III.4 Hartogsova věta o oddělené holomorfnosti

Věta 15 (Hartogsova věta). *Každá odděleně holomorfní funkce je holomorfní.*

Poznámka: Lokálně omezené odděleně holomorfní funkce jsou holomorfní podle Věty 8. Přitom odděleně spojitá funkce na $\mathbb{C}^2$ nemusí být lokálně omezená.

Lemma 16. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a u je subharmonická funkce na G. Pokud $a \in G$ a $r > 0$ splňují $\overline{U(a,r)} \subset G$, pak*

$$u(a) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{U(a,r)} u \, \mathrm{d}\lambda,$$

kde λ označuje dvourozměrnou Lebesgueovu míru v $\mathbb{C}$.

Lemma 17. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, (u_k) je posloupnost funkcí subharmonických na G, která je stejně shora omezená na G. Nechť $C \in \mathbb{R}$ splňuje*

$$\limsup_{k \to \infty} u_k(z) \leq C \text{ pro každé } z \in G.$$

Pak pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset G$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že

$$\forall z \in K \; \forall k \geq k_0 : u_k(z) \leq C + \varepsilon.$$

Lemma 18. *Nechť $n \geq 2$ je takové, že tvrzení Hartogsovy věty platí pro $n-1$. Nechť $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', a_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, $r, s, \varepsilon \in (0, \infty)$, přičemž $\varepsilon < r$. Nechť f je funkce odděleně holomorfní na polydisku $\mathbb{P}(\boldsymbol{a}', \widehat{\boldsymbol{r}}) \times U(a_n, s)$, která je omezená na $\mathbb{P}(\boldsymbol{a}', \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \times U(a_n, s)$. Pak f je holomorfní na $\mathbb{P}(\boldsymbol{a}', \widehat{\boldsymbol{r}}) \times U(a_n, s)$.*

(Používáme značení $\widehat{\boldsymbol{r}} = (r, \dots, r) \in (0, \infty)^{n-1}$.)