**Oponentský posudek diplomové práce**

***Michal Rolínek: „Kvantitativní slabá kompaktnost“***

Předložená práce se zabývá mírami nekompaktnosti v prostorech spojitých funkcí na kompaktu s topologií bodové konvergence, mírami slabé nekompaktnosti v Banachových prostorech a měřením vzdálenosti od prostoru funkcí první Baireovy třídy. Míra nekompaktnosti je nějaká kvantita, která v jistém smyslu měří, jak daleko má daná množina k tomu býti kompaktní. Základním požadavkem na takovou kvantitu je, aby byla nulová právě pro relativně kompaktní množiny.

V první kapitole se zavádějí míry nekompaktnosti v prostoru $(C(K), \tau_p)$ a dokazuje se, že jsou ekvivalentní, což dává kvantitativní verzi Eberlein-Šmulyanovy věty. Ve druhé kapitole jsou výsledky první kapitoly přeneseny do kontextu slabé topologie Banachova prostoru s využitím kanonického vnoření Banachova prostoru $X$ do prostoru $C(B_{X^*}, w^*)$. Ve třetí kapitole se zkoumá kvantitativní verze Kreinovy věty, tedy vztah mezi kvantitami aplikovanými na množinu a na její konvexní obal.

Ve čtvrté a páté kapitole se počítá vzdálenost dané funkce od prostoru funkcí první Baireovy třídy pomocí míry nefragmentovanosti. To sice nesouvisí přímo s mírami slabé nekompaktnosti, ale je to zobecnění vzdálenosti od spojitých funkcí, kterou lze vyjádřit pomocí oscilace funkce (viz první kapitola).

Diplomová práce je kompilačního charakteru, tj. zpracovává známé výsledky. Zpracování je vcelku zdařilé, práce je psána přehledně a srozumitelně.

V práci jsem našel dvě matematické chyby, z nichž jedna je snadno odstranitelná; druhá sice nemá vliv na platnost tvrzení, ale jde o systematickou chybu v důkazu několika tvrzení. Nejde o hlavní tvrzení, ale o jejich důsledky, které je možné dokázat jinak (například využívaje opravdu ona hlavní tvrzení). Kromě toho se našlo i několik drobnějších nedostatků.

Nejprve tedy ony matematické chyby:

1. **Měření spočetné nekompaktnosti.** V Tvrzení 1.1(c) se říká, že bodově omezená podmnožina $H \subset C(K)$ je $\tau_p$-relativně spočetně kompaktní, právě když $ck(H) = 0$. To je pravda, implikace $\Rightarrow$ je triviální, opačná plyne například z Tvrzení 1.9. (Pokud $ck(H) = 0$, je dle Tvrzení 1.9 i $k(H) = 0$, tedy dle Tvrzení 1.1(b) je $H$ $\tau_p$-relativně kompaktní, tedy i relativně spočetně kompaktní.)

Důkaz v práci však není správný. Používá se tam neplatné tvrzení, že vzdálenost dvou uzavřených podmnožin (úplného) metrického prostoru je nulová, právě když se tyto dvě množiny protínají.

Tvrzení, které se pomocí tohoto v práci dokazuje, je ve skutečnosti silnější: *Nechť $\{f_n\}$ je bodově omezená posloupnost v $C(K)$. Pak tato posloupnost má $\tau_p$-hromadný bod v $C(K)$, právě když vzdálenost množiny $\tau_p$-hromadných bodů od $C(K)$ je nulová.* Toto tvrzení neplatí:

Nechť $K = [0, \omega]$ a pro každá $m, n \in \mathbb{N}$ definujme funkci

$$g_{m,n}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq m, \\ \frac{1}{m}, & m < t \leq m+n, \\ 0, & m+n < t \leq \omega. \end{cases}$$

Funkce $g_{m,n}$ jsou spojité, seřaďme je nějak do posloupnosti $(f_n)$. Pak $\tau_p$-hromadné body této posloupnosti jsou funkce

$$h_m(t) = \begin{cases} 1, & t \leq m, \\ \frac{1}{m}, & m < t < \omega, \\ 0, & t = \omega \end{cases}$$

a funkce

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t < \omega, \\ 0, & t = \omega. \end{cases}$$

Žádný z hromadných bodů není spojitá funkce, přitom však existují hromadné body libovolně blízko k $C(K)$.

Co by bylo třeba dokázat je následující: *Nechť $\{f_n\}$ je bodově omezená posloupnost v $C(K)$. Pokud nemá žádný $\tau_p$-hromadný bod v $C(K)$, pak existuje podposloupnost, jejíž množina hromadných bodů má* *kladnou vzdálenost od $C(K)$.* Nevím, jak toto dokázat elementárně. Pro omezené posloupnosti to plyne z Rosenthalovy $\ell_1$-věty, nebo lze použít Tvrzení 1.9.

Tato chyba se opakuje v důkazu Tvrzení 2.11(d), a dále se promítá do důkazu Důsledku 1.10 a Důsledku 2.13. Tyto důsledky je nicméně možné dokázat jen s využitím Tvrzení 1.9 resp. Tvrzení 2.12.

2. **Důkaz Tvrzeni 5.11:** Pokud se definuje $F'$, jak je uvedeno v práci, není vidět, že by měl být separabilní. Důvod je ten, že, i když je $\mathcal{C}$ spočetná, prvky $\mathcal{C}$ je možné vyjádřit mnoha způsoby. To lze snadno opravit – pro každý bod $\mathcal{C}$ zafixujeme jeho vyjádření, a pak dáme dohromady vektory z těchto vyjádření.

Další připomínky drobnějšího charakteru:

(i) Strana 1: Míry nekompaktnosti se vyskytovaly v literatuře již dávno před rokem 2000. Například Hausdorffova míra (normové) nekompaktnosti se vyskytuje již v roce 1965, de Blasiho míra slabé nekompaktnosti $\omega$ již v roce 1977, míry slabé nekompaktnosti pro operátory například okolo roku 1990 v pracích H.-O. Tylliho a jeho spoluautorů.

(ii) Strana 6, řádek 5: Jedna závorka je tam navíc.

(iii) Strana 7, důkaz Důsledku 1.5: Jak se využívá stejnoměrná omezenost $H$?

(iv) Strana 7, Lemma 1.7: Je-li oscilace konečná, požadované báze $\mathcal{V}_x$ existují automaticky.

(v) Strana 9 a dále, oddíl 1.3: Je potřeba stejnoměrná omezenost?

(vi) Strana 13, Tvrzení 1.14: Dokonce platí, že $(C(K), \tau_p)$ je andělský, nejenom stejnoměrně omezené podmnožiny.

(vii) Strana 16, šestý řádek důkazu: Stálo by za zdůraznění, že kompaktnost je v $(E', w^*) \times \mathbb{R}$.

(viii) Strana 17, řádek 4 zdola: Spíše než „označme bázi“ by mělo být buď „zvolme bázi“ nebo „označme systém všech“.

(ix) Strana 18, řádek 6: Spíše spojitost operací na lokálně konvexním prostoru $(E', w^*)$.

(x) Strana 20, důkaz Tvrzení 2.11(b), poslední řádek: Spíše bych řekl, že součet w*-kompaktů je w*-kompaktní množina, která pak je w*-uzavřená. (Není to špatně, ale toto by bylo jasnější.)

(xi) Strana 23, Lemma 3.1: Mělo by se říci ve znění lemmatu, že $\mu$ je nezáporná. Pak se to používá hned na začátku důkazu.

(xii) Strana 25, třetí řádek Tvrzení 3.4: Chybí čárka před $I$.

(xiii) Strana 26, Věta 3.5: Je to správně, ale bylo by lépe buď vzít $Z$ konvexní (je-li $E$ úplný, je to bez újmy na obecnosti), nebo explicitně říci, že $co(H)$ je v $E^X$, ne v $Z^X$. Jinak to může čtenáře zmást.

(xiv) Strana 26, první řádek důkazu: Slovo „okamžitě“ je zde divné, neříkáme, že $H$ okamžitě $\varepsilon$-zaměňuje limity, ale spíše, že toto tvrzení okamžitě plyne z předpokladu.

(xv) Strana 26, řádek 3 zdola: Slovo „postupně“ tam nemá být.

(xvi) Strana 27, řádek 1: Místo „věta o tečně“ (což nevím, co je) bych psal „důsledek Hahn-Banachovy věty“.

(xvii) Strana 27, řádek 7: Spíše než vztah mezi konvergencemi se používá spojitost funkcionálu $x^*$.

(xviii) Strana 27, řádek 9: Pro výběr podposloupnosti zde stačí vynechat konečně mnoho členů.

(xix) Strana 29, první řádek důkazu Lemmatu 3.7: Spíše z definice konvexního obalu než z definice konvexity.

(xx) Strana 31, Tvrzení 3.10: Stačí říci, že $H$ je omezená.

(xxi) Strana 35, Lemma 4.5: Toto lemma bych v diplomové práci nedokazoval, jelikož jde o základní tvrzení z teorie metrických prostorů.

(xxii) Strana 37: Zde by měl být komentář, jak je to pro nemetrizovatelný kompakt. Něco o tom je dále, ale pak by zde měl být alespoň konkrétní odkaz dopředu.

(xxiii) Kapitola 5: Úplně nerozumím tomu, proč se zde tvrzení dokazují pro technicky komplikovanější speciální případ funkcí na $B_{E'}$ a ne pro funkce na obecném kompaktním prostoru. Například oddíl 5.1 by byl v obecném kontextu jednodušší, oddíl 5.3 je v obecném kontextu a Tvrzení 5.12 platí i v obecném kontextu. (Bylo by třeba Tvrzení 5.11 nahradit jiným použitím Stone-Weierstrassovy věty: Vezme se spočetná množina $\mathcal{C}$ z Tvrzení 5.6, přidají se konstanty a vezme se uzavřená algebra (nebo svaz) touto množinou generovaný. Výsledný prostor je prostor spojitých funkcí na metrizovatelném kompaktu, a tak se dá použít Tvrzení 4.8.)

**Závěr:** Jde o diplomovou práci kompilačního charakteru. Je psána vcelku srozumitelně. V práci je jen malé množství chyb, které jsou odstranitelné a netýkají se hlavních tvrzení. Drobnějších nedostatků je přiměřené množství. Kapitola 5 mi připadá poněkud nedotažená, jelikož se zbytečně komplikovaně dokazuje jen speciální případ obecného tvrzení.

Celkově se domnívám, že předložená práce jednoznačně splňuje nároky kladené na diplomovou práci.

V Praze dne 2. května 2012

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, PhD., DSc.
KMA MFF UK