proto vhodné vědět, ze kterých čísel se skládá množina $\{\exp(2k\alpha\pi i); k \in \mathbb{Z}\}$; jak se ukáže, závisí to na α . Z upraveného vyjádření tvaru $\{(\exp(2\alpha\pi i))^k; k \in \mathbb{Z}\}$ vidíme, že tato čísla pro $k \in \mathbb{N}$ tvoří geometrickou posloupnost a stejně tak i pro $-k \in \mathbb{N}$. Pro $\alpha \in \mathbb{I} = \{it; t \in \mathbb{R}\}$ leží přitom na přímce a pro $\alpha \in \mathbb{R}$ na kružnici.

Pro všechna čísla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, která jsou reálná iracionální, nebo jsou komplexní a mají nenulovou imaginární část, je množina $M_\alpha(z)$ nekonečná. Kdyby totiž platila pro některá dvě různá celá čísla k, l , rovnost $\exp(2k\alpha\pi i) = \exp(2l\alpha\pi i)$, pak by také platila rovnost $\exp(2(k-l)\alpha\pi i) = 1$, a tedy $\alpha(k-l) \in \mathbb{Z}$, což dává potřebný spor dokazující nekonečnost uvažované množiny.

Pro racionální čísla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ je vyšetřovaná množina konečná; je-li $\alpha = p/q$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná čísla, tvoří tato množina vrcholy pravidelného q -úhelníku. V algebře se dokazuje, že čísla $0, 1, \dots, q-1$ leží v q různých třídách modulo q , čísla $0, 1/q, 2/q, \dots, (q-1)/q$ v q různých třídách (mod 1) a čísla

$$2k \frac{p}{q} \pi i, \quad k = 0, 1, \dots, (q-1) \quad (4.60)$$

v q různých třídách (mod $2\pi i$); podobně pro každé $l \in \mathbb{Z}$ leží číslo $2l(p/q)\pi i$ v jedné ze tříd určených čísly (4.60). Speciálně je tato množina vždy konečná, a pro popsany případ je

$$m_{p/q}(z) = \{z^{p/q} \exp(2k \frac{p}{q} \pi i); k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq q-1\}.$$

4.8 Funkce tangens a kotangens

Zavedení funkce tangens (a kotangens) v komplexním oboru není obtížné, k definici pomocí podílu $\operatorname{tg} := \sin / \cos$ je však užitečné znát množiny (srv. se (4.1))

$$N_c(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C}; \cos z = 0\} \quad \text{a} \quad N_s(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C}; \sin z = 0\}. \quad (4.61)$$

Zřejmě $\sin z = 0$, právě když platí $\exp(iz) = \exp(-iz)$, neboli $\exp(2iz) = 1$. Podle Věty 4.5.4 je to právě když $2iz = 2k\pi i$ pro $k \in \mathbb{Z}$, neboli když $z \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, takže $N_s(\mathbb{C}) = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, a vzhledem k (4.45) je $N_c(\mathbb{C}) = \{(2k+1)\pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice 4.8.1. Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ definujeme

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C}), \quad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus N_s(\mathbb{C}). \quad (4.62)$$

Poznámka 4.8.2 (důležitá). Z předcházející definice vidíme, že obě funkce tg i cotg jsou rozšířením stejnojmenných „reálných“ funkcí. Z Eulerových vzorců (4.38) dostaneme pro $w = \exp(2iz)$ neméně zajímavé vyjádření

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{w-1}{w+1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C}), \quad \operatorname{cotg} z = i \frac{w+1}{w-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus N_s(\mathbb{C}). \quad (4.63)$$

Tato vyjádření jsou důležitá pro vyšetřování inverzních funkcí; analogická vyjádření existují i pro hyperbolický tangens, který se definuje pomocí rovnosti $\operatorname{tgh} z := \sinh z / \cosh z$ a hyperbolický kotangens ($\operatorname{cotgh} z := \cosh z / \sinh z$). Funkce tg je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C})$ a podobně funkce cotg je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus N_s(\mathbb{C})$. Nebudeme se těmito funkcemi zatím hlouběji zabývat. Jako ukázkou uvedeme odvození vzorce, známého z reálné analýzy: z definice snadno dostaneme identitu

$$\operatorname{tg}'(z) = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

platnou všude v množině $\mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C})$. Později rozšíříme funkce tg a cotg na \mathbb{C} tak, že budou spojité všude v \mathbb{C} .

4.9 Doplnky a komentáře

Poznámka 4.9.1 (o exponenciále). Čtenář by možná uvítal, kdybychom se na vlastnosti „reálné“ exponenciály \exp zmíněné v Poznámce 4.1.2 neodvolávali a odvodili je přímo z Definice 4.4.1. To je na základě již dokázané Věty 4.4.3 jednoduché, pro úplnost však postup stručně popíšeme.

Z definice (4.24) plyne $\exp x > 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$. Pomocí Věty 4.4.3 dostaneme $\exp x > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Podle Věty 2.3.5 obdržíme $\exp' = \exp$, z čehož plyne, že \exp je spojitá rostoucí funkce na \mathbb{R} . Je $0 < \exp x < 1$ v $(-\infty, 0)$, $\exp 0 = 1$ a $\exp x > 1$ v $(0, \infty)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $(\exp x - (1+x))' = \exp x - 1$, takže funkce $\exp x - 1 - x$ má v bodě 0 minimum a platí tedy nerovnost $\exp x \geq 1+x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Následující dvě Věty 4.9.2 a 4.9.3 spolu s Poznámkou 4.9.4 ukazují, že stejně jako v reálném oboru lze komplexní exponenciálu zavést více způsoby: pomocí jednoduché diferenciální rovnice v \mathbb{C} a „počáteční podmínky“, pomocí funkcionální rovnice v \mathbb{C} , a také jako limitu posloupnosti jistých polynomů (odlišných od Taylorových polynomů). Poznámka 4.9.4 popisuje cestu, která sahá až k Eulerovi a která je schůdná i v komplexním oboru.

Věta 4.9.2. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast. Je-li f holomorfní v G a je-li $b \in \mathbb{C}$, jsou ekvivalentní tyto podmínky:*

- (1) *Existuje $a \in \mathbb{C}$ tak, že $f(z) = a \exp(bz)$ v G ;*
- (2) *rovnost $f'(z) = bf(z)$ platí pro všechna $z \in G$.*

Speciálně, funkce f holomorfní v \mathbb{C} , pro kterou je $f' = f$ a $f(0) = 1$, je komplexní exponenciála.

Důkaz. Výpočtem lehce ověříme, že z (1) plyne (2). Funkce $g(z) := f(z) \exp(-bz)$, $z \in G$, splňuje podle (2) v G podmínku $g'(z) = 0$, a podle Věty 3.4.5 je tedy konstantní v G . Označíme-li její hodnotu a , dostaneme odtud snadno (1). \square

Věta 4.9.3. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, obsahující bod 0, nechť f je funkce, která má nenulovou derivaci $b := f'(0)$ a vyhovuje funkcionální rovnici*

$$f(z+w) = f(z)f(w), \quad \text{pokud je } z, w, z+w \in G. \quad (4.64)$$

Potom je $f'(z) = bf(z)$. Speciálně, pro $b = 1$ je f restrikce exponenciály na G .

Důkaz. Připomeňme, že podmínkou o nenulovosti derivace jsou konstantní řešení funkcionální rovnice (4.64) vyloučena. Existuje tedy $z_0 \in \mathbb{C}$, pro něž $f(z_0) \neq 0$, takže z rovnosti (4.64) plyne $f(z_0 + 0) = f(z_0)f(0)$ a $f(0) = 1$. Zvolme nyní libovolné $z \in G$ a $r > 0$ tak, aby okolí $U(z, r)$ i $U(0, r)$ ležela v G . Pak podle (4.64) pro $0 < |h| < r$ je

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f(z) \frac{f(h) - 1}{h} = f(z) \frac{f(h) - f(0)}{h - 0},$$

z čehož plyne limitním přechodem pro $h \rightarrow 0$ existence $f'(z) = f(z)f'(0) = bf(z)$. Protože tento vztah platí pro všechna $z \in G$, je f holomorfní v G a lze užít Větu 4.9.2, z níž již plyne dokazované tvrzení. \square

Poznámka 4.9.4. V [Z], str. 155 a násl., je „reálná“ exponenciála zavedena na \mathbb{R} jako limita posloupnosti polynomů:

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (4.65)$$

S následujícím podrobným návodem čtenář snadno dokáže, že obdobně lze postupovat i v komplexním oboru. Označíme-li

$$q(n, k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

pro každou dvojici čísel $k, n \in \mathbb{N}$, pro něž je $1 < k \leq n$, snadno zjistíme, že

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = 1 + z + \sum_{k=2}^n q(n, k) \frac{z^k}{k!}.$$

Dále je

$$d(n) := \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \left| \sum_{k=2}^n \left(1 - q(n, k)\right) \frac{z^k}{k!} \right|,$$

přičemž z Bernoulliho nerovnosti (viz [Z], str. 29) snadno plyne, že

$$q(n, k) \geq \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{k-1} \geq 1 - \frac{k-1}{n}(k-1), \quad \text{což dá } 1 - q(n, k) < \frac{k(k-1)}{n}.$$

Odtud již dostaneme odhad

$$d(n) < \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{n} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{|z|^2}{n} \exp(|z|),$$

takže (4.65) platí i v komplexním oboru, tj.

$$\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Poznámka 4.9.5 (o čísle π). V důkazu Věty 4.5.4 se opíráme o znalosti z reálné analýzy. Je to proto, že nechceme některé úvahy zbytečně opakovat. Na druhé straně některé pojmy lze v komplexní analýze definovat ekvivalentně jiným způsobem: tak bychom mohli např. *definovat* π jako nejmenší $c \in \mathbb{R}_+$ takové, že

$$\text{per}(\exp) = 2ci\mathbb{Z}. \quad (4.66)$$

Již víme, že $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Pokud pro $z = x + iy$ je $\exp z = 1$, je $x = 0$. Nyní stačí dokázat, že pro všechna y , $0 < y < 2\pi$ je $\exp(iy) \neq 1$. To dokážeme sporem: zvolme pevně $0 < y < 2\pi$ a předpokládejme, že $\exp(iy) = 1$. Pak je $y/4 \in (0, \pi/2)$, takže pro u, v , pro něž $\exp(iy/4) = \cos(y/4) + i \sin(y/4) = u + iv$, platí zřejmě $u > 0, v > 0$ a

$$1 = \exp(iy) = (u + iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv(u^2 - v^2). \quad (4.67)$$

Porovnáním imaginárních částí dostaneme $u^2 = v^2$, tj. $u = v$, a dosadíme do reálné části vpravo v (4.67) u za v . Dostaneme tak

$$v^4 - 6v^4 + v^4 = -4v^4 < 0$$

a nalezený spor ukazuje, že nejmenší kladné c , pro které $2ci \in \text{per}(\exp)$, je π .

Poznámka 4.9.6 (další vzorce). Čtenář si může položit otázku, jak je to se všemi těmi vzorci pro goniometrické funkce, se kterými se seznámil na střední škole, případně později v „reálné“ analýze. Vzorce (4.43) a 4.44 (pro rozdíly) jsme v „reálné variantě“ užili spolu s hodnotou derivace $\sin'(0) = 1 = \cos(0)$ k zavedení funkcí \sin a \cos a k odvození mnoha dalších vzorců; viz [Z], str. 171 a násl. Mohli bychom sledovat tuto cestu. Později se však seznámíme s obecným principem, který nám umožní „přenášet“ vzorce pro goniometrické funkce platné v \mathbb{R} do \mathbb{C} .

Poznámka 4.9.7 (o odmocninách). Poznali jsme množiny M_α pro různá α . Je přirozené si blíže všimnout některých speciálních případů. Speciálně pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ množina $M_{1/n}(z)$ obsahuje pro každé $z \in \mathbb{P}$ celkem n různých hodnot n -té odmocniny ze z (pro $n = 1$ jde o identitu). Pro každé $z \in \mathbb{P}$ je

$$M_{1/n}(z) = \left\{ |z|^{1/n} \cdot \exp\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}i\right); k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Geometrická interpretace je jednoduchá: Body Gaussovy roviny odpovídající těmto n hodnotám tvoří pro $n > 2$ vrcholy pravidelného n -úhelníku vepsaného do kružnice se středem 0 a poloměrem $|z|^{1/n}$; pro $n = 2$ se jedná o krajní body úsečky. Stačí tedy znát jeden z vrcholů, např. ten, který odpovídá hlavní hodnotě $z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp((i \arg z)/n)$ a všechny hodnoty n -té odmocniny z čísla 1, které zřejmě tvoří množinu

$$\left\{ \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right); k = 0, 1, \dots, n-1 \right\},$$

a kterými tuto hlavní hodnotu postupně násobíme. Pro $n = 2$ a $z > 0$ dostáváme právě dvě hodnoty, zapisované někdy stručně pomocí zápisu $\pm\sqrt{z}$. Obecně se v komplexní analýze označuje pro $z \in \mathbb{P}$ symbolem $\sqrt[n]{z}$ množina všech n hodnot $M_{1/n}(z)$, v reálné analýze pro $z > 0$ znamená tentýž symbol $\sqrt[n]{z}$ jediné (kladné) reálné číslo. Abychom

předešli nedorozumění, užíli jsme v tomto textu netradiční symboly M_α a m_α , a to i pro $\alpha = 1/n$.

Postupovali jsme záměrně tak, že pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ jsme funkce známé z reálné analýzy rozšířili z \mathbb{R}_+ na \mathbb{P} , tedy analogicky jako jsme postupovali u exponenciály a goniometrických funkcí.

Příklady 4.9.8. 1. V reálné analýze je $\sqrt[3]{1} = 1$ a je to *jedno číslo*, v komplexní analýze je $M_{1/3}(1)$ množina, jejíž jeden prvek je (reálné) číslo 1 a další dva jsou imaginární čísla: $\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)$ a $\cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3)$; zde lze zápis opět zestručnit a oba prvky zapsat najednou ve tvaru $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Symbol $M_{1/3}$ je tedy množina *všech řešení* rovnice $z^3 = 1$.

2. Podobně v \mathbb{R} je $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$ a $\sqrt{-4}$ není definována, zatímco při zavedeném označení je

$$M_{1/2}(9) = \{-3, 3\}, \quad M_{1/3}(-27) = \{-3, 3/2 - 3i\sqrt{3}/2, 3/2 + 3i\sqrt{3}/2\} \text{ a} \\ M_{1/2}(-4) = \{-2i, 2i\}.$$

3. Určíme ještě i^i : dle naší úmluvy jde o hlavní hodnotu, takže s využitím Příkladu 4.6.9 dostáváme $i^i := \exp(i \log i) = \exp(i(\pi i/2)) = e^{-\pi/2}$. Naproti tomu je $M_i(i)$ množina; protože $M_i(i) := \{\exp(i(2k\pi + \pi/2)i); k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{-(2k+1/2)\pi}; k \in \mathbb{Z}\}$, je to nekonečná množina *reálných čísel*.

Poznámka 4.9.9. Všimněme si nyní vztahu ke středoškolské látce. Připomeneme, že např. číslo $\sqrt{2}$ je kladné (iracionální) číslo a že jsme v reálné analýze *nedefinovali* \sqrt{x} pro $x < 0$. Rovnice $x^2 = 2$ má dvě řešení, totiž čísla $+\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$. Korektně zapíšeme příslušný postup výpočtu tak, že přejdeme k rovnici $|x| = \sqrt{2}$ a pak použijeme např. zkrácený zápis $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Při řešení **kvadratické rovnice** $ax^2 + bx + c = 0$ s koeficienty $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ násobíme obě strany rovnice číslem $4a \neq 0$ a upravíme ji na tvar

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Odtud vidíme, že je $2az + b \in M_{1/2}(b^2 - 4ac)$, a tedy

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm m_{1/2}(b^2 - 4ac)}{2a} \quad (4.68)$$

Na střední škole se komplexní odmocnina nezavádí a navíc se řeší pouze rovnice s reálnými koeficienty. S dostupným aparátém, tj. „reálnou“ druhou odmocninou, bychom měli např. při řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, psát důsledněji

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{pro } D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \quad \text{pro } D = b^2 - 4ac < 0.$$

Poznámka 4.9.10. Znovu připomínáme, že jsme v této kapitole rozlišovali graficky mezi (dříve zavedenými) reálnými variantami elementárních funkcí a zaváděnými funkcemi komplexní proměnné. V dalším textu to již nebudeme dělat a v případě potřeby upozorníme, kdy pracujeme výhradně s restrikcí funkce na \mathbb{R} .

Cvičení

1. Uvědomte si, že použitý způsob zavedení exponenciály, hyperbolických a goniometrických funkcí nám poskytuje okamžitě dvě důležité informace: (a) Tyto funkce jsou holomorfní v \mathbb{C} , a (b) jsou rozšířením obdobných funkcí, které jsme již dříve zavedli v \mathbb{R} . Pokud bychom např. *k definici* exp použili funkcionální rovnici

$$f(z+w) = f(z)f(w), \quad z, w \in \mathbb{C},$$

byla by naše výchozí situace jiná. Velmi těžíme z předchozích znalostí o mocniných řadách.

2. Zjednodušte výraz:

$$\left(\sum \frac{(z+v+w)^k}{k!}\right) \left(\sum (-1)^k \frac{z^k}{k!}\right) \left(\sum \frac{v^k}{k!}\right) \left(\sum (-1)^k \frac{w^k}{k!}\right) = \dots$$

3. Vyjádřete funkci $f(z) = (z^2 + z)(\sin z + \cos z)$ jako součet sudé a liché funkce!

[Je $f(z) = (z \sin z + z^2 \cos z) + (z^2 \sin z + z \cos z)$.]

4. Další hyperbolické funkce jsou definovány analogicky jako v reálném oboru:

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\sinh z}.$$

Odůvodněte, že pro ně platí následující vzorce (lze je použít jako ekvivalentní definice těchto funkcí):

$$\operatorname{tgh} z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \quad \operatorname{cotgh} z = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{2e^z}{e^{2z} + 1}, \quad \operatorname{cosech} z = \frac{2e^z}{e^{2z} - 1}.$$

5. Ukažte, že pro exponenciálu platí vztah

$$(\exp z)(\exp w) = \left[\exp \frac{1}{2}(z+w) \right]^2,$$

kteřý lze interpretovat takto: *Geometrický průměr hodnot exponenciály je hodnotou exponenciály v aritmetickém průměru hodnot jejich argumentů.* Tuto formu vztahu (4.25) preferoval Weierstrass.

6. Dokažte vzorec, užitečný při studiu Fourierových řad

$$\frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \dots + \cos nz = \frac{\sin(n+z/2)}{2 \sin(z/2)}!$$

[Užijte Eulerovy vzorce z Definice 4.5.1 (nejprve pro \cos , a pak pro \sin) a také elementární vzorec pro částečný součet geometrické řady.]

7. Dokažte z definice goniometrických funkcí pro všechna $z \in \mathbb{C}$ vzorce

$$\begin{aligned} \sin 3z &= 3 \sin z - 4 \sin^3 z, & \sin 4z &= 8 \cos^3 z \sin z - 4 \cos z \sin z, \\ \cos 3z &= 4 \cos^3 z - 3 \cos z, & \cos 4z &= 8 \cos^4 z - 8 \cos^2 z + 1! \end{aligned}$$

[Později se naučíme vzorce tohoto typu „přenášet z \mathbb{R} do \mathbb{C} “ na základě obecného tvrzení o jednoznačnosti. Zatím víme, že exponenciála je holomorfním rozšířením exponenciály na \mathbb{R} do \mathbb{C} . Zmíněná věta nám zaručí, že takové rozšíření existuje *právě jedno*.]

8. Význam *spojitých větvi* logaritmu podtrhuje Věta 4.6.1, ze které vyplývá, že *spojitý logaritmus* je už nutně holomorfní funkce. Tentýž výsledek však plyne z možnosti rozvinutí logaritmu v $U(w, |w|)$ v řadu (4.58), tj. řadu

$$\log(z) = \log(w) + \sum \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{z-w}{w}\right)^{k+1};$$

Jde o důležitý výsledek. Připomeňte, jak lze k němu jednoduše dojít.

9. Ke spojitému rozšíření na \mathbb{C} funkce f , kde

$$(a) f(z) = \exp(z^2), \quad (b) f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad (c) f(z) = \frac{\log(z-1)}{z}.$$

určete primitivní funkci F a pak rozviňte F v mocninnou řadu o středu $z_0 = 0$!
[Rozvoje jsou tvaru

$$(a) F(z) = \sum \frac{z^{2k+1}}{(k!)(2k+1)}, \quad (b) F(z) = \sum (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^2(2k)!},$$

$$(c) F(z) = - \sum \frac{z^{k+1}}{(k+1)^2} .]$$

10. Ukažte, že je funkce definovaná předpisem

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\sin zt}{t} dt$$

holomorfní v \mathbb{C} .

[Je $\frac{\sin zt}{t} = \sum (-1)^k \frac{(zt)^{2k+1}}{t(2k+1)!}$ z čehož snadno dostaneme

$$f(z) = \int_0^1 \sum (-1)^k z^{2k+1} \frac{(t)^{2k}}{(2k+1)!} dt = \sum (-1)^k z^{2k+1} \int_0^1 \frac{(t)^{2k}}{(2k+1)!} dt =$$

$$= \sum (-1)^k z^{2k+1} \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_{t=0}^1 = \sum (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^2(2k)!} .$$

Záměna integrace a sčítání je korektní, řada pro každé z konverguje stejnoměrně v t na intervalu $[0, 1]$.]

11. Určete Taylorovu řadu funkce $f(z) = \log(z^2 - 2z + 2)$ v bodě 0!

[Rozvoj má tvar

$$f(z) = \log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \frac{z^k}{k} .]$$

12. Při hledání rozvoju je úspěšné řešení úlohy často závislé na volbě vhodného postupu. Rozviňte v mocninnou řadu o středu $z_0 = 0$ funkci $f(z) = (\cosh z)(\sinh z)$.

[Zatímco postup založený na násobení řad

$$f(z) = \left(\sum \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right) \left(\sum \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \dots$$

je neschůdný, jednoduchá úprava nám umožní řešit úlohu z paměti. Je

$$f(z) = \frac{1}{2} \sinh 2z = \sum 2^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} .]$$

Kapitola 5

Holomorfní funkce

Tato kapitola tvoří jádro celé teorie, kterou budujeme. Je věnována souvislostem mezi diferencovatelností komplexních funkcí, existencí primitivní funkce a křivkovým integrálem. Odvodíme v ní řadu důležitých vlastností holomorfních funkcí, zejména těch, které mají lokální charakter.

5.1 Speciální křivky

Označení 5.1.1. Budeme potřebovat dva speciální případy uzavřených polygonálních křivek, které jsou intuitivně hranicemi trojúhelníku nebo obdélníku v \mathbb{C} . Použijeme opět ztotožnění \mathbb{C} s \mathbb{R}^2 ; podotýkáme výslovně, že v obou případech připouštíme „degenerované případy“, tj. oba útvary nemusí mít žádný vnitřní bod.

Je-li $\{a, b, c\}$ uspořádaná trojice komplexních čísel, pak označíme $\Delta\{a, b, c\}$ *nejmenší konvexní množinu* obsahující body \mathbb{R}^2 odpovídající číslům a, b, c . Je-li $G \subset \mathbb{R}^2$ a $\Delta\{a, b, c\} \subset G$, říkáme, že $\Delta\{a, b, c\}$ je *trojúhelník* v G . Dále položíme

$$\Delta[a; b; c] = [a; b; c; a] = [a; b] \dot{+} [b; c] \dot{+} [c; a]$$

a není-li nebezpečí z nedorozumění a body a, b, c jsou zřejmé z kontextu, píšeme kratčeji $(\Delta) := \Delta[a; b; c]$. Pro každou $f \in \mathcal{C}((\Delta))$ tedy

$$\int_{(\Delta)} f = \int_{[a; b]} f + \int_{[b; c]} f + \int_{[c; a]} f, \quad (5.1)$$

a hodnota integrálu ve vzorci (5.1) vlevo přes $(\Delta) = \Delta[a, b, c]$ se s ohledem na Lemma 1.6.16 nemění cyklickou záměnou a, b, c v uspořádané trojici $\{a, b, c\}$. Záměnou trojice $\{a, b, c\}$ za $\{a, c, b\}$ se změní v odpovídajícím integrálu v (5.1) vlevo jeho znaménko.

Je-li $a = \alpha + i\gamma$, $b = \beta + i\gamma$, $c = \beta + i\delta$, $d = \alpha + i\delta$, kde $\alpha \leq \beta$, $\gamma \leq \delta$, bude $Q\{a, b, c, d\}$ nejmenší konvexní množina, která obsahuje body a, b, c, d . Je-li $Q\{a, b, c, d\} \subset G$, říkáme, že $Q\{a, b, c, d\}$ je obdélník v G . Dále položíme

$$Q[a; b; c; d] = [a; b; c; d; a] = [a; b] \dot{+} [b; c] \dot{+} [c; d] \dot{+} [d; a];$$

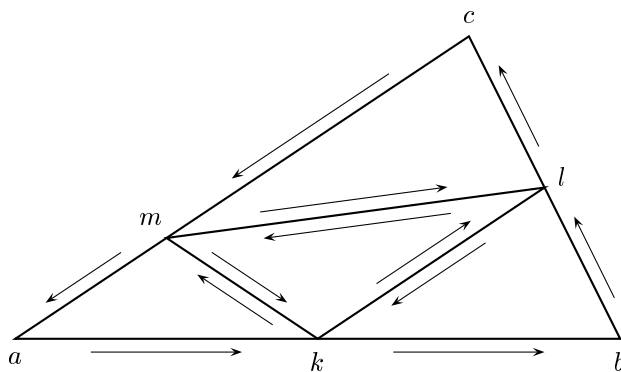
není-li nebezpečí z nedorozumění, píšeme kratčeji $(Q) := Q[a; b; c; d]$. Všimněte si, že obdélník, který uvažujeme, má vždy speciální polohu, neboť jeho „strany“ jsou v nedegenerovaném případě rovnoběžné s osami souřadnic v \mathbb{R}^2 . Znovu připomínáme, že připouštíme „degenerované případy“, tj. útvary nemusí mít žádný vnitřní bod; ty je třeba v některých případech vyšetřit zvlášť. V nedegenerovaném případě jsou uvažované křivky Jordanovými křivkami.

5.2 Lokální Cauchyho věta

Lemma 5.2.1 (Cauchy, Goursat 1883*). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, nechť $v \in G$ a nechť f je spojitá v G a holomorfní v $G \setminus \{v\}$. Potom platí pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$ rovnost*

$$\int_{(\Delta)} f(z) dz = 0. \quad (5.2)$$

Důkaz. Doporučujeme čtenáři, aby sledoval při četbě důkazu Obr. 5.1. Nejprve předpokládejme $v \notin \Delta$. Nechť $(\Delta) = \Delta[a; b; c]$ a nechť k leží uvnitř úsečky $[a; b]$, l uvnitř úsečky $[b; c]$ a m uvnitř úsečky $[c; a]$. Uvažujme čtyři trojúhelníky Δ_j ,



Obr. 5.1: Cauchy-Goursatovo lemma; $v \notin \Delta\{a, b, c\}$

$j = 1, 2, 3, 4$, tvořené po řadě uspořádanými trojicemi bodů

$$\{a, k, m\}, \quad \{k, b, l\}, \quad \{l, c, m\}, \quad \{k, l, m\}$$

a označme L délku křivky (Δ) . Zřejmě je

$$\begin{aligned}(\Delta_1) &= [m; a] \dot{+} [a; k] \dot{+} [k; m], & (\Delta_2) &= [k; b] \dot{+} [b; l] \dot{+} [l; k], \\(\Delta_3) &= [l; c] \dot{+} [c; m] \dot{+} [m; l], & (\Delta_4) &= [m; k] \dot{+} [k; l] \dot{+} [l; m],\end{aligned}$$

přičemž poslední uzavřená křivka (Δ_4) je součtem úseček opačně orientovaných k „posledním“ orientovaným úsečkám v předcházejících třech součtech, tj. úseček $[k; l]$, $[l; m]$, $[m; k]$. Definujme A jako hodnotu integrálu z f přes (Δ) . Protože se integrály přes $[k; m]$, $[m; k]$, resp. přes $[m; l]$, $[l; m]$, resp. přes $[l; k]$, $[k; l]$ liší jen znaménkem a protože integrály přes $[a; b]$, $[b; c]$, $[c; a]$ jsou po řadě součty integrálů přes $[a; k]$ a $[k; b]$, přes $[b; l]$ a $[l; c]$ a přes $[c; m]$ a $[m; a]$, je

$$A = \int_{(\Delta)} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{(\Delta_j)} f(z) dz. \quad (5.3)$$

Z (5.3) a z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že absolutní hodnota nejméně jednoho z integrálů na pravé straně (5.3) je alespoň $|A|/4$. Zřejmě též platí odhad $\text{diam}(\Delta) \leq L((\Delta))$. Pro jednoduchost můžeme volit za body k, l, m středy úseček $[a; b]$, $[b; c]$, $[c; a]$.

Označme odpovídající trojúhelník Δ^1 a opakujme právě provedenou úvahu s Δ^1 místo s Δ . Tak určíme trojúhelník Δ^2 , atd.; postup opakujeme a tak sestrojíme klesající posloupnost do sebe zařazených (uzavřených) trojúhelníků Δ^n takovou, že délka (Δ^n) je $2^{-n}L$, přičemž délky nejdelší strany (Δ^n) a tedy i $\text{diam}(\Delta^n)$ tvoří posloupnost konvergující k 0. Pro integrály z f přes (Δ^n) dostaneme

$$|A| \leq 4^n \left| \int_{(\Delta^n)} f(z) dz \right|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Podle Cantorovy věty (viz např. [Z], Věta 13.2.12) existuje právě jeden bod $\zeta \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Delta^n$. Zřejmě je $\zeta \in \Delta \subset G$, takže $\zeta \neq v$ a funkce f má v bodě ζ derivaci. Nyní zvolme libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Podle vzorce (1.11) z Lemmatu 1.4.1 existuje $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| \leq \varepsilon |z - \zeta|, \quad (5.5)$$

kdykoli je $|z - \zeta| < r$. Existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $2^{-n}L < r$, tudíž $|z - \zeta| < r$ pro všechna $z \in \Delta^n$ a platí odhad (5.5). Protože ke každému polynomu existuje primitivní funkce, je např. podle Věty 3.4.3

$$\int_{(\Delta^n)} f(z) dz = \int_{(\Delta^n)} [f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)] dz, \quad (5.6)$$

a z (5.5), z (5.6) a ze standardního odhadu integrálu (1.18) z Kapitoly 1 plyne, že

$$\left| \int_{(\Delta^n)} f(z) dz \right| \leq \varepsilon (2^{-n}L)^2.$$

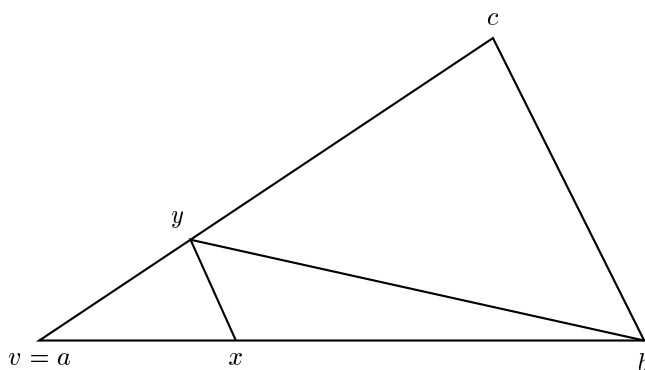
Užijeme-li (5.4), dostaneme $|A| \leq \varepsilon L^2$ s libovolně předem zvoleným kladným ε . Pro vyšetřovaný případ $v \notin \Delta$ je tedy skutečně $A = 0$.

Předpokládejme dále, že v je vrcholem trojúhelníku Δ a že např. $v = a$; sledujte Obr. 5.2. Je-li Δ degenerovaný (a, b a c leží na téže přímce), potom platí (5.2) pro každou spojitou funkci f . Pokud nikoli, zvolme bod x uvnitř úsečky $[a; b]$ a y uvnitř úsečky $[a; c]$. Integrál z funkce f přes (Δ) je součtem integrálů přes křivky $\Delta[a; x; y]$, $\Delta[x; b; y]$ a $\Delta[b; c; y]$.

Podle toho, co jsme již dokázali, poslední dva integrály jsou rovny 0, neboť odpovídající trojúhelníky neobsahují v . Integrál přes (Δ) je tedy součtem integrálů přes úsečky $[a; x]$, $[x; y]$ a $[y; a]$, tj. přes trojúhelník $\Delta[a; x; y]$. Pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ lze volit $x, y \in U(a, r)$. Protože existuje $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že $|f| \leq K$ v Δ , podle standardního odhadu (1.18) je tedy

$$\left| \int_{\Delta[a; x; y]} f(z) dz \right| \leq KL(\Delta[a; x; y])$$

a poslední součtin konverguje k 0 pro $x \rightarrow a$, $y \rightarrow a$. Z toho plyne, že i v tomto případě platí (5.2).



Obr. 5.2: Cauchy-Goursatovo lemma; případ $v = a$

Leží-li v uvnitř některé strany trojúhelníku Δ , spojíme ho úsečkou s vrcholem Δ ležícím proti této straně a na vzniklé dva trojúhelníky aplikujeme předcházející úvahu. Je-li konečně v libovolný vnitřní bod Δ , aplikujeme předcházející výsledky na trojúhelníky $\Delta[a; b; v]$, $\Delta[b; c; v]$ a $\Delta[c; a; v]$. \square

Poznámka 5.2.2. Analogicky, patrně dokonce formálně ještě jednodušeji lze dokázat verzi předcházejícího Lemmatu 5.2.1 s libovolným intervalem Q , tj. s (Q) na místě (Δ) . Obě verze (s trojúhelníky i s intervaly) jsou vhodné pro „obrácenou větu“: jak dále ukážeme, pokud se pro oblast $G \subset \mathbb{C}$ anulují integrály z funkce f přes (Δ) pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$ nebo přes (Q) pro každý interval $Q \subset G$, je f holomorfní funkce v G . Analogickou větu pro kružnice bychom popsanou technikou nemohli dokázat; srv. Věty 5.5.9 a 5.5.10.

Definice 5.2.3. Připomeňme znovu, že množina $M \subset \mathbb{R}^m$ je **hvězdovitá vzhledem k bodu** $v \in M$, jestliže M obsahuje pro každé $z \in M$ geometrický obraz úsečky $[v; z]$. Je-li M hvězdovitá vzhledem ke každému bodu $v \in M$, pak říkáme, že množina M je **konvexní**.

Je-li G oblast a je-li $z \in G$, existuje $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(z, r) \subset G$; je-li G navíc hvězdovitá vzhledem k nějakému bodu v , snadno nahlédneme, že $\Delta[v; z; \zeta] \subset G$ pro každé $\zeta \in U(z, r)$. Tuto informaci ihned využijeme v důkazu následující věty:

Věta 5.2.4 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast hvězdovitá vzhledem k bodu $v \in G$ a nechť f je funkce spojitá v G a holomorfní v $G \setminus \{v\}$. Potom pro každou uzavřenou křivku φ v G*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 0; \quad (5.7)$$

definujeme-li na G funkci F vztahem

$$F(z) := \int_{[v; z]} f(u) du, \quad z \in G, \quad (5.8)$$

je F primitivní funkcí k f v G .

Důkaz. Hvězdovitá oblast G obsahuje pro každý bod $z \in G$ geometrický obraz úsečky $[v; z]$. Definujme funkci F pomocí vzorce (5.8). Zvolme nyní libovolný bod $\zeta \in G$ a nějaké jeho okolí $U(\zeta) \subset G$. Pro body $z \in U(\zeta)$ leží trojúhelník s vrcholy v, ζ, z v G a platí pro něj Lemma 5.2.1, takže $F(z) - F(\zeta)$ je hodnota integrálu z funkce f podél $[\zeta; z]$:

$$F(z) - F(\zeta) = \int_{[v; z]} f(u) du - \int_{[v; \zeta]} f(u) du = \int_{[\zeta; z]} f(u) du.$$

Proto platí rovnosti

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) = \frac{1}{z - \zeta} \int_{[\zeta; z]} f(u) du - f(\zeta) = \frac{1}{z - \zeta} \int_{[\zeta; z]} (f(u) - f(\zeta)) du$$

pro všechna $z \in U(\zeta)$, $z \neq \zeta$. Ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje s ohledem na spojitost funkce f v bodě ζ takové $\delta \in \mathbb{R}_+$, že pro $|u - \zeta| < \delta$ je $|f(u) - f(\zeta)| < \varepsilon$; je proto

$$\left| \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) \right| \leq \frac{1}{|z - \zeta|} \left| \int_{[\zeta; z]} (f(u) - f(\zeta)) du \right| \leq \varepsilon$$

pro všechna z , pro něž je $0 < |z - \zeta| < \delta$. Tím je dokázána rovnost $f(\zeta) = F'(\zeta)$. Vzhledem k tomu, že $\zeta \in G$ bylo libovolně zvoleno, je $f = F'$ v G . \square

Důsledek 5.2.5. *Věta 5.2.4 platí speciálně pro každou konvexní množinu G a f holomorfní v G , přičemž ve vyjádření (5.8) lze volit za bod v libovolný bod $z \in G$.*

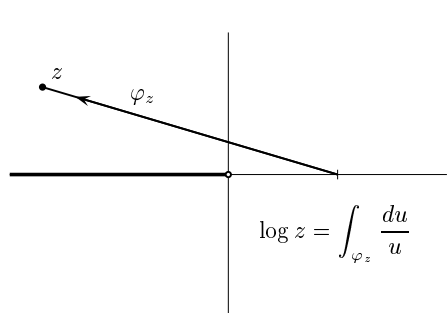
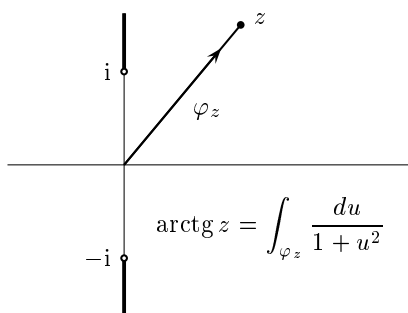
Příklad 5.2.6. Logaritmus $\log | \mathbb{R}_+$, tj. restrikci funkce \log na \mathbb{R}_+ , lze též zavést způsobem, který propagoval FELIX KLEIN (1849–1925). Prozkoumáme tuto možnost v komplexním oboru. V \mathbb{R} se definuje

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Oblast $G := \mathbb{P} \setminus \mathbb{R}_\pi$ je hvězdovitá vzhledem k bodu 1, takže podle Věty 5.2.4 je funkce

$$F(z) := \int_{[1; z]} \frac{dz}{z}, \quad z \in G,$$

funkcí primitivní k funkci $1/z$ v G ; je přitom zřejmé, že $F(1) = 0$. Protože stejné vlastnosti má i restrikce funkce \log na G , je $F = \log$ všude v G . Viz Obr. 5.3.

Obr. 5.3: Funkce \log Obr. 5.4: Funkce \arctg

Příklad 5.2.7. Stejným způsobem jako v předcházejícím příkladu bychom mohli zavést v komplexním oboru i funkci \arctg . Označme $G := \mathbb{C} \setminus \{it; t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$. Potom je G hvězdovitá vzhledem k 0 a lze definovat pro $[0; z]$,

$$\arctg z := \int_{[0; z]} \frac{du}{1+u^2}, \quad z \in G. \quad (5.9)$$

Funkce \arctg je holomorfním rozšířením funkce $\arctg z$ z \mathbb{R} na G . Všimněte si, že „výřezy“ nám umožnily definovat na G přímo funkci \arctg bez zavádění spojitých větví nebo množiny hodnot Arctg . Viz Obr. 5.4.

Nyní můžeme znovu prozkoumat vztah (2), o kterém jsme se zmínili v úvodní kapitole, neboli zda a v jakém smyslu platí rovnost

$$\arctg z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}, \quad z \in G. \quad (5.10)$$

Funkce definovaná vztahem (5.9) je podle Věty 5.2.4 primitivní funkcí k $1/(1+z^2)$. Derivováním výrazu na pravé straně rovnosti (5.10) dle vzorce z Tvzení 3.1.1 dostaneme

$$\frac{1}{2i} \frac{1-iz}{1+iz} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)' = \frac{1}{2i} \frac{2i}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Obě strany (5.10) mají tedy v oblasti G stejnou derivaci a proto se liší jen o aditivní konstantu. Protože se obě strany v bodě 0 rovnají 0 , rovnost (5.10) platí v celé oblasti G .

Při zkoumání oboru hodnot funkce tg jsme pracovali s množinou (v terminologii, které se vyhýbáme, s „víceznačnou funkcí“) všech řešení rovnice $\operatorname{tg} w = z$

$$\frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+iz}{1-iz}. \quad (5.11)$$

Poznamenejme, že rovnost $\operatorname{tg} w = z$ pak pro $z \neq \pm i$ nastává, právě když je

$$\frac{1}{2i} \frac{\exp(2iw) - 1}{\exp(2iw) + 1} = z, \quad \text{neboli} \quad 2iw = \log \frac{1+iz}{1-iz} + 2k\pi i,$$

kde k je celé číslo. Analogická situace nastává při zavádění „komplexního arkuskosinu“ apod.

5.3 Cauchyho integrál

Křivkové integrály přes křivku φ tvaru

$$\int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{w-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{C}(\langle \varphi \rangle),$$

jsou velmi důležité a jsou známy pod názvem **integrály Cauchyho typu**. Dokážeme, že to jsou funkce proměnné z holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Nejprve dokážeme jednoduchou variantu věty o derivování těchto integrálů podle (komplexního) parametru.

Lemma 5.3.1. *Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka, $f \in \mathcal{C}(\langle \varphi \rangle)$. Položme*

$$F(z) := \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle. \quad (5.12)$$

Potom

$$F^{(k)}(z) = k! \int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{k+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle, \quad k \in \mathbb{N}; \quad (5.13)$$

je-li $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ a $R := \operatorname{dist}(z_0, \langle \varphi \rangle)$, je

$$F(z) = \sum \left(\int_{\varphi} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{k+1}} \right) (z-z_0)^k, \quad z \in U(z_0, R). \quad (5.14)$$

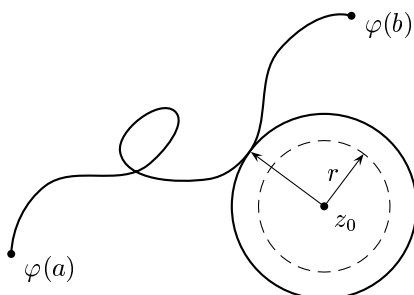
Důkaz. Necht' $G := \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Necht' $z_0 \in G$, $0 < r < R$, $z \in U(z_0, r)$, $w \in \langle \varphi \rangle$. Pak je $|(z - z_0)/(w - z_0)| \leq r/R < 1$ a

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \sum \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} \quad (5.15)$$

přičemž řada vpravo konverguje stejnoměrně vzhledem k $w \in \langle \varphi \rangle$. Protože spojitá funkce f je na $\langle \varphi \rangle$ omezená, lze (5.15) násobit $f(z)$, aniž se poruší stejnoměrná konvergence a lze použít důsledku Lemmatu 1.7.2 pro řady a obdržet

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\varphi} \left(f(w) \sum \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} \right) dw = \\ &= \sum (z - z_0)^k \left(\int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \right). \end{aligned}$$

Vzorec v (5.14) je Taylorův rozvoj funkce $F(z)$ v mocninnou řadu o středu z_0 ,



Obr. 5.5: Vyjádření Cauchyho integrálu mocninnou řadou

jejíž koeficienty jsou rovny $F^{(k)}(z_0)/k!$; z toho plyne vzorec (5.13). \square

Poznámka 5.3.2. Derivace F lze tedy získat derivováním vyjádření v (5.12) podle proměnné z za integračním znaméním. Pokud bychom měli dokázanu obecnou větu o derivování integrálu podle komplexního parametru, měli bychom možnost dospět k vyjádření jiným způsobem.

5.4 Index bodu vzhledem ke křivce

V dalším budeme potřebovat pojem indexu bodu $\zeta \in \mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$ vzhledem k (obecné) uzavřené křivce. Tento pojem názorně odpovídá „počtu oběhů“ křivky φ kolem ¹⁾ bodu ζ . Připomeňme výsledky Příkladů 1.6.10 a 3.4.4:

¹⁾ V angličtině se též užívá názorný termín *winding number*.

Příklad 5.4.1. Pro kladně orientovanou kružnici φ o středu z_0 a poloměru r , tj. pro křivku $\varphi(t) = z_0 + r \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, platí pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{(z - z_0)^k} = \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-k} ire^{it} dt = r^{1-k} \int_0^{2\pi} ie^{i(1-k)t} dt.$$

Je-li $k \neq 1$, existuje k poslednímu integrandu primitivní funkci $e^{i(1-k)t}/(1-k)$, která je 2π -periodická; pro $k = 1$ je integrand roven i . Odtud vyplývá

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{(z - z_0)^k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \in \mathbb{Z}, k \neq 1, \\ 2\pi i & \text{pro } k = 1. \end{cases}$$

V dalším navážeme na tento výsledek pro případ $k = 1$.

Definice 5.4.2. Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je uzavřená (ne nutně regulární!) křivka a nechť $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Je-li funkce f spojitou větví logaritmu funkce $\varphi - \zeta$ na $[a, b]$, pak definujeme

$$\text{ind}(\varphi, \zeta) := \frac{1}{2\pi i} (f(b) - f(a));$$

číslo $\text{ind}(\varphi, \zeta)$ nazýváme **indexem bodu ζ vzhledem ke křivce φ** . Pro $\zeta = \infty$ klademe $\text{ind}(\varphi, \infty) = 0$.

Poznámka 5.4.3. Poznamenejme, že Definice 5.4.2 má dobrý smysl, neboť existenci spojitě větve logaritmu zaručuje Lemma 4.6.14 a rozdíl libovolných dvou spojitých větví logaritmu $\varphi - \zeta$ je podle Věty 4.6.12 konstantní funkce. Zřejmě pro každou křivku platí rovnost $\text{ind}(\varphi, z) = -\text{ind}(\dot{\varphi}, z)$. Jestliže je $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ a $\psi = \varphi_2 \dot{+} \varphi_1$, potom $\text{ind}(\varphi, z) = \text{ind}(\psi, z)$, tj. hodnota indexu „nezávisí na volbě počátečního bodu“ uzavřené křivky. Definice zavádí index vůči obecnějším křivkám než jsou křivky po částech regulární.

Lemma 5.4.4. Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je uzavřená křivka. Potom pro každý bod $\zeta \in \mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$ je $\text{ind}(\varphi, \zeta)$ celé číslo a pro $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ je

$$\text{ind}(\varphi, \zeta) = \frac{1}{2\pi} (g(b) - g(a)),$$

kde g je libovolná spojitá větev argumentu funkce $\varphi - \zeta$ na $[a, b]$.

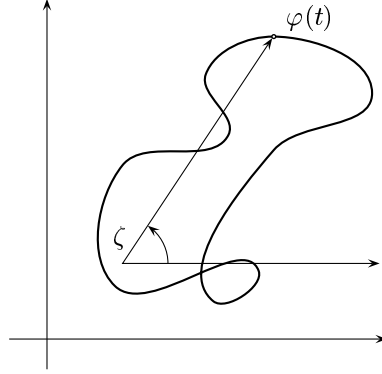
Důkaz. Označme $f = f_1 + if_2$ libovolně zvolenou spojitou větev logaritmu $\varphi - \zeta$ na $[a, b]$. Připomeňme, že $f_1(t) = \log |\varphi(t) - \zeta|$ a že $f_2(t)$ je spojitá větev $\arg(\varphi(t) - \zeta)$. Protože je $\varphi(b) = \varphi(a)$, jsou $f(b)$ a $f(a)$ hodnoty logaritmu *téhož čísla* $\varphi(a) - \zeta$; jejich rozdíl je proto k -násobkem $2\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ a podíl rozdílu a čísla $2\pi i$ je tedy celé číslo. Dále je

$$\frac{f(b) - f(a)}{2\pi i} = \frac{(f_1(b) - f_1(a)) - i(f_2(b) - f_2(a))}{2\pi i} = \frac{f_2(b) - f_2(a)}{2\pi},$$

protože $f_1(b) = f_1(a)$. Je-li g libovolná spojitá větev argumentu $\varphi - \zeta$ na $[a, b]$, platí

$$\text{ind}(\varphi, \zeta) := \frac{1}{2\pi}(g(b) - g(a)), \quad (5.16)$$

protože platí rovnost $f_2(b) - f_2(a) = g(b) - g(a)$. \square



Obr. 5.6: Znázornění přírůstku spojitě větve $\arg(\varphi(t) - \zeta)$ podél křivky φ

Poznámka 5.4.5. Poznamenejme nejprve, že $\text{ind}(\varphi, \zeta)$ je až na faktor roven přírůstku spojitě větve logaritmu nebo argumentu $\varphi - \zeta$ podél křivky φ . Z (5.16) je nejsnáze patrný význam indexu. Zvolíme-li spojitou větev argumentu $\varphi - \zeta$ a označíme ji g , je $g(a)$ orientovaný úhel, který svírá vektor $\varphi(a) - \zeta$ se směrem polopřímky \mathbb{R}_+ ; ten se při průběhu t intervalem $[a, b]$ spojitě mění. Představíme-li si situaci „dynamicky“, měříme úhel průvodiče $\varphi(t) - \zeta$ se směrem polopřímky \mathbb{R}_+ a zjišťujeme orientovaný přírůstek úhlu podél křivky. Ten pak po dělení konstantou 2π dává „počet oběhů $\varphi(t)$ kolem bodu ζ “. Odtud je odvozen zmíněný anglický termín *winding number*.

Věta 5.4.6. Je-li $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uzavřená křivka a je-li $\zeta \in \mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$, je

$$\text{ind}(\varphi, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - \zeta}. \quad (5.17)$$

Důkaz. Podle definice křivkového integrálu je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \zeta} dt. \quad (5.18)$$

Podle druhé části Lemmatu 4.6.14 a Poznámky 4.6.15 je integrál vpravo integrálem z derivace Φ' sestrojené spojitě větve logaritmu funkce $\varphi - \zeta$. Jestliže zvolíme takové dělení $D = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$, že $\varphi'|_{(t_{k-1}, t_k)}$ je spojitě rozšiřitelná

na $[t_{k-1}, t_k]$ pro všechna $k = 1, \dots, n$, platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \zeta} dt &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n [\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\Phi(b) - \Phi(a)) = \text{ind}(\varphi, \zeta). \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. \square

Poznámka 5.4.7. Pro uzavřené křivky ve smyslu naší úmluvy, tj. křivky po částech regulární, se někdy index pomocí vztahu (5.17) *definuje*. V tom případě plyne rovnost $\text{ind}(\varphi, \infty) = 0$ „přirozeně“ z definice: integrujeme pak funkci identicky rovnou 0. V této kapitole budeme dále pracovat pouze s po částech regulárními křivkami; pro ně lze vzorec (5.17) považovat za ekvivalentní Definici 5.4.2.

V této souvislosti je zajímavé, že lze Lemma 4.6.14 „obejít“ a dokázat souvislost vzorce (5.17) se spojitou větví logaritmu přímo. Z definice dostaneme (5.18), kde na pravé straně je integrovaná funkce $\varphi'/(\varphi - \zeta)$ po částech spojitá na $[a, b]$. Proto k ní existuje zobecněná primitivní funkce g . Ta je spojitá na $[a, b]$ a existuje konečná množina $K \subset [a, b]$ tak, že je

$$g'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \zeta}, \quad t \in K \setminus [a, b],$$

přičemž

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - \zeta} = \frac{g(b) - g(a)}{2\pi i}.$$

Nyní dokážeme, že existuje $c \in \mathbb{P}$ tak, že funkce $\Phi = g - c$ je spojitou větví logaritmu $\varphi - \zeta$ na $[a, b]$. Tím bude dokázána *nezávisle* na Lemmatu 4.6.14 existence spojitě větve logaritmu $\varphi - \zeta$ na $[a, b]$ a zároveň i (5.17). Funkce $\exp(g)/(\varphi - \zeta)$ je spojitá a různá od 0 na $[a, b]$, přičemž pro $t \in [a, b] \setminus K$ je

$$\left(\frac{\exp(g(t))}{\varphi(t) - \zeta} \right)' = \frac{\exp(g(t))\varphi'(t) - \exp(g(t))\varphi'(t)}{(\varphi(t) - \zeta)^2} = 0; \quad (5.19)$$

proto je rovna nenulové konstantě, kterou zapíšeme ve tvaru $\exp c$. Tak dostaneme pro všechna $t \in [a, b]$ rovnosti

$$\exp(\Phi(t)) = \exp(g(t) - c) = \varphi(t) - \zeta,$$

takže Φ je spojitá větev logaritmu $\varphi - \zeta$ na $[a, b]$.

Důsledek 5.4.8. *Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je uzavřená křivka. Je-li $G := \mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$, je funkce $F(z) := \text{ind}(\varphi, z)$, $z \in G$, funkcí holomorfní v G , která je konstantní v každé komponentě množiny G . V neomezené komponentě množiny G nabývá hodnoty 0.*

Důkaz. Z Lemmatu 5.4.4 plyne, že funkce F nabývá v G pouze celočíselných hodnot. Podle Lemmatu 5.3.1 je holomorfní a tedy i spojitá v $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$, z čehož plyne, že je konstantní v komponentách množiny $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Jelikož je $F(\infty) = 0$, stačí ukázat, že v nějakém okolí $U(\infty)$ nabývá F pouze hodnoty 0. To však vyplývá z odhadu

$$|\operatorname{ind}(\varphi, \zeta)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - \zeta} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L(\varphi)}{\inf\{|\varphi(t) - \zeta|; t \in [a, b]\}} = \frac{1}{2\pi} \frac{L(\varphi)}{\operatorname{dist}(\zeta, \langle \varphi \rangle)}.$$

Protože pro $\zeta \rightarrow \infty$ má poslední výraz limitu 0, je $\operatorname{ind}(\varphi, z) = 0$ pro všechna z ležící v (neomezené) komponentě $\mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$, obsahující bod ∞ . \square

Definice 5.4.9. Pro každou uzavřenou křivku φ v \mathbb{C} definujeme

$$\operatorname{Int}(\varphi) := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{ind}(\varphi, z) \neq 0\}, \quad \operatorname{Ext}(\varphi) := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{ind}(\varphi, z) = 0\}.$$

Množinu $\operatorname{Int}(\varphi)$ nazýváme **vnitřek křivky** φ a množinu $\operatorname{Ext}(\varphi)$ **vnějšek křivky** φ . Čtenář by si měl uvědomit, že tato definice není v kolizi s Definicí 1.6.22²⁾.

Je $\mathbb{C} = \operatorname{Int}(\varphi) \cup \langle \varphi \rangle \cup \operatorname{Ext}(\varphi)$, avšak *obecně* neplatí $\overline{\operatorname{Int}(\varphi)} = \operatorname{Int}(\varphi) \cup \langle \varphi \rangle$. Definujme např. $\varphi := \psi + \psi$, kde $\psi(t) := e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Pak $\operatorname{Int}(\varphi) = \emptyset$ a rovnost zřejmě neplatí.

Důsledek 5.4.10. *Nechť je φ kladně orientovaná kružnice o středu z_0 a poloměru $r \in \mathbb{R}_+$. Potom*

$$\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = \begin{cases} 1 & \text{pro všechna } \zeta \in U(z_0, r), \\ 0 & \text{pro všechna } \zeta \in \mathbb{S} \setminus U(z_0, r). \end{cases}$$

Je-li φ záporně orientovaná kružnice o středu z_0 a poloměru r , je $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = -1$ pro všechna $\zeta \in U(z_0, r)$.

Důkaz. Tvrzení plyne z přímého výpočtu pro střed z_0 a z Důsledku 5.4.8. \square

Poznámka 5.4.11. Důkaz předcházejícího Důsledku 5.4.10 se opírá o Větu 1.6.21 z Kapitoly 1. Lze dokázat, že analogické tvrzení platí i pro každou Jordanovu křivku φ . Pro každé ζ z neomezené komponenty $\mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$ je $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = 0$ a pro ζ z omezené komponenty je $|\operatorname{ind}(\varphi, \zeta)| = 1$.

Poznámka 5.4.12 (důležitá). U uzavřených křivek, které budeme užívat k výpočtům, vyjádřených jako orientovaný součet úseček a částí kružnic, lze hodnotu indexu zpravidla „vyčíst z obrázku“. Většinou se totiž pracuje s Jordanovými křivkami. Pro ně se ještě zavádí toto označení: Jestliže pro každý bod $w \in \operatorname{Int}(\varphi)$ je $\operatorname{ind}(\varphi, w) = +1$, říkáme, že φ je **kladně orientovaná** Jordanova křivka; pokud pro každé $w \in \operatorname{Int}(\varphi)$ je $\operatorname{ind}(\varphi, w) = -1$, říkáme, že φ je **záporně orientovaná** Jordanova křivka. Toto rozlišení je velmi názorné. Jestliže Jordanova křivka φ

²⁾ Označení je odvozeno od anglických termínů *interior* a *exterior*.

„oběhne bod $w \in \text{Int}(\varphi)$ proti směru otáčení hodinových ručiček“, je kladně orientovaná, souhlasí-li směr obíhání po $\langle \varphi \rangle$ se směrem otáčení hodinových ručiček, je křivka záporně orientovaná. Právě tato názornost byla příčinou, že ještě v první třetině tohoto století se v teorii funkcí komplexní proměnné pokládalo mnoho základních poznatků z topologie roviny za zřejmé, přestože právě jejich důkazy, ač často elementární, jsou poměrně *velmi nepřehledné a dlouhé*. Pro určení hodnot indexu lze užít např. následující tvrzení.

Tvrzení 5.4.13 (Maříkova věta). *Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je uzavřená křivka; buďte dále $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ dva body, pro něž je $\text{Re } z_1 < \text{Re } z_2$, $\text{Im } z_1 = \text{Im } z_2$ a $\varphi(a) \notin \langle [z_1; z_2] \rangle$. Nechť konečně množina*

$$T_\varphi := \{t \in [a, b]; \varphi(t) \in \langle [z_1; z_2] \rangle\}$$

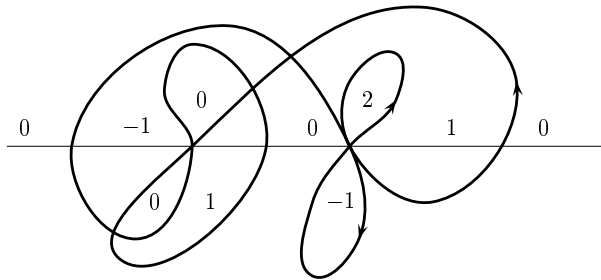
je konečná, přičemž funkce $\text{Im } \varphi$ je v každém bodě $t \in T_\varphi$ ryze monotónní. Definujme funkci $\eta_\varphi : T_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ podmínkami

$$\eta_\varphi(t) := \begin{cases} 1, & \text{je-li funkce } \text{Im } \varphi \text{ v bodě } t \in T_\varphi \text{ rostoucí,} \\ -1, & \text{je-li funkce } \text{Im } \varphi \text{ v bodě } t \in T_\varphi \text{ klesající.} \end{cases}$$

Pak je

$$\text{ind}(\varphi, z_1) = \text{ind}(\varphi, z_2) + \sum_{t \in T_\varphi} \eta_\varphi(t).$$

Tvrzení je s nepodstatnými změnami v označení převzato z [19], str. 93. Jiné tvrzení, pomocí kterého lze určovat index bodu vzhledem ke křivce, lze nalézt např. v [44], str. 244, Věta 10.37. Srv. Obr. 5.7, kde jsou v jednotlivých komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ hodnoty indexu vyznačeny.



Obr. 5.7: Hodnoty indexu v komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$.

Již samotná Cauchyho věta poskytuje možnost výpočtu některých integrálů. Nebudeme se početní stránkou hlouběji zabývat, uvedeme jen několik ilustrativních příkladů; později se seznámíme s obecnější metodou výpočtu. Integrály, které zde i dále počítáme, jsou chápány *v Newtonově smyslu*.

Příklad 5.4.14. Nejprve uveďme jednu triviální ukázkou, která přímo nesouvisí s výkladem v této kapitole, avšak ilustruje formální zjednodušení, které stojí za povšimnutí.

V reálné analýze se následující integrály počítají různými metodami, např. dvojnásobnou aplikací metody per-partes, integrováním řady „člen po členu“, derivováním podle parametru apod.; viz např. [32], str. 92 a 93. Dokážeme jiným způsobem, že pro každé $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$ je

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (5.20)$$

Pro $w = a + ib$ známe primitivní funkci k $f(z) := \exp(-wz)$, $z \in \mathbb{C}$; obdržíme tak

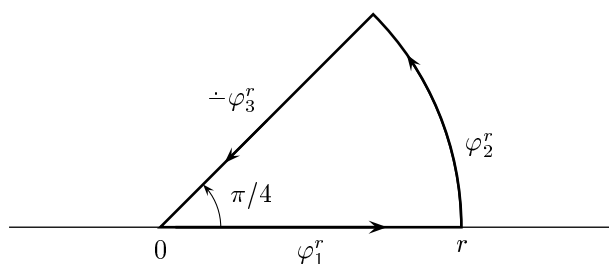
$$\int_0^{\infty} e^{-at} (\cos bt + i \sin bt) dt = \int_0^{\infty} e^{(-a+ib)t} dt = \frac{e^{(-a+ib)t}}{-a+ib} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2},$$

z čehož porovnáním reálné a imaginární části plynou oba vzorce v (5.20).

Příklad 5.4.15. Spočteme hodnotu tzv. **Fresnelových integrálů** a dokážeme, že (integrály chápeme stále v *Newtonově* smyslu)

$$\int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \quad (5.21)$$

K tomu potřebujeme znát hodnotu **Laplaceova integrálu**



Obr. 5.8: Znázornění křivky použité pro výpočet Fresnelových integrálů

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad (5.22)$$

který se počítá v „reálné analýze“ např. pomocí dvojnásobného integrálu:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho \right) dt = \pi. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme užili *Fubiniho větu* a také *větu o substituci* pro polární souřadnice $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$; takto jednoduše to jde s Lebesgueovým integrálem, výpočet musíme eventuálně modifikovat podle úrovně znalostí o vícerozměrné integraci.

Zvolme nyní funkci $f(z) := e^{iz^2}$, $z \in \mathbb{C}$ a definujme pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ křivku $\varphi^r := \varphi_1^r \dot{+} \varphi_2^r \dot{-} \varphi_3^r$, kde

$$\varphi_1^r(t) := t, \quad t \in [0, r], \quad \varphi_2^r(t) := re^{it}, \quad t \in [0, \pi/4], \quad \varphi_3^r(t) := te^{i\pi/4}, \quad t \in [0, r].$$

Protože oblast \mathbb{C} je konvexní a f je holomorfní v \mathbb{C} , platí pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ podle Věty 5.2.4 rovnost

$$0 = \int_{\varphi^r} f(z) dz \left(= \int_{\varphi_1^r} f(z) dz + \int_{\varphi_2^r} f(z) dz - \int_{\varphi_3^r} f(z) dz \right).$$

Dokážeme, že druhý z integrálů v závorce konverguje pro $r \rightarrow \infty$ k 0. K odhadu užijeme základní odhad (1.18) z Kapitoly 1 a vztah $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$, který jsme odvodili v Poznámce 4.9.1; pomocí nich dostaneme

$$\left| \int_{\varphi_2^r} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} \exp(ir^2 e^{2it}) ire^{it} dt \right| \leq r \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 \sin 2t) dt. \quad (5.23)$$

Zřejmě je $u/2 \leq \sin u$ na intervalu $[0, \pi/2]$, tedy $t \leq \sin(2t)$ na intervalu $[0, \pi/4]$, takže poslední integrál v (5.23) z nezáporné funkce lze odhadnout shora integrálem, který pro $r \rightarrow +\infty$ konverguje k 0:

$$0 \leq r \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 t) dt < r \int_0^{\infty} \exp(-r^2 t) dt = \frac{1}{r} \rightarrow 0.$$

Dále je

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1^r} f(z) dz &= \int_0^r e^{it^2} dt = \int_0^r \cos t^2 dt + i \int_0^r \sin t^2 dt, \\ \int_{\varphi_3^r} f(z) dz &= e^{\pi i/4} \int_0^r e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^r e^{-t^2} dt, \end{aligned}$$

z čehož dostáváme pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$ vztah

$$\int_0^r (\cos t^2 + i \sin t^2) dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^r e^{-t^2} dt - \int_{\varphi_2^r} f(z) dz,$$

a z něj limitním přechodem pro $r \rightarrow \infty$, užitím (5.22) a porovnáním reálné a imaginární části vzorec (5.21). V dalších příkladech podobného typu budeme již *v označení křivek závislost křivek na parametru r apod. vynechávat*.

Poznámka 5.4.16 (důležitá). Jak si čtenář patrně již povšiml, při vytváření křivek, které používáme k výpočtům podle Cauchyho věty, resp. později podle tzv. reziduové věty, se *nesnažíme parametrizovat* výsledný orientovaný součet a integrujeme vzhledem k co nejjednodušším parametrizacím jednotlivých členů orientovaného součtu. To samozřejmě neovlivňuje hodnotu počítaného integrálu.

Příklad 5.4.17. Dokážeme, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (5.24)$$

V reálné analýze se zpravidla dokazuje, že tento Newtonův integrál existuje³⁾, elementárními metodami ho však nelze spočítat. Zde integrál spočteme, a to aniž budeme nuceni *předem dokazovat jeho existenci*; ta vyplyne přímo z metody výpočtu. Položme

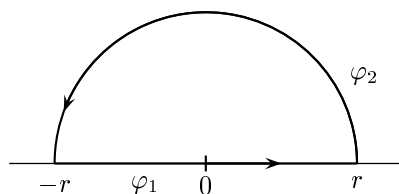
$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{z}, \quad z \in \mathbb{P}.$$

Snadno nahlédneme, že funkci f lze hodnotou $f(0) := i$ spojitě rozšířit na \mathbb{C} a že toto rozšíření je funkce holomorfní v \mathbb{C} :

$$f(z) = i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iz)^{k-1}}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Lze tedy opět užít Větu 5.2.4. Definujme $\varphi := \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$, kde pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ je

$$\varphi_1(t) := t, \quad t \in [-r, r], \quad \varphi_2(t) := re^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$



Obr. 5.9: Křivka φ pro Příklad 5.4.17

Opět pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$ platí rovnost

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_{\varphi_1} f(z) dz + \int_{\varphi_2} f(z) dz = 0.$$

³⁾ Integrál z funkce $|\sin(t)/t|$ přes týž interval nekonverguje (a tedy integrál neexistuje jakožto integrál *Lebesgueův*).

Uvážíme, že

$$\int_{\varphi_1} f(z) dz = \int_{-r}^r \frac{e^{it} - 1}{t} dt = \int_{-r}^r \left(\frac{\cos t - 1}{t} + i \frac{\sin t}{t} \right) dt$$

a všimneme si, že díky spojitému rozšíření integrujeme funkce *spojité* v bodě 0. První integrál vpravo je roven nule (integrujeme lichou funkci), druhý je již „skoro“ $2i$ -násobkem hledaného integrálu v (5.24). Platí tedy pro všechna uvažovaná r

$$2i \int_0^r \frac{\sin t}{t} dt = - \int_{\varphi_2} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = - \int_0^\pi \frac{\exp(ire^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt + \int_0^\pi \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt \quad (5.25)$$

Hodnota posledního integrálu v (5.25) je πi a nezávisí na r , takže srovnáním se vzorcem (5.24) zbývá dokázat, že předposlední integrál v (5.25) konverguje k 0 pro $r \rightarrow \infty$. Platí

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_0^\pi \frac{\exp(ire^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \right| &\leq \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin t} dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^\infty e^{-rt/2} dt = \frac{4}{r} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

takže limitní přechod v (5.25) pro $r \rightarrow \infty$ dává (5.24). S právě provedeným „trikem“ se ještě setkáme.

Příklad 5.4.18. Také následující integrál se v reálné analýze počítá různými metodami. Pomocí Cauchyho věty dokážeme, že pro všechna $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right). \quad (5.26)$$

Protože je integrand „sudou funkcí vzhledem k b “, budeme předpokládat, že $b > 0$; případ $b = 0$ vyřešíme zvlášť. Využijeme opět vzorec (5.22) a budeme integrovat funkci $f(z) := \exp(-az^2)$, $z \in \mathbb{C}$, holomorfní v \mathbb{C} , přes křivku (Q) , kde $Q = [-r, r] \times [0, b/2a]$. Je tedy

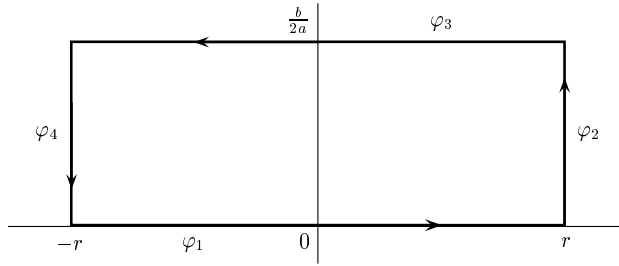
$$\int_{(Q)} e^{-az^2} dz = 0. \quad (5.27)$$

Označíme-li

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t, & t \in [-r, r], & \quad \varphi_3(t) = -t + ib/2a, & t \in [-r, r], \\ \varphi_2(t) &= r + it \frac{b}{2a}, & t \in [0, 1], & \quad \varphi_4(t) = -r + i(1-t) \frac{b}{2a}, & t \in [0, 1], \end{aligned}$$

pak $(Q) = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \varphi_3 \dot{+} \varphi_4$ a (5.27) platí pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$. Budeme postupovat trochu rychleji: Je

$$\int_{\varphi_1} f(z) dz = \int_{-r}^r e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-r\sqrt{a}}^{r\sqrt{a}} e^{-t^2} dt \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

Obr. 5.10: Křivka φ pro Příklad 5.4.18

kde jsme užili definici křivkového integrálu přes φ_1 a substituci $x = t/\sqrt{a}$. Zároveň jsme ověřili, že vzorec (5.26) platí i pro případ $b = 0$. Pro integrál přes φ_3 dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_3} f(z) dz &= - \int_{-r}^r \exp\left(-a\left(-t + \frac{ib}{2a}\right)^2\right) dt = - \int_{-r}^r \exp\left(-a\left(t^2 - \frac{ib}{a}t - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) dt = \\ &= - \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-r}^r e^{-at^2} (\cos bt + i \sin bt) dt = \quad (*) \\ &= - \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-r}^r e^{-at^2} \cos bt dt \xrightarrow{r \rightarrow \infty} - \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cos bt dt, \end{aligned}$$

kde se člen se sinem v řádku (*) anuluje s ohledem na to, že integrand je lichá funkce.

Zbývající dva integrály lze v absolutní hodnotě odhadnout shodně pomocí odhadu (1.17) z Důsledku 1.6.5. Pro oba případy jak $k = 2$, tak i pro $k = 4$ platí pro délky křivek $L(\varphi_2) = L(\varphi_4) = b/2a$ a pro $z = x + iy$ z $\langle \varphi_2 \rangle$ a $\langle \varphi_4 \rangle$ je $|x| = r$ a $y \in [0, b/2a]$. Odtud dostaneme

$$|\exp(-az^2)| = \exp(-a(x^2 - y^2)) \leq \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \exp(-ar^2),$$

z čehož plyne, že

$$\left| \int_{\varphi_k} f(z) dz \right| \leq L(\varphi_k) \|f\| = \frac{b}{2a} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \exp(-ar^2) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (5.28)$$

Dostáváme tak z (5.27) po limitním přechodu $r \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cos bt dt = 0,$$

z čehož již plyne dokazovaný vzorec (5.26).

5.5 Cauchyho vzorec

Lemma 5.5.1. *Nechť f je holomorfní funkce v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a necht' $w \in G$. Definujme funkci F na množině G předpisem*

$$F(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \quad z \neq w, \quad F(w) = f'(w). \quad (5.29)$$

Potom je funkce F spojitá na G a holomorfní v $G \setminus \{w\}$.

Důkaz. Snadno nahlédneme, že funkce F je holomorfní v $G \setminus \{w\}$ a protože dále platí $F(w) = \lim_{z \rightarrow w} F(z)$, je F spojitá v bodě w . \square

Věta 5.5.2 (Cauchyho vzorec). *Nechť f je holomorfní funkce v hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a necht' φ je uzavřená křivka v G . Potom pro všechna $\zeta \in G \setminus \langle \varphi \rangle$ platí vzorec*

$$f(\zeta) \cdot \text{ind}(\varphi, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (5.30)$$

Důkaz. Definujme funkci F na G pomocí (5.29). Použijeme ji při úpravě integrálu v (5.30); je

$$\int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{\varphi} \left(\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} + \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} \right) dz = \int_{\varphi} F(z) dz + f(\zeta) \int_{\varphi} \frac{dz}{z - \zeta}.$$

Na první z integrálů aplikujeme Větu 5.2.4, při výpočtu druhého užijeme vzorec (5.17) a tak dostaneme (5.30). \square

Předcházející výsledek o souvislosti holomorfní funkce f s *Cauchyho integrálem* se nazývá *Cauchyho vzorec*. Tento vzorec má mnoho užitečných důsledků. Protože $\text{ind}(\varphi, \zeta)$ je konstantní v každé komponentě $\mathbb{S} \setminus \langle \varphi \rangle$, je vhodné se omezit na speciální jednoduchou situaci: Je-li φ např. *kladně orientovaná kružnice*, má Cauchyho vzorec (5.30) zvláště jednoduchý tvar, protože $\text{ind}(\varphi, \cdot) = 1$ v $\text{Int}(\varphi)$ a $\text{ind}(\varphi, \cdot) = 0$ v $\text{Ext}(\varphi)$.

Věta 5.5.3. *Nechť f je funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a necht' kruh $U(z_0, r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, je obsažen i se svým uzávěrem v G . Necht' φ je kružnice, $\varphi(t) := z_0 + r \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom platí:*

(1) *Pro všechna $\zeta \in U(z_0, r)$ je*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (5.31)$$

(2) *Pro všechna $\zeta \in \text{Int}(\varphi)$ a $k \in \mathbb{N}$ je*

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz. \quad (5.32)$$

- (3) Je-li f funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, má derivace všech řádů. Pro každé $\zeta \in G$ platí rovnost

$$f(z) = \sum a_k(z - \zeta)^k,$$

a to v \mathbb{C} , pokud $G = \mathbb{C}$, a v $U(\zeta, d)$, kde $d := \text{dist}(\zeta, \mathbb{C} \setminus G)$, v případě, že $G \neq \mathbb{C}$.

Důkaz. Protože je $\overline{U(z_0, r)} \subset G$, existuje $r_1 \in (r, \infty)$ tak, že $\overline{\text{Int}(\varphi)} \subset U(z_0, r_1)$; v $\text{Int}(\varphi)$ je $\text{ind}(\varphi, \zeta) = 1$, takže tvrzení (1) je důsledkem Věty 5.5.2. Podle Lemmatu 5.3.1 platí tedy i (2). Je-li $G = \mathbb{C}$, lze v Lemmatu 5.3.1 volit $R \in \mathbb{R}_+$ libovolně a $R \in (0, d)$, je-li $G \neq \mathbb{C}$; z toho plyne (3). Tím je Věta 5.5.3 dokázána. \square

Věta 5.5.4 (Morera 1886*). Je-li f spojitá v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nezávisí-li integrál z f (ve smyslu Úmluvy 1.6.18) na cestě v G , je funkce f holomorfní v G .

Důkaz. Předpoklady zaručují existenci primitivní funkce F k f , což jsme již dokázali ve Větě 3.4.3. Protože $F \in H(G)$, a $F' = f$, je také podle části (3) Věty 5.5.3 $f \in H(G)$. \square

Úmluva 5.5.5. Oblast G , ve které integrál z každé funkce holomorfní v G nezávisí na cestě, budeme nazývat **přípustnou**. Zatím pouze víme, že hvězdovité oblasti, a tedy speciálně konvexní oblasti, jsou přípustné.

Ve Větě 5.5.9 a Větě 5.5.10 dokážeme další verze Morerovy věty, a to za slabších předpokladů.

Poznámka 5.5.6 (spíše filozofická). Je vhodné uvědomit si, že řada v (5.14) je jednoznačně určena jak restrikcí funkce f na $\langle \varphi \rangle$, tak i restrikcí f na libovolně malé okolí bodu z_0 . Obě tyto restrikce jednoznačně určují všechny derivace funkce f v bodě z_0 a platí rovnost

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad z \in U(z_0, d).$$

Je zde tedy vazba mezi „lokálním“ i „globálním“ chováním funkce f .

Podle Definice 2.3.3 se řada z (3) nazývá (stejně jako v „reálném případě“) *Taylorova řada* funkce f . Je zde však *podstatný rozdíl*: V reálném případě spojitě rozšíření funkce $f(x) = \exp(-1/x^2)$ na \mathbb{R} je funkce, která má na \mathbb{R} spojitě derivace všech řádů, avšak přesto není v žádném okolí počátku součtem mocninové řady o středu 0; v případě holomorfní funkce to nastat nemůže. To je jeden z nejdůležitějších důsledků Cauchyho vzorce.

Věta 5.5.7. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f je funkce holomorfní v G , která nenabývá hodnoty 0. Potom existuje funkce g holomorfní v G taková, že je $f = \exp \circ g$, právě když f'/f má primitivní funkci v G .*

Důkaz. Je-li $f = \exp \circ g$, kde $g \in H(G)$, dostáváme zderivováním $f' = g' \exp \circ g$, a tedy $g' = f'/f$; funkce g je tedy primitivní funkcí k funkci f'/f . Obráceně, je-li g holomorfní v G a je-li $g' = f'/f$, je $(f \exp(-g))' = f' \exp(-g) - f' \exp(-g) = 0$ v G . Na každé komponentě G je proto $f \exp(-g)$ konstantní; označme hodnotu této konstanty pro zvolenou komponentu $k \neq 0$. Volíme $c \in \mathbb{C}$ tak, aby $k = \exp c$; na uvažované komponentě je $\exp(g + c) = f$; stejnou úvahu můžeme provést pro každou komponentu množiny G . \square

Důsledek 5.5.8. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězditá (speciálně konvexní) oblast a nechť funkce f je holomorfní a všude nenulová v G . Pak má f v G spojitě větve logaritmu, a všechny tyto větve jsou funkce holomorfní v G .*

Důkaz. Protože f'/f je holomorfní v G , existuje podle Věty 5.2.4 funkce primitivní k f'/f v G . Podle Věty 5.5.7 pak existuje $g \in H(G)$ tak, že $f = \exp \circ g$ v G , což znamená, že g je spojitá větev logaritmu f . Protože každá spojitá větev logaritmu f v G se na každé komponentě množiny G liší od g jen o (aditivní) konstantu, je holomorfní v G . \square

Věta 5.5.9. *Nechť f je spojitá v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nechť $\int_{(\Delta)} f = 0$ pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$. Pak je f funkce holomorfní v G .*

Důkaz. Větu jsme prakticky dokázali v důkazu Cauchyho Věty 5.2.4; stačí uvážit, že ke každému bodu $z_0 \in G$ existuje okolí $U(z_0, r) \subset G$, což je konvexní množina. Základní podmínka pro trojúhelníky (jako při v mimo trojúhelník) pak dává podle Věty 5.2.4 existenci primitivní funkce k restrikci $f|U(z_0, r)$. \square

Lemma 5.5.10 (Morera 1886*). *Je-li f spojitá v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a integrál $\int z f$ se anulují vzhledem ke hranici každého intervalu obsaženého v G , tj. pro každý obdélník, který spolu se svým vnitřkem leží v G , pak je f holomorfní funkce v G .*

Důkaz. Zvolme libovolně $U(w, r) \subset G$ s $r \in \mathbb{R}_+$; dokážeme, že funkce f má v $U(w, r)$ primitivní funkci. Zvolme $z \in U(w, r)$ a označme Q interval o vrcholech w, u, z, v

$$w = w_1 + iw_2, \quad u = z_1 + iw_2, \quad z = z_1 + iz_2, \quad v = w_1 + iz_2$$

a definujme primitivní funkci $F(z)$, $z \in U(w, r)$:

$$F(z) = \int_{[w;u;z]} f(u) du = \int_{[w;v;z]} f(u) du .$$

Podle předpokladů věty je tato definice korektní. Zvolme číslo $\delta > 0$ tak, že $U(z, \delta) \subset G$ a definujme pro $0 < |h| < \delta$ křivku $\omega_h(t) = z + th$, $t \in [0, 1]$. Potom pro $h \in \mathbb{R}$, $h \rightarrow 0$, platí

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{\omega_h} f - f(z) \right| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)| dt \rightarrow 0.$$

Odtud plyne $D_1F(z) = f(z)$. Stejnou úvahu lze provést s ih na místě h a dospět k $D_2F(z) = if(z)$. Funkce f je spojitá a F splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky, takže F (a tedy i f) je holomorfní. \square

Poznámka 5.5.11. Věty 5.5.9 a 5.5.10 ukazují, že pro přípustnost oblasti G zdaleka není nutné předpokládat, že integrál z každé funkce $f \in H(G)$ je roven 0 pro každou uzavřenou křivku v G ; stačí to ověřit pouze pro hranice všech trojúhelníků, nebo pro hranice všech intervalů, kde opět uvažujeme i „degenerované“ případy.

Důsledek 5.5.12. *Nechť f je spojitá na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a holomorfní na $G \setminus K$, kde K je množina izolovaná v G . Pak je f holomorfní na G .*

Důkaz. Zvolme libovolně $w \in K$. Protože K je množina izolovaná v G , existuje $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že f je holomorfní na $U(w, 2r) \setminus \{w\}$ a spojitá na $U(w, 2r)$. Na $U(w, r)$ sestrojíme primitivní funkci F k f pomocí Věty 5.2.4. Pak F je holomorfní a podle Věty 5.5.3 je i f holomorfní v $U(w, r)$. Stejnou úvahu lze aplikovat na každý bod z K ; proto je $f \in H(G)$. \square

Příkladem použití Lemmatu 5.5.10 je např. důkaz následující věty

Věta 5.5.13 (Schwarzův princip zrcadlení). *Nechť G je oblast v \mathbb{C} symetrická vzhledem k reálné ose, tj. taková, která s každým $z \in G$ obsahuje i \bar{z} . Nechť dále*

$$G^+ := \{z \in G; \operatorname{Im} z > 0\}, \quad G^- := \{z \in G; \operatorname{Im} z < 0\}, \quad G^0 := G \cap \mathbb{R},$$

a nechť f je holomorfní v G^+ , spojitá v $G \setminus G^-$ a reálná v G^0 . Funkce g definovaná v G vztahy

$$g(z) = g_1(z) := f(z), \quad z \in G^+ \cup G^0, \quad g(z) = g_2(z) := \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in G^- \cup G^0 \quad (5.33)$$

je holomorfní v oblasti G .

Důkaz. Je-li $h: z \rightarrow \bar{z}$, je g_2 v $G \setminus G_+$ tvaru $h \circ f \circ h$ a je proto spojitá. Dále je g spojitá i v bodech \mathbb{R} , protože g_1 i g_2 jsou spojitě a $g_1(z) = g_2(z)$, $z \in G \cap \mathbb{R}$. Pro funkci g zřejmě platí $\int_{(Q_1)} g = 0$ pro každý obdélník $Q_1 \subset G^+$, neboť $g = f$ v G^+ a $f \in H(G^+)$.

Pro každý obdélník $Q_2 \in G^-$ a $Q_1 = \overline{Q_2}$ je

$$\int_{(Q_2)} g = \int_{(Q_2)} g_2 = \int_{(Q_1)} g_1 = \int_{(Q_1)} f = 0;$$

to platí i pro obecnější křivky ležící „symetricky“ vzhledem k \mathbb{R} . Prochází-li \mathbb{R} vnitřním bodem obdélníku $Q \subset G$, dělí úsečka $u_0 = [a; b] := Q \cap \mathbb{R}$ na dva obdélníky Q_1, Q_2 .

Pak ale stačí ukázat, že $\int_{(Q)} g = \int_{(Q_1)} g + \int_{(Q_2)} g = 0$. To však vyplývá z toho, že pro úsečku $u_\varepsilon(t) := (1-t)a + tb + i\varepsilon$, $t \in [0; 1]$ je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{u_\varepsilon} g(z) dz = \int_{u_0} f = \int_a^b f(t) dt,$$

nahradíme-li Q_1, Q_2 „zmenšenými obdélníky“ se stranami $\langle u_{\pm\varepsilon} \rangle$ a provedeme limitní přechod pro $\varepsilon \rightarrow 0+$. \square

Významné využití Věty 5.5.9 v následujícím důkaze dává pohodlný přístup k větě o (lokálně) stejnoměrné limitě holomorfních funkcí:

Věta 5.5.14 (Weierstrass 1841*). *Nechť $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ je posloupnost funkcí holomorfních na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, $f_k \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na G . Potom je také f funkce holomorfní v G a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je*

$$f_k^{(n)} \rightrightarrows_{\text{loc}} f^{(n)} \text{ na množině } G.$$

Důkaz. Funkce f_k jsou zřejmě pro všechna $k \in \mathbb{N}$ spojitě v G . Zvolme libovolně bod $z \in G$ a jeho okolí $U(z) \subset G$. V každém trojúhelníku $\Delta \subset U(z)$ je $f_k \rightrightarrows f$, takže je f speciálně spojitá na (Δ) a podle Lemmatu 1.7.2 platí rovnost

$$\int_{(\Delta)} f(w) dw = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(\Delta)} f_k(w) dw.$$

Protože $f_k \in H(G)$, integrály na pravé straně rovnosti se anulují a podle Věty 5.5.9 je rovněž $f \in H(G)$.

Pro důkaz druhé části tvrzení zvolíme $z \in G$ a $r \in \mathbb{R}_+$ tak, aby uzávěr okolí $U(z, r)$ ležel v G . Pak uijeme Cauchyho vzorec pro derivaci (5.32) z Věty 5.5.3, z něhož pro $\zeta \in U(z, r)$ a $\varphi(t) := z + r \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, obdržíme

$$\begin{aligned} |f_k^{(n)}(\zeta) - f^{(n)}(\zeta)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f_k(w) - f(w)}{(w - \zeta)^{n+1}} dw \right| \leq \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{\sup\{|f_k(w) - f(w)|; w \in \langle \varphi \rangle\}}{\text{dist}(\zeta, \langle \varphi \rangle)^{n+1}} L(\varphi), \quad \zeta \in \text{Int}(\varphi). \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že např. pro $\zeta \in U(z, r/2)$ a $K := \overline{U(z, r/2)}$ platí analogický odhad stejnoměrně na K , pouze ve jmenovateli zlomku musíme nahradit výraz $\text{dist}(\zeta, \langle \varphi \rangle)$ výrazem $\text{dist}(K, \langle \varphi \rangle) = r/2$; jako důsledek odtud dostaneme $f_k^{(n)} \rightrightarrows_{\text{loc}} f^{(n)}$ na množině G . \square

Důsledek 5.5.15. *Nechť f_k jsou funkce holomorfní na otevřené množině G a nechť řada $\sum f_k$ konverguje lokálně stejnoměrně na G . Pak je její součet funkce holomorfní na G a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sum f_k^{(n)} = f^{(n)}$, přičemž řada vlevo konverguje lokálně stejnoměrně v G .*

Lemma 5.5.16. *Nechť f je holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$, $w \in G$. Definujme funkci g proměnné z na množině G jako v (5.29) předpisem*

$$g(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \quad z \neq w, \quad g(w) = f'(w).$$

Potom g je holomorfní funkce v G .

Důkaz. Podle Lemmatu 5.5.1 a Důsledku 5.5.12 je $g \in H(G)$. □

5.6 Věta o průměru

Věta 5.6.1 (o průměru). *Nechť f je funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a nechť uzavřen kruhu $U(\zeta, r)$ o poloměru $r \in \mathbb{R}_+$ je obsažen v oblasti G . Potom je*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{it}) dt, \quad (5.34)$$

tj. hodnota holomorfní funkce $f(\zeta)$ je v každém bodě ζ oblasti G lokálně integrálním průměrem svých hodnot na kružnici o středu ζ .

Důkaz. Je-li φ kladně orientovaná kružnice o středu ζ a poloměru r , pak vzorec (5.34) vyplývá z (5.31) převodem na Newtonův integrál:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta + re^{it}) dt}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{it}) dt ;$$

tím je vzorec dokázán. □

Jako ilustraci použití Věty 5.6.1 dokážeme jednoduché lemma:

Lemma 5.6.2 (o existenci nulového bodu). *Nechť $V := U(w, r) \subset G$ je okolí bodu w v oblasti G takové, že $\bar{V} \subset G$. Je-li f holomorfní v G a platí-li*

$$\min\{|f(z)|; z \in \partial V\} > |f(w)|,$$

potom existuje $\zeta \in V$ takové, že $f(\zeta) = 0$.

Důkaz. Budeme dokazovat sporem. Pokud neexistuje takový bod $\zeta \in V$, pro nějž $f(\zeta) = 0$, je $f(z) \neq 0$ v okolí \bar{V} a $g = 1/f$ je holomorfní funkce v okolí množiny \bar{V} . Z Věty 5.6.1 plyne

$$\begin{aligned} |f(w)|^{-1} = |g(w)| &\leq \max\{|g(z)|; z \in \partial V\} = \max\{|f(z)|^{-1}; z \in \partial V\} = \\ &= \left(\min\{|f(z)|; z \in \partial V\} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

a tedy $|f(w)| \geq \min\{|f(z)|; z \in \partial V\}$, což je ve sporu s předpokladem dokazovaného lemmatu. □

Důsledek 5.6.3 (odhad). *Za stejných předpokladů jako ve Větě 5.6.1 o průměru platí odhad*

$$|f(\zeta)| \leq M_r := \max\{|f(z)|; z \in \partial U(\zeta, r)\}. \quad (5.35)$$

Důkaz. Vzorec (5.35) je jednoduchým důsledkem vzorce (5.34) z Věty 5.6.1 o průměru a základního odhadu (1.17). \square

Důsledek 5.6.3 je *jednoduchou* verzí tzv. **principu maxima modulu**. V následujícím lemmatu dokážeme trikem silnější tvrzení:

Lemma 5.6.4 (Landau 1916). *Nechť f je holomorfní funkce v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a nechť kruh $U(\zeta, r)$ o poloměru $r \in \mathbb{R}_+$ je obsažen i se svým uzávěrem v oblasti G a nechť $\varphi(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom pro všechna $z \in U(\zeta, r)$ je*

$$|f(z)| \leq M_r := \max\{|f(\varphi)|; \varphi \in \langle \varphi \rangle\}. \quad (5.36)$$

Důkaz. Ze vzorce (5.31) vyplývá snadno pomocí (1.17) nerovnost $|f(z)| \leq r\alpha_z M_r$, kde $\alpha_z := \max\{1/|w - z|; w \in \partial U(\zeta, r)\}$. Protože je $f^k \in H(G)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, platí analogický odhad i pro $|f^k(z)|$; z něj vyplývá pro všechna $z \in U(\zeta, r)$

$$|f(z)| \leq (r\alpha_z)^{1/k} M_r, \quad z \in U(\zeta, r).$$

Limitním přechodem pro $k \rightarrow \infty$ dostaneme odtud (5.36). \square

Předcházející lemma je ovšem důsledkem dále uvedených „silnějších“ forem principu maxima modulu; srovnej s Větou 5.9.1. I tyto dvě nejjednodušší verze principu maxima modulu mají však jednoduché a závažné důsledky:

Lemma 5.6.5 (o aproximaci). *Předpokládejme, že f je funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nechť $\zeta \in G$. Označme*

$$\|f' - f'(\zeta)\|_D := \sup\{|f'(u) - f'(\zeta)|; u \in D\}. \quad (5.37)$$

Potom pro každé okolí $U(\zeta, r)$, jehož uzávěr D leží v G , a pro každé dva různé body $z, w \in D$ je

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(\zeta) \right| \leq \|f' - f'(\zeta)\|_D. \quad (5.38)$$

Důkaz. Protože $D \subset G$, existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(\zeta, r + \varepsilon) \subset G$. K funkci $f' - f'(\zeta)$ je primitivní funkcí na $U(\zeta, r + \varepsilon)$ např. funkce $u \mapsto f(u) - f'(\zeta) \cdot u$, $u \in U(\zeta, r + \varepsilon)$, z čehož plyne

$$f(z) - f(w) - f'(\zeta)(z - w) = \int_{[w; z]} (f'(u) - f'(\zeta)) du.$$

Standardní odhad integrálu podle (1.17) dává

$$\left| \int_{[w; z]} (f'(u) - f'(\zeta)) du \right| \leq \|f' - f'(\zeta)\|_D \cdot |z - w|,$$

z čehož dostáváme (5.38). \square

Věta 5.6.6 (o lokální existenci inverzní funkce). *Nechť f je funkce holomorfní definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nechť $f'(\zeta) \neq 0$ v nějakém bodě $\zeta \in G$. Potom existuje takové okolí $U(\zeta) \subset G$, že restrikce $f|_{U(\zeta)}$ je prostá funkce.*

Důkaz. Jelikož $f'(\zeta) \neq 0$ a f' je spojitá, lze volit $U(\zeta) = U(\zeta, r)$ tak, aby jeho uzávěr D ležel v G a aby platila nerovnost

$$\|f' - f'(\zeta)\|_D < |f'(\zeta)|. \quad (5.39)$$

Použijeme Lemma 5.6.5. Pokud by v $U(\zeta)$ ležely dva body $w \neq z$ takové, že $f(w) = f(z)$, plynula by z (5.38) nerovnost $|f'(\zeta)| < |f'(\zeta)|$; tento spor dokazuje tvrzení. \square

5.7 Věta o jednoznačnosti

V této části uvedeme několik často užívaných tvrzení o holomorfních funkcích. Jedním z nich je velmi důležitá věta o jednoznačnosti, která popisuje jev, nemající v „reálné analýze“ (ani pro nekonečně diferencovatelné funkce) obdobu.

Věta 5.7.1 (o jednoznačnosti). *Nechť f je funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a nechť $f \equiv 0$ na množině $N_1 \subset G$, která má hromadný bod v oblasti G . Potom $f \equiv 0$ v G . Obecněji, pro holomorfní funkce g, h , pro něž platí rovnost $g(z) = h(z)$ na množině, která má hromadný bod v G , platí rovnost $g(z) = h(z)$ všude na G .*

Předcházející Věta 5.7.1 je mírným zobecněním Věty 2.4.3 o jednoznačnosti pro mocninné řady, kterou jsme však nedokázali. Důkaz Věty 5.7.1 je založen na souvislosti G . Dokážeme, že množina všech nulových bodů f je neprázdná, otevřená v G a uzavřená v G , tedy splývá s G . Vzhledem k mimořádné důležitosti věty poslední úvahu o otevřenosti a uzavřenosti provedeme podrobněji.

Důkaz. Druhá část věty vyplývá z první, položíme-li $f = g - h$, budeme tedy dokazovat pouze první část. Označme N množinu všech nulových bodů f , které leží v G . Protože $N_1 \subset N$, je $N \neq \emptyset$ a má hromadný bod v G . Množina N je zřejmě uzavřená v G : je-li $w_k \in N$, $w_k \rightarrow w \in G$, je $f(w_k) = 0$ pro všechna k , a ze spojitosti funkce f plyne $f(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(w_k) = 0$, tedy $w \in N$. Množina N všech hromadných bodů N je tedy podmnožinou N a je také uzavřená v G .

Dokážeme ještě, že N' je otevřená množina: Nechť $w \in N'$ a $U(w, r) \subset G$. Podle Věty 5.5.3 je funkce f součtem své Taylorovy řady $f(z) = \sum a_k(z-w)^k$, $z \in U(w, r)$. Kdyby všechny koeficienty a_k nebyly rovny 0, existovalo by nejmenší číslo $p \in \mathbb{N}_0$ takové, že $a_p \neq 0$, a bylo by

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k(z-w)^k = (z-w)^p f_1(z), \quad z \in U(w, r),$$

kde $f_1(w) = a_p \neq 0$. Protože f_1 je spojitá v bodě w , jsou oba činitele vpravo různí od 0 v jistém prstencovém okolí $P(w, r_1) \subset U(w, r)$, $r_1 \in \mathbb{R}_+$. To je však spor s předpokladem, že $w \in N'$. Proto N' obsahuje nějaké okolí $U(w)$ bodu w . Množina N' je tedy otevřenou i uzavřenou podmnožinou oblasti G . Jak jsme připomněli v Kapitole 1 v části 1.2, plyne odtud $N' = N = G$. \square

Příklady 5.7.2. 1. Nejprve ukážeme, jak se vzorce pro goniometrické funkce apod. „přenášejí“ do komplexního oboru. Dokážeme, že např. vzorec

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \quad (5.40)$$

známý z „reálné analýzy“ platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Na obou stranách rovnosti jsou funkce g, h holomorfní v oblasti \mathbb{C} a je $g(z) = h(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{R}$. Položíme $N_1 = \mathbb{R}$ v předcházejícím tvrzení. Potom je i $\mathbb{R} \subset N'$, a podle Věty 5.7.1 vzorec (5.40) platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

2. Podobně ze vzorce $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ platného pro všechna $x \in \mathbb{R}$ plyne analogicky vzorec $\sin(z \pm 2\pi) = \sin z$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Analogickou úvahu lze provést pro ostatní „reálně periodické funkce“ holomorfní v \mathbb{C} .

3. Snadno nahlédneme, že funkce $f(z) := (\exp z - 1)/z$, $z \in \mathbb{P}$, a $f(0) := 1$ je holomorfní v \mathbb{C} . Proto je i $g = 1/f$ holomorfní v okolí $U(0, 2\pi)$ bodu 0 a lze ji (jednoznačně) vyjádřit mocninnou řadou

$$g(z) = \frac{z}{\exp z - 1} = \sum \frac{B_k}{k!} z^k, \quad (5.41)$$

Řada vpravo se v teorii funkcí komplexní proměnné používá přímo k *definici* tzv. **Bernoulliho čísel** B_k ; srv. [Z], str. 512, kde jsme Bernoulliho čísla definovali jiným způsobem. Podle vzorce (4.63) je

$$\cotg z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i \left(1 + \frac{2}{e^{2iz} - 1} \right) = \left(i + \frac{1}{z} \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} \right),$$

odkud dostaneme vztah

$$\cotg z = i + \frac{1}{z} g(2iz). \quad (5.42)$$

Protože \cotg je lichá funkce, je $z \cotg z$ sudá funkce. Ze vzorce (5.42) plyne též identita $g(z) + z/2 = (1/2i)z \cotg(z/2i)$, takže i $g(z) + z/2$ je sudá funkce. Odtud

plyne, že $B_1 = -1/2$ a $B_{2k+1} = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Platí tedy rovnosti

$$g(z) = \frac{z}{\exp z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}.$$

Odtud již snadno dostaneme identitu

$$\cotg z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}, \quad z \in P(0, \pi). \quad (5.43)$$

Podobně platí

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^k (4^k - 1) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}, \quad z \in U(0, \pi/2). \quad (5.44)$$

4. Ukažme trochu složitější aplikaci Věty 5.7.1; znovu dokážeme, že pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí vzorec

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Využijeme toho, že vzorec platí pro všechna $z, w \in \mathbb{R}$. Větu o jednoznačnosti použijeme nejprve tak, že zvolíme např. $w \in \mathbb{R}$ pevně a uvážíme, že na obou stranách vzorce jsou funkce proměnné z holomorfní v celé rovině \mathbb{C} . Z Věty 5.7.1 a z platnosti vzorce pro všechna $z \in \mathbb{R}$ plyne platnost vzorce pro w a všechna $z \in \mathbb{C}$. Tuto úvahu lze zopakovat s každým $w \in \mathbb{R}$. Nyní zvolíme libovolně ale pevně $z \in \mathbb{C}$. Opět jsou obě strany rovnosti pro toto zvolené z holomorfními funkcemi v proměnné w , takže z rovnosti pro všechna $w \in \mathbb{R}$ plyne rovnost pro z a všechna $w \in \mathbb{C}$. Protože jsme volili $z \in \mathbb{C}$ libovolně, platí vzorec pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$.

Poznámka 5.7.3. Pro funkce holomorfní v \mathbb{C} zavedl Weierstrass již r. 1876 speciální název **celé funkce**. Celými funkcemi jsou např. všechny polynomy; další celé funkce jako např. \exp, \sin, \cos jsou transcendentní.

Vrátíme se ke vzorci (5.35), kterému lze dát i trochu jiný tvar. Jestliže platí rovnost $f(z) = \sum a_k (z - \zeta)^k$ na nějakém okolí uzávěru $\overline{U(\zeta, r)}$, je

$$|f(\zeta)| = |a_0| \leq M_r \left(= \frac{M_r}{r^0} \right).$$

Máme tedy odhad velikosti koeficientu a_0 . Přirozeným zobecněním tohoto odhadu jsou tzv. **Cauchyho odhady** pro všechny koeficienty mocninné řady, která (jak již víme) je Taylorovou řadou svého součtu.

Lemma 5.7.4 (Cauchyho odhady 1835). *Za předpokladů Věty 5.6.1 platí pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ tento odhad koeficientů Taylorova rozvoje o středu ζ :*

$$|a_k| = \left| \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!} \right| \leq \frac{M_r}{r^k}; \quad (5.45)$$

zde je M_r opět maximum funkce $|f|$ na hranici kruhu $U(\zeta, r)$.

Důkaz. Ze vzorce (5.32) z Věty 5.5.3 a ze základního odhadu křivkového integrálu (1.18) dostaneme pro všechna $k \in \mathbb{N}$ vztahy

$$|a_k| = \left| \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_r}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{M_r}{r^k},$$

což jsou spolu s (5.35) Cauchyho odhady. \square

Poznámka 5.7.5. Také v případě Cauchyho odhadů lze pro *nekonstantní* funkci f dokázat, že v (5.45) platí dokonce ostrá nerovnost. Poznamenejme ještě, že pomocí standardních úvah o pokrytí lze dospět k tvrzení:

Věta. *Je-li G oblast v \mathbb{C} , $K \subset G$ kompaktní množina a $L \subset G$ kompaktní okolí K , existuje pro každé $k \in \mathbb{N}$ číslo $M_k \in \mathbb{R}_+$ závislé pouze na G , K a L tak, že*

$$\|f^{(k)}\|_K \leq M_k \|f\|_L$$

pro všechny funkce $f \in H(G)$.

Roli L nemůže převzít K , což plyne snadno z příkladu: $f_n(z) := z^n \in H(\mathbb{C})$, $K := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, protože v tomto případě je $\|f_n\|_K = 1$, avšak $\|f'_n\|_K = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 5.7.6. *Je-li $p \in \mathbb{N}$, je celá nenulová funkce f polynomem stupně menšího než p , právě když vyhovuje podmínce $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z^p = 0$.*

Důkaz. Jedna část tvrzení je zřejmá: Jestliže je f polynom stupně menšího než p , tj. $f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k$, pak

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^p} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{z^p} + \frac{a_1}{z^{p-1}} + \dots + \frac{a_{p-1}}{z} \right) = 0.$$

Druhá část tvrzení Lemmatu je vyplývá přímo z Cauchyho odhadů pro koeficienty a_k z Lemmatu 5.7.4, kde M_r značí opět maximum funkce $|f|$ na hranici kruhu $U(0, r)$:

$$|a_k| \leq \frac{M_r}{r^k} = \frac{M_r}{r^p} \frac{1}{r^{k-p}};$$

první zlomek na pravé straně rovnosti má podle předpokladů pro $r \rightarrow \infty$ limitu 0, druhý má pro $k \geq p$ vlastní limitu (rovnou 1 nebo 0). Je tedy $a_k = 0$ pro všechna $k \geq p$. \square

Věta 5.7.7 (Liouville 1847*). Každá omezená celá funkce je konstantní.

Důkaz. Podmínka z předcházejícího Lemmatu 5.7.6 je zřejmě splněna pro každou omezenou celou funkci f s $p = 1$, a tak $f(z) = a_0$, takže f je polynom stupně < 1 , tedy konstantní funkce. \square

Věta 5.7.8 (základní věta algebry; Gauss 1799*). Předpokládejme, že polynom P má kladný stupeň. Potom existuje alespoň jedno číslo $\zeta \in \mathbb{C}$ tak, že $P(\zeta) = 0$.

Důkaz. Pokud neexistuje nulový bod funkce P , je $1/P$ omezená celá funkce a je tedy konstantní podle Liouvillové věty. Polynom P pak ale nemá kladný stupeň. \square

Poznámka 5.7.9. Předcházející existenční Větu 5.7.8 nazval právě CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) *základní větou* teorie algebraických rovnic; u nás se užívá vžitý název *základní věty algebry*.

5.8 Otevřené zobrazení

Poznámka 5.8.1. Připomeňme, že zobrazení metrického prostoru (P, ρ) do metrického prostoru (Q, σ) je spojitě, právě když pro každou otevřenou množinu $B \subset Q$ je také její vzor $f^{-1}(B)$ otevřená množina. Obráceně, jestliže pro každou otevřenou množinu $A \subset P$ je její obraz $f(A)$ otevřená množina, nazývá se f **otevřené zobrazení** prostoru P .

Věta 5.8.2 (věta o otevřenosti zobrazení). Nechtě funkce f je nekonstantní a holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Potom f je otevřené zobrazení G do \mathbb{C} .

Důkaz. Dokažme, že pro každé $w_0 \in f(G)$ existuje $d \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(w_0, d) \subset f(G)$: Je-li $w_0 \in f(G)$, existuje bod z_0 tak, že $f(z_0) = w_0$. Takový bod z_0 není hromadným bodem množiny $\{z \in G; f(z) = w_0\}$, protože pak by byla funkce f podle věty o jednoznačnosti konstantní v G . Existuje tedy $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tak, že f nikde v $P(z_0, r_0)$ nenabývá hodnoty w_0 ; zvolíme-li pevně $r \in (0, r_0)$, nenabývá f této hodnoty nikde v $K := \overline{U(z_0, r)}$ kromě bodu z_0 . V důsledku toho je

$$d := (1/2) \min\{|f(z) - w_0|; |z - z_0| = r\} > 0,$$

a pro všechna z , $|z - z_0| = r$ a všechna w , $|w - w_0| < d$ je

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 2d - d = d. \quad (5.46)$$

Protože $f(z_0) = w_0$, stačí dokázat, že každé $w \in P(z_0, d)$ je hodnotou této funkce v nějakém bodě z množiny K . Předpokládejme obráceně, že existuje $w \in P(z_0, d)$ tak, že $w \notin f(K)$, a utvořme funkci $g := 1/(f - w)$. Tato funkce je pak holomorfní

a nenulová v každém bodě $z \in K$, tedy holomorfní a nenulová v jistém $U(z_0, r')$, kde $r' > r$ a podle (5.46) a Věty 5.6.3 je pak

$$\frac{1}{d} < \frac{1}{|w_0 - w|} = \frac{1}{|f(z_0) - w|} = g(z_0) \leq \max\{|g(z)|; |z - z_0| = r\} \leq \frac{1}{d},$$

což je spor. Funkce f tedy nabývá v K , a tedy i v G každé hodnoty $w \in U(w_0, d)$. Tím je věta dokázána. \square

V Kapitole 4 jsme dokázali Větu 4.6.1, kterou jsme užili k derivování logaritmu; měla však zbytečně silné předpoklady. Ukážeme nyní, že některé lze vynechat.

Důsledek 5.8.3 (věta o derivaci inverzní funkce). *Nechť f je funkce holomorfní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$. Pak je zobrazení f otevřené a lokálně prosté v G . Jestliže je f navíc prostá funkce na G , je inverzní funkce $g := (f)^{-1}$ holomorfní a platí*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, \quad w \in f(G). \quad (5.47)$$

Důkaz. Podle Věty 5.8.2 je f otevřené zobrazení a podle Věty 5.6.6 je f lokálně prosté. Je-li f navíc prostá funkce na G , existuje inverzní zobrazení g k f a je spojitě na $f(G)$, takže lze použít Větu 4.6.1; tak dostaneme druhou část tvrzení včetně (5.47). \square

Poznámka 5.8.4. Tento postup důkazu, založený na vlastnosti průměru, použil CONSTANTIN CARATHÉODORY v již zmíněné dvoudílné knize [13]; viz první díl, str. 133 a násl.

5.9 Princip maxima modulu

Věta 5.9.1 (princip maxima modulu). *Nechť f je nekonstantní funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$; pak platí:*

- (1) *Je-li $U(z_0, r) \subset G$, existuje $u \in U(z_0, r)$ tak, že je $|f(z_0)| < |f(u)|$, tj. funkce $|f|$ nemá v bodě z_0 lokální maximum.*
- (2) *Je-li $U(z_0, r) \subset G$, je $|f(z)| < m$ pro všechna $z \in U(z_0, r)$, kde definujeme $m := \sup\{|f(z)|; z \in U(z_0, r)\}$.*
- (3) *Je-li $G \subset \mathbb{C}$ omezená oblast, je-li f spojitá na uzávěru \overline{G} a holomorfní v G , a je-li $M = \max\{|f(z)|; z \in \partial G\}$, je $|f(z)| < M$ pro všechna $z \in G$.*

Důkaz. Dokážeme nejprve (1) a pak implikace (1) \Rightarrow (2) a (1) \Rightarrow (3). Předpokládejme, že (1) neplatí, tj. že pro všechna dostatečně malá ρ a všechna $t \in [0, 2\pi]$ je

$$|f(z_0 + \rho e^{it})| \leq |f(z_0)|. \quad (5.48)$$

Pak podle (5.48) užitím (5.34) dostaneme, že pro všechna dostatečně malá ρ je

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|,$$

a tudíž oba integrály mají stejnou hodnotu. Proto platí rovnost

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it})|) dt = 0.$$

Integrovaná funkce v posledním integrálu je spojitá a podle (5.48) nezáporná. Pokud by byla v jediném bodě kladná, byl by kladný i její integrál, musí tedy být identicky rovna 0. Odtud ale plyne existence okolí bodu z_0 , na kterém je $|f|$ konstantní, a tudíž, podle Důsledku 3.4.7, na kterém je konstantní i f . Podle Věty 5.7.1 je f konstantní v G ; nalezený spor ukazuje, že platí (1).

(1) \Rightarrow (2): Pokud by pro nějaké $w \in G$ bylo $|f(w)| = m$, podle (1) by existovalo $z \in G$ tak, že $|f(z)| > m$. Protože je to ve sporu s definicí m , platí (2).

(1) \Rightarrow (3): Je-li konečně f spojitá na \overline{G} , pak $|f|$ nabývá svého maxima m na kompaktní množině \overline{G} . Pokud $m = M$, tvrzení platí. Kdyby bylo $m > M$, nabývala by $|f|$ maxima v G a to vede ke sporu s (1). Tím je věta dokázána. \square

Důsledek 5.9.2. *Nechť f je funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Nabývá-li funkce $|f|$ v G maxima, je f konstantní na G .*

Poznámka 5.9.3. Cesta k některým důležitým tvrzením vede též přes tzv. **Gutzmerovu formuli**. AUGUST GUTZMER (1860–1925) ji publikoval r. 1887. Z Cauchyho vzorce (5.32) pro $f^{(n)}(z_0)$ dostaneme snadno

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-int} dt,$$

z čehož již plyne následující věta:

Věta 5.9.4 (Gutzmer 1887). *Je-li $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$, má-li řada poloměr konvergence větší než číslo $r \in \mathbb{R}_+$ a označíme-li $M_r := \{\max |f(z)|; |z - z_0| = r\}$, platí*

$$\sum |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})|^2 dt \leq (M_r)^2. \quad (5.49)$$

Důkaz. Protože $\overline{f(z_0 + re^{it})} = \sum \overline{a_k} r^k e^{-ikt}$, je

$$|f(z_0 + re^{it})|^2 = f(z_0 + re^{it}) \cdot \overline{f(z_0 + re^{it})} = \sum \overline{a_k} r^k f(z_0 + re^{it}) e^{-ikt} dt,$$

přičemž řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[0, 2\pi]$. Integrací (vpravo „člen po členu“) dostáváme

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt = \sum \overline{a_k} r^k \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-ikt} dt = 2\pi \sum |a_k|^2 r^{2k}.$$

Odhad pomocí $(M_r)^2$ je důsledkem základního odhadu (1.17) pro integrál vlevo v předcházejících rovnostech. \square

Poznámka 5.9.5. Uvedeme další varianty důkazu Liouvillové věty.

(a) Tvrzení lze dokázat *přímo* z Cauchyho odhadů z Lemmatu 5.7.4: Jestliže $|f(z)| \leq M$, $z \in \mathbb{C}$, je

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$ a všechna $k \in \mathbb{N}$, z čehož limitním přechodem pro $r \rightarrow \infty$ dostaneme $a_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, takže je opět $f(z) = a_0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

(b) Užijeme pouze odhadu pro první derivaci, avšak *v každém bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$. Zvolme jedno takové z_0 a rozviňme f v mocninnou řadu o středu z_0

$$f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k.$$

Úvahou obdobnou jako v (a) dostaneme $f'(z_0) = 0$, a to pro každé $z_0 \in \mathbb{C}$, z čehož již snadno pomocí Věty 3.4.5 dostaneme, že f je konstantní v \mathbb{C} .

(c) Z Gutzmerovy formule pro rozvoj $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$ o středu $z_0 = 0$ plyne pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$ nerovnost

$$\sum |a_k|^2 r^{2k} < M^2,$$

z čehož limitním přechodem pro $r \rightarrow \infty$ vyplývá, že $a_1 = a_2 = \dots = 0$, a tedy $f(z) = a_0$, $z \in \mathbb{C}$.

Se základní větou algebry je ekvivalentní tvrzení o faktorizaci, které pro nás má motivační význam.

Důsledek 5.9.6 (faktorizační lemma). *Za předpokladů z Věty 5.7.8 existuje takové číslo $c \in \mathbb{C}$, navzájem různá čísla $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ a čísla $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ tak, že P je jednoznačně (až na pořadí činitelů) vyjádřen ve tvaru součinu*

$$P(z) = c(z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_r)^{m_r}, \quad (5.50)$$

kde $m_1 + \dots + m_r = n$.

Předcházející důsledek, který je ekvivalentní se základní větou algebry, je o tzv. *rozkladu P na kořenové činitele*, což je vyjádření (5.50). Čísla m_1, \dots, m_r se nazývají *násobnosti nulových bodů* z_1, \dots, z_r . Někdy též za uvedených předpokladů říkáme, že polynom P má *právě n kořenů*, pokud každý počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

Poznámky 5.9.7. 1. Všimněte si, že jde o speciální vlastnost polynomů, která *nemá* analogii u ostatních funkcí z $H(\mathbb{C})$. Funkce \exp nemá *žádný nulový bod* v \mathbb{C} , zatímco množiny nulových bodů funkcí \sin a \cos jsou *nekonečné*.

2. Je-li $l \geq 0$ násobnost 0 jakožto kořene polynomu P (v případě potřeby zobecňujeme a čísla, v nichž se polynom P neanuluje, považujeme za kořeny P o násobnosti 0), lze polynom P vyjádřit ve tvaru

$$P(z) = cz^l \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{m_k}, \quad (5.51)$$

kde pro násobnosti opět platí vztah $l + m_1 + \dots + m_r = n$.

3. Připomeňme, že z vyjádření (5.50) plynou např. důležité vztahy mezi kořeny a koeficienty polynomů. Pro matematickou analýzu je důležité pozorování, že polynom s reálnými koeficienty má *párově* komplexně sdružené imaginární kořeny, tj. že s kořenem w má i kořen \bar{w} a jsou stejné násobnosti. Protože pro ně pak je

$$(z - w)(z - \bar{w}) = z^2 - (w + \bar{w})z + w\bar{w},$$

kde $(w + \bar{w})$, $w\bar{w}$ jsou reálná čísla, lze každý polynom s reálnými koeficienty stupně alespoň 1 vyjádřit (až na pořadí činitelů) jednoznačně ve tvaru součinu lineárních a kvadratických *reálných* polynomů.

Na závěr shrneme v jediné větě nejdůležitější poznatky o holomorfních funkcích, se kterými jsme se v této kapitole seznámili:

Věta 5.9.8. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce na G . Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) *funkce f je holomorfní v G ;*
- (2) *pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$ platí rovnost $\int_{(\Delta)} f = 0$;*
- (3) *křivkový integrál z f v G lokálně nezávisí na křivce, ale pouze na jejích koncových bodech;*
- (4) *je-li $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a je-li $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, je*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - w} dz, \quad w \in U(z_0, r);$$

- (5) *funkci f lze v okolí každého bodu $z_0 \in G$ vyjádřit jako součet mocninné řady (poloměr konvergence této řady je vždy alespoň $d = \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus G)$ ⁴).*

⁴) Zde opět klademe $d = +\infty$ v případě, že $G = \mathbb{C}$.

Cvičení

1. Sestrojte holomorfní funkci v \mathbb{C} s nulovými body $z = (k+1)^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$, která nabývá v bodě 1 hodnoty $f(1) = 1!$

[Užijte Větu 5.7.1, ze které snadno odvodíte, že $f = \dots$ (na řešení přijdete jistě i bez nápovědy).]

2. Sestrojte funkci f holomorfní v \mathbb{C} s právě všemi nulovými body tvaru $z = (2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, která nabývá v bodě 0 hodnoty $f(0) = 1!$ Je taková funkce určena jednoznačně?

[Funkce f není rozhodně určena jednoznačně. Zvažte vlastnosti goniometrických funkcí (jako nápověda pro řešení by to mělo stačit).]

3. V Příkladu 5.2.7 jsme se zmínili o možnosti zavedení funkcí \arctg a \arcsin pomocí integrálu. Proč jsme u funkcí \exp , \cos , \cosh a pod. volili jiný způsob?

[Taylorovy rozvoje funkcí \exp , \cos , \cosh konvergují v \mathbb{C} , a tak pouze s již známým aparátém mocninných řad dostaneme, že jsou to funkce holomorfní v \mathbb{C} . Analogický rozvoj funkce \arctg nebo \arcsin konverguje pouze v jednotkovém kruhu a cesta k dalším poznatkům je složitější (podobně u dalších funkcí tohoto typu). „Integrální přístup“ je přirozený, neintegrujeme pouze po úsečkách, obsahujících body $\pm i$ (u arkustangenty), ale poněkud zastírá obtíže, spojené s nejednoznačností. Také rozvoj

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{z^5}{5} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{z^7}{7} + \dots$$

je poněkud složitější než u funkcí, „odvozených“ z exponenciály.]

4. Vypočtete hodnotu integrálu ($r > 0$)

$$I = \int_{\varphi} \operatorname{Im} z dz \quad \text{pro} \quad \varphi(t) = re^{it}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Umíte na základě získaného výsledku určit hodnotu tohoto integrálu, zaměníme-li $\operatorname{Im} z$ za $\operatorname{Re} z$? Nejsou obdržené výsledky v rozporu s Větou 5.2.4?

[Je $I = -\pi ir^2$, poslední otázka je zároveň návodem k odpovědi na otázku předcházející.]

5. Liouvilleovu větu lze dokázat i přímo z Cauchyho vzorce: Předpokládejme, že $|f(z)| \leq M$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, a zvolme v \mathbb{C} body $z_1 \neq z_2$. Pro kružnici φ o středu z_1 a poloměru $R > |z_1 - z_2|$ je

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi} |f(z)| \left| \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right| dz.$$

Odtud dostanete odhad, ve kterém lze provést limitní přechod (podrobněji např. v [21])

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{M |z_1 - z_2|}{R - |z_1 - z_2|} = 0.$$

[Podrobněji viz např. [21].]

6. Vyjádřete polynom $p(z) = 8z^3 - 52z^2 + 110z - 71$ jako polynom v mocninách dvojčlenu $(2z - 5)$!

[Je $p(z) = (2z - 5)^3 + 2(2z - 5)^2 + 4(2z - 5)^0$; jde pouze o jinak formulovanou úlohu o rozvinutí funkce v mocninnou řadu.]

7. Spočítejte integrál z funkce $f(z) = |z|\bar{z}$ vzhledem ke křivce $\varphi(t) = e^{it}$!

[Protože je

$$f(z) = \frac{|z|^2}{z}$$

a $|z|^2 = 1$ pro všechna $z \in \langle \varphi \rangle$, počítáme vlastně integrál z Příkladu 1.6.10 pro speciální případ $r = 1$, $z_0 = 0$. Proto je hledaná hodnota integrálu rovna $2\pi i$.]

8. Spočítejte integrál z funkce $f(z) = \frac{1}{2}z^{-1}$ vzhledem ke křivce $\varphi = [2; 2i; -2; -2i; 2]$; jde o hranici čtverce $\{z = x + iy; |x| + |y| = 2\}$!

[Pokud by byla f holomorfní např. v \mathbb{C} , měl by integrál hodnotu 0. Až budeme mít k dispozici další poznatky teorie funkcí komplexní proměnné, bude odpověď velmi jednoduchá. Nyní použijeme Cauchyho větu zvláštním způsobem: označme $\psi_1(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\psi_2(t) = e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$, a podobně $\varphi_1 = [2; 2i; -2]$, $\varphi_2 = [-2; -2i; 2]$, $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$, $\eta_1 = [-2; -1]$, $\eta_2 = [1; 2]$. Integrály f podél křivek

$$\varphi_1 \dot{+} \eta_1 \dot{-} \psi_1 \dot{+} \eta_2 \quad \text{a} \quad \varphi_2 \dot{-} \eta_2 \dot{-} \psi_2 \dot{-} \eta_1$$

jsou oba rovny 0, z čehož dostaneme

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_{\psi} f(z) dz = \pi i;$$

poslední rovnost je důsledkem výsledku z Příkladu 1.6.10.]

9. Ukažte, že definujeme-li funkci f hodnotou integrálu

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-z^2 t} dt,$$

všude v \mathbb{C} , kde je tento integrál konečný, je to holomorfní funkce ve dvou disjunkt-ních oblastech v \mathbb{C} !

[Nechť $z = x + iy$. Integrál je konečný, pokud je konečný integrál z funkce

$$e^{\operatorname{Re}(-z^2 t)} = e^{-(x^2 - y^2)t}, \quad \text{neboli pokud } x^2 - y^2 > 0.$$

Integrál, kterým jsou hodnoty $f(z)$ na tomto oboru určeny, spočteme a ověříme existenci derivace f .]

Kapitola 6

Laurentovy řady

V této kapitole budeme používat nový nástroj. Jsou jím Laurentovy řady, které jsou zobecněním mocninných řad. Připomeňme, že množina $M \subset G$ je izolovaná v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže pro každý bod $z \in G$ existuje prstencové okolí $P(z) \subset G$, pro něž je $P(z) \cap M = \emptyset$. Budeme se zabývat funkcemi, které jsou holomorfní všude v otevřené množině G kromě množiny $K \subset G$, která je izolovaná v G . Jinak řečeno, budeme pracovat s funkcemi, které jsou pro každé $z \in G$ holomorfní v jistém prstencovém okolí $P(z) \subset G$.

6.1 Zobecnění Cauchyho vzorce

Označení 6.1.1. Je-li $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$, označíme

$$P(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - z_0| < r_2\}. \quad (6.1)$$

Tuto množinu nazýváme **prstencem** nebo též **mezikružím o středu z_0 , vnitřním poloměru r_1 a vnějším poloměru r_2** . Prstencové okolí $P(z_0)$ je zřejmě speciálním prstencem o vnitřním poloměru $r_1 = 0$.

Budeme potřebovat pomocná tvrzení o spojitě závislosti křivkového integrálu na reálném parametru a o jeho derivování podle reálného parametru. Platí též analogická tvrzení o spojitosti a o derivování podle komplexního parametru, která nebudeme potřebovat. Připomeňme, že jsme dokázali zjednodušenou verzi takového tvrzení o derivování Cauchyho integrálu podle parametru; viz Větu 5.5.3.

Tvrzení 6.1.2. *Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka, nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť funkce $f : \langle \varphi \rangle \times I \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá. Pak je*

$$g(u) := \int_{\varphi} f(z, u) dz, \quad u \in I,$$

spojitá funkce na I .

Důkaz. Zvolme libovolně bod $v \in I$ a uzavřený interval $J \subset I$ tak, že $v \in J$. Dokážeme spojitost g v bodě v vzhledem k J . Ze stejnoměrné spojitosti f na $\langle \varphi \rangle \times J$ existuje pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ takové $\delta > 0$, že

$$(z \in \langle \varphi \rangle, t, u \in J, |t - u| < \delta) \Rightarrow |f(z, t) - f(z, u)| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

Odtud však vyplývá pro každé $u \in J$, $|u - v| < \delta$,

$$|g(u) - g(v)| = \left| \int_{\varphi} (f(z, u) - f(z, v)) dz \right| \leq \int_{\varphi} |f(z, u) - f(z, v)| dz \leq \varepsilon L(\varphi),$$

a tedy i spojitost g v bodě v vzhledem k J . \square

Tvrzení 6.1.3. *Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka a $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a necht' dále $f : \langle \varphi \rangle \times I \rightarrow \mathbb{C}$ je spolu s parciální derivací $D_2 f$ spojitá na $\langle \varphi \rangle \times I$. Potom má funkce*

$$g(u) := \int_{\varphi} f(z, u) dz, \quad u \in I,$$

v intervalu I spojitou derivaci, pro kterou je

$$g'(u) = \int_{\varphi} D_2 f(z, u) dz = \int_{\varphi} \frac{\partial f(z, u)}{\partial u} dz, \quad u \in I. \quad (6.3)$$

Důkaz. Funkci f lze rozložit na reálnou a imaginární část a dokazovat tvrzení pro každou z nich zvlášť. Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že f je reálná funkce. Zvolme $u \in I$ a dokažme rovnost v (6.3) pro tento bod u . Necht' $u \in (c, d) \subset [c, d] \subset I$ a necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Protože je parciální derivace $D_2 f = \partial f / \partial u$ stejnoměrně spojitá na $\langle \varphi \rangle \times [c, d]$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(z \in \langle \varphi \rangle, t \in [c, d], |t - u| < \delta) \Rightarrow \left| \frac{\partial f(z, t)}{\partial u} - \frac{\partial f(z, u)}{\partial u} \right| < \varepsilon. \quad (6.4)$$

Pro táž z, t existuje podle věty o přírůstku funkce bod $\xi_{z,t}$ tak, že $|\xi_{z,t} - u| < |t - u|$ a

$$\left| \frac{f(z, t) - f(z, u)}{t - u} - \frac{\partial f(z, u)}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial f(z, \xi_{z,t})}{\partial u} - \frac{\partial f(z, u)}{\partial u} \right| < \varepsilon, \quad (6.5)$$

takže

$$\left| \frac{g(t) - g(u)}{t - u} - \int_{\varphi} \frac{\partial f(z, u)}{\partial u} \right| = \left| \int_{\varphi} \left[\frac{f(z, t) - f(z, u)}{t - u} - \frac{\partial f(z, u)}{\partial u} \right] \right| \leq L(\varphi) \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že

$$g'(u) = \lim_{t \rightarrow u} \frac{g(t) - g(u)}{t - u} = \int_{\varphi} \frac{\partial f(z, u)}{\partial u} dz.$$

Spojitosť g' je důsledkem Tvrzení 6.1.2. \square

Lemma 6.1.4. *Nechť f je holomorfní funkce v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$ a necht' pro každé $\rho \in (r_1, r_2)$ je $\varphi_{\rho}(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom je funkce*

$$\rho \mapsto \int_{\varphi_{\rho}} f(z) dz, \quad \rho \in (r_1, r_2), \quad (6.6)$$

konstantní.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $z_0 = 0$. Označme $g(z) := zf(z)$ a dále

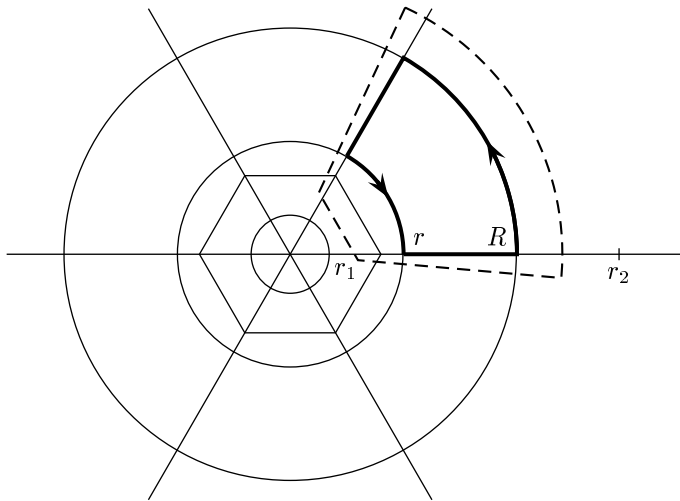
$$J(\rho) := \int_{\varphi_\rho} f(z) dz = \int_{\varphi_\rho} \frac{g(z)}{z} dz = i \int_0^{2\pi} g(\rho e^{it}) dt, \quad \rho \in (r_1, r_2). \quad (6.7)$$

Podle Tvzení 6.1.3 o derivování integrálu podle (reálného) parametru je

$$J'(\rho) = i \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} (g(\rho e^{it})) dt = i \int_0^{2\pi} g'(\rho e^{it}) e^{it} dt = \frac{1}{\rho} \int_{\varphi_\rho} g'(z) dz = 0, \quad \rho \in (r_1, r_2).$$

Poslední rovnost plyne z toho, že integrál je roven rozdílu hodnot funkce g v krajních bodech uzavřené křivky φ_ρ . \square

Poznámky 6.1.5. 1. Existuje ještě jiný „názorný“ důkaz, který pro $z_0 = 0$ stručně popíšeme; pokud se však neopřeme o Obr. 6.1, je při podrobném sepsání také dost dlouhý. Je-li $r_1 < \rho < \sigma < r_2$, lze v $P(0, r_1, r)$ zvolit pravidelný n -úhelník, jehož vrcholy a počátek určují polopřímky roztínající $P(0, \rho, \sigma)$ na vzájemně podobné „křivočaré“



Obr. 6.1: Obrázek k Poznámce 6.1.5, (1)

čtyřúhelníky. Přitom n -úhelník lze volit tak, že každý z těchto čtyřúhelníků leží v jisté otevřené *konvexní* množině, v níž je funkce f holomorfní. Orientujeme-li křivky určené hranicemi těchto čtyřúhelníků vesměs kladně, pak se všechny integrály z f přes tyto křivky anulují a jejich součet se rovná součtu integrálů přes obě kružnice o poloměrech ρ, σ . Je tedy

$$\int_{\varphi_\rho} f(z) dz = \int_{\varphi_\sigma} f(z) dz .$$

2. Popíšeme ještě jiný způsob, jak dokázat, že poslední integrál v (6.7) nezávisí na ρ . Bez újmy na obecnosti opět předpokládáme, že je $z_0 = 0$. Funkce \log zobrazí „roztříznuté mezikruží“ $P(0, \rho, \sigma) \setminus (-\sigma, -\rho)$ na $(\log \rho, \log \sigma) \times (-\pi, \pi)$, přičemž uzávěr Q tohoto obdélníku je obsažen v množině $\log(P(0, r_1, r_2) \setminus (-r_2, -r_1))$. Převedeme tak integraci g na integraci $(g \circ \exp) \exp$ přes „hranici obdélníku“ v oblasti, pro kterou již Cauchyho větu máme dokázáno. Integrujeme holomorfní funkci $g(\exp w) \exp w = \tilde{g}(w)$ přes (Q) a dostaneme hodnotu 0; viz [10], str. 125.

Z předcházejícího tvrzení dostaneme **Cauchyho vzorec pro prstenec**¹⁾, který nám umožní řešit problém vyjádření funkcí ve tvaru součtů řad obecnějšího typu než jsou mocninné řady.

Věta 6.1.6. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ a nechť f je funkce holomorfní v $P(z_0, r_1, r_2)$. Je-li $\zeta \in P(z_0, r_1, r_2)$, $r_1 < \rho < |\zeta - z_0| < \sigma < r_2$, a označíme-li*

$$\varphi_\rho(t) = z_0 + \rho \exp(it), \quad \varphi_\sigma(t) = z_0 + \sigma \exp(it), \quad t \in [0, 2\pi],$$

je

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (6.8)$$

Důkaz. Princip důkazu již známe z předchozího výkladu; viz důkaz Věty 5.5.2. Definujme na $P(z_0, r_1, r_2)$ funkci F takto:

$$F(z) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}, \quad z \neq \zeta, \quad F(\zeta) = f'(\zeta).$$

Tato funkce je holomorfní v $P(z_0, r_1, r_2)$, což plyne z Lemmatu 5.5.16. Proto můžeme použít i výsledku z předchozího Lemmatu 6.1.4: Je

$$\int_{\varphi_\sigma} F(z) dz = \int_{\varphi_\rho} F(z) dz.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \left(\int_{\varphi_\sigma} \frac{dz}{z - \zeta} - \int_{\varphi_\rho} \frac{dz}{z - \zeta} \right) = 2\pi i f(\zeta),$$

neboť $\text{ind}(\varphi_\sigma, \zeta) = 1$ a $\text{ind}(\varphi_\rho, \zeta) = 0$. Tím je vzorec dokázán. \square

6.2 Laurentovy řady

V předcházejícím výkladu jsme pracovali s holomorfními funkcemi; dokázali jsme, že lze lokálně vyjádřit jako součty mocninných řad. Nyní zavedeme obecnější, tzv. *Laurentovy řady*.

¹⁾ Jiný důkaz lze nalézt např. v [38], str. 98.

Příklad 6.2.1. Funkci $f(z) = (1 - z)^{-1}$ můžeme vyjádřit ještě jinak nežli řadou $\sum z^k$.
Píšme

$$\frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - 1/z} = -\frac{1}{z} \sum \frac{1}{z^k} = -\sum \frac{1}{z^{k+1}};$$

snadno nahlédneme, že tato řada konverguje pro všechna z , pro která je $|z| > 1$, a ve všech ostatních bodech $z \in \mathbb{C}$ diverguje. Jak později ukážeme, situace s řadami tohoto typu je podobná jako u mocninných řad o středu 0: existuje takové r , $0 \leq r \leq \infty$, že řada konverguje pro všechna z , $|z| > r$, a diverguje pro všechna z , $|z| < r$.

Úmluva 6.2.2 (důležitá). Dále budeme užívat označení

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}, \quad (6.9)$$

kteří nám umožní stručný a elegantní zápis vyšetřovaných řad.

Lemma 6.2.3. *Nechť a_k , $-k \in \mathbb{N}$ a z_0 jsou komplexní čísla. Existuje právě jedno číslo r , $0 \leq r \leq \infty$ takové, že řada*

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k \quad (6.10)$$

konverguje absolutně pro všechna $z \in P(z_0, r, \infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| > r\}$ a diverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z - z_0| < r$. Pro r platí vzorec

$$r = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{-k}|^{1/k} \quad (6.11)$$

a řada (6.10) konverguje ve všech bodech množiny $P(z_0, r, \infty)$ absolutně a na množině $P(z_0, r, \infty)$ lokálně stejnoměrně a tedy i normálně.

Důkaz. Připomeňme, že mocninná řada $\sum b_k v^k$ konverguje (absolutně) pro všechna $v \in \mathbb{C}$, $|v| < R$, a diverguje pro všechna $v \in \mathbb{C}$, $|v| > R$, kde R je poloměr konvergence této řady; platí přitom Cauchy-Hadamardův vzorec (2.7)

$$R = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} \right)^{-1},$$

ve kterém klademe $1/+\infty = 0$ a $1/0 = +\infty$. Dosadíme-li za v výraz $1/(z - z_0)$ a a_{-k} za b_k , $k \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$, dostaneme řadu (6.10). Nechť $r := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}$. Řada (6.10) zřejmě absolutně konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z - z_0| > r$, a diverguje pro všechna z , pro něž $|z - z_0| < r$. Lokálně stejnoměrná konvergence plyne z Weierstrassova M-testu z Věty 1.7.5: konverguje-li (6.10) v bodě $\zeta \in P(z_0, r, \infty)$ absolutně, je řada

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} |a_k| |\zeta - z_0|^k$$

v $P(z_0, |\zeta - z_0|, \infty)$ majorantní řadou řady (6.10) a v $P(z_0, r, \infty)$ konverguje (6.10) normálně. \square

Poznámka 6.2.4. Podobně jako je tomu u mocninných řad, neplatí ani u řad (6.10) žádné obecné tvrzení o konvergenci či divergenci v bodech kružnice $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$; k ilustraci uvažujme tyto řady se středem $z_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kz^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 z^k}.$$

Všechny tři řady konvergují absolutně pro všechna $z \in \{w \in \mathbb{C}; |w| > 1\}$, avšak na množině $\{w \in \mathbb{C}; |w| = 1\}$ první z řad všude diverguje, třetí všude konverguje a druhá konverguje např. pro $z = -1$ a diverguje pro $z = 1$.

Definice 6.2.5. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Symbol

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{6.12}$$

budeme nazývat **Laurentovou řadou o středu z_0** . Čísla a_k jsou **koeficienty** Laurentovy řady. Říkáme, že tato řada konverguje v bodě $z \in \mathbb{C}$, jestliže v tomto bodě *současně konvergují* obě řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k.$$

První, resp. druhá z těchto řad se nazývá **regulární část**, resp. **hlavní část** Laurentovy řady (6.12) o středu z_0 . **Součet** Laurentovy řady definujeme vztahem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k, \tag{6.13}$$

má-li pravá strana smysl. Množinu $P(z_0, r, R)$, kde R je poloměr konvergence regulární části řady (6.12) a r je pro hlavní část řady (6.12) určeno vztahem (6.11), nazýváme v případě $r < R$ **prstencem konvergence** řady (6.12); připouštíme přitom případy $r = 0$ i $R = +\infty$. Užíváme podobnou terminologii jako u mocninných řad: pokud Laurentova řada (6.12) konverguje v $P(z_0, r_1, r_2)$ a $r_1 < r_2$, říkáme i o ní, že v každém bodě $z \in P(z_0, r_1, r_2)$ **konverguje absolutně** a že v $P(z_0, r, R)$ konverguje **lokálně stejnoměrně** a **normálně**.

Důsledek 6.2.6. *Pokud Laurentova řada konverguje v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$ s $r_1 < r_2$, je její součet holomorfní funkce v $P(z_0, r_1, r_2)$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z toho, že sčítáme holomorfní funkce v $P(z_0, r_1, r_2)$ a konvergence Laurentovy řady (6.12) v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$ je lokálně stejnoměrná. \square

Poznámka 6.2.7. Je-li $P(z_0, r, R)$ prstenec konvergence Laurentovy řady (6.12) a $r < r_1 < r_2 < R$, je její konvergence na $P(z_0, r_1, r_2)$ dokonce stejnoměrná. Prstenec konvergence Laurentovy řady (6.12) je maximální v tom smyslu, že na komplementu jeho uzávěru již řada (6.12) všude diverguje.

Tak, jako jsme získali lokální reprezentovatelnost holomorfních funkcí pomocí Taylorových rozvoji, budeme nyní podobně pracovat s funkcemi lokálně reprezentovatelnými Laurentovými řadami. Zdánlivě nepříliš významné zobecnění reprezentace pomocí Laurentových řad má významné důsledky. Podstatné je dokázat nejprve analogické tvrzení o existenci a jednoznačnosti Laurentova rozvoje.

6.3 Vyjádření funkce Laurentovu řadou

Doporučujeme čtenáři, aby si před studiem Věty 6.3.1 připomněl Příklad 2.3.9. Důkaz provedeme podrobně, i když jsme něco podobného již dělali. Jako speciální případ zahrnuje totiž vyjádření Taylorovou řadou, s nímž se čtenář setkal již dříve.

Věta 6.3.1 (Laurent, Cauchy 1843*). *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, a nechť f je funkce holomorfní v $P(z_0, r_1, r_2)$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada se středem z_0 a s koeficienty a_k , $k \in \mathbb{Z}$, tak, že platí rovnost*

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (\zeta - z_0)^k, \quad \zeta \in P(z_0, r_1, r_2).$$

Je-li $\rho \in (r_1, r_2)$ a definujeme-li $\varphi_\rho(t) = z_0 + \rho \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, platí pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz. \quad (6.14)$$

Důkaz. Nejprve budeme předpokládat, že funkce f je vyjádřena v $P(z_0, r_1, r_2)$ Laurentovou řadou

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in P(z_0, r_1, r_2). \quad (6.15)$$

Řada konverguje v $P(z_0, r_1, r_2)$ lokálně stejnoměrně a na geometrickém obrazu $\langle \varphi_\rho \rangle$ konvergují regulární i hlavní část řady (6.15) stejnoměrně. Tato stejnoměrná konvergence na $\langle \varphi_\rho \rangle$ zůstane zachována, násobíme-li řadu člen po členu omezenou funkcí $(z - z_0)^{-(n+1)}$:

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1}, \quad z \in \langle \varphi_\rho \rangle.$$

Tuto novou řadu lze tedy integrovat „člen po členu“, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^{n+1-k}} \right) dz = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{a_k}{(z-z_0)^{n+1-k}} dz . \end{aligned}$$

Právě uvedené integrandy mají kromě případu $k = n$ všechny primitivní funkce na $P(z_0, r_1, r_2)$, takže se anulují všechny členy řady, ve kterých je $k \neq n$. Zbývající člen je roven a_n , tj.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = a_n ;$$

pokud existují, jsou koeficienty a_n Laurentovy řady funkce f určeny funkcí f jednoznačně.

Existenci Laurentova rozvoje funkce f dokážeme pomocí Cauchyho vzorce pro mezikruží z Věty 6.1.6. Zvolíme $\zeta \in P(z_0, r_1, r_2)$ a pak poloměry kružnic ρ a σ tak, aby

$$r_1 < \rho < |\zeta - z_0| < \sigma < r_2 .$$

Podle vzorce (6.8) je

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz - \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz \right) . \quad (6.16)$$

V integrálech v (6.16) je integrand stejný. Vyjádříme ho pomocí geometrických řad; viz Příklad 2.3.9. V prvním případě je $|z - z_0| = \sigma$, a pro všechna ζ , pro něž je $|\zeta - z_0| < \sigma$, dostáváme rovnost

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} ,$$

příčemž řada vpravo konverguje stejnoměrně vzhledem k z na $\langle \varphi_\sigma \rangle$, neboť pro $z \in \langle \varphi_\sigma \rangle$ je $|\zeta - z_0|/|z - z_0| = |\zeta - z_0|/\sigma < 1$. Proto po násobení funkcí f omezenou a spojitou na $\langle \varphi_\sigma \rangle$ dostaneme opět stejnoměrně konvergentní řadu, kterou lze „integrovat člen po členu“; tím dostaneme

$$\int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz = \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta - z_0)^k \int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz .$$

Podobně postupujeme ve druhém případě, kdy je $|z - z_0| = \rho$, navíc však ještě transformujeme sčítací index: klademe $k + 1 = -j$, takže $j < 0$, a pak ještě položíme $j = k$. Pro všechna ζ , pro něž je $|\zeta - z_0| > \rho$, platí rovnosti

$$-\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^{-j-1}}{(\zeta - z_0)^{-j}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} ;$$

řada konverguje stejnoměrně na $\langle \varphi_\rho \rangle$, protože pro všechna $z \in \langle \varphi_\rho \rangle$ lze odhadnout $|z - z_0|/|\zeta - z_0| = \rho/|\zeta - z_0| < 1$. Opět násobíme funkcí f spojitou a omezenou na $\langle \varphi_\rho \rangle$ a integrujeme člen po členu, čímž analogicky dostaneme

$$-\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\zeta - z_0)^k \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz .$$

Protože je funkce $f(z)/(z - z_0)^{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$ holomorfní v $P(z_0, r_1, r_2)$, podle Lemmatu 6.1.4 pro každé $\rho_1 \in (r_1, r_2)$ je

$$\int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz ,$$

z čehož po dosazení do (6.16) a sečtení dostáváme vzorec

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz ,$$

kteřý se shoduje s tvrzením věty a po zjednodušení označení záměnou ρ za ρ_1 se vzorcem (6.14). \square

Poznámka 6.3.2. Jinak řečeno, pro součty f Laurentových řad tvaru (6.15) v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$ jsme našli tvar prostého zobrazení $f \mapsto \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, které přiřazuje funkci f koeficienty „její“ Laurentovy řady. Je-li $r_1 = 0$ a f má holomorfní rozšíření na $U(z_0, r_2)$, jsou koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ Laurentovy řady podle dokázané Věty 6.3.1 zároveň koeficienty její Taylorovy řady. Protože je kruh přípustná množina a integrandy ve vzorci pro výpočet a_{-n} , $n \in \mathbb{N}$, jsou holomorfní funkce, je $a_{-n} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice 6.3.3. Je-li f součtem Laurentovy řady (6.12) v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, potom říkáme, že řada (6.12) je **Laurentovým rozvojem funkce f v $P(z_0, r_1, r_2)$** . Podobně též nazýváme součet regulární části řady **regulární část funkce f v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$** a součet hlavní části řady **hlavní část funkce f v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$** .

Příklad 6.3.4. Čtenář si snad již povšiml, že funkce f může mít více navzájem různých Laurentových rozvoju se stejným středem, jejichž mezikruží konvergence jsou disjunktní. To je důležité při formulaci úloh, neboť Laurentův rozvoj funkce závisí v uvedeném smyslu nejenom na středu řady z_0 , ale i na prstenci, v němž rozvoj máme nalézt. Tak např. funkce $f(z) := 1/(1 - z)$ má dva Laurentovy rozvoje o středu 0, z nichž jeden konverguje v $U(0, 1)$ a je zároveň Taylorovým rozvojem f o středu 0, a druhý je Laurentovým rozvojem v $P(0, 1, \infty)$; srovnejte s Příkladem 6.2.1 (1).

6.4 Singularity holomorfních funkcí

Definice 6.4.1. Nechť f je funkce holomorfní v prstencovém okolí $P(z_0, r)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ pro nějaké $r \in \mathbb{R}_+$, avšak *není* holomorfní v bodě z_0 . Potom říkáme, že bod

z_0 je **izolovaným singulárním bodem** nebo **izolovanou singularitou** funkce f ; zdůrazňujeme, že pracujeme s prstencem o nulovém „vnitřním“ poloměru.

Příklady 6.4.2. Ukazuje se, že izolované singularity mohou být různých typů; uvedme několik jednoduchých příkladů:

1. Funkce $f(z) = (\exp(z) - 1)/z$ *není definována* v bodě $z = 0$, avšak má v tomto bodě limitu: Tato limita je rovna $\exp'(0) = \exp(0) = 1$. Z Důsledku 5.5.12 vyplývá, že f bude holomorfní v \mathbb{C} , pokud položíme $f(0) = 1$. Je-li f definována v bodě 0, avšak $f(0) \neq \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, stane se f holomorfní v \mathbb{C} , pokud hodnotu f v bodě 0 změníme a položíme $f(0) = 1$.
2. Pokud je $f(z) = 1/z$, pak je bod 0 opět izolovanou singularitou f . Opět existuje limita $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, ta je však rovna ∞ .
3. Funkce $f(z) = \sin(1/z)$ má také izolovanou singularitu v bodě 0, avšak tentokrát *neexistuje limita* $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$. Stačí si uvědomit, že restrikce g funkce f na \mathbb{R} je *reálná* funkce, pro kterou neexistuje $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, protože neexistuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin t$.

Předcházející příklady v jistém smyslu ilustrují všechny možnosti, které mohou pro izolované singulární body nastat. To v této části zpřesníme a také dokážeme. Uvedme ještě příklad stejného typu jako v předcházejícím případě; využijeme tentokrát větu o jednoznačnosti. Definujme $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $f(0) = 0$. Potom je f holomorfní v $\mathbb{P} = P(0, \infty)$, ale ne v bodě 0. Bod 0 je hromadným bodem posloupnosti $\{1/n\pi\}_{n=1}^{\infty}$, tedy nulových bodů f a kdyby byla f holomorfní i v bodě 0, plynulo by odtud podle věty o jednoznačnosti $f \equiv 0$ v \mathbb{C} , což vede ke sporu. Přitom restrikce $f|_{\mathbb{R}}$ má všude v \mathbb{R} derivaci! Je užitečné si povšimnout, že

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 \sin(1/z) - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} z \sin(1/z)$$

v \mathbb{C} neexistuje (čtenář by si měl uvědomit rozdíl mezi chováním v \mathbb{R} a \mathbb{C}).

Lemma 6.4.3. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, necht f je holomorfní a omezená v jistém $P(z_0)$. Potom existuje konečná limita $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ a definujeme-li $f(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, stane se f holomorfní funkcí v příslušném okolí $U(z_0)$. Speciálně je Laurentův rozvoj f o středu z_0 roven Taylorovu rozvoji rozšířené f o středu z_0 , a hlavní část Laurentova rozvoje je tedy nulová funkce.*

Důkaz. Definujme $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$, $z \in P(z_0)$ a $g(z_0) = 0$. Podle definice snadno spočteme, že $g'(z_0) = 0$, a g je tedy holomorfní v $U(z_0)$. Podle Věty 5.5.3 o vyjádření holomorfní funkce Taylorovou řadou a s přihlédnutím k tomu, že je $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, existují koeficienty $a_k \in \mathbb{C}$ tak, že je

$$g(z) = (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^2 f(z).$$

Proto je f po spojitém rozšíření hodnotou $f(z_0) = a_0$ holomorfní v $U(z_0)$ a hlavní část jejího Laurentova rozvoje je rovna nule. \square

Poznámka 6.4.4. Vidíme, že funkce je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, je-li holomorfní v nějakém $P(z_0)$ a spojitá a konečná v z_0 (nestačí spojitá v rozšířeném smyslu!). Porovnáme-li to s Definicí 3.3.3, máme nyní možnost jednotného popisu: Funkce je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$, pokud je holomorfní v nějakém $P(z_0)$ a spojitá a konečná v z_0 .

Lemma 6.4.5. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, nechť f je holomorfní v jistém $P(z_0)$ a nechť $p \in \mathbb{N}$ má tu vlastnost, že limita funkce $g(z) := (z - z_0)^p f(z)$ v bodě z_0 je konečná a nenulová. Potom je hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v $P(z_0)$ nenulová a je polynomem stupně p , v $1/(z - z_0)$. Přitom je $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.*

Důkaz. Z předpokladů a Lemmatu 6.4.3 plyne, že funkci g lze holomorfně rozšířit z $P(z_0)$ na příslušné $U(z_0)$ tak, že $g(z_0) \neq 0$. Funkci g lze rozvinout v Taylorovu řadu

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

ve které je $a_0 \neq 0$. V $P(z_0)$ je tedy

$$f(z) = (z - z_0)^{-p} g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-p} = \sum_{k=-p}^{\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

kde $b_k = a_{k+p}$, $k = -p, -p+1, \dots$. Protože je $a_0 \neq 0$, je též $b_{-p} = a_0 \neq 0$, a hlavní část f je nenulová; má však konečný počet nenulových členů a má tvar $h(1/(z - z_0))$, kde h je polynom stupně p . Součin $(z - z_0)^{-p} g(z) = f(z)$ má pro $z \rightarrow z_0$ limitu ∞ . \square

Z početního hlediska je užitečné zavést i Laurentův rozvoj o středu ∞ , neboť se pomocí něj dají zjednodušit některé výpočty. Nemá pro nás zásadní teoretický význam, ukazuje však, že výjimečnost bodu ∞ je jen zdánlivá, a že lze pro něj nalézt vcelku snadno cestu k jistému „zrovnoprávnění“ s body z \mathbb{C} .

Poznámka 6.4.6 (Laurentova řada v $P(\infty)$). Nechť pro $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ obě řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_k}{z^k} := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$$

konvergují na nějakém $P(\infty, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}; r_2^{-1} < |z| < r_1^{-1}\}$. Potom

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{z^n}; \quad (6.17)$$

symbol v (6.17) vlevo nazýváme **Laurentovou řadou o středu ∞ v $P(\infty, r_1, r_2)$** . První z řad na pravé straně (6.17) je její **regulární část** a druhá její **hlavní**

část. Označíme-li f součet této Laurentovy řady, je řada (6.17) **Laurentovým rozvojem funkce f o středu ∞ v prstenci $P(\infty, r_1, r_2)$** . Čtenář by si měl povšimnout, že u formálně shodného Laurentova rozvoje o středu 0 odpovídá jeho hlavní část regulární části „u nekonečna“; regulární části u 0 podobně odpovídá hlavní část u ∞ . „Absolutní“ člen a_0 patří vždy k regulární části rozvoje. Zřejmě též je $P(\infty, r_1, r_2) = P(0, (r_2)^{-1}, (r_1)^{-1})$.

Věta 6.4.7 (Casorati 1868, Weierstrass 1876). *Nechť je funkce f holomorfní v jistém okolí $P(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, a nechť $f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, $z \in P(z_0)$. Potom nastává právě jedna z těchto tří možností:*

- (1) *Funkce f je omezená v nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0 ; pak existuje v \mathbb{C} limita $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ a po spojitém rozšíření funkce f touto limitou v bodě z_0 je f holomorfní v $U(z_0)$. Hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v $P(z_0)$ je identicky rovna 0.*
- (2) *Funkce f má limitu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Hlavní část Laurentova rozvoje f v $P(z_0)$ má pouze konečný nenulový počet nenulových koeficientů a_k .*
- (3) *Pro každé $\rho > 0$ je $\overline{f(P(z_0, \rho))} = \mathbb{S}$, tj. obraz $f(P(z_0, \rho))$ „libovolně malého“ prstencového okolí $P(z_0, \rho)$ je množina hustá v \mathbb{S} . Hlavní část Laurentova rozvoje v $P(z_0)$ má nekonečně mnoho nenulových koeficientů.*

Důkaz. Ukážeme, že pokud nenastane (3), nastane právě jedna z možností (1) či (2). Jestliže je pro nějaké $\rho \in \mathbb{R}_+$ uzavřená množina $M := \overline{f(P(z_0, \rho))}$ vlastní podmnožinou \mathbb{S} , je $\mathbb{S} \setminus M$ neprázdná otevřená množina. Existuje tedy $w_0 \in \mathbb{C} \setminus M$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(w_0, \varepsilon) \cap M = \emptyset$. Potom na prstencovém okolí $P(z_0, \rho)$ dostaneme pro funkci $g(z) := (f(z) - w_0)^{-1}$ odhad

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Funkce $g \neq 0$ splňuje předpoklady Lemmatu 6.4.3 a lze ji tedy po spojitém rozšíření do bodu z_0 rozvést v Taylorovu řadu o středu z_0 ; je

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k.$$

Je-li $p \geq 0$ nejmenší index, pro nějž je $c_p \neq 0$, je

$$g(z) = \sum_{k=p}^{\infty} c_k(z - z_0)^k = (z - z_0)^p \sum_{k=p}^{\infty} c_k(z - z_0)^{k-p} = (z - z_0)^p h(z),$$

kde $h(z_0) = c_p \neq 0$. Existuje tedy okolí $U(z_0, \rho_1)$ takové, že funkce h je holomorfní a všude různá od 0 na $U(z_0, \rho_1)$. Funkce $1/h$ je na tomto okolí holomorfní a lze ji

tedy rozvést v Taylorovu řadu o středu z_0 . Nechť je

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k, \quad z \in U(z_0, \rho_1),$$

kde $b_0 = 1/c_p \neq 0$. Pak však v $P(z_0, \rho_1)$ platí rovnosti

$$f(z) - w_0 = \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^{k-p} = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

Je tedy $a_{-p} = b_0 \neq 0$, a hlavní část rozvoje f v Laurentovu řadu je tvaru $P(1/(z - z_0))$, kde P je polynom stupně $p \in \mathbb{N}_0$. V závislosti na tom, zda $p > 0$ či $p = 0$, nastane případ (2) či (1), a v hlavní části je tedy jen konečný počet nenulových koeficientů.

Obráceně, pokud má hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v bodě z_0 pouze *konečný* počet nenulových koeficientů, existuje podle Lemmatu 6.4.3 a Lemmatu 6.4.5 konečná nebo nekonečná $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, a zřejmě je $\mathbb{C} \setminus f(P(z_0, \rho)) \neq \emptyset$ pro každé dostatečně malé $\rho > 0$. \square

Definice 6.4.8. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a necht

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

je její Laurentův rozvoj v nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$. Nastane-li případ (1) z předcházející Věty 6.4.7, říkáme, že z_0 je **odstranitelnou singularitou** funkce f . Nastane-li případ (2), existuje nejmenší $p \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-p} \neq 0$ a bod z_0 nazýváme **pólem řádu p** nebo **p -násobným pólem** funkce f . V případě (3) říkáme, že bod z_0 je **podstatnou singularitou** funkce f .

V této souvislosti je užitečné definovat analogické pojmy i pro bod ∞ .

Definice 6.4.9. Jestliže je f definována na nějakém $P(\infty)$, pak říkáme, že **bod ∞ je odstranitelná singularita**, resp. **pól násobnosti p** , resp. **podstatná singularita funkce f** , je-li bod 0 odstranitelnou singularitou, resp. pólem násobnosti p , resp. podstatnou singularitou funkce $f(1/z)$, definované v nějakém $P(0)$.

Poznámka 6.4.10. Definice je velmi přirozená v následujícím smyslu: Nechť je funkce f holomorfní v nějakém $P(\infty)$. Potom je bod ∞ odstranitelnou singularitou funkce f , pokud existuje konečná $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. Pokud je $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ a $a_{-p} \neq 0$ pro nějaké $p \in \mathbb{N}$, ale $a_{-k} = 0$ pro všechna $k > p$, je bod ∞ pólem řádu p funkce f . Pokud tato limita neexistuje, má f v bodě ∞ podstatnou singularitu. Zároveň je vhodné rozšířit tuto analogii i na nulové body funkce f : Bod ∞ je **nulovým bodem funkce f násobnosti p** , je-li bod 0 nulovým bodem násobnosti p funkce $g(z) := f(1/z)$, $z \in P(\infty)$, $g(0) := 0$.

Příklad 6.4.11. Funkci $f(z) = (\exp z - 1)/z^4$ snadno rozvineme v Laurentovu řadu o středu 0. Je

$$\frac{\exp z - 1}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-4}}{k!}, \quad z \in \mathbb{P}.$$

Regulární část tohoto rozvoje $R(z)$ a jeho hlavní část $H(z)$ tvoří řady

$$R(z) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{z^{k-4}}{k!} = \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \dots, \quad \text{a}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^3 \frac{z^{k-4}}{k!} = \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^3}.$$

Rozvoj v prstenci konvergence $P(\infty, 0, +\infty) = \mathbb{P}$ je formálně stejný, avšak tentokrát regulární část rozvoje $R(z)$ a hlavní část rozvoje $H(z)$ tvoří řady

$$R(z) = \sum_{k=1}^4 \frac{z^{k-4}}{k!} = \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^3},$$

$$H(z) = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{z^{k-4}}{k!} = \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \dots.$$

V bodě 0 má tedy f pól řádu 3 a v ∞ podstatnou singularitu. Snadno nahlédneme, že je $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$, zatímco

$$\lim_{x \rightarrow +\infty, x \in \mathbb{R}} f(x) = \infty, \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty, x \in \mathbb{R}} f(x) = 0,$$

což koresponduje s tím, že singularita v bodě ∞ je podstatná. Tomu též odpovídá korespondence s chováním v bodě 0: funkce

$$\begin{aligned} \frac{\exp(z^{-1}) - 1}{(z^{-1})^4} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^4}{z^k (k!)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^{k-4} (k!)} = \\ &= \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{1!} z^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k (k+4)!} \end{aligned}$$

má v bodě 0 podstatnou singularitu.

Příklad 6.4.12. Má-li celá funkce v bodě ∞ odstranitelnou singularitu nebo je v nějakém prstencovém okolí bodu ∞ omezená, je zřejmě omezená na \mathbb{C} a je podle Liouvilleovy věty konstantní.

Jestliže pro ni existuje $K \in (0, +\infty)$ takové, že na nějakém prstencovém okolí bodu ∞ platí pro $n \in \mathbb{N}$

$$|f(z)| \leq K |z|^n.$$

Pak však Laurentův rozvoj funkce $f(z)/z^n$ v prstencovém okolí bodu ∞ má nulovou hlavní část a je pro všechna $z \in \mathbb{P}$ tvaru

$$\sum \frac{c_k}{z^k}.$$

Proto je $f(z) = c_0 z^k + c_1 z + \dots + c_{n-1} z + c_n + c_{k+1} z^{-1} + c_{k+2} z^{-2} + \dots$ a protože tento Laurentův rozvoj je s ohledem na jednoznačnost rozvojem $f \in H(\mathbb{C})$ na \mathbb{C} , je $c_k = 0$ pro všechna $k \geq n$ a f je polynom stupně nejvýše n -tého. Srovnej též s Lemmatem 5.7.6.

Netriviální celé funkce jsou tedy vždy součty nekonečných mocninných řad tvaru $\sum a_k z^k$ a mají v bodě ∞ podstatnou singularitu.

Věta 6.4.13. *Nechť f je holomorfní funkce v jistém okolí $P(z_0)$ a nechť $z_0 \in \mathbb{S}$ je nulovým bodem, resp. pólem funkce f násobnosti p . O souvislostech nulových bodů a pólů funkce f a pólů a nulových bodů funkce $1/f$ v bodě z_0 platí:*

- (1) *Je-li $p \in \mathbb{N}$ a z_0 je p -násobným nulovým bodem f , pak je z_0 p -násobným pólem funkce $1/f$.*
- (2) *Je-li $p \in \mathbb{N}$ a z_0 je p -násobným pólem f , pak je z_0 odstranitelnou singularitou funkce $1/f$; po rozšíření $1/f$ spojitě do bodu z_0 je tento bod p -násobným nulovým bodem funkce $1/f$.*
- (3) *Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ p -násobným nulovým bodem funkce f , je $(p-1)$ -násobným nulovým bodem funkce f' .*
- (4) *Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ p -násobným pólem funkce f , potom je $(p+1)$ -násobným pólem funkce f' .*

Důkaz. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in P(z_0)$ a že v $P(z_0)$ má f Laurentův rozvoj

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^p \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+p} (z - z_0)^k, \quad a_p \neq 0, \quad (6.18)$$

pro nějaké $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Označme $h(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+p} (z - z_0)^k$, $z \in U(z_0)$. Potom $1/h(z) \neq 0$ v $U(z_0)$, funkce $1/h(z)$, $z \in U(z_0)$, je holomorfní v $U(z_0)$ a je součtem své Taylorovy řady o středu z_0 . Pro $g(z) = 1/f(z)$ snadno dostaneme

$$g(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-p} (z - z_0)^k, \quad b_{-p} = 1/a_p \neq 0.$$

Odtud vyplývají tvrzení (1) a (2). Derivaci $f'(z)$ dostaneme přímým výpočtem a je v $P(z_0)$ rovna výrazu:

$$p(z - z_0)^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+p} (z - z_0)^k + (z - z_0)^p \sum_{k=1}^{\infty} k a_{k+p} (z - z_0)^{k-1}, \quad a_p \neq 0. \quad (6.19)$$

Pro $p \in \mathbb{N}$ z (6.19) dostaneme (3) a pro $-p \in \mathbb{N}$ analogicky obdržíme (4). V případě, že $z_0 = \infty$ se analogicky vyšetří funkce $f(1/z)$ v okolí bodu 0. \square

S funkcemi, které jsou holomorfní „skoro na celé množině G “, budeme často pracovat. Proto k zestručnění užíváme následující úmluvu:

Úmluva 6.4.14. Funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ **až na množinu** $M \subset G$ vždy znamená, že M je uzavřená množina izolovaná v G a f je holomorfní na $G \setminus M$, ale není holomorfní v *žádném bodě* M . Pokud nebude řečeno něco jiného, budeme všechny odstranitelné singularities funkcí považovat za „odstraněné“, tj. je-li f funkce s izolovanými singulárními body v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, nahradíme ji vždy rozšířením z $G \setminus M$ (označení f ponecháme) pomocí limity

$$f : z \mapsto \lim_{w \rightarrow z} f(w)$$

ve všech bodech $z \in M$, ve kterých tato limita existuje a je konečná²⁾. Izolovanými singulárními body jsou tedy dále *vždy póly nebo podstatné singularity*.

6.5 l'Hospitalovo pravidlo

Úvahy, které jsme použili při důkazu Věty 6.4.13 nyní užijeme ještě k důkazu komplexní varianty l'Hospitalova pravidla, která je formálně jednodušší než v „reálném případě“, a která je užitečná pro některé výpočty:

Tvrzení 6.5.1 (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť funkce f, g jsou holomorfní v nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, a nechť z_0 je izolovaný nulový bod obou funkcí f, g . Potom existují obě následující limity a platí rovnost*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Důkaz. Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$, existují holomorfní funkce f_1, g_1 nenabývající hodnoty 0 v nějakém $U(z_0)$, a $p, q \in \mathbb{N}$ tak, že

$$f(z) = (z - z_0)^p f_1(z), \quad g(z) = (z - z_0)^q g_1(z), \quad z \in P_1(z_0).$$

Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{p-q} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}, \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - z_0)^{p-q} \frac{p f_1(z) + (z - z_0) f_1'(z)}{q g_1(z) + (z - z_0) g_1'(z)},$$

²⁾ Jak později uvidíme, analogické rozšíření je někdy užitečné provést i v těch bodech, které jsou *póly* funkce f .

z čehož pro $p - q > 0$ vyplývá, že limity obou výrazů jsou nulové, kdežto pro $p - q < 0$ jsou rovny ∞ . Je-li $p - q = 0$, tj. $p = q$, je

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{pf_1(z) \pm (z - z_0)f_1'(z)}{pg_1(z) \pm (z - z_0)g_1'(z)} = \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)},$$

čímž je důkaz tvrzení dokončen. \square

Poznámka 6.5.2. Tvrzení platí i pro případ, že f, g mají v bodě z_0 pól, ale nemá praktický význam: řád pólu funkcí f, g se derivováním zvyšuje a tak nedochází k žádoucímu zjednodušení výrazu $f(z)/g(z)$.

Poznámka 6.5.3. Čtenář by si měl rozmyslit, co z Věty 6.4.13 vyplývá pro operace s funkcemi, které mají v nějakém bodě z_0 odstranitelnou singularitu nebo pól, tj. pro něž hlavní část Laurentova rozvoje v tomto bodě má pouze konečný počet nenulových koeficientů³⁾.

Jsou-li $f, g \in H(P(z_0))$ a f, g mají v bodě z_0 nejvýše pól, pak také $f \pm g$ a fg leží v $H(P(z_0))$ a tyto funkce mají v bodě z_0 nejvýše pól. Pro případ f/g musíme vyloučit možnost $g \equiv 0$ na nějakém $P(z_0)$. Pak bod z_0 může být pouze *izolovaným nulovým bodem* funkce g a po eventuálním zmenšení prstencového okolí lze předpokládat, že $g(z) \neq 0$ pro všechna $z \in P(z_0)$. V takovém případě má funkce f/g v z_0 *opět nejvýše pól*. Není obtížné zformulovat kvantitativní tvrzení typu: *Má-li f v bodě z_0 pól (nulový bod) násobnosti p a funkce g pól (nulový bod) násobnosti q , potom $f \pm g, \dots$ má v bodě $z_0 \dots$* Tuto situaci však v konkrétním případě řešíme ad hoc pro příslušné f, g a obecné tvrzení nebudeme ani formulovat.

6.6 Ještě o singularitách

Začneme jednoduchým pozorováním: víme již, že pro všechna $|z| < 1$ je

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum z^k, \quad z \in U(0, 1).$$

Funkce $f^*(z) = (1 - z)^{-1}$, která je definována v $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, je nám důvěrně známa, a tak lze snadno „uhodnout“ tvar její Taylorovy řady: lze ji pro každý bod $z_0 \neq 1$ vyjádřit v $U(z_0, |1 - z_0|)$ mocninnou řadou

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(1 - z_0)^{k+1}}.$$

Všimněme si nyní restrikce $f := f^*|U(0, 1)$: pro každé $z_0 \neq 1, |z_0| = 1$, existuje v nějakém okolí $U(z_0)$ funkce $g \in H(U(z_0))$ tak, že restrikce obou funkcí g a f na $U(z_0) \cap U(0, 1)$ splývají. Jinak řečeno, f lze „holomorfně rozšířit“ z $U(0, 1)$ do bodu z_0 . Výjimkou je jediný bod na konvergenční kružnici, a to bod 1. Body tohoto typu budeme dále (alespoň ve speciálních případech) studovat.

³⁾ Často se užívá pro tuto situaci vyjádření „mají nejvýše pól v z_0 “.

Definice 6.6.1. Nechť funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ s neprázdnou hranicí ∂G . Potom k bodu $\zeta \in \partial G$ může existovat okolí $U(\zeta)$ a funkce $f_1 \in H(G \cup U(\zeta))$ taková, že $f_1 = f$ na G , tj. f lze „rozšířit holomorfně“ na otevřenou množinu G_1 , $G \subset G_1$, takovou, že $\zeta \in G_1$. Jestliže tento případ *nenastane*, nazýváme bod $\zeta \in \partial G$ **singulárním bodem** nebo kratěji **singularitou** funkce f . Jestliže neexistuje žádná otevřená množina $G_1 \neq G$, $G \subset G_1$, a funkce g holomorfní v G_1 taková, že $g|_G = f$, nazývá se hranice ∂G **přirozenou hranicí funkce f** .

Poznamenejme, že definice zobecňuje dříve uvedenou definici izolovaného singulárního bodu; ten je ve smyslu předchozí definice singulárním bodem (pokud neuvažujeme odstranitelné singularity).

Příklady 6.6.2. 1. Funkce $f(z) := (1-z)^{-1}$ má singulární bod 1. Je totiž $\lim_{z \rightarrow 1} = \infty$ a funkce holomorfní v bodě 1 by musela mít v bodě 1 *limitu* v \mathbb{C} . Součet geometrické řady $f_1(z) := \sum z^k$, který je definován pouze v $G = U(0, 1)$, má na hranici ∂G jediný singulární bod 1.

2. Funkce $f(z) := (1+z^2)^{-1}$ má dva izolované singulární body $\zeta = \pm i$; její restrikce $f_1 := f|_{U(0, 1)}$, která je součtem mocninné řady $\sum (-1)^k z^{2k}$, má proto rovněž dva singulární body na jednotkové kružnici. Tyto příklady nás mohou vést k domněnce, že pro funkci, která je součtem mocninné řady v konvergenčním kruhu $U(z_0, R)$, $R \in \mathbb{R}_+$, leží na hranici $\partial U(z_0, R)$ vždy bod, v němž je limita vzhledem k $U(z_0, R)$ rovna ∞ . Jak ukáže následující příklad, není tato domněnka správná.

3. Funkce $f(z) := \sum z^{k+1}/(k+1)^2$ je definována a je spojitá na $\overline{U(0, 1)}$, přestože je poloměr konvergence řady opět roven 1. Jak se snadno ukáže, na hranici $\partial U(z_0, r)$ kruhu konvergence mocninné řady musí však vždy ležet *alespoň jeden* singulární bod jejího součtu; viz následující Věta 6.6.3.

Věta 6.6.3. *Nechť $f(z) := \sum a_k(z-z_0)^k$ v $U(z_0, R)$, kde $R \in \mathbb{R}_+$ je poloměr konvergence řady vpravo. Potom na hranici kruhu konvergence řady leží alespoň jeden singulární bod funkce f .*

Důkaz. Dokážeme, že pokud takový singulární bod na $K := \partial U(z_0, R)$ neexistuje, řada konverguje na $U(z_0, R_1)$ s $R_1 > R$ a R nemůže tedy být jejím poloměrem konvergence. Pišme zkráceně U místo $U(z_0, R)$. Nechť pro každé $\zeta \in K$ existuje okolí $U(\zeta)$ a funkce $f_\zeta \in H(U(\zeta))$ splývající s f na U . Tato okolí a funkce pevně zvolíme a položíme $G := U \cup \bigcup_{\zeta \in K} U(\zeta)$. Pro každý bod $z \in G \setminus U$ zvolíme ζ tak, že $z \in U(\zeta)$ a položíme $g(z) := f_\zeta(z)$; pro $z \in U$ definujeme $g(z) := f(z)$. Aby tato definice byla korektní, musíme ukázat, že pro $\zeta, \eta \in K$, pro něž existuje $z \in (U(\zeta) \cap U(\eta)) \setminus U$, je $f_\zeta(z) = f_\eta(z)$. V tom případě však existuje na úsečce $[\zeta; \eta]$ její část $M \subset U \cap U(\zeta) \cap U(\eta)$ tak, že $M' = M$ (všechny její body jsou hromadnými body M) a je

$$f_\zeta(w) = f(w) = f_\eta(w), \quad w \in M.$$

Z Věty 5.7.1 o jednoznačnosti plyne $f_\zeta(w) = f_\eta(w)$ pro každý bod $w \in U(\zeta) \cap U(\eta)$

a tedy i $f_\zeta(z) = f_\eta(z)$. Funkce g je rozšířením funkce f na G a $g \in H(G)$. Dále $U \cup K \subset G$, a proto existuje $R_1 > R$ tak, že Taylorova řada pro g (a tedy i pro f) o středu z_0 konverguje všude v $U(z_0, R_1)$. \square

Poznámka 6.6.4. Je-li f definována na otevřené množině G a je-li ∂G přirozenou hranicí funkce f , jsou všechny body ∂G singularitami f . Nabízí se přirozená otázka, zda je přirozená hranice vždy izolovanou podmnožinou \mathbb{C} (jako např. u funkce tg nebo cotg), nebo může-li to být např. i celá hranice jednotkového kruhu G . V takovém případě bude funkce f součtem své Taylorovy řady o středu 0. Ukazuje se, že sestavení takové funkce není složité. Konstrukci popisuje následující příklad.

Příklad 6.6.5. Uvažujme funkci f , definovanou v $U(0, 1)$ mocninnou řadou

$$f(z) := \sum z^{2^k} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

Užijeme Cauchy-Hadamardův vzorec a zjistíme, že řada má poloměr konvergence $R = 1$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a takové ζ , aby platilo $(\zeta)^{2^n} = 1$; těchto ζ je 2^n a jsou rozloženy na hranici $\partial U(0, 1)$ tak, že tvoří vrcholy pravidelného 2^n -úhelníku. Pro každé $t \in (0, 1)$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, je $(t\zeta)^{2^k} = t^{2^k}$, takže řady pro $f(t\zeta)$ a pro $f(t)$ se liší *nejvýše v prvních n členech*.

Pro speciálně zvolenou posloupnost $t_j := (1/2)^{1/2^j}$, $j \in \mathbb{N}$, je $t_j \in (0, 1)$, $t_j \rightarrow 1$, a přitom

$$f(t_j) > \sum_{k=0}^j (t_j)^{2^k} > (j+1)(t_j)^{2^j} = (j+1)(1/2) \rightarrow \infty.$$

Reálná funkce $f(t)$, $t \in (0, 1)$, je rostoucí na intervalu $(0, 1)$, proto odtud vyplývá $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \infty$; odtud dále plyne $\lim_{t \rightarrow 1^-} |f(t\zeta)| = \infty$. Množina vrcholů všech pravidelných n -úhelníků o středu 0 s vrcholy na $\partial U(0, 1)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tvoří hustou podmnožinu hranice $\partial U(0, 1)$. Ukázali jsme tak, že v husté množině bodů ζ na jednotkové kružnici neexistuje konečná limita (vzhledem k úsečce $[0; \zeta]$) funkce f , takže všechny body jednotkové kružnice jsou singulární.

Cvičení

1. Kolik různých Laurentových rozvoju v bodě 0 má funkce

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}?$$

Určete tyto rozvoje spolu s příslušnými prstenci, ve kterých tyto rozvoje konvergují!

[Rozvoje jsou tři:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} z^k \quad \text{v okolí } U(0, 1),$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \quad \text{v prstenci } P(0, 1, 2),$$

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-1} - 1}{z^k} \quad \text{v prstenci } P(0, 2, \infty).]$$

2. Určete Laurentův rozvoj funkce f v prstencovém okolí bodu i s vnitřním poloměrem 0 a maximálním vnějším poloměrem

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}!$$

[Rozvoj je tvaru

$$f(z) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{1}{4} \frac{i}{z-i} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (k+3)}{2^{k+4}} (z-i)^k, \quad z \in P(i, 0, 2).$$

3. Určete Laurentův rozvoj funkce f v prstencích $P(2, 0, \sqrt{5})$ a $P(0, 1, 2)$ pro

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}!$$

[Hledané rozvoje jsou

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2+i)^{k+1} - (2-i)^{k+1}}{5^{k+1}} (z-2)^k \quad \text{v prstenci } P(2, 0, \sqrt{5}), \text{ a}$$

$$f(z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} \quad \text{v prstenci } P(0, 1, 2).]$$

4. Najděte Laurentovy rozvoje funkcí $f(z) = \exp(z + z^{-1})$ a $g(z) = z^2 \exp(z^{-1})$ o středu 0! [Hledané rozvoje jsou

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!(k+\ell)!} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!(k+\ell)!} \quad \text{v prstenci } P(0, 0, \infty), \text{ a}$$

$$g(z) = \frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)! z^k} \quad \text{v prstenci } P(0, 0, \infty).]$$

5. Provedte klasifikaci izolovaných singularit (v \mathbb{C}) funkcí

$$\begin{array}{llllll} \text{(a)} (z - z^3)^{-1} & \text{(b)} \frac{z^4}{1 + z^4} & \text{(c)} \frac{z^5}{(1 - z)^2} & \text{(d)} \frac{1}{z(z^2 + 4)^2} & \text{(e)} \frac{e^z}{1 + z^2} \\ \text{(f)} \frac{1 + z^2}{e^z} & \text{(g)} \frac{1 - e^z}{1 + e^z} & \text{(h)} \exp(-z^{-2}) & \text{(j)} \frac{z}{e^z - 1}! \end{array}$$

[Postupně: (a) $z = 0$ a $z = \pm 1$ jsou vesměs póly řádu 1,

$$(b) \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i) \text{ a } z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i) \text{ jsou opět vesměs póly řádu 1,}$$

(c) $z = 1$ je pólem řádu 2, (d) $z = 0$ je pólem řádu 1 a $z = \pm 2i$ jsou póly řádu 2, (e) $z = \pm i$ jsou póly řádu 1, (f) funkce nemá v \mathbb{C} singulární body, (g) $z = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ jsou vesměs póly řádu 1, (h) $z = 0$ je podstatnou singularitou, (j) $z = 0$ je odstranitelnou singularitou]

6. Pro funkce (a)–(j) ze Cvičení 3 zjistěte, zda je bod ∞ jejich singulárním bodem!

[V případech (a), (b) je ∞ regulárním bodem, v dalších případech pak (c) – pól řádu 3, (d) – regulární bod, (e), (f) – podstatná singularita, (g) – bod ∞ je limitou pólů, (h) – podstatná singularita, (j) – odstranitelná singularita]

7. Které body jsou izolovanými singularitami (v \mathbb{C}) funkce

$$f(z) = \frac{z^2 - \pi^2}{\sin^2 z} ?$$

[Funkce f je podílem holomorfních funkcí v \mathbb{C} . Jednoduchými nulovými body čitatele jsou body $z = \pm\pi$, dvojnásobnými nulovými body jmenovatele jsou body $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Odtud již vyplývá, že singularitami funkce f jsou pouze póly v bodech $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a tyto póly jsou vesměs řádu 2, kromě bodů $z = \pm\pi$, ve kterých jsou póly řádu 1.]

8. Najděte chybu v následujícím „sporu v matematice“:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{z} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = 0,$$

avšak koeficienty Laurentova rozvoje nulové funkce jsou vesměs nulové!

[Pokud chybu nevidíte ani po chvilce přemýšlení, přečtěte si Kapitulu 6 ještě jednou.]

9. Jaký typ singularity má v bodě $z = 0$ funkce $f(z) = \cos(z) \sin(z^{-1})$?

[Povaha rozvoje v prstenci o středu 0 není, alespoň na první pohled, zřejmá. Toto cvičení má zdůraznit význam Věty 6.4.7. Zřejmě

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}} \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ neexistuje,}$$

nemůže tedy existovat ani $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, a proto f nemá v bodě 0 ani odstranitelnou singularitu, ani pól, ale podstatnou singularitu.]

10. Nechť p_n je polynom stupně n a q_m je polynom stupně m , $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zformulujte a odůvodněte tvrzení o singularitě racionální funkce

$$R(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)}$$

v bodě ∞ v závislosti na stupních n, m !

[Váháte-li s odpovědí, doporučujeme se vrátit k Definicí 6.4.9 a Poznámce 6.4.10. Pak již snadno nahlédneme, že ∞ je např. odstranitelnou singularitou R , je-li $m \geq n$. Analogicky při $m < n$ je ∞ pólem funkce R , nikdy však nemůže být podstatnou singularitou R .]

11. Určete Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \exp(z + z^{-1})$ v $P(0, +\infty)$!

[Funkce $f(z) = \exp(z) \exp(z^{-1})$ se nezmění při vzájemné záměně z za z^{-1} . Stačí tedy určit koeficienty u nezáporných mocnin z v Laurentově řadě, kterou obdržíme násobením řad

$$\left(\sum \frac{1}{r!} z^r \right) \cdot \left(\sum \frac{1}{s!} \frac{1}{z^s} \right).$$

Tyto koeficienty jsou vyjádřeny jako součty řad. Pokud je označíme a_n , je

$$f(z) = \sum a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad \text{kde} \quad a_n = a_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n)!}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ ($= 0, 1, 2, \dots$). Rozvoj konverguje v \mathbb{P} .]

12. Určete Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \exp((1-z)^{-1})$ v $\mathbb{C} \setminus \{1\}$!

[Dosadíme $-(z-1)$ do rozvoje exponenciály a dostaneme

$$f(z) = \sum (-1)^k \frac{1}{k!(z-1)^k}.$$

Řada zřejmě konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.]

13. Určete Laurentův rozvoj funkce funkce $f(z) = (z^2 + 1)^{-2}$ v prstenci $P(i, 0, 2)$!

[Funkce f má dvojnásobné póly v bodech $\pm i$. Spočteme $\lim_{z \rightarrow i} f(z)(z-i)^2 = -\frac{1}{4}$ a $\lim_{z \rightarrow i} (f(z) + \frac{1}{4}(z-i)^{-2})(z-i) = -\frac{i}{4}$: Tím máme určenu hlavní část rozvoje. Po určení regulární části rozvoje dostaneme

$$f(z) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{i}{4} \frac{1}{z-i} + \sum \frac{(k+3)i^k}{2^{k+4}} (z-i)^k]$$

Kapitola 7

Reziduová věta

V této části dokážeme užitečná tvrzení o množinách izolovaných v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$; poslouží nám při zacházení s množinami izolovaných singulárních bodů funkcí.

7.1 Speciální množiny v \mathbb{C}

Připomeňme, že množina M je izolovaná množina v otevřené množině G , jestliže $M \subset G$ a ke každému bodu $x \in G$ existuje prstencové okolí $P(x) \subset G$ tak, že $M \cap P(x) = \emptyset$, tedy G neobsahuje žádný hromadný bod M .

Lemma 7.1.1. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $M \subset G$ množina izolovaná v G . Potom je pro každou kompaktní množinu $K \subset G$ průnik $M \cap K$ konečná množina.*

Důkaz. Protože M je uzavřená a K kompaktní, je $M \cap K$ kompaktní. Pokud je $M \cap K$ nekonečná množina, vybereme z ní nekonečnou prostou posloupnost bodů $\{w_n\}$. Z této posloupnosti bodů lze vybrat posloupnost $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní k nějakému bodu $w \in M \cap K \subset M$. Tento bod je hromadným bodem M v G , a tedy M není izolovaná v G . \square

Lemma 7.1.2. *Nechť $M \subset G$ je množina izolovaná v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Potom je M spočetná množina.*

Důkaz. Je-li $G = \mathbb{C}$, definujme $K_k := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Množiny K_k jsou zřejmě kompaktní. Dále je $\mathbb{C} = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$ a $M \cap K_k$ jsou konečné množiny pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Odtud vyplývá, že $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} (M \cap K_k)$ je spočetná množina.

Čtenář si jistě povšiml, že jsme „vyčerpali“ \mathbb{C} pomocí kompaktních množin K_k . To lze však udělat i pro obecnou otevřenou $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$. Stačí modifikovat

definici K_k a pro $k \in \mathbb{N}$ definovat

$$K_k = \{z \in G; \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq 1/k\} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq k\}.$$

Vzhledem ke spojitosti funkce dist je prvá množina uzavřená a druhá kompaktní, takže K_k jsou kompaktní množiny a $\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k = G$. Zbytek úvahy je již analogický jako v případě $G = \mathbb{C}$. \square

Poznámka 7.1.3 (důležitá). Z předcházejícího vyplývá, že je-li $\{w_n\}$ prostá (nekonečná) posloupnost bodů množiny M izolované v \mathbb{C} , je $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty$. Naproti tomu množina M izolovaná v \mathbb{S} je *konečná*: stačí uvážit, že \mathbb{S} je kompaktní množina. Označíme-li M' množinu hromadných bodů množiny M , vyplývá z toho, že M je izolovaná v otevřené $G \subset \mathbb{C}$, právě když $M' \cap G = \emptyset$. Protože je též zřejmé $M' \subset M \cap G$, je M uzavřená v G a $G \setminus M$ je otevřená množina.

7.2 Reziduová věta

Čtenář by si měl opět připomenout Příklad 5.4.1, který ukazuje jistou výjimečnost případu $k = -1$ při integraci mocnin $(z - z_0)^k$. Jak víme, každou funkci f holomorfní v nějakém okolí $P(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ lze rozvést jediným způsobem v Laurentovu řadu o středu z_0 .

Definice 7.2.1 (Cauchy 1826*). Je-li f holomorfní v jistém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, nazýváme **reziduem funkce f v bodě z_0** koeficient u mocniny $(z - z_0)^{-1}$ v Laurentově rozvoji funkce f v $P(z_0)$. Je-li $z_0 = \infty$ a funkce f je holomorfní v nějakém prstencovém okolí $P(\infty)$, pak se nazývá **reziduem funkce f v bodě ∞** koeficient $-a_1$ v Laurentově rozvoji funkce f v $P(\infty)$.

Je-li tedy

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in P(z_0),$$

je reziduum funkce f v bodě z_0 číslo a_{-1} ; užíváme pro něj označení $\text{res}(f, z_0)$, ev. i $\text{res}(f(z), z_0)$. Je-li speciálně f holomorfní v okolí $U(z_0)$ bodu z_0 , potom je samozřejmě $\text{res}(f, z_0) = 0$.

Poznámka 7.2.2. Definice rezidua je korektní, protože Laurentův rozvoj funkce f v $P(z_0)$ je jediný; viz Věta 6.3.1. Čtenáře může překvapit letopočet, k němuž se zavedení vztahuje. Cauchy však poprvé zavedl reziduum pro *póly* vyšetřované funkce v souvislosti s integrací funkcí po Jordanově křivce neprocházející žádným pólem; jak víme, tento integrál již nemusí být roven 0, což dává při srovnání s Větou 5.2.4 tušit genezi užitého termínu „reziduum“.

Lemma 7.2.3. *Nechť funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ všude až na konečnou množinu $M = \{z_1, \dots, z_n\}$. Jsou-li H_j hlavní části Laurentových*

rozvoji funkce f v prstencových okolích $P(z_j)$, $j = 1, \dots, n$, lze funkci

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^n H_j(z), \quad z \in G \setminus M \quad (7.1)$$

spojitě rozšířit na G a toto rozšíření je funkce holomorfní v množině G .

Důkaz. Tvzení je téměř zřejmé, jestliže si uvědomíme některé skutečnosti. Předně všechny užití Laurentovy rozvoje funkce f o středech z_j konvergují lokálně stejnoměrně v jistých prstencích o středech z_j s „vnitřním poloměrem“ rovným 0, a proto jejich hlavní části

$$H_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_{jk}(z - z_j)^k, \quad j = 1, \dots, n \quad (7.2)$$

konvergují pro všechna $j = 1, \dots, n$ lokálně stejnoměrně v $P(z_j, \infty)$, a tedy i na $G \setminus \{z_j\}$. Funkce H_j je tedy holomorfní v $G \setminus \{z_j\}$, $j = 1, \dots, n$. Pomocí (6.14) spočteme koeficienty Laurentových rozvoji funkce g v bodech z_j a zjistíme, že mají hlavní části rovny 0; body množiny M jsou tedy odstranitelnými singularitami funkce g . Po spojitěm rozšíření g na G je rozšířená g zřejmě holomorfní v G . \square

Příklad 7.2.4. Předpokládejme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ a že H je funkce holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, pro kterou má Laurentův rozvoj v $P(z_0)$ nulovou regulární část, tj.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}. \quad (7.3)$$

Je-li φ Jordanova křivka v \mathbb{C} taková, že $z_0 \notin \langle \varphi \rangle$, je

$$\int_{\varphi} H(z) dz = 2\pi i a_{-1} \text{ind}(\varphi, z_0).$$

Řada v (7.3) konverguje lokálně stejnoměrně v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ a tedy stejnoměrně na $\langle \varphi \rangle$. Proto lze zaměnit pořadí integrace a sčítání a tak dostaneme

$$\int_{\varphi} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k \right) dz = \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{\varphi} a_k(z - z_0)^k dz.$$

V řadě oddělíme členy, k jejichž integrandům existuje v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ primitivní funkce: ty jsou podle Věty 3.4.3 rovny nule. Jediný zbývající člen ještě upravíme a dostaneme tak s přihlédnutím k definici rezidua

$$\int_{\varphi} H(z) dz = \int_{\varphi} \frac{a_{-1} dz}{z - z_0} = \text{res}(H, z_0) \int_{\varphi} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \text{res}(H, z_0) \text{ind}(\varphi, z_0).$$

Věta 7.2.5 (reziduová věta; Cauchy 1826). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je přípustná oblast (viz Úmluvu 5.5.5). Nechť dále f je funkce holomorfní v G všude až na množinu M izolovanou v G . Je-li φ uzavřená křivka v $G \setminus M$, je*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in M} \text{ind}(\varphi, z) \text{res}(f, z), \quad (7.4)$$

přičemž v součtu vpravo je pouze konečný počet nenulových sčítanců. Speciálně, je-li φ kladně orientovaná Jordanova křivka, je

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int } \varphi \cap M} \text{res}(f, z). \quad (7.5)$$

Poznámka 7.2.6. Než budeme tvrzení dokazovat, připojíme několik objasňujících poznámek.

- (1) V příkladech často vystačíme s „integrační křivkou“, jejíž geometrický obraz je sjednocením několika úseček a oblouků kružnic.
- (2) Na $\langle \varphi \rangle$ je funkce f spojitá.
- (3) Protože M je izolovaná v G a množina $\overline{\text{Int } \varphi} \subset G$ je kompaktní, je množina $M \cap \text{Int } \varphi$ konečná; v ostatních bodech $w \in M$ jsou rezidua $\text{res}(f, w)$ v (7.4) rovna 0.
- (4) Často je sama množina M konečná, jako např. v případě, že f je racionální funkce.

Důkaz Věty 7.2.5. Uzávěr $\text{Int } \varphi$ je omezená uzavřená a tedy kompaktní množina. Označme G_1 takové jeho omezené okolí v G , pro něž $\overline{G_1} \subset G$. Potom je $L := M \cap \overline{G_1}$ konečná množina a $G_1 \subset \mathbb{C}$ je omezená oblast, v níž se anuluje integrál z každé holomorfní funkce po každé uzavřené křivce. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$, pro něž množina $L := \{z_j; j = 1, \dots, n\}$ obsahuje všechny izolované singularity funkce f ležící v G_1 ; viz Lemma 7.1.1. Označme tak jako v Lemmatu 7.2.3 pro $j = 1, \dots, n$ symboly H_j hlavní části Laurentových rozvoju f o středech $z_j \in L$ (v jistých prstencových okolích $P(z_j)$ s vnitřním poloměrem 0) a definujme jako v tomto lemmatu funkci g pomocí vzorce (7.1). Podle předpokladu je $\int_{\varphi} g = 0$, a proto je

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\varphi} g(z) dz = \int_{\varphi} f(z) dz - \sum_{j=1}^n \int_{\varphi} H_j(z) dz = \\ &= \int_{\varphi} f(z) dz - \sum_{j=1}^n \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{\varphi} a_{jk} (z - z_j)^k dz = \\ &= \int_{\varphi} f(z) dz - 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{ind}(\varphi, z_j) \text{res}(f, z_j), \end{aligned}$$

což již dává (7.4). Poznamenejme, že záměna sumačního symbolu a integrálu je možná, stejně jako v Příkladu 7.2.4, protože řady, jejichž součty jsou funkce H_j , konvergují stejnoměrně na $\langle \varphi \rangle$. Výpočet se pak redukuje pro každé j na úvahu (kvůli nebezpečí záměny výjimečně používáme k oddělení dvou indexů středník)

$$\int_{\varphi} a_{jk}(z - z_j)^k dz = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = -2, -3, \dots, \\ 2\pi i a_{j;-1} \operatorname{ind}(\varphi, z_j), & \text{pro } k = -1, \end{cases}$$

kteřou jsme již vícekrát dělali; viz Příklad 7.2.4 nebo důkaz Věty 6.3.1. \square

Poznámka 7.2.7. V Definici 7.2.1 jsme zavedli také $\operatorname{res}(f, \infty)$. Všimněme si, jak toto číslo souvisí s křivkovým integrálem f a jaký je smysl znaménka „minus“ v jeho definici. Rozvoj f má tvar

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad z \in P(\infty).$$

Zvolme jednoduchou uzavřenou *záporně orientovanou* křivku φ v \mathbb{C} tak, aby $\langle \varphi \rangle \subset P(\infty)$. Potom Laurentův rozvoj f je na $\langle \varphi \rangle$ stejnoměrně konvergentní a je

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_{\varphi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi} \frac{a_k}{z^k} dz = -2\pi i(a_1) = 2\pi i \operatorname{res}(f, \infty),$$

protože v součtu integrálů ze $1/z^k$ je jediný různý od 0, a to pro $k = 1$.

Důsledek 7.2.8. *Jestliže množina všech singulárních bodů M funkce f v \mathbb{C} je konečná a $M = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, pak je*

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f, z_k) + \operatorname{res}(f, \infty) = 0, \quad (7.6)$$

a to včetně případu $\operatorname{res}(f, \infty) = 0$, který se nám též někdy může hodit.

Důkaz. Zvolme kružnici $\varphi(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, pro niž je $r > 0$ zvoleno tak, že je $z_k \in \operatorname{Int}(\varphi)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Pak je

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f, z_k) \quad \text{a} \quad \int_{\dot{\varphi}} f(z) dz = \operatorname{res}(f, \infty).$$

Sečtením obou rovností dostaneme (7.6). \square

7.3 Výpočet reziduí

Nyní popíšeme některé metody výpočtu reziduí. V konkrétních případech nebývá tento výpočet obtížný; existují postupy více či méně vhodné pro různé vyšetřované

případy (viz např. [19]). Metody charakterizujeme heslovitými názvy; nejprve se budeme zabývat výpočtem reziduí v bodech $z \in \mathbb{C}$.

(A) Laurentův rozvoj. Někdy snadno určíme *celý Laurentův rozvoj* a z něj získáme koeficient a_{-1} . Např. je zřejmé, že funkce $f(z) = \exp(z)/z^4$ má v \mathbb{C} jediný izolovaný singulární bod $z = 0$ a že

$$f(z) = z^{-4} \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \dots + \frac{1}{6}z^{-1} + \dots, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

takže $\text{res}(f, 0) = 1/6$. Ostatní koeficienty Laurentova rozvoje nepotřebujeme.

(B) Část Laurentova rozvoje. Často určujeme z rozvoje *pouze reziduum*. Jsou-li g a h funkce holomorfní v nějakém $P(w)$, je $f = gh$ rovněž holomorfní v $P(w)$ a Laurentův rozvoj f lze získat „násobením rozvoji“. Protože řady v Laurentových rozvoji konvergují v každém bodě prstencového okolí $P(w)$ *absolutně*, lze řady přerovnávat. Rozhodující je spočítat koeficient tohoto rozvoje u mocniny $(z - w)^{-1}$. Např. pro $f(z) = \exp(z) \sin(1/z)$ a bod $w = 0$ tak dostaneme

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) \left(z^{-1} - \frac{1}{3!}z^{-3} + \frac{1}{5!}z^{-5} - \dots \right) = \\ &= \dots + \left(1 - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!5!} - \dots \right) z^{-1} + \dots, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

a je tedy

$$\text{res}(f, 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!(2k+1)!}.$$

Výpočet *všech koeficientů* hlavní části Laurentova rozvoje by byl pracnější než v předcházejícím případě.

(C) Jednoduchý pól. Jestliže funkce g je holomorfní v bodě $w \in \mathbb{C}$ a funkce h má v bodě w jednoduchý pól, je

$$\text{res}(gh, w) = g(w) \text{res}(h, w).$$

To dostaneme snadno násobením Laurentových rozvoji o středu w v jistém $P(w)$

$$g(z) = g(w) + a_1(z - w) + \dots, \quad h(z) = \frac{\text{res}(h, w)}{z - w} + b_0 + b_1(z - w) + \dots.$$

Speciálně, je-li funkce g holomorfní v bodě w , je

$$\text{res} \left(\frac{g(z)}{z - w}, w \right) = g(w).$$

(D) Jednoduchý nulový bod jmenovatele. V případě $f = g/h$, kde g, h jsou holomorfní v bodě w , přičemž h má v bodě w jednoduchý nulový bod, má $1/h$ v bodě w jednoduchý pól a z (C) vyplývá vzorec:

$$\operatorname{res}(f, w) = \frac{g(w)}{h'(w)};$$

v tom případě je totiž $\operatorname{res}(1/h, w) = 1/h'(w)$.

Je-li např. $f(z) = \pi \cotg(\pi z) = \pi \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$, má f v bodě 0 (a s ohledem na periodicitu v každém bodě $k \in \mathbb{Z}$) reziduum $\operatorname{res}(f, 0) = 1$, neboť $\pi \cos(\pi z)|_{z=0} = \pi$ a $\sin'(\pi z)|_{z=0} = \pi \cos(\pi z)|_{z=0} = \pi$. Odtud plyne, že

$$\operatorname{res}(f, 0) = \operatorname{res}(f, k) = \pi/\pi = 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(E) Výpočet pomocí limity. Má-li funkce f v bodě $w \in \mathbb{C}$ pól násobnosti p , je

$$\operatorname{res}(f, w) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow w} [(z-w)^p f(z)]^{(p-1)}. \quad (7.7)$$

Skutečně, v jistém prstencovém okolí $P(w)$ má f rozvoj

$$f(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k (z-w)^k.$$

Pak však je

$$f(z)(z-w)^p = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k (z-w)^{k+p} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-p} (z-w)^k,$$

takže

$$(f(z)(z-w)^p)^{(p-1)} = \sum_{k=p-1}^{\infty} a_{k-p} k(k-1) \cdots (k-p+2) (z-w)^{k-p+1}.$$

Odtud limitním přechodem pro $z \rightarrow w$ a záměnou pořadí limity a sčítání dostaneme vpravo $(p-1)! a_{-1}$, a tedy

$$\operatorname{res}(f, w) = a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow w} ((z-w)^p f(z))^{(p-1)}. \quad (7.8)$$

Je-li např. $f(z) = z^2/(z^2+1)^2$, má f v bodě $z_0 = i$ pól řádu 2, a proto

$$\operatorname{res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2} \right)' = \frac{2z(z+i)^2 - 2z^2(z+i)}{(z+i)^4} \Big|_{z=i} = \frac{4i^3}{16i^4} = -\frac{i}{4}.$$

Zde je na místě varování: výpočet podle této metody může být značně komplikovaný, a to např. tehdy, když po násobení faktorem $(z-w)^p$ nelze vhodně krátit (pokud vyjádření funkce f neobsahuje *explicitně faktor* $(z-w)^{-p}$). Pokud bychom měli určit $\text{res}(f, \pi i)$, kde $f(z) = (\exp z + 1)^{-2}$, má funkce f v bodě πi pól řádu $p = 2$ a podle (E) bychom dostali

$$\begin{aligned} \text{res}(f, \pi i) &= \lim_{z \rightarrow \pi i} \left(\frac{(z - \pi i)^2}{(e^z + 1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{2(z - \pi i)(e^z + 1)^2 - 2(z - \pi i)^2(e^z + 1)e^z}{(e^z + 1)^4} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{2(z - \pi i)(e^z + 1) - 2(z - \pi i)^2 e^z}{(e^z + 1)^3}. \end{aligned}$$

Nyní by nás čekalo trojnásobně opakované užití l'Hospitalova pravidla (a to jsme pracovali pouze s $p = 2$). Lepší cestu ukazuje výpočet: za $e^{\pi i}$ dosadíme do vzorce pro Taylorův rozvoj v bodě $w = \pi i$ a dostaneme

$$e^z + 1 = 0 - \frac{(z - \pi i)}{1!} - \frac{(z - \pi i)^2}{2!} + \dots = -(z - \pi i) \left(1 + \frac{(z - \pi i)}{2!} + \frac{(z - \pi i)^2}{3!} + \dots \right),$$

z čehož vyplývá

$$\text{res}(f, \pi i) = \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{(z - \pi i)^2}{(e^z + 1)^2} = \lim_{z \rightarrow \pi i} \left(1 + \frac{(z - \pi i)}{2!} + \frac{(z - \pi i)^2}{3!} + \dots \right)^{-2} = 1.$$

Příklad 7.3.1. V Příkladu 7.4.13 budeme k sečtení řady mj. potřebovat rezidua funkcí $z \mapsto (\pi \cotg \pi z)/z^{2r}$ v bodě 0 pro přirozená čísla r . Pokud se omezíme jen na malá r , můžeme použít k určení rozvoje kotangenty „dělení rozvoji“. Je

$$\begin{aligned} \cotg z &= \cos z : \sin z = \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) : \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = z^{-1} - \frac{z^1}{3} - \frac{z^3}{45} - \dots, \end{aligned}$$

přičemž postupujeme podobně jako při dělení polynomů (ale členy řadíme „vzestupně“:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \dots \right) : \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \dots \right) = \dots \\ &- \left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \frac{z^6}{5040} + \dots \right) \\ &\quad - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{30} - \frac{z^6}{840} + \dots \\ &- \left(-\frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{18} - \frac{z^6}{360} + \dots \right) \\ &\quad - \frac{z^4}{45} + \frac{z^6}{630} - \dots \end{aligned}$$

Při dostatečné trpělivosti (a statečnosti) tak lze obdržet část Laurentova rozvoje funkce $\cotg z$ v $P(0, \pi)$

$$\cotg z = z^{-1} - \frac{z^1}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^7}{4725} - \frac{2z^9}{93555} - \dots \quad (7.9)$$

(F) Výpočet v „nekonečnu“. Prozkoumejme možnosti spočítat reziduum funkce f v bodě ∞ . Definovali jsme ho v Definicí 7.2.1 a připomínáme, že trochu odlišně, nežli v bodech $z \in \mathbb{C}$. Domluvíme se na tom, že pokud má f odstranitelnou singularitu v bodě ∞ , budeme *konečnou* hodnotu $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ značit a_0 a pokud pracujeme s funkcí, definovanou na \mathbb{S} , můžeme psát přímo a_0 . Pro názornost si rozepíšeme schematicky část Laurentova rozvoje f v prstenci konvergence $P(\infty) = P(\infty, 0, R)$, a dostaneme

$$f(z) = \left(\dots + a_{-2}z^2 + a_{-1}z^1 \right) + \left(a_0 + \frac{a_1}{z^1} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \right), \quad (7.10)$$

kde v levé závorce je hlavní a v pravé regulární část rozvoje. Eventuální volbou r_1 , $0 < r_1 < R$, dosáhneme toho, že konvergence řady ve druhé závorce je stejnoměrná v $P(\infty, 0, r_1)$. Nyní rozlišíme tyto případy:

- (1) Existuje $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ a leží v \mathbb{C} . Potom je zřejmě hlavní část rozvoje funkce f rovna 0, tj. $a_{-k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a funkce f je buď spojitá v ∞ (pracujeme-li s funkcemi definovanými na \mathbb{S}), nebo existuje její spojitě rozšíření na \mathbb{S} , které je současně i holomorfní v bodě ∞ . Dodefinování limitou odpovídá naší dohodě o odstraňování odstranitelných singularit. Potom je zřejmě (možnost limitování „člen po členu“ je zaručena stejnoměrnou konvergencí v $P(\infty, 0, r_1)$)

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -a_{-1} = - \lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - a_0) z = \lim_{z \rightarrow \infty} z (a_0 - f(z)).$$

Pozor, je zde *podstatný rozdíl*: v odstranitelné singularitě f v bodě $w \in \mathbb{C}$ je automaticky $\operatorname{res}(f, w) = 0$, ale je-li bod ∞ odstranitelnou singularitou f , může být $\operatorname{res}(f, \infty) \neq 0$!

- (2) Pokud je bod ∞ n -násobným pólem funkce f , tj. ve shodě s Definicí 6.4.9, je-li pólém násobnosti n funkce $f(1/z)$ definované v nějakém $P(0)$, pak je

$$\operatorname{res}(f, \infty) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z^{n+2} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} f(z) \right). \quad (7.11)$$

Skutečně, v tom případě je ve vyjádření $f(z)$ ve tvaru (7.10) výraz v první závorce n -členný a je to polynom stupně n . Pokud ho $(n+1)$ -krát zderivujeme, dostaneme nulovou funkci. Derivováním druhé závorky dostaneme

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} f(z) = \left((-1)^{n+1} (n+1)! \frac{a_1}{z^{n+2}} + (-1)^n (k+2)! \frac{a_2}{z^{k+3}} + \dots \right)$$

zderivujeme, dostaneme po vynásobení faktorem z^{n+2} a po provedení limitního přechodu pro $z \rightarrow \infty$ vzorec (7.11).

- (3) Speciálně je-li $n = 0$, dostaneme odtud jiný vzorec pro výpočet v případě odstranitelné singularity

$$\operatorname{res}(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z).$$

7.4 Výpočet integrálů pomocí reziduové věty

K ilustraci užití reziduové věty k výpočtu některých integrálů uvedeme *několik jednoduchých typových příkladů*. Metodami, založenými na užití reziduové věty, lze spočítat často jednodušeji hodnoty mnoha integrálů, které známe z teorie funkcí reálné proměnné; umíme tak např. určit hodnotu integrálu z funkce, ke které neumíme vyjádřit primitivní funkci pomocí „elementárních funkcí“. Podrobný systematický výklad lze opět nalézt v [19]. Abychom nemuseli v příkladech opakovat některé odhady, dokážeme nejprve následující tvrzení; s použitým „trikem“ jsme se již setkali v Příkladu 5.4.17.

Lemma 7.4.1 (Jordanovo lemma). *Nechť $r \in \mathbb{R}_+$, nechť $\varphi_r(t) = r \exp(it)$, $t \in [0, \pi]$, a nechť f je funkce spojitá na $P(\infty) \cap \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\}$ taková, že pro funkci $A(r) := \sup\{|f(re^{it})|; t \in [0, \pi]\}$ je $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 0$. Potom*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_r} f(z) \exp(iz) dz = 0. \quad (7.12)$$

Důkaz. Křivkový integrál vyjádříme podle definice

$$\int_{\varphi_r} f(z) e^{iz} dz = \int_0^\pi f(re^{it}) \exp(ire^{it}) ire^{it} dt$$

a jeho absolutní hodnotu odhadneme; s využitím odhadu z Poznámky 4.9.1 dostaneme pro všechna dostatečně velká $r \in \mathbb{R}_+$ nerovnost

$$\left| \int_{\varphi_r} f(z) e^{iz} dz \right| \leq r A(r) \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt.$$

Poslední integrál upravíme a s ohledem na $\sin t \geq 2t/\pi$ pro všechna $t \in [0, \pi/2]$ odhadneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2rt/\pi} dt < \\ &< 2 \int_0^\infty e^{-2rt/\pi} dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2r} [-\exp(-2rt/\pi)]_0^\infty = \frac{\pi}{r}, \end{aligned}$$

takže pro $r \rightarrow +\infty$ je s ohledem na $A(r) \rightarrow 0$ je

$$\left| \int_{\varphi_r} f(z) e^{iz} dz \right| \leq r A(r) \frac{\pi}{r} = \pi A(r) \rightarrow 0.$$

Tím je důkaz vzorce (7.12) dokončen. \square

Poznámka 7.4.2. Odhad z předcházejícího lemmatu lze použít např. pro racionální funkci $f = P/Q$, kde stupeň polynomu Q je větší než stupeň polynomu P ; pak je ovšem $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ a je tedy splněn předpoklad $A(r) \rightarrow 0$.

Příklad 7.4.3. Vypočteme hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx .$$

Snadno nahlédneme, že oba integrály vpravo existují např. jako Newtonovy integrály: integrujeme funkce spojitě na \mathbb{R} a v okolí nevlastních bodů $\pm\infty$ lze odhadnout např. $|\sin x|/(x^2 + 1) \leq x^{-2}$. Jelikož je druhý integrál roven 0 (integrand je lichá funkce), poslouží nám následující výpočet k určení prvního z nich. Definujme pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ křivku $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ (viz Obr. 5.9; závislost na r u křivek φ_k již explicitně nevyznačujeme), kde

$$\varphi_1(t) = t, \quad t \in [-r, r], \quad \varphi_2(r) = re^{it}, \quad t \in [0, \pi]. \quad (7.13)$$

Funkce $f(z) = \exp(iz)/(z^2 + 1)$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Protože f má v bodě i jednoduchý pól, je podle (D)

$$\operatorname{res}(f, i) = \left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i} .$$

Pro každé $r > 1$ dostaneme podle reziduové věty rovnost

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2e^i},$$

přičemž

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi_1} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx .$$

Podle předcházejícího Lemmatu 7.4.1 je

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_2} f(z) dz = 0,$$

takže dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e} .$$

Poznámka 7.4.4. Předcházející příklad lze dále zobecnit. Nechť funkce R je racionální funkce, která nemá póly v \mathbb{R} a která nabývá na \mathbb{R} pouze reálných hodnot. Je tedy holomorfní na množině $D := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\}$ s výjimkou konečné množiny M ležící uvnitř D . Předpokládejme dále, že $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$. Volíme křivku $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ stejně jako v (7.13) a předpokládáme, že pro všechny body $w \in M$ je $|w| < r$. Potom podle reziduové věty pro každé takové $r \in \mathbb{R}_+$ dostaneme

$$I := \int_{\varphi} R(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{w \in M} \operatorname{res}(R(z) e^{iz}, w) .$$

Limitním přechodem pro $r \rightarrow +\infty$ odtud dostaneme

$$(\mathcal{N}) \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{w \in M} \operatorname{res}(R(z) e^{iz}, w), \quad (7.14)$$

neboť limita integrálu vzhledem k φ_1 je pro $r \rightarrow \infty$ zřejmě rovna hodnotě na levé straně rovnice (7.14), zatímco limita integrálu přes φ_2 je podle Lemmatu 7.4.1 rovna 0.

Příklad 7.4.5. Pro $a \in \mathbb{R}_+$ zřejmě platí rovnost

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(a^2 + x^2)^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(a^2 + x^2)^2} dx = 0;$$

hodnotu I určíme integrací funkce $f(z) = \exp(iz)/(a^2 + z^2)^2$ s dvojnásobnými póly v bodech $\pm ai$, a to opět podél křivky φ z (7.13). Využijeme-li (E) k výpočtu rezidua, je

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{res}(f, ai) &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} \frac{e^{iz}(z - ai)^2}{(z^2 + a^2)^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} \left(\frac{e^{iz}}{(z + ai)^2} \right)' = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} \frac{e^{iz}}{(z + ai)^4} (i(z + ai)^2 - 2(z + ai)) = \pi \frac{e^{-a}}{2a^3} (a + 1). \end{aligned}$$

Podle Poznámky 7.4.4 tak dostaneme $I = \pi e^{-a}(a + 1)/4a^3$.

Poznámka 7.4.6. Pro seznámení s principy výpočtů podle reziduové věty jsme zatím použili jediný typ křivek, ty však mohou být v jiných případech rozmanitější. Čtenář jistě tuší, že při absenci faktoru $\exp(iz)$ je nutno metodu popsanou v Poznámce 7.4.4 modifikovat. Nechť R je racionální funkce, $R = P/Q$, kde P , Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň Q je alespoň o 2 větší než stupeň P a Q nemá kořeny na reálné ose. Nechť M je množina všech kořenů polynomu Q , které mají *kladnou* imaginární část. Pak se snadno dokáže vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi} R(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in M} \operatorname{res}(R, w),$$

kde φ je popsána stejně jako v (7.13). Pro důkaz je podstatné, že existují taková $K > 0$ a $P(\infty)$, že v $P(\infty)$ platí odhad $|z^2 R(z)| \leq K$. Pak totiž pro dostatečně velká $r \in \mathbb{R}_+$ lze provést následující odhad a pro $r \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\left| \int_0^{\pi} R(re^{it}) r i e^{it} dt \right| \leq \pi r \frac{K}{r^2} = \frac{\pi K}{r} \rightarrow 0.$$

Příklad 7.4.7. Pro $f(z) = (z^4 + 1)^{-1}$ je podle předcházející poznámky

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2\pi i (\operatorname{res}(f, z_1) + \operatorname{res}(f, z_2)),$$

kde $z_1 = (1+i)/\sqrt{2}$ a $z_2 = (-1+i)/\sqrt{2}$. Rezidua určíme poměrně snadno, neboť jmenovatel má v uvažovaných bodech jednoduché nulové body. Ujijeme metodu (D) a vypočteme hodnoty $1/(z^4 + 1)' = 1/4z^3 = z/4z^4$ v bodech z_1, z_2 . Tak dostaneme

$$\frac{z}{4z^4} \Big|_{z=z_1} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{-8}, \quad \frac{z}{4z^4} \Big|_{z=z_2} = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{-8},$$

z čehož plyne, že $I = 2\pi i \sqrt{2}(-i)/4 = \pi/\sqrt{2}$. Doporučujeme čtenáři porovnat výpočet s Příkladem 9.3.12 ze [Z], kde se mj. určuje primitivní funkce k f .

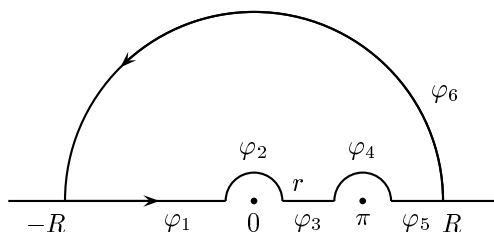
Příklad 7.4.8. V Poznámce 7.4.4 jsme předpokládali, že funkce R nemá póly na \mathbb{R} , avšak i případě, že R má póly v \mathbb{R} , může integrál z R na intervalu $(-\infty, \infty)$ existovat a lze ho již popsanou metodou *po drobné modifikaci* spočítat. Jde o integrály tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos x dx, \quad \text{nebo} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin x dx.$$

Aby však takový integrál existoval, musí mít funkce R pouze *jednoduché* póly a tyto navíc musí ležet v množině nulových bodů druhého faktoru integrandu. Vždy však z integrálů $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos x dx$ a $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin x dx$ existuje jen jeden. Speciální příklad tohoto typu jsme již spočetli v Příkladu 5.4.17. Podáme návod k řešení dalšího podobného příkladu: ukážeme, jak lze spočítat

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x-\pi)} = -2.$$

Dosud užívanou křivku (hranici půlkruhu) nahradíme křivkou znázorněnou na Obr. 7.1. Vyjádříme ji ve tvaru $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6$.



Obrázek 7.1: Křivka pro výpočet integrálu z Příkladu 7.4.8

Poznamenejme, že integrand lze spojitě rozšířit do bodů $z = 0$ a $z = \pi$, takže vyšetřovaný integrál zřejmě existuje. Pro křivku φ s $R > \pi$, $r \in (0, \pi/2)$ a funkci $f(z) = e^{iz}/z(z-\pi)$ je $\int_{\varphi} f(z) dz = 0$. Poznamenejme, že f však má v bodech 0 a π póly. Limity integrálů přes φ_2 a φ_4 spočteme přímo z definice křivkového integrálu. Snadno lze též dokázat, že jsou rovny $-\pi i \cdot \text{res}(f, w)$ pro $w = 0$ a $w = \pi$; póly funkce f v těchto bodech jsou jednoduché a tak snadno spočteme

$$\text{res}(f, 0) = -1/\pi, \quad \text{res}(f, \pi) = -1/\pi.$$

Pro imaginární části obou stran rovnosti $\int_{\varphi} f = 0$ dostaneme po limitním přechodu pro $R \rightarrow \infty$ a $r \rightarrow 0_+$ hledaný výsledek $I = \operatorname{Im}(\pi i(-2/\pi)) = -2$.

Příklad 7.4.9 (důležitý). Jako ilustraci použití jiné křivky uvažujme případ funkce „racionální v sinu a kosinu“. Necht $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$, kde P, Q jsou reálné polynomy v proměnných x a y . Dále předpokládáme, že pro žádný bod $[x, y]$, pro který $x^2 + y^2 = 1$, není $Q(x, y) = 0$. Potom je funkce $R(\sin t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, spojitá a existuje integrál

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt ;$$

jeho hodnotu lze spočítat takto: snadno nahlédneme, že pro $z = \exp(it)$ je

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

a proto pro $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, je podle definice integrálu vpravo v následující rovnosti

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \frac{1}{i} \int_{\varphi} R\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)\right) \frac{dz}{z},$$

přičemž integrand posledního integrálu je nějaká racionální funkce $\tilde{R}(z)$, která nemá póly na $\langle \varphi \rangle$; proto lze k výpočtu užít reziduovou větu, pokud umíme určit všechna rezidua funkce \tilde{R} , ležící v $\operatorname{Int}(\varphi)$.

Příklad 7.4.10. Klasickým příkladem výpočtu integrálu typu, který jsme popsali v předcházejícím Příkladu 7.4.9, je integrál ($|a| \neq 1$)

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1} = \frac{1}{i} \int_{\varphi} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)},$$

v němž $a \neq \pm 1$ je reálné číslo. Pro $a = 0$ je výsledek $I = 2\pi$ zřejmý. Jestliže je $a \neq 0$, má funkce $f(z) = [(1 - az)(z - a)]^{-1}$ jednoduché póly v bodech $a, 1/a$, přičemž

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{1 - a^2}, \quad \operatorname{res}(f, 1/a) = \frac{1}{a^2 - 1}.$$

Uvážíme, že pro $|a| < 1$ je $a \in \operatorname{Int} \varphi$ a pro $|a| > 1$ je $1/a \in \operatorname{Int} \varphi$; hodnoty reziduí se liší pouze znaménkem. Proto dostáváme $I = 2\pi \operatorname{sgn}(|a| - 1)/(a^2 - 1)$.

Poznámka 7.4.11. Metodu z předcházejícího Příkladu 7.4.9 můžeme zobecnit. Je-li

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt) dt ,$$

nahradíme v integrálu goniometrické funkce výrazy

$$\cos kt = \frac{1}{2} \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right), \quad \sin kt = \frac{1}{2i} \left(z^k - \frac{1}{z^k} \right),$$

a při analogickém označení dostaneme

$$I = \frac{1}{i} \int_{\varphi} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \dots, \frac{1}{2} \left(z^k + \frac{1}{z^k} \right), \frac{1}{2i} \left(z^k - \frac{1}{z^k} \right) \right) \frac{dz}{z}.$$

Zbytek celého postupu je snad již zřejmý.

Při integraci výrazů obsahujících obecnou mocninu nebo logaritmickou funkci je třeba jisté opatrnosti; pracujeme přitom s vhodnou spojitou větví logaritmu. Zde je ilustrativní příklad:

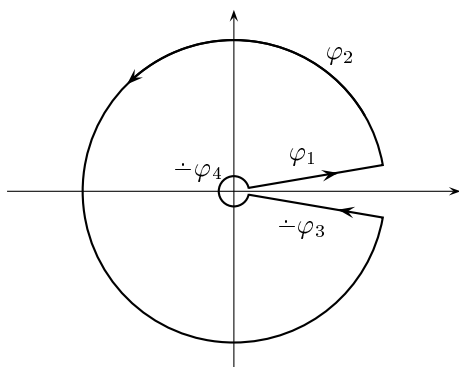
Příklad 7.4.12. Dokažme, že pro každé $a \in (0, 1)$ je

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \quad (7.15)$$

Integrovaná funkce je spojitá v intervalu $(0, \infty)$. V jeho krajních bodech je srovnatelná s funkcemi x^{a-1} („u 0“) a x^{a-2} („u nekonečna“); hledaný integrál tedy existuje a je konečný. Budeme integrovat funkci

$$f(z) = \frac{e^{(a-1) \log^* z}}{z+1},$$

kde \log^* je spojitá větev logaritmu s imaginární částí z intervalu $(0, 2\pi)$. Integro-



Obrázek 7.2: Tvar křivky užitá v Příkladu 7.4.12

vaná funkce je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ s výjimkou bodu $z = -1$. Křivka, podél

které budeme integrovat, je $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, kde křivky φ_k jsou pro $\varepsilon \in (0, \pi/4)$ a $0 < r < 1 < R < \infty$ definovány předpisy

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= te^{i\varepsilon}, & \varphi_3(t) &= te^{-i\varepsilon}, & t &\in [r, R], \\ \varphi_2(t) &= Re^{it}, & \varphi_4(t) &= re^{-it}, & t &\in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon],\end{aligned}$$

Tvar křivky φ přibližuje Obr. 7.4.12. Podle reziduové věty pak je

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, -1).$$

Tak jako v předcházejících příkladech provedeme ještě limitní přechod pro $r \rightarrow 0+$ a $R \rightarrow \infty$. Integrály přes oblouky kružnic přitom odhadujeme takto: Pro $R \rightarrow \infty$ je pro všechna $\varepsilon \in [0, \pi/4)$

$$\left| \int_{\varphi_2} f(z) dz \right| \leq 2\pi R \cdot R^{a-1} \sup \left\{ \left| \frac{1}{1+z} \right|; |z| = R \right\} \leq \frac{2\pi R^a}{R-1} \rightarrow 0,$$

a podobně pro $r \rightarrow 0+$ platí pro všechna $\varepsilon \in [0, \pi/4)$

$$\left| \int_{\varphi_4} f(z) dz \right| \leq 2\pi r^a \sup \left\{ \left| \frac{1}{1+z} \right|; |z| = r \right\} \leq \frac{2\pi r^a}{1-r} \rightarrow 0;$$

připomeňme, že je $a \in (0, 1)$. Dále je

$$\log^* \varphi_1(t) = \log t + i\varepsilon, \quad \log^* \varphi_3(t) = \log t + i(2\pi - \varepsilon),$$

takže platí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varphi_1} f(z) dz = \int_r^R \frac{x^{a-1} dx}{1+x}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varphi_3} f(z) dz = e^{2\pi i(a-1)} \int_r^R \frac{x^{a-1} dx}{1+x},$$

z čehož pomocí limitních přechodů pro $r \rightarrow 0+$ a $R \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1+x} = \frac{2\pi i \operatorname{res}(f, -1)}{1 - e^{2\pi ia}} = \frac{2\pi i e^{-\pi ia}}{e^{-\pi ia} - e^{\pi ia}} \operatorname{res}(f, -1).$$

Integrovaná funkce f má v bodě -1 jednoduchý pól. Podle (C) snadno spočteme

$$\operatorname{res}(f, -1) = e^{(a-1) \log^*(-1)} = e^{\pi i(a-1)} = -e^{\pi ia},$$

z čehož obdržíme dokazovanou rovnost (7.15). Poznamenejme, že k odhadu integrálů podél φ_1, φ_3 lze užít i substituci.

Příklad 7.4.13. Protože je

$$\pi \cotg \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

a protože nulové body funkce sinus jsou jednoduché, má funkce $\pi \cotg \pi z$ jednoduché póly ve všech nulových bodech funkce $\sin \pi z$, které tvoří právě množinu \mathbb{Z} . V těchto bodech jsou rezidua funkce $\pi \cotg \pi z$ rovna 1. Je-li $r \in \mathbb{N}$, pak pro funkci $g_r(z) = 1/z^{2r}$ a křivky $\varphi_n(t) = (n+1/2)e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_n} g_r(z) \pi \cotg \pi z \, dz &= \sum_{k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n} \operatorname{res}(g_r(z) \pi \cotg \pi z, k) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n g_r(k) + \operatorname{res}(g_r(z) \pi \cotg \pi z, 0). \end{aligned}$$

Funkce $\pi \cotg \pi z$ je omezená na $\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n \rangle$. To vyplývá z následující úvahy: Ze vztahu (4.63) dostaneme

$$\pi \cotg \pi z = \pi i \frac{w+1}{w-1} = \pi i \left(1 + \frac{2}{w-1} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

kde $w = \exp(2\pi iz)$. Z Věty 4.5.4 víme, že $\exp u = 1$, právě když je $u = 2\pi ik$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Funkce $g(z) := \exp(2\pi iz)$ má periodu 1 a je prostá pro každé $a \in \mathbb{R}$ na pásu $\{z \in \mathbb{C}; a \leq \operatorname{Re} z < a+1\}$. Tento pás zobrazí na \mathbb{C} . Podle Věty 5.8.2 (o otevřeném zobrazení) se $U := U(0, 1/4)$ zobrazí na okolí $V = f(U)$ bodu 1 a $\delta := \operatorname{dist}(1, \mathbb{C} \setminus V) > 0$. Z periodicity plyne, že na $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U(k, 1/4)$ a tedy i na $\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n \rangle$ je

$$|\pi \cotg \pi z| \leq \pi \left(1 + \frac{2}{\delta} \right) =: K.$$

Pro $r \geq 1$ je

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_n} g_r(z) \pi \cotg \pi z \, dz \right| \leq \frac{K(n+1/2)}{n^{2r}} \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

takže po provedení limitního přechodu pro $n \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} = -\frac{1}{2} \operatorname{res}(g_r(z) \pi \cotg \pi z, 0).$$

V Příkladu 7.3.1 jsme odvodili pro kotangentu tvar části Laurentova rozvoje (7.9) funkce \cotg . Z něj pro $\pi \cotg \pi z$ obdržíme v $P(0, 1)$ vyjádření

$$\pi \cotg \pi z = \frac{1}{z} - \pi \left(\frac{\pi z}{3} + \frac{\pi^3 z^3}{45} + \frac{2\pi^5 z^5}{945} + \dots \right), \quad z \in P(0, 1),$$

z něhož dostaneme

$$\sum \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum \frac{1}{(k+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum \frac{1}{(k+1)^6} = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

Euler našel později i obecný vzorec pro součty tohoto tvaru; vzorec obsahuje Bernoulliho čísla, která jsme zavedli pomocí (5.41). Ta se poprvé objevila v knize *Ars conjectandi* Jacoba Bernoulli (1654 – 1705); viz ještě Historická poznámka na konci této kapitoly.

Poznámka 7.4.14. Podobným způsobem jakým jsme v předcházejícím Příkladu 7.4.13 užíli funkci $\pi \cotg \pi z$ lze využít i funkci $\pi / \sin \pi z$. Rozdíl je v tom, že pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\operatorname{res}(\pi \cotg \pi z, k) = 1, \quad \operatorname{res}(\pi / \sin \pi z, k) = (-1)^k.$$

Na závěr této partie uvedeme několik poznámek:

Poznámka 7.4.15. Postup popsaný v předcházejícím Příkladu 7.4.12 lze užít pro případ libovolné racionální funkce $R(x)$ na místě $1/(1+x)$, pokud platí analogicky

$$\left| \int_{\varphi_2} R(z) z^{a-1} dz \right| \rightarrow 0, \quad \left| \int_{\varphi_4} R(z) z^{a-1} dz \right| \rightarrow 0.$$

Lze tak počítat i integrály s jinými hodnotami parametru a , $a \notin \mathbb{Z}$. Tudy vede i cesta k výpočtu integrálů typu

$$\int_0^\infty R(x) dx, \quad \int_{-\infty}^0 R(x) dx = \int_0^\infty R(-x) dx$$

s racionální funkcí R , pokud tyto integrály konvergují. Čtenáře odkazujeme např. na [38] a [19].

Poznámka 7.4.16. Shrňme kroky, podle nichž zpravidla při výpočtech integrálů pomocí reziduové věty postupujeme. Zahrnují: (1) pokud je to nutné, vyšetření existence zkoumaného integrálu, existenci integrálu však často zaručuje sama použitá metoda, (2) volbu vhodné funkce, kterou budeme integrovat, (3) volbu vhodné křivky, podél níž budeme integrovat, případně (4) odhady některých integrálů a (5) výpočet potřebných reziduí. Pokud chce čtenář získat větší praxi v užívání metod tohoto typu, doporučujeme mu např. [19], [38], [20] nebo použít některou specializovanou sbírku příkladů z teorie funkcí komplexní proměnné, např. [9], [23] nebo [53].

Cvičení

1. Vysvětlete, proč je pro $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \text{ale zároveň} \quad \int_{\varphi} \frac{1}{z^2} dz = 0,$$

když obě integrované funkce jsou spojité na $\langle \varphi \rangle$ a obě mají v $\text{Int } \varphi$ jediný pól v bodě 0!

[Funkce jsou zároveň přímo svými Laurentovými rozvoji v bodě 0 a tedy jejich rezidua v bodě 0 jsou proto snadno „vidět“ – je to v prvním případě 1 a ve druhém 0. Jiné singularity v $\text{Int } \varphi$ funkce nemají, což vysvětluje podstatu odlišného chování.]

2. Určete rezidua následujících racionálních funkcí f ve všech izolovaných singularních bodech a případně i v ∞

$$(a) \frac{1}{z^3 - z^5} \quad (b) \frac{1}{z(1 - z^2)} \quad (c) \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z - 1)}$$

$$\begin{aligned} [(a) \quad & \text{res}(f, \pm 1) = -\frac{1}{2}, \quad \text{res}(f, 0) = 1, \quad \text{res}(f, \infty) = 0; \\ (b) \quad & \text{res}(f, 0) = 1, \quad \text{res}(f, \pm 1) = -\frac{1}{2}, \quad \text{res}(f, \infty) = 0; \\ (c) \quad & \text{res}(f, 0) = 0, \quad \text{res}(f, 1) = 1, \quad \text{res}(f, \infty) = -1.] \end{aligned}$$

3. Nechť P, Q jsou polynomy stejného stupně a polynom Q není identicky roven 0. Určete $\text{res}(R, \infty)$, kde $R = P/Q$!

[Jsou-li P, Q stupně 0, pak je zřejmě $\text{res}(R, \infty) = 0$. Označíme-li schematicky

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0,$$

a P, Q jsou stupně alespoň 1, je $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = a_n/b_n$, bod ∞ je odstranitelnou singularitou R ; podle (F) spočteme

$$\begin{aligned} \text{res}(R, \infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{P(z)}{Q(z)} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{a_n(b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots) - b_n(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots)}{b_n(b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots)} = \\ &= \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{b_n^2}. \end{aligned}$$

4. Odvoďte pro izolovanou singularitu funkcí f, g v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$ a $a, b \in \mathbb{C}$ vzoreček

$$\text{res}(af + bg, z_0) = a \text{res}(f, z_0) + b \text{res}(g, z_0)!$$

5. Prozkoumejte reziduum $\text{res}(R, \infty)$ racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z)$ v případě, že pro stupně polynomů platí $\text{st}(P) + 1 = \text{st}(Q)$!

[Užijeme označení z předcházejícího cvičení. Podle (F) spočteme s přihlédnutím k tomu, že $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$:

$$\text{res}(R, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(0 - \frac{P(z)}{Q(z)} \right) = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} z^n + \dots}{b^n z^n + \dots} = - \frac{a_{n-1}}{b^n}.]$$

6. Ukažte, že je $\text{res}(R, \infty) = 0$ racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z)$ v případě, že pro stupně polynomů platí $\text{st}(P) + 1 < \text{st}(Q)$! Shrňte poznatky o reziduiích $\text{res}(R, \infty)$ pro libovolnou racionální funkci R !

[Podle (F) spočteme

$$\text{res}(R, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{zP(z)}{Q(z)} = 0.]$$

7. Odvoďte pro funkce f, g a $a, b \in \mathbb{C}$ vzoreček

$$\operatorname{res}(af + bg, z_0) = a \operatorname{res}(f, z_0) + b \operatorname{res}(g, z_0), \quad z_0 \in \mathbb{S},$$

pokud má výraz vpravo smysl!

8. Není obtížné spočítat metodami „reálné analýzy“

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

Pro procvičení vypočtete hodnotu tohoto integrálu pomocí reziduové věty!

[Integrujte jako v Příkladu 7.4.7 po „hranici půlkruhu“. Odhad integrálu přes oblouk kružnice je jednoduchý (stupeň polynomu ve jmenovateli je o 2 větší než v čitateli) a počítáme reziduum v bodě i , v němž má integrand jednoduchý pól. Je

$$\operatorname{res}((x^2 + 1)^{-1}, i) = \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i},$$

takže

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{2i} = \frac{\pi}{2}.]$$

9. Podobně jako v Příkladu 7.4.7 spočtete

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}!$$

[Užijeme-li stejné označení jako v Příkladu 7.4.7, snadno dostaneme

$$I := \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + 1} = 2\pi i = 2\pi i (\operatorname{res}(f, z_1) + \operatorname{res}(f, z_2)),$$

kde tentokrát $f(z) = z^2(z^4 + 1)^{-1}$. Spočteme analogicky hodnoty reziduí:

$$\frac{z^3}{4z^4} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{4z} \Big|_{z=z_1} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 - i), \quad \frac{z^3}{4z^4} \Big|_{z=z_2} = \frac{1}{4z} \Big|_{z=z_2} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1 - i).$$

Odtud dostaneme, že opět jako v Příkladu 7.4.7 $I = 2\pi i \sqrt{2}(-i)/4 = \pi/\sqrt{2}$.]

10. Integraci přes hranici „čtvrtkruhu“, tj. po křivce $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, kde

$$\varphi_1(t) = rt, \quad \varphi_3(t) = irt, \quad t \in [0, 1] \quad \text{a} \quad \varphi_2(t) = re^{it}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

a limitním přechodem pro $r \rightarrow +\infty$ odvoďte vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{x^4 + 1} = !$$

Proč nevede k cíli analogický postup jako v předcházejícím cvičení?

[Integrál existuje a je konečný, avšak integrovaná funkce je lichá, a tak integraci přes hranici „půlkruhu“ dostaneme jen triviální výsledek, totiž že integrál přes \mathbb{R} je roven 0.]

11. (těžší) Pro případ $p, q \in \mathbb{N}$, $p + 2 \leq 2q$, se pokuste odvodit vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^p dx}{x^{2q} + 1} = (1 + (-1)^p) \frac{\pi}{2q \sin((\pi/2q)(p+1))} !$$

12. Ukažte, že platí

$$I := \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} !$$

[Integrujeme funkci $f(z) = (z^3 + 1)^{-1}$. Volba křivky je patrně jediný problém: je vhodné integrovat po uzavřené křivce $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, kde

$$\varphi_1(t) = t, \quad \varphi_3(t) = te^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad t \in [0, r] \quad \text{a} \quad \varphi_2(t) = re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi/3].$$

Pro všechna dostatečně velká $r > 0$ leží uvnitř křivky φ jediný singulární bod funkce f . Volba φ_3 souvisí s tím že $(1 + (re^{\frac{2\pi i}{3}})^3)^{-1} = (1 + r^3)^{-1}$. Zatímco integrál přes φ_2 lze odhadnout např.

$$\left| \int_{\varphi_2} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi/3} \frac{r}{r^3 - 1} dt$$

a konverguje tedy při $r \rightarrow \infty$ k 0, příslušné reziduum v jednoduchém pólu v bodě $z = e^{\pi i/3}$ je

$$\operatorname{res}(f, e^{\pi i/3}) = \frac{1}{3z^2} \Big|_{z=e^{\pi i/3}} = \frac{1}{3e^{2\pi i/3}} = \frac{e^{-2\pi i/3}}{3}.$$

Limita součtu integrálů přes „zbytek křivky φ “ je rovna $I(1 - e^{2\pi i/3})$, a tak dostáváme

$$I(1 - e^{2\pi i/3}) = 2\pi i \frac{e^{-2\pi i/3}}{3}, \quad \text{neboli} \quad I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.]$$

13. Určete hodnoty integrálů

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 + 3 \cos x}, \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{13 + 12 \sin x}, \quad (c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x dx}{12 + 12 \cos x} !$$

[Postupujte jako v Příkladu 7.4.9; (a) $\pi/2$, (b) $2\pi/5$, (c) $\pi/9$.]

14. Určete hodnoty integrálů

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}, \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx !$$

[Postupujte jako v Příkladu 7.4.7; (a) $5\pi/12$, (b) $2\pi/5$, (c) $4\pi\sqrt{2}/3$.]

15. Pro parametr $a \in (0, 1)$ spočítejte integrál

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x} !$$

[Počítejte podle návodu v Příkladu 7.4.9; je

$$I = \frac{1}{i} \int_{\varphi} \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{ia} \int_{\varphi} \frac{dz}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1},$$

přičemž pouze jeden nulový bod jmenovatele $z_0 = a^{-1}(-1 + \sqrt{1 - a^2})$ se nachází uvnitř jednotkové kružnice φ . Spočteme

$$\operatorname{res}(f(z), z_0) = \left(2z + \frac{2}{a}\right)^{-1} \Big|_{z=z_0} = \frac{a}{2\sqrt{1 - a^2}},$$

z čehož dostaneme

$$I = 2\pi i \frac{2}{ia} \operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Připomeňme, že s -násobným „oběhem“ kružnice φ můžeme spočítat integrály z f přes intervaly tvaru $[r 2\pi, (r + s) 2\pi]$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$.]

- 16.** Některé praktické úlohy, např. vyšetřování stability oscilačních obvodů, které lze řešit i jinými matematickými prostředky, lze také elegantně zvládat i pomocí teorie funkcí komplexní proměnné. Zájemce o tuto problematiku odkazujeme např. na druhý díl knihy [35], str. 280.

Kapitola 8

Historické poznámky a komentář

V této kapitole si všimneme vzniku a vývoje teorie funkcí komplexní proměnné a také okomentujeme původ a význam některých tvrzení, která jsme v tomto textu dokázali.

O historii zavádění komplexních čísel jsme se podrobněji zmínili v Úvodu. Za zmínku stojí fakt, že „geometrický pohled“ na problematiku funkcí komplexní proměnné přijal LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857) teprve v roce 1825. Práce, kterou napsal JEAN-ROBERT ARGAND (1768–1822) v r. 1806 a také její zdokonalená verze z r. 1815 měly v tomto směru menší vliv než práce Cauchyho.

Podmínku (3) z Lemmatu 1.4.1 publikoval v trochu jiném kontextu CONSTANTIN CARATHÉODORY (1883–1950) v [13] a její analogie je *velmi užitečná* při vyšetřování funkcí více reálných proměnných; viz např. [1]. Plyne z ní mj. okamžitě to, co čtenář ví o vlastní derivaci reálné funkce, že totiž *nutnou podmínkou* pro existenci derivace $f'(z_0)$ je *spojitost* f v bodě w .

Cauchy-Riemannovy podmínky se v tištěné podobě objevily poprvé v práci z r. 1752, kterou napsal JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783). V souvislosti se studiem rovinného proudění se vyskytly u LEONHARDA EULERA (1707–1783) a JOSEPHA LAGRANGE (1736–1813), avšak to patrně neovlivnilo vývoj teorie funkcí komplexní proměnné. R. 1814 se tyto podmínky objevily v přímé souvislosti s funkcemi komplexní proměnné u Cauchyho a kolem r. 1847 u GEORGA FRIEDRICHA BERNHARDA RIEMANNA (1826–1866). Poznamenejme, že někdy bývají tyto rovnice nazývány rovnice d'Alembert-Eulerovy.

Cauchy byl také první, kdo od r. 1823 zapisoval Cauchy-Riemannovy podmínky ve formě jediné rovnice (3.3). Na druhé straně teprve r. 1851 si uvědomil souvislost mezi spojitostí komplexní funkce a spojitostí jejích složek. Tehdy si patrně, přibližně ve stejné době jako Riemann, který toho roku dokončil svoji disertaci, plně uvědomil důležitost těchto podmínek pro diferencovatelnost komplexní funkce komplexní proměnné.

V Poznámce 3.2.4 se pracuje s lineárním zobrazením L_A a rovností (3.11) pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. V prvním případě říkáme, že zobrazení je \mathbb{R} -lineární a ve druhém, že zobrazení je \mathbb{C} -lineární. Ve Větě 3.2.2 a následující Poznámce 3.2.4 jsme dokázali, že *zobrazení f je komplexně diferencovatelné v bodě z , právě když je reálně diferencovatelné (složky f_1, f_2 jsou diferencovatelné) a diferenciál je \mathbb{C} -lineárním zobrazením.*

Dokázané tvrzení o diferencovatelnosti komplexních funkcí lze ještě podstatně zesílit. Následující podmínku publikoval r. 1935 DMITRIJ JEVGENĚVIČ MENŠOV (1892–1988): *Funkce f spojitá na otevřené množině G je holomorfní v G , jestliže ke každému bodu z existuje dvojice různých přímek p, p' procházejících bodem z tak, že limity*

$$\lim_{w \rightarrow z, w \in p} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad \lim_{w \rightarrow z, w \in p'} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existují v \mathbb{C} a jsou si rovny. Souvislostem mezi diferencovatelností funkcí a tzv. zachováním úhlů jsme se věnovali jen okrajově, trochu více nalezneme čtenář v Kapitole 9 v učebnici [K].

Teorii křivkového integrálu budoval Cauchy postupně od r. 1814. Komplexní funkce v integrandu se u něj objevují krátce před r. 1821 (tehdy poprvé v tištěné formě). Velmi dlouho však trvalo, než dospěl k integraci podél obecnějších křivek. K tomu došlo prakticky až v práci z r. 1831; viz [49].

Stereografickou projekci používal PTOLEMAIOS (asi 100–168) k zobrazování hvězdné oblohy. Popsané užití pochází od Riemanna, v tisku se patrně poprvé objevilo v práci CARLA GOTTFRIEDA NEUMANNA (1832–1925). Topologický přístup umožnil teprve vznik topologie. Jednobodová kompaktifikace \mathbb{C} je speciálním případem tzv. *Aleksandrovské kompaktifikace*; PAVEL SERGEJEVIČ ALEKSANDROV (1896–1982) byl zakladatelem sovětské topologické školy a významně se zasloužil o studium (bi)kompaktních topologických prostorů¹⁾.

Definice derivace je standardní, zajímavější je všimnout si Lemmatu 1.4.1. Podmínky (2) a (3) se často užívají při studiu funkcí více proměnných, resp. zobrazení z \mathbb{R}^m do \mathbb{R}^k ; v tom případě se A , resp. ϑ interpretují jako *matice*; viz [1].

Křivka je relativně složitý topologický pojem, jehož definice se zpřesňovala řadu let. Kořeny tohoto pojmu sahají k řecké matematice, v níž vrcholily klasifikací křivek, kterou podal ve svých komentářích PAPPOS ALEXANDRIJSKÝ (asi 290–asi 350) ve druhé polovině 4. stol. Další přínosy této problematice souvisejí se vznikem analytické geometrie a infinitezimálního počtu; tak např. RENÉ DESCARTES (1596–1650) studoval rovinné křivky stupně vyššího než 2. Infinitezimální metody studia křivek nacházíme již u ISAACA NEWTONA (1643–1727). Problém určení *délky* křivky byl dokonce jedním z motivů vzniku infinitezimálního počtu. Další pokrok přinesl vznik diferenciální geometrie, v níž se tyto metody dále rozvinuly. Cauchy se ve svých pracích nejprve omezoval na velmi jednoduché křivky složené z úseček a postupně dospěl k práci s uzavřenými křivkami. Problematiku komplexních funkcí komplexní proměnné studoval cca od r. 1814, výhodnost užití kružnic místo hranic intervalů v některých úvahách si však uvědomil teprve v r. 1827; viz [49], str. 136.

Pojem „obecné“ křivky jako *spojitého* zobrazení f intervalu $[a, b]$ do \mathbb{C} resp. \mathbb{R}^m se objevuje r. 1887 u CAMILLA JORDANA (1838–1922). Pro některé aplikace používal pojem *jednoduché křivky*. Vyslovil a „dokázal“ (ne zcela korektně) Větu 1.6.21; její první

¹⁾ V ruské terminologii se užíval pro kompaktní prostor termín bikompaktní prostor; viz též [Z], str. 394 a násl..

bezchybný důkaz podal teprve r. 1905 OSWALD VEBLEN (1880–1960). Čtenář by si měl povšimnout, že jsme studovali převážně vlastnosti nezávislé na parametrizaci, ale křivku jsme definovali jako zobrazení φ , ne celou třídu tříd jejích parametrizací.

Pojetí křivky jakožto kontinua $K \subset \mathbb{R}^2$, které je *řídke* v \mathbb{R}^2 , lze stopovat ke GEORGU CANTOROVÍ (1845–1918). Jinak řečeno, množina K nemá vnitřní body. Tato podmínka je reakcí na objev GIUSEPPE PEANA (1858–1932), který r. 1890 sestrojil spojitě zobrazení intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ na jednotkový čtverec $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$; je to křivka ve smyslu *Jordanovy definice*, snadno lze však ukázat, že takové zobrazení *není prosté*. Spojitá zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, pro něž je vnitřek $(\langle \varphi \rangle)^\circ \neq \emptyset$, se nazývají *Peanovy křivky*.

Jestliže je φ po částech regulární křivka, je její délka $L(\varphi)$ konečná. Při obecnějším pojetí křivky jakožto spojitě zobrazení φ intervalu $[a, b]$ do \mathbb{C} to již není pravda, dokonce ani v případě, že φ je prosté. Poznamenejme, že obecně se délka $L(\varphi)$ definuje vzorcem

$$L(\varphi) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|; D = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\} \in \mathcal{D}([a, b]) \right\},$$

kde supremum se uvažuje vzhledem ke všem dělením D intervalu $[a, b]$. Základní aparát pro obecné křivky, analogický tomu, který jsme vyložili pro *po částech regulární* křivky, je vybudován např. v [29].

V otázce konvergence posloupností a řad funkcí si Cauchy nejprve význam stejnoměrné konvergence neuvědomoval. V prvních krocích k jejímu využití měl Cauchy předchůdce, význam pro spojitost limity spojitých funkcí (ale ne pro záměnu součtu řady a integrálu!) si uvedomil nejspíše v práci publikované r. 1853. Dříve, již r. 1842, dospěl k pojmu stejnoměrné konvergence CARL WILHELM THEODOR WEIERSTRASS (1815–1897) a patrně první dokázal věty o derivování a integraci řad funkcí „člen po členu“. Pojem stejnoměrné konvergence pak intenzivně využívali Weierstrassovi žáci, kteří přispěli k tomu, že se stal brzo obecně známý.

Pro pojem *bezpodmínečné (absolutní)* konvergence dokázal základní tvrzení o shodném součtu přerovnané řady r. 1837 JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859). Pojem *podmínečné (neabsolutní)* konvergence analyzoval jako první Riemann r. 1854 (věta o přerovnávání: viz [Z], str. 99; tento zásadní výsledek byl publikován po Riemannově smrti). Odhady typu Věty 1.7.5 pro mocninné řady užíval v modifikované formě již NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) (stejněměrný odhad zbytku). Pojem normální konvergence kombinuje výhody absolutní a lokálně stejnoměrné konvergence. Zavedl ho r. 1908 RENÉ BAIRE (1874–1932). Napsal (citát je přeložen z [41]): *Ačkoli zavedení každého nového pojmu musí být provedeno po pečlivé úvaze, zdálo se mi nutné charakterizovat krátkou frází případ nejjednodušší a převládající formy stejnoměrné konvergence řad, jejichž členy jsou v absolutní hodnotě odhadnuty nezápornými členy konvergentní číselné řady (což se někdy nazývá Weierstrassovo kritérium). Nazývám tyto řady normálně konvergentní a doufám, že lidé tuto moji inovaci omluví. Mnoho důkazů o řadách a trochu později o nekonečných součinech se použitím tohoto pojmu, který je mnohem snadněji použitelný než stejnoměrná konvergence, značně zjednoduší.* Využití v partiích jako je funkcionální analýza ukázalo, že tento Baireův krok byl dobře uvážen.

Mocninné řady patřily již od vzniku infinitezimálního počtu k důležitým matematickým nástrojům, avšak jejich používání nebylo svázáno s přesnými znalostmi jejich vlastností. V jistém smyslu, který záhy poznáme, teorie funkcí komplexní proměnné

„splývá“ s teorií mocninných řad. Již JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813) pracoval s funkcemi, které bylo možno lokálně vyjádřit mocninnou řadou. V práci *Théorie des fonctions analytiques* z r. 1797 chtěl dokonce dokázat, že lze takto vyjádřit každou spojitou funkci. Z té doby pochází termín *analytické funkce*; byly to zároveň právě ty funkce, které byly tehdy pokládány v analýze za užitečné. Poznamenejme, že v dnešní době se často užívá názvu analytické funkce pro jiný typ „objektů“ (nejsou to již zobrazení), které umožňují vhodným způsobem zvládat problém „víceznačnosti“.

Pokud se studují pouze tzv. *formální mocninné řady* o tomtéž středu bez ohledu na konvergenci, lze o nich říci, že tvoří *komplexní algebru*. Pak $u \in \mathbb{C}$ ztotožňujeme s řadou $u + \sum_{k=1}^{\infty} 0^k (z - z_0)^k$ a pro

$$f = \sum a_k (z - z_0)^k, \quad g = \sum b_k (z - z_0)^k \quad \text{definujeme}$$

$$f + g = \sum (a_k + b_k) (z - z_0)^k, \quad f \cdot g = \sum p_k (z - z_0)^k,$$

kde $p_k := \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$; řada $\sum p_k$ je Cauchyho součin řad $\sum a_k, \sum b_k$.

Poznamenejme, že r. 1821 Cauchy odvodil tvrzení o konvergenci mocninné řady *včetně vzorce* (2.7) z Lemmatu 2.3.1; vzorec popsal slovy, neboť formální definici \limsup podal teprve PAUL DAVID GUSTAV DU BOIS-REYMOND (1831–1889) r. 1882. Cauchy též současně dokázal vzorec (2.9), pokud v něm uvedená limita existuje.

R. 1888 objevil vzorec (2.7) znovu, patrně zcela nezávisle na Cauchym, JAQUES HADAMARD (1865–1963); v té době byl studentem známé *École Normale*. Přesnou formulaci pak podal v článku z r. 1888, vlivem kterého se v řadě učebnic uvádí (2.7) jako Hadamardův vzorec. Patrně je nevhodnější užívat označení *Cauchy-Hadamardův vzorec*, neboť Hadamard dalším využitím vzorec „zpopularizoval“; srv. [36].

Upozorníme na závažný rozdíl mezi reálnými funkcemi reálné proměnné a komplexními funkcemi komplexní proměnné. Je-li f nekonečněkrát diferencovatelná funkce na \mathbb{R} , pak součet její Taylorovy řady se středem 0 může konvergovat v \mathbb{R} k funkci g , pro kterou $f(x) \neq g(x)$ pro všechna $x \neq 0$, ale existují i funkce f , jejichž Taylorova řada se středem libovolně zvoleném bodě $x \in \mathbb{R}$ konverguje právě jen v bodě x ; srv. [Z], str. 203, kde je uveden Cauchyho příklad z r. 1822 a str. 204, kde je zmíněn příklad MATYÁŠE LERCHA (1860–1922). Naproti tomu pro komplexní funkci f , která je (nekonečněkrát) diferencovatelná v \mathbb{C} , její Taylorova řada se středem v libovolném bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ konverguje k f všude v \mathbb{C} . To jsme dokázali v Kapitole 5.

Uvedme ještě metodickou poznámku: dnes patrně již nikdo nepochybuje o tom, že vykládat mocninné řady pouze pro funkce reálné proměnné je anachronismus. Je nutné si proto rozmyslet pouze to, jak mnoho o mocninných řadách vykládat *bez rozvinutí elementární teorie funkcí komplexní proměnné*. To ovšem záleží na cílech přednášky, na její časové dotaci, a také na ambicích přednášejícího dosáhnout u studentů solidní hloubky porozumění této partii analýzy.

Vývoj chápání elementárních transcendentních funkcí v reálném oboru nebudeme popisovat; viz např. [Z], str. 178–181. Poznamenejme, že CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) napsal r. 1811 v dopise z 18. prosince 1811 FRIEDRICHOWI WILHELMU BESSELOVI (1784–1846): *Na úplném začátku bych žádal každého, kde chce zavést do analýzy novou funkci, aby objasnil, zda se spokojí s reálnými veličinami (tj. s reálnou proměnnou) a bude považovat imaginární hodnoty za něco ne zcela rozvinutého, nebo se připojí k mému názoru, že imaginární veličiny $a + \sqrt{-1}b = a + ib$ musíme považovat za*

zcela rovnoprávné veličinám reálným. Tímto výrokem předznamenal do jisté míry ukončení vývojového období jednotlivých komplexních funkcí komplexní proměnné a zrod teorie funkcí komplexní proměnné.

O diskusích kolem možných hodnot logaritmu $\log x$ pro $x < 0$ jsme se zmínili v úvodní kapitole. Ty završil Euler, u něhož se setkáváme s komplexní exponenciálou a vzorcí (4.38), které jsou po něm nazývány. Logaritmus byl pro Eulera *mnohoznačnou* funkcí: za $\log z$ považoval každé komplexní číslo w , pro něž je $\exp w = z$. Exponenciálu zaváděl jako *limitu posloupnosti* polynomů i v komplexním oboru; viz vzorec (4.65). Analogicky postupoval u logaritmu. Znal vyjádření exponenciály řadou (4.24) a její vztahy ke goniometrickým funkcím. Patrně jako první dospěl k soudobému tvaru formule (4.48) nazvané po ABRAHAMU DE MOIVREOVI (1667–1754), který ji objevil. Pochopení vlastností funkcí \arg a \log je rozhodující pro klíčová tvrzení teorie funkcí komplexní proměnné. Poznamenejme ještě, že „čistý přístup“ k exponenciále (bez využití znalostí o reálné exponenciále \exp) jsme se pokusili demonstrovat popisem způsobů jejího zavedení. Charakterizace elementárních funkcí pomocí funkcionálních rovnic má kořeny opět v pracích Cauchyho, který se však zabýval spojitými reálnými řešeními těchto rovnic; viz [Z], str. 152 a násl.

Moivre r. 1707 publikoval numerické příklady předcházející (4.48). Pravděpodobně kolem r. 1730 již užíval vzorec

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2} \sqrt[n]{\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta} + \frac{1}{2} \sqrt[n]{\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta}$$

a později, r. 1738, dospěl k relativně komplikovanému postupu pro výpočet $\sqrt[n]{x + iy}$; rovnost (4.48) patrně nikdy explicitně neuvedl. Dnešní pojetí završil Euler r. 1748 a vlastní formuli (4.48) rigorózně dokázal o rok později pro všechna $n \in \mathbb{Z}$.

Jako perličku nematematického charakteru uveďme, že způsob zavedení π pomocí nejmenšího kladného nulového bodu funkce \cos posloužil jako záminka k diskriminaci známého německého odborníka na teorii čísel EDMUNDA LANDAUA (1877–1938) po nástupu nacistů k moci v Německu.

Definice funkcí tg a cotg je přirozená (zobecnění postupu aplikovaného v „reálném případě“). K pochopení jejich hlubšího významu je potřeba další trocha teorie; viz [K], 8. kapitola (o meromorfních funkcích). Funkce $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$ a $\pi / \sin(\pi z)$ se užívají ke sčítání řad metodou, plynoucí z reziduové věty; viz Kapitola 7.

I hyperbolické funkce byly známy před vznikem teorie funkcí komplexní proměnné. Zavedl je r. 1757 VINCENCIO RICATTI (1707–1775), jejich standardní značení pochází od JOHANNA HEINRICHA LAMBERTA (1728–1777). Jejich první tabulky se objevily r. 1890. Bylo by škodlivé se domnívat, že jde o samoučelně vzniklé „neužitečné“ analogy goniometrických funkcí; např. grafem funkce \cosh na \mathbb{R} je křivka, která se nazývá řetězovka. Tvar této křivky má např. drát vysokého napětí mezi vzdálenými sloupy stojícími v téže výšce. Nalézt analytický popis řetězovky bylo jedním z nejstarších problémů ležících u zrodu infinitezimálního počtu. Neúspěšně se jím zabýval již LEONARDO DA VINCI (1452–1519), avšak jedno z prvních řešení metodami infinitezimálního počtu podal JOHANN BERNOULLI (1667–1748). Užitečnost hyperbolických funkcí pro teorii funkcí komplexní proměnné ukazují např. vztahy (4.40).

V partii o odmocninách jsme se přiblížili částečně algebře. Partie o „ n -tých odmocninách z jedné“ tvořila často i u nás část přednášek z algebry. V historických knížkách o algebře lze nalézt fakta o „algebraických“ kořenech zkoumání komplexních čísel.

Jistou formu výchozího Lemmatu 5.2.1 dokázali Gauss r. 1811 a Cauchy r. 1814 a 1825, avšak spojitost derivace byla v jejich důkazech podstatná. První verzi prezento-

vaného důkazu objevil r. 1883 ÉDOUARD JAEN BAPTISTE GOURSAT (1858–1936) a dopisem ji sdělil CHARLESU HERMITOVI (1822–1901). Hermite dopis otiskl r. 1884. Goursat používal obdélníky místo trojúhelníků. Že jeho důkaz nevyužívá ve skutečnosti spojitosti derivace, explicitně nevedl; byl si však této skutečnosti záhy vědom. Důkaz formálně publikovaný r. 1884 modifikoval až r. 1900 tak, že explicitně uvedl předpoklad pouhé existence f' .

Triangulační technika pochází od ALFREDA PRINGSHEIMA (1850–1941) a je z r. 1901 a z pozdější práce publikované r. 1903. Důkaz Cauchyho věty lze provést i „reálnou technikou“ pomocí *Greenovy věty*; více o tom a o příbuzných věcech lze nalézt v článku [57].

Lemma 5.3.1 je vlastně variantou věty o derivování integrálu podle (komplexního) parametru. Trik s rozvinutím funkce $1/(z - \zeta) = 1/(\varphi(t) - \zeta)$ v mocninnou řadu a záměnou pořadí sčítání řady a integrace použil patrně jako první Cauchy r. 1831, je však často užíván dodnes; viz jeho varianty v [10], str. 48 či [41], str. 208. Podstatné je, do jaké hloubky je dříve rozvinut aparát mocninných řad. Obecnější verzi této věty nalezneme čtenář např. v [44], str. 221. Konvergence řady v $U(z_0, r)$ vyplývá přímo z důkazu, plyne však mj. i z odhadu pro koeficienty a_k pomocí normy $\|f\|$ funkce f v prostoru $\mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$

$$2\pi |a_k| = \left| \int_{\varphi} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \right| \leq \int_{\varphi} \left| \frac{f(z)}{z - z_0^{k+1}} \right| dz \leq \frac{\|f\| \cdot L(\varphi)}{r^{k+1}},$$

kteřý platí pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, a z jednoduchých vzorečků (2.8) nebo (2.9) pro poloměr konvergence mocninné řady.

Připomeňme, že při užití (5.17) plyne rovnost $\text{ind}(\varphi, \infty) = 0$ „přirozeně“ z definice: integrujeme nulovou funkci. Když již víme, k čemu máme dojít, lze v případě našeho chápání křivek definovat index pomocí (5.17), postupovat nezávisle na Lemmatu 4.6.14 a dokázat vztah indexu k logaritmu jen s využitím základních pojmů; viz např. [44], str. 223. Srv. též [3], str. 115; tam je tato cesta v kontextu po částech regulárních křivek označena za nejjednodušší. Velmi obtížné je vystopovat v této souvislosti kořeny užití indexu, sahají však patrně až ke Cauchymu.

Početní příklady, které jsme zařadili, ilustrují využití jednoduché verze Cauchyho věty. Výpočtem hodnot integrálů podobného typu začal Cauchy budovat postupně celou teorii, kterou vytvořil. Integrály z Příkladu 5.4.15 hrají důležitou roli v teorii difrakce světla. Jsou pojmenovány po fyzikovi AUGUSTINOVÍ JEANOVÍ FRESNELOVI (1788–1827). Při výpočtu se využívá toho, že známe hodnotu *Laplaceova integrálu* (5.22); tu lze určit mnoha způsoby. Jeho hodnotu určil PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749–1827) zcela nezávisle, dříve k ní však dospěl r. 1771 LEONHARD EULER (1707–1783). Často se tento integrál nazývá také *Gaussův integrál*, ač to byl právě Gauss, který ho poprvé pojmenoval Laplaceovým jménem. Hodnotu integrálu z Příkladu 5.4.17 vypočetl také již Cauchy, avšak nekorektním způsobem. Poznamenejme ještě, že se označení Fresnelovy integrály užívá i pro integrály

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

které vzniknou z integrálů (5.21) substitucí.

Tvrzení obsažená ve Větě 5.5.3, která Cauchy odvodil, markantně ilustrují rozdíl mezi diferencovatelností v \mathbb{R} a v \mathbb{C} . Lze je obdržet i bez integrální reprezentace Cauchyho vzorcem. Cauchy odvodil *Cauchyho vzorec* (5.31) ve speciálním tvaru již r. 1819, avšak teprve r. 1831 rozeznal obrovskou sílu tohoto nástroje. Přitom jej užil pro všechny body kruhu ještě v práci z r. 1822. R. 1831 pomocí něj dokázal část (3) Věty 5.5.3.

Poznamenejme, že k integraci přes obecnější uzavřené křivky dospěl Cauchy teprve až v r. 1831.

Větu 5.5.14 dokázal CARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815–1897) jiným způsobem. Abychom ukázali možné aplikace Morerovy věty, využili jsme ji k důkazu první části tvrzení. Význam, jak postřehl již např. Osgood r. 1896, tkví v tom, že k důkazu holomorfnosti f stačí pouze základní poznatky teorie. Důsledek 5.5.15 lze chápat jako zobecnění tvrzení o derivování *mocninných řad* člen po členu. Z Věty 5.9.1 plyne toto tvrzení: *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je omezená oblast a $\{f_k\}$ jsou funkce spojité na uzavěru \bar{G} a holomorfní v G , přičemž je $f_k \rightrightarrows f$ na ∂G . Potom $f_k \rightrightarrows f$ na G .* Speciálně jsou splněny předpoklady Weierstrassovy Věty 5.5.14. Řada $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k^2$ však ukazuje, že se stejnoměrná konvergence nemusí přenést na posloupnost či řadu derivací.

Důsledek 5.5.4 uzavírá náš obraz o holomorfních funkcích: jsou to spojité funkce, které jsou v jistém přesně vymezeném smyslu „rozumně křivkově integrovatelné“. To je kromě existence derivace nebo diferencovatelnosti složek spolu s Cauchy-Riemannovými podmínkami další popis holomorfních funkcí. V zahraniční literatuře bývá nazýván *Morerova věta*. Důsledek 5.5.4 v uvedené verzi dokázali později jiní autoři, mezi nimiž byli např. JEAN DE LA VALLÉE POUSSIN (1866–1962) r. 1893, DIMITRI POMPEIU (1873–1954) r. 1895, nebo WILLIAM FOGG OSGOOD (1864–1943) r. 1896. Zdá se, že Morerův výsledek neznali. GIACINTO MORERA (1856–1909) však v podstatě dokázal silnější tvrzení, které uvádíme níže jako Důsledek 5.5.10. Podobná tvrzení, např. Důsledek 5.5.9, jsou *tvrzení Morerova typu*; pracují s užší třídou speciálních křivek a těchto speciálních vlastností lze z výhodou v některých tvrzeních využít. Čtenář by si měl povšimnout dalšího aspektu Morerovy věty: ta dává mj. pohodlný přístup k větě o (lokálně) stejnoměrné limitě holomorfních funkcí; viz Větu 5.5.14. To si uvědomili jak Morera, tak později Osgood.

Uvedený princip zrcadlení z Věty 5.5.13 dokázal a dále zobecnil HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843–1923) v letech 1867–70; místo přes přímku \mathbb{R} lze uvažovat „holomorfní rozšíření“ přes obecnější hladké křivky. Odkazy na původní Schwarzovy práce lze nalézt např. v [39], str. 57.

Zdánlivě triviálním důsledkem Cauchyho vzorce je *věta o průměru*. Ačkoli se lehce dokáže, má dalekosáhlé důsledky. Jedním z nich je jednoduchá verze *principu maxima modulu* v následujícím Důsledku 5.6.3. Ten umožňuje dokázat otevřenost zobrazení holomorfní funkcí s nenulovou derivací a zlepšenou verzi věty o derivování inverzní funkce z Důsledku 5.8.3.

Přibližně v r. 1831, kdy si Cauchy uvědomil přednosti práce s kružnicemi, dospěl také ke zobecnění odhadu z Důsledku 5.6.3: byl schopen odhadnout velikost nejen prvního, ale dokonce *všech* koeficientů Taylorova rozvoje. Dnes jsou tyto odhady nazývány zpravidla *Cauchyho odhady*. Tím se otevřelo další pole techniky využití Cauchyho vzorce. Důsledkem Cauchyho vzorce je také tzv. *věta o jednoznačnosti*. Její význam je obrovský; různé aspekty jejího využití jsme se pokusili ilustrovat na několika příkladech. Poznamenejme v této souvislosti, že je-li f nekonstantní funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$, nemá množina $\{z \in G; f(z) = \alpha\}$ nejen žádný vnitřní bod, ale nemá dokonce žádný hromadný bod v G ; je tedy izolovaná v G .

Není bez zajímavosti, že oba vzorce (5.43) a (5.44) byly známy již Eulerovi. Vztah pro (5.43) lze upravit na „elegantnější“ tvar

$$\frac{z}{2} \cotg \frac{z}{2} = 1 - B_2 \frac{z^2}{2!} + B_4 \frac{z^4}{4!} - B_6 \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Lemma 5.7.6 je jednou z přístupových cest k *Liouvillově větě* a je samo o sobě zajímavým tvrzením. JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) publikoval Větu 5.7.7 r. 1847 v práci o dvojeperiodických funkcích, jako Liouvillovu větu ji pojmenoval později r. 1879 CARL WILHELM BORCHARDT (1817–1880). Připomínáme, že zde priorita patrně náleží Cauchyemu, který tuto větu dokázal již r. 1844; srv. [10], str. 82. Viz též Poznámka 5.9.5.

Jednou z vět, kterou lze pomocí Liouvillové věty dokázat jako její jednoduchý důsledek, je tzv. *základní věta algebry*, viz Věta 5.7.8. Nazval ji tak v podstatě Gauss. Také k ní vede řada cest. První zmínku o ní nacházíme u PETERA ROTHY (????–1617) v práci z r. 1608, i když tvrzení je připisováno ALBERTU GIRARDOVI (1595–1632) (1629). Gauss se k důkazu základní věty algebry ještě několikrát vrátil (1815, 1816) a podal čtyři různé důkazy tohoto tvrzení. Pokusy o důkaz nacházíme již u JEANA D'ALEMBERTA r. 1746 a u Eulera; tyto důkazy však byly, stejně jako první důkaz Gaussův, z hlediska dnešních nároků na přesnost neúplné. Tak např. Cauchy dokázal základní větu algebry nejprve r. 1817, pak r. 1820 pro polynomy s reálnými koeficienty a r. 1821 rozšířil tento výsledek na polynomy s komplexními koeficienty; dříve obdržel částečný výsledek v tomto směru r. 1815 JEAN ROBERT ARGAND (1768–1822). Poznamenejme ještě, že je publikováno přes 100 různých důkazů tohoto tvrzení.

I když nelze vytvářet analogickou teorii funkcí jako je teorie funkcí komplexní proměnné obecně na \mathbb{R}^m , má Liouvillova věta analogii v teorii harmonických funkcí na \mathbb{R}^m ; v tomto případě však stačí např. omezenost funkce zdola.

Věta 5.9.1 obsahuje několik silnějších tvrzení než to, které je obsahem Důsledku 5.6.3. Všechna jsou zpravidla označována názvem *princip maxima modulu*. Věta 5.9.4 je opět zajímavá sama o sobě. Pomocí ní lze dokázat některé výsledky jiným způsobem. AUGUST GUTZMER (1860–1925) ji publikoval r. 1887. Podle Gutzmera ji objevil CARL GUSTAV AXEL HARNACK (1851–1888), nicméně poprvé se objevila v práci z r. 1806, kterou napsal MARC-ANTOINE PARSEVAL (1755–1836). Zde jsme zachovali pojmenování podle Gutzmera, použité již dříve v českém textu.

Jak jsme viděli, většinu uvedených tvrzení nám umožnil dokázat Cauchyho vzorec pro kladně orientovanou kružnici. Role kružnice není přítom podstatná, stejně se dá pracovat např. s hranicemi intervalů. Dosud jsme se zaměřili převážně na odvození výsledků „lokálního charakteru“; např. k důkazu toho, že funkce je holomorfní, jsme ověřili *lokálně* existenci primitivní funkce k f .

Poznamenejme, že např. podmínku z Věty 5.5.9 by zřejmě stačilo ověřit pro všechny trojúhelníky s diametrem menším než dané $\delta \in \mathbb{R}_+$. Varianta Morerovy Věty 5.5.10 se knižně poprvé objevila r. 1912 u WILLIAMA FOGGA OSGOODA (1864–1943).

Nakonec ještě připomeňme další aspekt popsaných tvrzení: právě Cauchyho vzorec umožňuje přechod mezi „globální reprezentací“ křivkovým integrálem a „lokální“ vlastností, jakou je zřejmě diferencovatelnost všech řádů.

Věta 6.1.6 se vyskytuje u LOUISE AUGUSTINA CAUCHYHO (1789–1857) v práci z r. 1840. V ní se však Cauchy opírá o jiný přístup, založený na větě o průměru. Vzhledem k důležitosti věty jsme uvedli návody, jak ji dokázat jiným způsobem.

PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813–1854) nebyl profesí matematik; jako armádní inženýr se podílel na stavbě přístavu v *Le Havru*. Objev řad ohlásil bez důkazu v krátké poznámce r. 1843; Cauchy o něm referoval tentýž rok. Je zajímavé, že původní Laurentova práce nebyla nikdy publikována; posmrtně byly publikovány Laurentovy úvahy včetně důkazu v jiném článku r. 1863 s komentářem, který napsal JOSEPH LIOUVILLE (1809 – 1882); současně byl publikován podrobný důkaz, který napsal za svého života Cauchy. Laurentovy řady byly známy i Weierstrassovi²⁾. Někteří matematici jejich objev nepovažovali za závažný. Také u LEOPOLDA KRONECKERA (1823–1891) převládá názor, že Laurentovy řady jsou málo významným důsledkem Cauchyho vzorce z Věty 6.1.6, který nestojí za speciální označení jménem (o svém kolegovi Weierstrassovi se Kronecker vůbec v této souvislosti nezmiňuje). Na druhé straně např. Pringsheim vyslovil již r. 1896 podiv nad tím, jak málo pozornosti Weierstrass tomuto svému rannému výsledku věnoval („... bez Laurentových řad nemá elementární teorie funkcí žádný smysl.“)

Charakteristiku odstranitelné izolované singularity pomocí omezenosti v prstencovém okolí singulárního bodu lze stopovat až k práci GEORGA FRIEDRICH BERNHARDA RIEMANNA (1826–1866) z r. 1851³⁾. Termín *pól* zavedli r. 1875 CHARLES AUGUST ALBERT BRIOT (1817–1882) s JEANEM CLODEM BOUQUETEM (1819–1885). Věta 6.4.7 prošla delším vývojem. Její původní verze charakterizuje podstatnou izolovanou singulárity z_0 funkce f jako bod, ve kterém neexistuje $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Objevil ji FELICE CASORATI (1835–1890) r. 1868, později CARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815–1897) dospěl nezávisle k tomuto výsledku r. 1876. Protože je toto tvrzení netriviálním jádrem Věty 6.4.7, užívá se pro ni zpravidla název *Casorati-Weierstrassova věta*. Větu také zcela nezávisle objevil JULIAN VASILJEVIČ SOCHOCKIJ (1842–1927).

Tvrzení v bodu (3) Věty 6.4.7 lze zesílit. R. 1879 dokázal CHARLES ÉMILE PICARD (1856–1941) tzv. *velkou Picardovu větu*. Ta říká, že je-li $z_0 \in \mathbb{S}$ podstatnou singularitou funkce f , existují taková $r_0 \in \mathbb{R}_+$ a $w \in \mathbb{S}$, že pro všechna prstencová okolí $P(z_0, r)$, $0 < r < r_0$, je $f(P(z_0, r)) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$, kde tato jednobodová množina nezávisí na r . Pro funkci $f(z) = \exp(1/z)$ je např. $w = 0$: $f(P(0, \rho))$ pro všechna $\rho \in \mathbb{R}_+$ neobsahuje 0. Pokud $w = \infty$, nabývá f v $P(z_0, r)$ všech hodnot z \mathbb{C} . K bližšímu seznámení s tímto tvrzením doporučujeme čtenáři hezký článek [57]; viz též [19].

Tvrzení o vztahu pólů a nulových bodů mají převážně technický charakter, jsou však velmi užitečná při výpočtech.

Další část kapitoly je krátkým pohledem na zajímavou problematiku rozšiřování holomorfních funkcí. Věta 6.6.3 ukazuje, že každá funkce definovaná jako součet mocninné řady v kruhu konvergence $U(0, R)$

$$f(z) := \sum a_k z^k \quad (8.1)$$

má na konvergenční kružnici alespoň jeden singulární bod. Vzniká otázka, zda lze všechny nebo alespoň jeden z nich určit z posloupnosti koeficientů $\{a_k\}$. LEON FRANÇOIS ALFRED LECORNU (1854–1940) publikoval r. 1887 článek, ve kterém se pokusil dokázat o řadě (8.1), že existence limity

$$\zeta := \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k / a_{k+1}) \quad (8.2)$$

²⁾ Jak se uvádí v [41], Weierstrass znal prokazatelně řady tohoto typu už v r. 1841, avšak jeho výsledek byl publikován až r. 1897; užíval pro ně termín *mocninné řady*.

³⁾ Jde o Riemannovu dizertační práci.

zaručuje, že součet f řady (8.1) má na hranici kruhu konvergence *jediný singulární bod* ζ . Obrácenou větu, tj. že existence *jediného* takového bodu ζ zaručuje rovnost (8.2), dokázali G. KÖNIG r. 1876 a GASTON DARBOUX r. 1878. Lecornovo tvrzení vyvrátil JACQUES SALOMON HADAMARD (1865–1963) pomocí řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k+1}\right) z^k,$$

jejíž součet $(1-z)^{-1} + \log(1+z)$ má na jednotkové kružnici *dva* singulární body ± 1 ; zároveň dokázal, že Lecornovu podmínku je třeba nahradit podmínkou

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} - \zeta \right|^{1/k} < 1.$$

Jako nejlepší bibliografický pramen, popisující život a matematické výsledky Hadamardovy, lze doporučit obsáhlou knihu [36].

Příklad 6.6.5 je jen jedním z mnoha možných. Kronecker i Weierstrass věděli z teorie tzv. modulárních funkcí, že jednotková kružnice $K(0, 1)$ je hranicí funkce $1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^{k^2}$. R. 1891 dokázal ERIC IVAR FREDHOLM (1866–1927), že pro každou funkci

$$f(z) = \sum a^k z^{k^2},$$

kde $0 < |a| < 1$, je $K(0, 1)$ opět hranicí f ; v tomto případě řada konverguje všude v $M := U(0, 1) \cup K(0, 1)$ a součet f je „hladká“ funkce na M . Existuje mnoho dalších vylepšení tohoto výsledku, zmíníme se však o jediném. R. 1892 Hadamard dokázal toto tvrzení: *Nechť $\{\alpha_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a mocninná řada v definici funkce f*

$$f(z) := \sum a_k z^{\alpha_k}$$

má poloměr konvergence $R \in \mathbb{R}_+$. Jestliže pro nějaké $\delta \in \mathbb{R}_+$ platí pro všechna dostatečně velká $k \in \mathbb{N}$ nerovnost

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k \geq \delta \alpha_k,$$

pak je $K(0, R) := \{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$ přirozenou hranicí funkce f .

Jestliže má mocninná řada (8.1) poloměr konvergence $R = 1$, je množina singulárních bodů f uzavřená v $K := \partial U(0, 1)$. Pokud je *vlastní* podmnožinou K , existuje bod $\zeta \in K$ a funkce $g \in H(U(\zeta, r))$ tak, že $g(z) = f(z)$ pro $z \in U(\zeta, r) \cap U(0, 1)$. Funkci f lze rozšířit holomorfně na otevřenou množinu $G = U(\zeta, r) \cup U(0, 1)$ a $U(0, 1)$ je *vlastní* podmnožinou G . Tato věc stojí v pozadí Weierstrassovy teorie, založené na „pokračování pomocí mocninných řad“. Se speciálním případem této techniky jsme se setkali při konstrukci spojitě větve logaritmu, kdy jsme pokrývali $\langle \varphi \rangle$ kruhy, na nichž byl logaritmus vyjádřen součtem mocninné řady. Podstatné je zde to, že „slepením“ konečně mnoha otevřených kruhů U_k , $k = 1, \dots, n$, z nichž každé dva po sobě jdoucí mají neprázdný průnik a jejichž symetrický rozdíl $(U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ je neprázdný, dostaneme prostředek pro rozšiřování holomorfní funkce f_1 z U_1 postupně hodnotami f_k na U_k až na f_n na U_n . Může se však stát, že $G := U_1 \cap U_n \neq \emptyset$ a přitom restrikce na G nesplývají, tj. $f_1|_G \neq f_n|_G$. Tudy vede cesta k tzv. *analytickým funkcím*, které umožňují korektní práci s již dříve zmíněnými „víceznačnými funkcemi“.

Příklad 6.6.5 ukazuje, že je-li $G = U(0, 1)$, existuje taková funkce $f \in H(G)$, pro kterou je ∂G její přirozenou hranicí; někdy se v tomto případě říká, že G je *množinou*

holomorfnosti funkce f . Dá se nejenom dokázat, že ke každé neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ existuje $f \in H(G)$, jejíž přirozenou hranicí je ∂G , ale že takových funkcí je v $H(G)$ v jistém smyslu většina.

První část Kapitoly 7 má obecný charakter a obsahuje tvrzení, která nejsou specifická pro teorii funkcí komplexní proměnné. Jde o tvrzení z topologie roviny, doplňující látku tradičně přednášenou v kontextu metrických prostorů.

Výpočet hodnot integrálů byl pro Cauchyho prvotním motivem pro studium problematiky funkcí komplexní proměnné. V jistém smyslu sahají počátky výpočtu reziduí až ke Cauchyho práci z r. 1814. Reziduum bylo nejprve chápáno jako (nenulová) hodnota integrálu komplexní funkce komplexní proměnné, souvislost s integrálem po uzavřené křivce a se singularitami funkce byla objevována postupně v průběhu vývoje teorie; viz [39].

Cesta k dnešní formě reziduové věty začínala sice výpočtem jednotlivých integrálů, ale počátky *teorie* nalézáme teprve v Cauchyho práci z r. 1826. V ní je reziduum definováno v pólech vcelku stejným způsobem jako v Definicí 7.2.1. V této práci Cauchy slibuje využití v mnoha aplikacích, např. pro rozklad racionální funkce, Lagrangeův interpolační vzorec, řešení lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic apod. Pro součet reziduí vzhledem k odpovídající množině pólů zavádí název *integrální reziduum*. Zabývá se také metodami výpočtu reziduí. Poznamenejme, že obdobu tvrzení z Lemmatu 7.2.3 dokázal Cauchy již dříve r. 1825.

Je zajímavé, že v práci z r. 1827 se Cauchy zmiňuje poprvé o Eulerově článku z r. 1775. V něm zavádí Euler pojem ekvivalentní reziduu pro *jednoduché póly*. Uvádí se, že na tento pramen Cauchyho patrně upozornil SYLVESTRE-FRANÇOIS LACROIX (1765–1843). Teprve o dva roky později, r. 1829, Cauchy poprvé pracuje s *podstatnou singularitou*.

Cauchy dosáhl v období po r. 1825 výrazného pokroku mj. v metodách výpočtu integrálů a určování součtů řad. Pro nás je zajímavé, že v této době využívá výhod polárních souřadnic a že teprve v této době objevuje význam studia integrálů vzhledem k *uzavřeným křivkám*.

Metody výpočtu reziduí nemají standardní názvy a do jisté míry se překrývají. Bylo by chybou se domnívat, že existuje spolehlivý návod, kterou metodu výpočtu si vybrat jako optimální pro daný příklad; zde je patrně nejlepší snažit se získat určitou praxi samostatným počítáním příkladů z vhodné sbírky. Viz např. [23] nebo [53]. Mnoho příkladů lze nalézt i v [19] a [20].

Není bez zajímavosti, že Cauchy prožil nemalou část svého života v exilu v Praze (1833–1838) jako vychovatel a učitel syna francouzského krále Karla X, který v Praze několik let žil. Byl (zahraničním) členem *Královské české společnosti nauk* a ta vydala dvě Cauchyho práce (1835, 1836). Publikoval výsledky často několikrát s různými vylepšeními. Tak např. první výsledky o integrálech s reálnými mezemi jsou z r. 1814, pak r. 1817 pracoval s integrály komplexních funkcí (s reálnými mezemi) a asi od r. 1825 s integrály komplexních funkcí vzhledem ke speciálním křivkám. Po integraci vzhledem ke kružnicím r. 1827 přešel teprve r. 1831 k integraci vzhledem k Jordanovým křivkám. Význam Cauchy-Riemannových podmínek pro diferencovatelnost si plně uvědomil až r. 1851, tedy v roce vydání Riemannovy disertace. Detailnější rozbor Cauchyho výsledků lze nalézt v [49].

Ještě poznámka ke způsobu psaní: Česká verze názvu pro *reziduum* vznikla (rozumně) počestěním, nikoli překladem; užíváme však stále označení $\text{res}(f, z_0)$ se „s“, nikoli $\text{rez}(f, z_0)$.

Literatura

- [1] Acosta, E. G., Delago, C. G.: *Fréchet vs. Carathéodory*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), str. 332 – 338.
- [2] Andrews, G. E.: *The theory of partitions*, Addison-Wesley, London, 1976.
- [3] Ahlfors, L. V.: *Complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [4] Ash, R. B.: *Complex variables*, Academic Press, New York, 1971.
- [5] Bečvář, J.: *Je možno z bodů prostoru udělat čísla?*, str. 81 – 97, obsaženo v : *6. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, JČMF, Brno, 1992.
- [6] Bottazzini, U.: *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, New York, 1986.
- [7] Bressoud, D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.
- [8] Briot, C., Bouquet, J.: *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*, Paris, 1859.
- [9] Brzezina, M., Netuka, I.: *Vybrané kapitoly z matematické analýzy; příklady z analýzy v komplexním oboru*, MÚ UK MFF, Praha, 1988.
- [10] Burckel, R. B.: *An introduction to classical complex analysis, Vol. 1*, Birkhäuser, Basel, 1979.
- [11] Calda, E.: *Kombinatorika pro učitelské studium*, Matfyzpress, Praha, 1996, (učební text pro MFF UK).
- [12] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I–IV*, B. G. Teubner, Leipzig, 1880, 1882, 1898, 1908.
- [13] Carathéodory, C.: *Funktionentheorie I, II*, Birkhäuser, Basel, 1950.
- [14] Carrier, G. F., Krook, M., Pearson, C. E.: *Functions of a complex variable. Theory and technique*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1966.
- [15] Casorati, F.: *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, Pavia, 1868.

- [16] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, 1^{re} partie, Analyse algébrique*, Paris 1821, obsaženo v: *Oeuvres*, (2), 3, Paris, 1897, str. 1–331.
- [17] Conway, J. B.: *Functions of one complex variable*, Springer, New York, 1978.
- [18] Courant, R.: *Theory of functions of a complex variable*, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1948. (Notes by A. A. Blank).
- [19] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.
- [20] Černý, I.: *Foundations of Analysis in the Complex Domain*, Academia, Praha, 1992.
- [21] Hamhalter, J., Tišer, J.: *Funkce komplexní proměnné*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2001.
- [22] Henrici, P.: *Applied and computational complex analysis I–III*, John Wiley & Sons, New York, 1973, 1977, 1986, (druhé vydání prvního dílu monografie vyšlo r. 1988).
- [23] Jevgrafov, M. A. a kol.: *Sbírka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné*, SNTL, Praha, 1976, (originál vyšel pod názvem *Sbornik zadač po teorii analitičeskich funkcij*, Nauka, Moskva 1969).
- [24] Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer, Berlin, 1908.
- [25] Kline, M.: *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
- [26] Knopp, K.: *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin, 1924.
- [27] Kopáček, J.: *Matematika pro fyziky V.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1990.
- [28] Kořínek, V.: *Základy algebry*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.
- [29] Král, J.: *Teorie potenciálu I*, SPN, Praha, 1965.
- [30] de Laplace, P. S.: *Théorie Analytique des Probabilités*, Paris, 1812, 1814, 1820.
- [31] Láska, W.: *Einführung in die Funktionentheorie*, Stuttgart, 1894.
- [32] Lukeš, J.: *Příklady k teorii Lebesgueova integrálu*, SPN, Praha, 1968.
- [33] Lukeš, J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, nakl. UK, Praha, 1998.
- [34] Markushevich, A. I.: *Analytic function theory*, obsaženo v: *Mathematics of the 19th century; Geometry, Analytic function theory*, (Kolmogorov, A. N., Yuskevich, A. P., ed.): Birkhäuser, Basel, 1996, (překlad z ruského originálu: *Matematika XIX věka: geometrija, teorija analitičeskich funkcij*, Nauka, Moskva, 1981).

- [35] Meyberg, K., Vachenaue, P.: *Höhere Mathematik 1, 2*, Springer Ver., Berlin, 1991.
- [36] Maz'ya V. G., Shaposhnikova T. O.: *Jacques Hadamard, a Universal Mathematician*, American Mathematical Society, Providence, 1998, (existuje překlad do francouzštiny (2005) a do ruštiny (2008)).
- [37] Netuka, I., Veselý, J.: *Sto let Baireovy věty o kategoriích*, Pokroky MFA **45** (2000), str. 232-256.
- [38] Novák, B.: *Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.
- [39] Osgood, W. F.: *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen*, obsaženo v: *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band II., 2. Teil, 1. Heft, B. G. Teubner, Leipzig, 1899–1916, (obsahuje další příspěvky s touto tematikou).
- [40] Pólya, G., Szegő, G.: *Problems and theorems in analysis I.*, Springer, Berlin, 1978.
- [41] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991, (překlad druhého vydání *Funktionenlehre I.* z r. 1989; první vydání je z r. 1984 (Springer), poslední z r. 1995 (Springer)).
- [42] Remmert, R.: *Classical topics in complex function theory*, Springer, New York, 1998, (překlad druhého vydání *Funktionenlehre II.* z r. 1997; první vydání je z r. 1991 (Springer)).
- [43] Riemann, B.: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, doktorská dizertační práce, Göttingen, 1851. (Riemann, B.: Werke, Berlin, 1890).
- [44] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 2003.
- [45] Rühls, F.: *Funktionentheorie*, VEB Deutsche Verlag des Wissenschaften, Berlin, 1962.
- [46] Saks, S., Zygmund, A.: *Analytic functions*, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa, 1952.
- [47] Sekanina, M., Boček, L., Kočandrl, M., Šedivý, J.: *Geometrie II.*, SPN, Praha, 1988.
- [48] Trojovský, P., Veselý, J.: *Vytvořující funkce*, Pokroky MFA **45** (2000), str. 7–35.
- [49] Smithies, F.: *Cauchy and the creation of complex function theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [50] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 1997, 2001, (učební text pro MFF UK, dále citován jako [M]).
- [51] Veselý, J.: *Základy matematické analýzy I, II*, Matfyzpress, Praha, 2004, 2009, (učební text pro MFF UK, dále citován jako [Z]).

- [52] Veselý, J.: *Komplexní analýza pro učitele*, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2000, (učební text pro MFF UK, dále citován jako [K]).
- [53] Volkovskij, L. I., Lunc, G. L., Aramanovič, I. G.: *Sbornik zadač po těorii funkcij kompleksnogo pereměnogo*, Nauka, Moskva, 1970.
- [54] Wielandt, H.: *Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes*, Math. Zeitschr. **56** (1952), str. 206-207.
- [55] Wilf, H. S.: *Generatingfunctionology*, A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, 2006.
- [56] Zalcman, L.: *Picard's theorem without tears*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), str. 265-268.
- [57] Zalcman, L.: *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), str. 115-137.

Věcný rejstřík

- absolutní hodnota komplexního čísla, 13
- absolutní konvergence, 15, 142
- argument, 14
- Cauchy-Riemannovy podmínky, 52, 60
- Cauchyho
 - integrál, 107
 - odhady, 128, 129
 - vzorec, 137, 140
- celá funkce, 128
- derivace
 - existence, 26
 - silná, 53
 - v komplexním oboru, 25
- dilatace, 66
- Dirichletův princip, 3
- dvojpoměr, 74
- exponenciála, 2, 79
- formule
 - Gutzmerova, 132
 - Moivrova, 24, 84
- funkce
 - algebraická, 63
 - analytická, 4
 - arkustangens, 106
 - celá, 128
 - diferencovatelná v bodě, 25
 - exponenciála, 2, 28, 79
 - goniometrická, 2, 82
 - hlavní část, 145
 - holomorfní, 4, 27, 55, 56
 - holomorfní v bodě, 56
 - hyperbolická, 81
 - integrovatelná, 4
 - komplexně diferencovatelná, 51
 - komplexní, 19
 - lichá, 81
 - lineární lomená, 62, 69
 - logaritmus, 2, 88, 106
- funkce
 - Möbiova, 62, 69
 - mocnina, 13, 27, 93
 - odmocnina, 97
 - omezená, 37
 - periodická, 81
 - po částech spojitá, 30
 - polynom, 23
 - primitivní, 56
 - racionální, 24
 - regulární část, 145
 - spojitá v bodě, 22
 - sudá, 81
 - transcendentní, 63
 - vytvorující, 5, 7
- funkcionál, 29, 32
- spojitý, 37
- funkcionální rovnice, 80
- Gaussova rovina, 3, 12, 18
- geometrická řada, 41, 48
- Gutzmerova formule, 132
- hlavní hodnota
 - argumentu, 88
 - logaritmu, 88
- hlavní část, 142, 148
- funkce, 145
- rozvoje, 142
- hodnota
 - argumentu, 88
 - logaritmu, 88
- holomorfní
 - až na množinu, 152
 - funkce, 27
 - rozšíření, 64
- hyperbolický kosinus, 81
- hyperbolický sinus, 81
- identita, 66
- imaginární část komplexního čísla, 12

- index bodu, 109
- integrál
 - Cauchyho typu, 107
 - Fresnelův, 114
 - Gaussův, 114
 - Laplaceův, 114
 - Newtonův, 30
 - nezávislost na cestě, 35
 - základní odhad, 31
- invariantní body, 73
- inverze, 69
- izolovaná singularita, 146
- jednoznačná větev
 - argumentu, 90
 - logaritmu, 90
- Jordanovo lemma, 168
- koeficienty
 - Laurentovy řady, 142
 - mocninné řady, 48
 - Taylorova rozvoje, 47
- kompaktifikace, 17
- kompaktní konvergence, 37
- komplexní funkce, 19
 - imaginární část, 23
 - konečná, 20
 - reálná část, 23
 - složky, 23
- komplexní čísla, 12
 - goniometrický tvar, 14
 - modul, 14
 - násobení, 12
 - sčítání, 12
 - zavedení, 11
- komponenta, 18
- koncový bod křivky, 28
- konformně ekvivalentní množiny, 71
- kontinuum
 - vlastní, 28
- kontrakce, 66
- konvergence
 - absolutní, 142, 183
 - bezpodmínečná, 183
 - kompaktní, 37
 - Laurentovy řady, 142
 - lokálně stejnoměrná, 142
 - neabsolutní, 183
 - normální, 38, 44, 142, 183
 - podmínečná, 183
- kosinus, 82
- kořen polynomu, 24
 - násobnost, 24
- krajní body křivky, 28
- kruh konvergence, 42
- kvadratická rovnice, 98
- křivka, 27, 182
 - délka, 183
 - geometrický obraz, 28
 - Jordanova, 28
 - kladně orientovaná, 112
 - konečné délky, 29
 - kružnice, 27, 28
 - oblouk, 28
 - opačná, 35
 - orientovaná úsečka, 28
 - orientovaný součet, 33
 - parametrizace, 28
 - Peanova, 28, 183
 - po částech regulární, 29
 - regulární, 29
 - topologická kružnice, 28
 - uzavřená, 28
 - vnitřek, 112
 - vnějšek, 112
 - „zhlazení“, 34
 - záporně orientovaná, 112
 - úmluva o užití, 29
- Laplaceův
 - integrál, 114
- Laurentova řada, 142, 147
 - součet, 142
 - prsteneček konvergence, 142
- Laurentův rozvoj, 145, 148
 - hlavní část, 142
 - regulární část, 142
- lineární funkce, 66
- lineární prostor, 11
- logaritmus, 2
- lokálně stejnoměrná konvergence, 37
- lokální souvislost, 28
- M-test, 38
- metrický prostor, 18
- mezikružší, 137
- množina
 - hvězdovitá, 19, 105
 - izolovaná, 159
 - kompaktní, 16
 - konvexní, 19, 105
 - otevřená, 16
 - souvislá, 18
 - uzavřená, 16
- mocnina, 93
 - hlavní hodnota, 93
- mocninná řada, 41
 - koeficienty, 41, 48
 - konvergence, 42
 - konvergenční kružnice, 42
 - kruh konvergence, 42
 - obor konvergence, 41

- mocninná řada, 41
 - poloměr konvergence, 42, 44, 45
 - střed konvergence, 42
- modul, 3, 14
 - princip maxima, 125
- Möbiova funkce, 73
- nekonečno, 16, 149
- normální konvergence, 38, 44, 142
- nulový bod, 149
- nulový bod funkce, 27
 - násobnost, 27
- oblast, 18
 - n -násobně souvislá, 19
 - jednoduše souvislá, 19
 - přípustná, 120
- oblouk, 28
- odhady Cauchyho, 128
- odstranitelná singularita, 149
- operace s ∞ , 19
- orientace zobecněné kružnice, 78
- orientovaná křivka, 112
- ortogonální křivky, 68
- otevřené zobrazení, 130
- parametr, 32
- parametrizace
 - hladká, 32
 - standardní, 28, 29
- perioda funkce, 81
- Picardova věta, 189
- podmínka
 - Bolzano-Cauchyho, 15
 - Carathéodoryho, 26
- podstatná singularita, 149
- poloměr konvergence, 42, 45
 - praktický výpočet, 45
 - vzorec, 45
- polynom, 23
 - stupeň, 24
- počáteční bod křivky, 28
- princip
 - maxima modulu, 125, 131
 - symetrie, 78
 - zachování orientace, 79
- prstencové okolí, 137
- prsteneček, 137
- pól, 149
 - p -násobný, 149
- přirozená hranice, 154
- přípustná oblast, 120
- přírůstek
 - argumentu, 92
 - logaritmu, 92
- racionální funkce, 24
- regulární část, 142, 148
 - funkce, 145
 - rozvoje, 142
- rekurence, 5
- reziduová věta, 160, 162, 176
 - aplikace, 168
 - postup, 176
- reziduuum, 160
 - integrální, 191
 - výpočet, 163
- reálná část komplexního čísla, 12
- Riemannova sféra, 18
- rovina komplexních čísel, 12
- rovnice
 - Cauchy-Riemannovy, 181
 - d'Alembert-Eulerovy, 181
 - kvadratická, 98
- rozvoj
 - Laurentův, 143, 148
 - Taylorův, 47
- singularita, 146, 154
 - odstranitelná, 149
 - podstatná, 149
 - pól, 149
 - v nekonečnu, 149
- singulární bod, 146, 154
- sinus, 82
- součet Laurentovy řady, 145
- spojitost, 22
 - v rozšířeném smyslu, 22
- spojitá větev
 - argumentu, 90
 - logaritmu, 90
- spočetnost izolované množiny, 159
- stejněměrná konvergence
 - posloupnosti funkcí, 36
- stereografická projekce, 17
- stupeň polynomu, 24
- středová symetrie, 66
- symetrie, 77
- Taylorova řada, 46
- těleso, 11
- topologická kružnice, 28
- topologický prostor, 16
- topologie, 16
- totální diferenciál, 53
- trojúhelníková nerovnost, 13
- uzavřená křivka, 28
- vnitřek křivky, 112
- vnějšek křivky, 112
- vytvorující funkce, 5
- vzorec
 - Cauchy-Hadamardův, 141
 - Cauchyho, 119, 137, 140

vzorec

- Eulerův, 82
- součtový pro \sin a \cos , 82

věta

- Casorati-Weierstrassova, 148
- Cauchyho, 102
- Frobeniova, 14
- Gutzmerova, 132
- Hahn-Mazurkiewicz-Sierpińskiego, 28
- Jordanova, 36
- Jordanovo lemma, 168
- l'Hospitalovo pravidlo, 152
- Liouvillova, 130, 133
- Maříkova o indexu, 113
- Moivrova, 84
- Morerova, 120, 121
- o derivaci Cauchyho integrálu, 108
- o derivování inverzní funkce, 87, 131
- o derivování mocninné řady, 47
- o derivování podle parametru, 138
- o derivování složené funkce, 51
- o existenci primitivní funkce, 57
- o jednoznačnosti, 126
- o jednoznačnosti pro mocninné řady, 49
- o konstantní funkci, 59
- o konvergenci derivací, 123
- o Laurentově rozvoji, 143
- o lokální inverzi, 126
- o M-testu, 38
- o maximu modulu, 125, 131
- o odstranitelnosti, 122, 146
- o otevřeném zobrazení, 130

věta

- o průměru, 124
- o pólech a nulových bodech, 151
- o spojitě závislosti na parametru, 137
- o změně parametru, 32
- Picardova, 189
- reziduová, 160, 162
- Weierstrassova, 17, 123
- základní věta algebry, 24, 130

větev

- argumentu, 90
- logaritmu, 90
- změna parametru, 32
- zobecněná kružnice, 72

čísla

- celá, 11
- přirozená, 11
- rationální, 11
- reálná, 11
- číslo
 - Bernoulliho, 127, 176
 - Fibonacciho, 5
 - komplexně sdružené, 13
 - komplexní, 11

řada

- komplexních čísel, 15
- Laurentova, 141, 142, 147
- mocninná, 41

úhel křivek, 66

úplný prostor, 11

Jmenný rejstřík

- Abel, 42, 183
Acosta, 193
Ahlfors, 193
Aleksandrov, 182
d'Alembert, 181, 188
Andrews, 193
Aramanovič, 196
Argand, 3, 181, 188
Ash, 193

Baire, 183
Bečvář, 193
Bernoulli, 127
 Jacob, 176
 Johann, 2, 185
Bessel, 184
Boček, 195
du Bois-Reymond, 184
Borchardt, 9, 188
Bottazzini, 193
Bouquet, 65, 189
Bressoud, 193
Briot, 65, 189, 193
Brzezina, 193
Burckel, 193

Calda, 193
Cantor, 1, 183, 193
Carathéodory, 131, 181, 193
Cardano, 1
Carrier, 193
Casorati, 9, 189, 193

Cauchy, 3, 7, 45, 128, 137, 181, 182, 184–186, 188, 191, 193
Conway, 194
Cotes, 2
Courant, 194

Černý, 194

Delago, 193
Descartes, 1, 182
Dirichlet, 3, 183
Dont, vi

Eisenstein, 9
Euler, 2, 7, 95, 181, 185, 188, 191

Ferro, 1
Fontana, 1
Fredholm, 190
Fresnel, 114, 186

Gauss, 3, 130, 184, 185, 188
Girard, 188
Goursat, 186
Gutzmer, 132, 188

Hadamard, v, 45, 80, 184, 190
Hahn, 28
Hamhalter, 194
Hamilton, 3
Harnack, 188
Hermite, 186

Jacobi, 9
Jevgrafov, 194
Jordan, 182

Klein, 106
Knopp, 194
Kočandrle, 195
Kopáček, 194
Kořínek, 194
König, 190
Král, 194
Kronecker, 189
Krook, 193

Lacroix, 191
Lagrange, 4, 7, 181, 184
Lambert, 185
Landau, 125, 185
Laplace, 7, 186, 194
Laurent, 142, 189
Láska, 9, 194
Lecornu, 189
Leibniz, 1
Lerch, 184
Liouville, 3, 9, 188, 189
Lukeš, 194
Lunc, 196

Markuševič, A. I., 194
Mazurkiewicz, 28
Menšov, 182
Meyberg, K., 194
de Moivre, 3, 24, 185

202 JMENNÝ REJSTŘÍK

- Morera, 187
Netuka, 193, 195
Neumann, 182
Newton, 1, 182
Novák, 195
Osgood, 187, 188, 195
Pappos, 182
Parseval, 188
Peano, 28, 183
Pearson, 193
Picard, 189
Poisson, 7
Pólya, 195
Pompeiu, 187
Poussin, 187
Pringsheim, 186, 189
Ptolemaios, 182
Remmert, 195
Ricatti, 185
Riemann, 3, 7, 181–183, 195
Roth, 188
Rudin, 195
Rühs, 195
Saks, 195
Sekanina, 195
Schwarz, 187
Sierpiński, 28
Smithies, 195
Sochockij, 189
Szegő, 195
Šedivý, 195
Tartaglia, 1
Tišer, 194
Trojovský, 195
Vachenauer, P., 194
Veblen, 183
Veselý, 195
Viète, 8
da Vinci, 185
Volkovskij, 196
Wallis, 8
Weierstrass, 3, 7, 183, 187, 189
Wessel, 3
Wielandt, 196
Wilf, 196
Zalcman, 196
Zygmund, 195