III. Harmonické funkce v $\mathbb{R}^2$ a jejich vztah k holomorfním

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Funkce $f : G \to \mathbb{R}$ se nazývá **harmonická**, jestliže je spojitá na G a na G splňuje

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Poznámka. Stejně lze definovat i harmonické funkce s hodnotami v $\mathbb{C}$. Pak ovšem f je harmonická, právě když $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ jsou harmonické.

Větička 1. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená.*

(i) *Je-li $f \in H(G)$, pak funkce f_1, f_2 definované předpisem*

$$f_1(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \qquad f_2(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

jsou harmonické na G (při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$).

(ii) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je harmonická (při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$). Je-li navíc $f \in C^2(G)$, pak platí:*

- *Funkce*

$$g(x+iy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

je holomorfní na G.

- *Pokud $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je souvislá množina, pak existuje $\tilde{f} \in H(G)$, splňující $\operatorname{Re} \tilde{f}(x+iy) = f(x,y)$ na G.*

Poznámka. Z Věty 5 níže plyne, že harmonické funkce jsou automaticky třídy C^∞.

Definice. **Poissonovým jádrem** rozumíme funkci definovanou předpisem

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}, \qquad t \in \mathbb{R}, r \in [0,1).$$

Větička 2 (vlastnosti Poissonova jádra).

(i) $P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$ *pro $r \in [0,1)$, $t, \theta \in \mathbb{R}$.*

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\mathrm{d}t = 1$ *pro $r \in [0,1)$.*

(iii) *Pro každé $r \in [0,1)$ je P_r kladná sudá funkce, je-li navíc $r > 0$, je P_r klesající na $[0,\pi]$.*

(iv) *Není-li t celočíselným násobkem 2π, je $\lim\limits_{r\to 1-} P_r(t) = 0$.*

Poznámka. Symbolem $\mathbb{T}$ značíme jednotkovou kružnici, tj. $\{e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$. Funkce na $\mathbb{T}$ přirozeně ztotožňujeme s 2π-peridodickými funkcemi na $\mathbb{R}$, míry na $\mathbb{T}$ s mírami na $[-\pi,\pi)$, případně na $[\alpha, \alpha+2\pi)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definice.

- Nechť $f \in L^1(\mathbb{T})$. **Poissonovým integrálem** funkce f rozumíme funkci $P[f]$ definovanou na $U(0,1)$ předpisem

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad r \in [0,1), \theta \in \mathbb{R}.$$

- Nechť μ je borelovská míra (znaménková, případně komplexní) na $\mathbb{T}$. **Poissonovým integrálem** míry μ rozumíme funkci $P[\,\mathrm{d}\mu]$ definovanou na $U(0,1)$ předpisem

$$P[\,\mathrm{d}\mu](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi)} P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}\mu(t), \qquad r \in [0,1), \theta \in \mathbb{R}.$$

Větička 3. *Je-li μ komplexní borelovská míra na $\mathbb{T}$, je $P[\,\mathrm{d}\mu]$ harmonická na $U(0,1)$. Speciálně pro $f \in L^1(\mathbb{T})$ je $P[f]$ harmonická na $U(0,1)$.*

Věta 4 (řešení Dirichletovy úlohy na kruhu). *Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{T}$. Definujme funkci Hf předpisem*

$$Hf(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}), & r = 1, \theta \in \mathbb{R}, \\ P[f](re^{i\theta}), \theta \in \mathbb{R}, & r \in [0,1), \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pak funkce Hf je spojitá na $\overline{U(0,1)}$ (a také harmonická na $U(0,1)$ a na $\mathbb{T}$ rovna f).

Věta 5 (vyjádření harmonické funkce Poissonovým integrálem). *Nechť f je reálná funkce spojitá na $\overline{U(0,1)}$, harmonická na $U(0,1)$. Pak $f = P[f|_{\mathbb{T}}]$ na $U(0,1)$.*

Důsledek.

- *Je-li f reálná funkce spojitá na $\overline{U(a,R)}$ a harmonická na $U(a,R)$, pak platí:*

$$f(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} f(a + Re^{it})\,\mathrm{d}t, \qquad r \in [0,R), \theta \in \mathbb{R}.$$

- *Reálná harmonická funkce na $U(a,R)$ je reálnou částí holomorfní funkce na $U(a,R)$.*
- *Harmonické funkce jsou třídy C^∞.*
- *Nechť funkce f je spojitá na $\overline{U(a,r)}$ a harmonická na $U(a,r)$. Pak $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})\,\mathrm{d}t$.*

Věta 6 (Harnackova). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je oblast a (f_n) posloupnost harmonických funkcí na G.*

(i) *Jestliže posloupnost (f_n) konverguje lokálně stejnoměrně na G, pak limita je harmonická na G.*
(ii) *Nechť posloupnost $(f_n(z))$ je neklesající pro každé $z \in G$. Pak buď posloupnost f_n konverguje lokálně stejnoměrně na G nebo $f_n(z) \to +\infty$ pro každé $z \in G$.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a f je spojitá na G. Řekneme, že f má **vlastnost průměru**, jestliže pro každé $a \in G$ existuje posloupnost $r_n \searrow 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})\,\mathrm{d}t.$$

Věta 7. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, f je spojitá na G a má vlastnost průměru. Pak f je harmonická na G.*

Věta 8 (Schwarzův princip zrcadlení). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, která je symetrická podle reálné osy a její průnik s reálnou osou je otevřený interval I. Označme Ω^+ průnik Ω s polorovinou $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ a Ω^- průnik s polorovinou $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Nechť f je holomorfní na Ω^+ a pro každé $x \in I$ je*

$$\lim_{z \to x, z \in \Omega^+} \operatorname{Im} f(z) = 0.$$

Pak existuje $F \in H(\Omega)$ taková, že $F = f$ na Ω^+. F navíc splňuje podmínku $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$ pro $z \in \Omega$.