Moderní matematická analýza (NUMP021) 2013/2014

1. **Metrické prostory, normované lineární prostory**

   Metrika, metrický prostor, podprostor, příklady; norma, normovaný lineární prostor, příklady. Základní pojmy z metrických prostorů: kulové okolí, otevřená a uzavřená množina, kulové okolí je otevřené; vlastnosti systému otevřených a systému uzavřených množin; topologie, topologický prostor; hromadný bod, izolovaný bod, uzávěr (nejmenší uzavřená obsahující), vnitřek (největší otevřená obsažená), průměr množiny.

2. **Spojitá zobrazení, konvergence**

   Spojité zobrazení v bodě (metrické prostory). Spojitost a vzory otevřených množin; konvergentní posloupnost v metrickém prostoru, jednoznačnost limity, charakterizace spojitosti pomocí posloupností.

3. **Úplné metrické prostory**

   Cauchyovská posloupnost, úplný prostor, příklady. Podmnožina úplného prostoru je úplný podprostor, právě když je uzavřená. Prostor je úplný, právě když každá nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin s průměry konvergujícími k nule má jednobodový průnik (Cantor). Kontrahující zobrazení, Banachova věta o pevném bodě. *Aplikace: existence a jednoznačnost řešení obyčejné diferenciální rovnice (Picard – Lindelöfova věta).* Aplikace: řešení integrální rovnice druhého druhu. Hustá množina; *separabilní prostor, lemma o neseparibilitě*; *příklady*. Řídká množina, množina 1. kategorie. Baireova věta o kategoriích. *Aplikace: existence spojité nikde diferencovatelné funkce*. Lineární operátory a funkcionály. Banachův prostor. Banach–Steinhausova věta. Bodová limita omezených operátorů na Banachově prostoru. *Aplikace: existence spojité funkce s divergentní Fourierovou řadou*.

4. **Kompaktní metrické prostory**

   Otevřené pokrytí, kompaktní množina, kompaktní množina v podprostoru. Uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní. Vlastnost konečných průniků kompaktních množin. Průnik neklesající posloupnosti neprázdných kompaktních množin je neprázdný. V euklidovském prostoru je množina kompaktní, právě když je uzavřená a omezená. Totálně omezený prostor. Kompaktní prostor je totálně omezený. Sekvenciálně kompaktní prostor. Jsou ekvivalentní: X je kompaktní; X je úplný a totálně omezený; X je sekvenciálně kompaktní; každá nekonečná podmnožina má v X hromadný bod. *Příklady kompaktních a nekompaktních množin*. Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní. Reálná funkce na kompaktním prostoru nabývá maxima a minima. Prosté spojité zobrazení na kompaktním prostoru má spojitou inverzi. Stejnoměrná spojitost. Spojité zobrazení na kompaktním prostoru je stejnoměrně spojité. Aplikace: Stone–Weierstrassova věta, *klasická Weierstrassova věta o polynomiální aproximaci spojitých funkcí na uzavřeném intervalu*. *Podmnožina spojitých funkcí na kompaktním prostoru je relativně kompaktní, právě když je omezená a stejně spojitá (Arzèla–Ascoliho věta, bez důkazu). Aplikace: existence řešení obyčejné diferenciální rovnice se spojitou pravou stranou (Peanova věta)*.

Témata označená kurzivou referuji ke cvičení.

23. září 2013 Ivan Netuka