12 Křivkový integrál

12.1 Křivky a jejich parametrizace

Definice (opakování). **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. φ_i' je spojité na $\langle a, b\rangle$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $\langle a, b\rangle$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle\vec{\varphi}\rangle = \vec{\varphi}(\langle a, b\rangle) \subset \mathbb{R}^n$.

Bod $\vec{\varphi}(a)$ nazýváme **počátečním** a bod $\vec{\varphi}(b)$ **koncovým bodem křivky** $\vec{\varphi}$.

Definice. Buď $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka v $\mathbb{R}^n$. Je-li vektor $\vec{\varphi}'(t) = (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$ nenulový, nazýváme jej **tečným vektorem** k této křivce v bodě $\vec{\varphi}(t)$ a vektor

$$\vec{\tau}(\vec{\varphi}(t)) := \frac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\vec{\varphi}'(t)\|}$$

jednotkovým tečným vektorem k této křivce v bodě $\vec{\varphi}(t)$.

Definice. Buď $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka v $\mathbb{R}^n$. Pro jednotkový tečný vektor $\vec{\tau}(\vec{\varphi}(t))$ definujeme vektory

$$\vec{n}(\vec{\varphi}(t)) := (\vec{\tau}(\vec{\varphi}(t)))', \qquad \vec{\nu}(\vec{\varphi}(t)) := \frac{\vec{n}(\vec{\varphi}(t))}{\|\vec{n}(\vec{\varphi}(t))\|}$$

(pro $\vec{n}(\vec{\varphi}(t)) \neq 0$) a nazýváme je po řadě **normálovým vektorem** a **jednotkovým normálovým vektorem** ke křivce $\vec{\varphi}$ v bodě $\vec{\varphi}(t)$.

Cvičení. Ověřte, že platí $\vec{n}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\tau}(\vec{\varphi}(t)) = 0$, tedy že uvedené vektory jsou kolmé.

Poznámka.

- V $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 3$ je takto definovaný normálový vektor $\vec{n}$ pouze jedním z $(n-1)$ lineárně nezávislých normálových vektorů, které k dané křivce (v bodě, kde existuje tečný vektor) existují. V $\mathbb{R}^2$ je normálový vektor ke křivce (pokud existuje) určený jednoznačně až na násobek konstantou.
- V $\mathbb{R}^2$ lze definovat normálový vektor ještě takto: $\vec{n}(\vec{\varphi}(t)) = \pm(\tau_2(\vec{\varphi}(t)), -\tau_1(\vec{\varphi}(t)))$, kde $\vec{\tau}(\vec{\varphi}(t))$ je (jednotkový, ale obecně jakýkoli) tečný vektor.
- V $\mathbb{R}^3$ lze ke dvojici *jednotkový tečný vektor* $\vec{\tau}$ a *jednotkový normálový vektor* $\vec{\nu}$ definovat tzv. **vektor binormály** $\vec{\beta}$ předpisem $\vec{\beta} := \vec{\tau} \times \vec{\nu}$. Vektory $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ pak tvoří trojici vzájemně kolmých jednotkových vektorů v $\mathbb{R}^3$.

Definice. Buď $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že křivka $\vec{\varphi}$ je

- **jednoduchá (prostá)**, pokud $\vec{\varphi}$ je prosté zobrazení na $\langle a, b\rangle$;
- **uzavřená**, pokud $\vec{\varphi}(a) = \vec{\varphi}(b)$;

Uzavřenou křivku, takovou, že $\vec{\varphi}|_{(a,b)}$ je prosté zobrazení, nazýváme někdy **Jordanovou křivkou**.

Definice.

- Křivku $\vec{\omega} : \langle a, c\rangle \to \mathbb{R}^n$ nazýváme **součtem křivek** $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ **a** $\vec{\psi} : \langle b, c\rangle \to \mathbb{R}^n$, pokud platí: $\vec{\omega}(t) = \vec{\varphi}(t)$ pro $t \in \langle a, b\rangle$, $\vec{\omega}(t) = \vec{\psi}(t)$ pro $t \in \langle b, c\rangle$. Píšeme $\vec{\omega} = \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi}$. (Pro součet křivek platí: $\langle\vec{\varphi} \oplus \vec{\psi}\rangle = \langle\vec{\varphi}\rangle \cup \langle\vec{\psi}\rangle$.)
- Křivku $\vec{\omega} : \langle -b, -a\rangle \to \mathbb{R}^n$ nazýváme **opačnou** ke křivce $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, pokud

  $$\omega(t) = \varphi(-t), \qquad t \in \langle -b, -a\rangle .$$

  Píšeme $\vec{\omega} = \ominus\vec{\varphi}$. (Křivka $\ominus\vec{\varphi}$ je "opačně probíhaná" křivka $\vec{\varphi}$, a platí $\langle\ominus\vec{\varphi}\rangle = \langle\vec{\varphi}\rangle$.)

12.2 Křivkový integrál 1. a 2. druhu

Definice. Buď $\vec{\varphi} : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka splňující $\vec{\varphi}\,' \neq 0$ alespoň s.v. na $\langle a,b\rangle$. Buďte dále funkce $f : \langle\vec{\varphi}\rangle \to \mathbb{R}$ a vektorové pole $\vec{T} : \langle\vec{\varphi}\rangle \to \mathbb{R}^n$ definovány alespoň s.v. na $\langle\vec{\varphi}\rangle$. Definujme (pokud integrály vpravo existují):

- **křivkový integrál prvního druhu** z f přes $\vec{\varphi}$:

$$\int_\varphi f\,ds := \int_a^b f\big(\vec{\varphi}(t)\big)\,\|\vec{\varphi}\,'(t)\|\,dt\,,$$

- **křivkový integrál druhého druhu** z $\vec{T}$ přes $\vec{\varphi}$:

$$\int_\varphi \vec{T}\,d\vec{\varphi} := \int_a^b \vec{T}\big(\vec{\varphi}(t)\big)\cdot\vec{\varphi}\,'(t)\,dt\,.$$

Poznámka. • $\int_\varphi 1\,ds = \int_a^b \|\vec{\varphi}\,'(t)\|\,dt$ ... délka křivky.

- **Integrál přes opačnou křivku**:

$$\int_{\ominus\varphi} f\,ds = \int_\varphi f\,ds\,, \quad \int_{\ominus\varphi} \vec{T}\,d\vec{\varphi} = -\int_\varphi \vec{T}\,d\vec{\varphi}\,.$$

- **Integrál přes součet křivek**:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi\oplus\psi} f\,ds &= \int_\varphi f\,ds + \int_\psi f\,ds\,,\\ \int_{\varphi\oplus\psi} \vec{T}\,d(\vec{\varphi}\oplus\vec{\psi}) &= \int_\varphi \vec{T}\,d\vec{\varphi} + \int_\psi \vec{T}\,d\vec{\psi}\,.\end{aligned}$$

Poznámka. • **Souvislost integrálů 1. a 2. druhu**:

$$\begin{aligned}\int_\varphi f\,ds &= \int_a^b f\big(\vec{\varphi}(t)\big)\,\|\vec{\varphi}\,'(t)\|\,dt =\\ &= \int_a^b f\big(\vec{\varphi}(t)\big)\,\frac{\vec{\varphi}\,'(t)}{\|\vec{\varphi}\,'(t)\|}\cdot\vec{\varphi}\,'(t)\,dt = \int_\varphi (f\vec{\tau})\,d\vec{\varphi}.\end{aligned}$$

- **Souvislost integrálů 2. a 1. druhu**:

$$\begin{aligned}\int_\varphi \vec{T}\,d\vec{\varphi} &= \int_a^b \vec{T}\big(\vec{\varphi}(t)\big)\cdot\vec{\varphi}\,'(t)\,dt =\\ &= \int_a^b (\vec{T}\cdot\vec{\tau})\big(\vec{\varphi}(t)\big)\|\vec{\varphi}\,'(t)\|\,dt = \int_\varphi (\vec{T}\cdot\vec{\tau})\,d\varphi.\end{aligned}$$

Věta 12.1 (nezávislost na parametrizaci). *Buďte $\vec{\varphi} : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$, $\vec{\psi} : \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivky v $\mathbb{R}^n$ takové, že $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$. Potom*

$$\int_\varphi f\,ds = \int_\psi f\,ds\,, \tag{1}$$

$$\int_\varphi \vec{T}\,d\vec{\varphi} = \pm\int_\psi \vec{T}\,d\vec{\psi}\,, \tag{2}$$

pokud existuje vždy alespoň jeden z dvojice integrálů v (1) resp. (2).

Přitom v (2) je znaménko "plus", pokud $\vec{\varphi}(a) = \vec{\psi}(c)$, $\vec{\varphi}(b) = \vec{\psi}(d)$, v opačném případě je v (2) znaménko "minus".

12.3 Křivkový integrál a potenciál vektorového pole

Definice. Řekneme, že množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je **souvislá**, pokud pro každou dvojici bodů $\vec{x}$, $\vec{y} \in G$ existuje křivka $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to G$ (tj. $\langle\varphi\rangle \subset G$) taková, že $\vec{\varphi}(a) = \vec{x}$, $\vec{\varphi}(b) = \vec{y}$.

Definice. Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá množina, buď $\vec{T} : G \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole na G. Řekneme, že $\vec{T}$ má (klasický) **potenciál** na G, pokud existuje funkce $U \in \mathcal{C}^1(G)$ (potenciál $\vec{T}$), taková, že

$$\vec{T}(\vec{x}) = \nabla U(\vec{x})\,, \qquad \forall \vec{x} \in G\,.$$

Pozorování: Potenciál je určen jednoznačně až na konstantu.

Věta 12.2. *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá množina, buď $\vec{T} : G \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole na G s potenciálem $U \in \mathcal{C}^1(G)$. Buď dále $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to G$ křivka v G. Potom*

$$\int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi} = U\big(\vec{\varphi}(b)\big) - U\big(\vec{\varphi}(a)\big)\,.$$

Důsledek 12.3. *Je-li v situaci přechozí věty $\vec{\varphi}$ Jordanova křivka, platí*

$$\int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi} = 0\,.$$

Definice (nezávislost na cestě)**.** Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá množina, buď $\vec{T} : G \to \mathbb{R}^n$ **spojité** vektorové pole na G. Řekneme, že integrál druhého druhu z $\vec{T}$ **nezávisí na cestě v** G, pokud pro libovolné dvě křivky $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to G$, $\vec{\psi} : \langle c, d\rangle \to G$ takové, že $\vec{\varphi}(a) = \vec{\psi}(c)$, $\vec{\varphi}(b) = \vec{\psi}(d)$ platí

$$\int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi} = \int_\psi \vec{T}\, d\vec{\psi}\,.$$

Věta 12.4. *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá množina, buď $\vec{T} : G \to \mathbb{R}^n$ **spojité** vektorové pole na G. Potom následující tři podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$\vec{T}$ má potenciál U v G.*
2. *Integrál druhého druhu z $\vec{T}$ nezávisí na cestě v G.*
3. *$\int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi} = 0$ pro každou Jordanovu křivku $\vec{\varphi}$ v G.*

Navíc: je-li splněna podmínka 2, je funkce

$$U_{\vec{a}}(\vec{x}) := \int_{\varphi(\vec{a};\vec{x})} \vec{T}\, d\vec{\varphi}\,, \qquad \vec{x} \in G\,, \tag{3}$$

(kde $\vec{a} \in G$ je pevný, a $\varphi(\vec{a};\vec{x})$ je jakákoli křivka spojující body $\vec{a}$ a $\vec{x}$) potenciálem $\vec{T}$ v G. Naopak, každý potenciál pole $\vec{T}$ v G je tvaru (3).

Opakování:

Definice (rotace třírozměrného pole)**.** Buď $\vec{T} : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, G otevřená. **Rotací** $\vec{T}$ v bodě $\vec{a} \in G$ nazvu

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{T}(\vec{a}) \quad &:= \quad \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{vmatrix} (\vec{a}) = \\ &= \left(\frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z}, \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial T_3}{\partial x}, \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) (\vec{a})\,, \end{aligned}$$

vždy když existují (vlastní) příslušné parciální derivace.

Poznámka (rotace dvourozměrného pole). Buď $\vec{T} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, G otevřená. Pro výpočet rotace $\vec{T}$ lze formálně pracovat ve 3 dimenzích položením $T_3 \equiv 0$, a $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{T}(\vec{a}) \quad &:= \quad \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ T_1 & T_2 & 0 \end{vmatrix} (\vec{a}) = \\ &\quad = \left(0, 0, \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}\right)(\vec{a})\,.\end{aligned}$$

Klademe tedy pro $\vec{T} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{rot} \vec{T}(\vec{a}) := \frac{\partial T_2}{\partial x}(\vec{a}) - \frac{\partial T_1}{\partial y}(\vec{a})\,.$$

Tvrzení 12.5. *Buď $n = 2$ nebo $n = 3$. Buď dále G otevřená a souvislá množina v $\mathbb{R}^n$, $\vec{T} : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole, které má v G potenciál $U \in \mathcal{C}^2(G)$. Potom*

$$\operatorname{rot} \vec{T} = 0 \qquad v\ G\,.$$

POZOR! Tvrzení neplatí naopak. Tj. existují vektorová pole v otevřených a souvislých množinách, která mají nulovou rotaci a přitom nemají potenciál. Viz následující příklad.

Cvičení. Uvažte $\vec{T}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, a křivku $\vec{\varphi}$, která probíhá proti směru hodinových ručiček obvod kružnice o poloměru $r > 0$ a středu 0.

Je $\int_\varphi \vec{T} d\vec{\varphi} = 2\pi$ (nezávisle na velikosti $r > 0$). Proto podle Věty 12.4 nemá $\vec{T}$ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ potenciál (a nemá jej ani v žádné otevřené a souvislé podmnožině $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, která obsahuje nějakou kružnici o poloměru $r > 0$ a středu 0).

Přitom $\operatorname{rot} \vec{T} = 0$ všude v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Poznámka. Buď $\vec{T} \in \mathcal{C}^2(G)$, kde G je otevřená a souvislá množina. Potom platí implikace "existuje potenciál k $\vec{T}$ v $G \implies \operatorname{rot} \vec{T} = 0$ v G", zatímco implikace "$\operatorname{rot} \vec{T} = 0$ v $G \implies$ existuje potenciál k $\vec{T}$ v G" platí jen ve speciálních otevřených a souvislých množinách G, v tzv. množinách, kde "každá Jordanova křivka lze stáhnout do bodu".

Cvičení. Ukažte, že vektorové pole z předchozího příkladu má potenciál $U(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ na množině $\mathbb{R}^2 \cap \{x > 0\}$ a na množině $\mathbb{R}^2 \cap \{x < 0\}$. Tyto dvě množiny mají tu vlastnost, že v nich "každá Jordanova křivka lze stáhnout do bodu".