Aplikovaná matematika III (NMAF073)

Mirko Rokyta (KMA MFF UK)

ZS 2011/12

Tento učební text vznikl jako doplněk k přednášce Aplikovaná matematika III (NMAF073), kterou jsem v zimním semestru akademického roku 2014/15 vedl na MFF UK a je rozšířením a doplněním textu, který vznikl v akademickém roce 2011/12, kdy jsem tuto přednášku měl poprvé. Text rozhodně **není** úplným záznamem přednášky, obsahuje pouze definice a znění všech vět a tvrzení a některé příklady a poznámky. Neobsahuje komentáře, podrobnější poznámky a příklady a zejména důkazy vět a tvrzení, apod. Text rovněž neprošel podrobnějším korekturním čtením, proto je možné, že obsahuje překlepy či chyby. Upozornění na jakýkoli nedostatek bude vítáno na adrese rokyta@karlin.mff.cuni.cz

Text je možno nalézt v elektronické podobně na http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

15 Maticový a vektorový počet II

15.1 Úvod

Opakování z 1. ročníku (z kapitoly 8)

Označení. Množinu všech reálných resp. komplexních matic rozměru $m \times n$ budeme značit $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R})$ resp. $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{C})$. Někdy budeme též používat značení $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{K})$, kde $\mathbb{K}$ bude značit buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Poznámka. Pro násobení matic (pokud je definováno, tj. souhlasí rozměry matic) platí:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}\,,$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{(obecně)}\,.$$

Pokud je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ **komutují**.

Poznámka. Pro sčítání a násobení matic a násobení matic skalárem $\lambda \in \mathbb{K}$ platí:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}\,,$$
$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}\,,$$
$$\lambda\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\,\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{B}\,,$$
$$\lambda\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\lambda\,\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}\,,$$

pokud jsou všechny aritmetické operace definovány (tj. zejména souhlasí rozměry matic).

Poznámka.
- Připomeňte si některé základní termíny: jednotková matice $\mathbf{I}$, diagonální matice, inverzní matice ($\mathbf{A}^{-1}$), regulární matice, singulární matice, transponovaná matice ($\mathbf{A}^T$).
- …i některé další základní termíny:
  - symetrická matice: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
  - ortogonální matice: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$
  - hermitovsky sdružená matice: $\mathbf{A}^H := \overline{\mathbf{A}}^T$
  - hermitovská matice: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$
  - unitární matice: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$

Cvičení. Ukažte, že platí následující identity (vždy, když je násobení matic definováno alespoň na jedné straně uvažovaných rovností):

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T\,,$$
$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^H = \mathbf{B}^H \cdot \mathbf{A}^H\,,$$

a pro regulární matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\,.$$

Tvrzení 15.1. *Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ čtvercová matice. Potom*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \textit{ je regulární} &\iff \textit{sloupce } \mathbf{A} \textit{ jsou LN} \iff \\ &\iff \textit{řádky } \mathbf{A} \textit{ jsou LN} \iff \\ &\iff \mathrm{h}(\mathbf{A}) = n \iff \dim N_{\mathbf{A}} = 0 \iff \\ &\iff \det \mathbf{A} \neq 0. \end{aligned}$$

Zde $N_{\mathbf{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n; \mathbf{A}\vec{x} = 0\}$, a $\mathrm{h}(\mathbf{A})$ označuje hodnost matice $\mathbf{A}$.

Pozn. Obecně pro $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ platí

$$\dim N_{\mathbf{A}} + \mathrm{h}(\mathbf{A}) = n\,.$$

<u>Začátek 2. ročníku</u>

Definice (Norma matice)**.** Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ čtvercová matice. Pro jakoukoli normu vektoru $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ definujeme odpovídající normu matice $\mathbf{A}$ takto:

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \\ \vec{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\,. \tag{1}$$

Pozn. Zvolíme-li například eukleidovskou normu $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$, potom

$$\|\mathbf{A}\|^2 \le \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 < +\infty\,.$$

Pozn. Přímo z definice normy matice plyne, že

$$\|\mathbf{A}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\vec{x}\| \qquad \text{pro každé} \quad \vec{x} \in \mathbb{K}^n\,.$$

Proto je

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,\|\vec{x}\| \qquad \text{pro každé} \quad \vec{x} \in \mathbb{K}^n\,,$$

a tedy

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,.$$

Speciálně

$$\|\mathbf{A}^2\| \le \|\mathbf{A}\|^2 \quad \text{odkud plyne} \quad \|\mathbf{A}^n\| \le \|\mathbf{A}\|^n \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Věta 15.2 (O maticových řadách)**.** *Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ má poloměr konvergence $R > 0$. Buď dále $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ matice, pro jejíž normu platí $\|\mathbf{A}\| < R$. Potom*

$$f(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^\infty a_k \mathbf{A}^k$$

konverguje, $f(\mathbf{A}) \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$. Navíc platí

$$\|f(\mathbf{A})\| \le \sum_{k=0}^\infty |a_k|\,\|\mathbf{A}\|^k\,,$$

kde číselná řada napravo konverguje.

Příklad 1.

- ***Exponenciála matice** je definována řadou*

$$e^{\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^\infty \frac{\mathbf{A}^k}{k!}\,, \tag{2}$$

*která konverguje **pro každou matici** $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$.*

- *Pokud matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ **komutují**, platí*

$$e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\,.$$

- *Speciálně tedy vždy platí $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{-\mathbf{A}} = e^{-\mathbf{A}+\mathbf{A}} = \mathbf{I}$, neboli: každá matice tvaru $e^{\mathbf{A}}$ je **regulární** (ať byla $\mathbf{A}$ jakákoli čtvercová matice), a $e^{-\mathbf{A}}$ je matice k ní inverzní.*

Příklad 2. *Ukažte: je-li $\mathbf{A}$ diagonální matice, která má na diagonále prvky $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, je $\exp(\mathbf{A})$ také diagonální matice, mající na diagonále prvky $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.*

15.2 Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice. Řekneme, že číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem** matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$, pokud existuje **nenulový vektor** $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\,.$$

Vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ pak nazýváme **vlastním vektorem** matice $\mathbf{A}$, odpovídajícím vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$.

Věta 15.3. *Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem** matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ **právě tehdy, když** je kořenem tzv. **charakteristického polynomu** matice $\mathbf{A}$,*

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,, \tag{3}$$

tj. řeší rovnici $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

(K důkazu: z tvrzení 15.1 plyne, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq 0 \iff$ rovnice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{x} = 0$ má pouze nulové řešení.)

Poznámka.

- Každá matice má alespoň jedno vlastní číslo (důsledek základní věty algebry).
- Různé matice mohou mít stejná vlastní čísla.
- Pro pevné vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ platí: Každý násobek jeho vlastního vektoru je opět jeho vlastním vektorem. Součet dvou jeho vlastních vektorů je opět jeho vlastním vektorem.
- $\ldots \implies$ pro pevné vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je

  $$N_\lambda := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n\,;\ \mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \quad (= N_{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}})$$

  lineární podprostor $\mathbb{C}^n$. Nazýváme jej **vlastním podprostorem** matice $\mathbf{A}$, příslušným číslu λ.

Věta 15.4. *Buď $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Potom*

$$1 \le \dim N_\lambda \le m(\lambda)\,,$$

kde $m(\lambda)$ je násobnost (multiplicita) čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu.

Definice. Řekneme, že čtvercové matice stejného stupně $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ jsou si **podobné** (píšeme $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ taková, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

Poznámka.

- $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \implies \mathbf{B} \approx \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}, \mathbf{B} \approx \mathbf{C} \implies \mathbf{A} \approx \mathbf{C}$

Tvrzení 15.5. *Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ podobná diagonální matici, tj. nechť existují diagonální matice $\mathbf{D} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ a regulární matice $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ takové, že*

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

Potom:

- *Diagonála matice $\mathbf{D}$ je tvořena vlastními čísly matice $\mathbf{A}$, a tedy matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{D}$ mají stejná vlastní čísla i stejný charakteristický polynom.*

- *Sloupce matice* $\mathbf{P}$ *jsou tvořeny vlastními vektory matice* $\mathbf{A}$*, uspořádanými ve stejném pořadí jako odpovídající vlastní čísla na diagonále matice* $\mathbf{D}$.

Poznámka. Pozor, první z výše uvedených tvrzení neplatí obráceně: matice, mající stejné charakteristické polynomy ještě nemusí být podobné. Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(Ukažte to).

Tvrzení 15.6. *Vlastní vektory matice* $\mathbf{A}$*, které odpovídají* ***různým*** *vlastním číslům, jsou lineárně nezávislé.*

Věta 15.7. *Nechť* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ *je matice stupně* n*. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. $\mathbf{A}$ *je podobná nějaké diagonální matici.*
2. *V* $\mathbb{C}^n$ *existuje báze složená pouze z vlastních vektorů matice* $\mathbf{A}$.
3. *Pro každé vlastní číslo* λ *matice* $\mathbf{A}$ *je* $\dim N_\lambda = m(\lambda)$.

Definice. Řekneme, že $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ je **diagonalizovatelná**, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

Definice. Matici $\mathbf{J} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ nazvu **Jordanovým blokem stupně (řádu)** n, pokud je tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definice. Matici $\mathbf{J} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ nazvu **Jordanovou maticí stupně (řádu)** n, pokud je tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{J}_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{J}_k \end{pmatrix} ,$$

kde $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k$ jsou Jordanovy bloky. Čísla na diagonálách bloků $\mathbf{J}_j$ přitom nemusí být různá pro různé bloky.

Věta 15.8. *Matice* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ *je podobná Jordanovu bloku* $\mathbf{J} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ *právě tehdy, když jsou splněny obě následující podmínky:*

1. *Matice* $\mathbf{A}$ *má jedno* n*-násobné vlastní číslo* $\lambda \in \mathbb{C}$*; toto* λ *pak leží na diagonále bloku* $\mathbf{J}$.
2. *Existují vektory* $\vec{q}^{\,1}, \dots, \vec{q}^{\,n}$*, splňující*

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{q}^{\,1} = 0 , \qquad \vec{q}^{\,1} \neq 0 , \tag{4}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{q}^{\,k} = \vec{q}^{\,k-1} , \qquad k = 2, \dots, n . \tag{5}$$

Definice. Vektory splňující (4)–(5) nazýváme **řetězcem (řetízkem)** délky n, který odpovídá vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ matice $\mathbf{A}$. Vektor $\vec{q}^{\,j}$ nazýváme **přidruženým vektorem** řádu $(j-1)$ matice $\mathbf{A}$.

Pozn.: Vektor $\vec{q}^{\,1}$ (první vektor řetězce) je zřejmě vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$. Vlastní vektor matice je tedy jejím přidruženým vektorem řádu 0.

Věta 15.9. *Vektory, tvořící řetězec, odpovídající jednomu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$, jsou lineárně nezávislé.*

Věta 15.10. *Nechť je matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ podobná Jordanovu bloku $\mathbf{J} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ a nechť matice $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ splňuje*

$$\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \mathbf{J}\,.$$

Potom sloupce matice $\mathbf{Q}$ tvoří řetezec délky n odpovídající n-násobnému vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ matice $\mathbf{A}$.

Věta 15.11.
- *Matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ je podobná Jordanově matici $\mathbf{J} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ právě tehdy když v $\mathbb{C}^n$ existuje báze, složená z řetězců matice $\mathbf{A}$, které jsou přidruženy jejím vlastním číslům.*
- *Jestliže pro matici $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ platí $\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \mathbf{J}$, kde $\mathbf{J} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ je Jordanova matice s bloky $\mathbf{J}_1, \ldots \mathbf{J}_k$, pak pak čísla λ_j na diagonále bloku $\mathbf{J}_j$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ (nikoli nutně různá pro různé bloky), a sloupce matice $\mathbf{Q}$ jsou tvořeny řetězci, které odpovídají vlastním číslům matice $\mathbf{A}$. Pořadí řetězců ve sloupcích $\mathbf{Q}$ přitom odpovídá pořadí bloků v matici $\mathbf{J}$.*

Věta 15.12 (O Jordanově kanonickém tvaru matice)**.**
- *(Existence.) Každá matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ je podobná nějaké Jordanově matici $\mathbf{J} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$.*
- *(Jednoznačnost.) Nechť je matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ podobná Jordanově matici $\mathbf{J}_1 \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ i Jordanově matici $\mathbf{J}_2 \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$. Pak se matice $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ liší nejvýše pořadím Jordanových bloků na diagonále.*

Definice. Jordanovým kanonickým tvarem matice $\mathbf{A}\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ nazvu Jordanovu matici $\mathbf{J}\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$, která je matici $\mathbf{A}$ podobná.

Poznámka. Podle předchozí věty má každá matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ Jordanův kanonický tvar, který je určen jednoznačně až na pořadí bloků na diagonále.

Poznámky k hledání kanonického tvaru matice.

- Není to úplně snadné: např. trojnásobný kořen λ může generovat 3 bloky řádu 1, nebo blok řádu 1 a blok řádu 2, nebo 1 blok řádu 3. Existují proto různá tvrzení, která pomohou zjistit, o jakou situaci jde:
- Nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Položme

  $$N_\lambda^{(j)} := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n,\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^j\,\vec{x} = 0\}\,, \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

  (Tedy $N_\lambda^{(1)} = N_\lambda$). Potom:

  – $N_\lambda^{(j)}$ jsou podprostory v $\mathbb{C}^n$, $N_\lambda^{(j)} \subset N_\lambda^{(j+1)}$.
  – $N_\lambda^{(j+1)} = N_\lambda^{(j)} \cup \{$ přidružené vektory řádu j matice $\mathbf{A}\}$.
  – Existuje číslo $p(\lambda) \le n$ takové že

  $$N_\lambda^{(1)} \subsetneq N_\lambda^{(2)} \subsetneq \cdots \subsetneq N_\lambda^{(p(\lambda))} = N_\lambda^{(k)} \qquad \forall k \ge p(\lambda)\,.$$

- – Tedy: $p(\lambda)$ je rovno maximálnímu stupni Jordanova bloku (na diagonále Jordanovy matice), který odpovída vlastnímu číslu λ (delší řetězec neexistuje).
  – Přitom: počet všech Jordanových bloků (na diagonále Jordanovy matice), které odpovídají vlastnímu číslu λ, je roven $\dim N_\lambda$.

- Pro vlastní čísla $\lambda \neq \mu$ je $N_\lambda^{(j)} \cap N_\mu^{(\ell)} = \{0\}$ $\forall j, \ell \in \mathbb{N}$.
- Platí také následující postup, aplikovatelný pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbf{A}$:
  – buďte $d_j := \dim N_\lambda^{(j)} = n - h((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^j)$;
  – označme $\rho_1 := d_1$, $\rho_j := d_j - d_{j-1}$ pro $j = 2, \ldots, p(\lambda)$;
  – označme $\sigma_{p(\lambda)} := \rho_{p(\lambda)}$, $\sigma_j := \rho_j - \rho_{j+1}$ pro $j = 1, \ldots, p(\lambda) - 1$.
  – Potom čísla σ_j pro $j = 1, \ldots, p(\lambda)$ určují počet bloků stupně j (na diagonále Jordanovy matice) s λ na diagonále.

Cvičení. Ukažte: matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou podobné. Najděte také matici $\mathbf{Q}$, pro kterou platí $\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \mathbf{J}$. Pro zjištění, jaké bloky odpovídají vlastnímu číslu 2, zkuste spočítat, že $p(2) = 2$, $d_1 = \dim N_2^{(1)} = 1$, $d_2 = \dim N_2^{(2)} = 2$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$. Poslední dvě hodnoty tedy říkají, že (pro vlastní číslo $\lambda = 2$) je počet bloků stupně jedna roven nule a počet bloků stupně dva roven jedné.

15.3 Lineární zobrazení v prostorech se skalárním součinem

Opakování z 1. ročníku (z kapitoly 8)

Věta 15.13. • *Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R})$. Potom zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definované předpisem $\varphi(\vec{x}) := \mathbf{A}\vec{x}$ (pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) je lineární.*

- *Buď $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení. Potom existuje právě jedna matice $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_\varphi \in \mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R})$ taková, že*

$$\varphi(\vec{x}) = \mathbf{A}_\varphi \vec{x} \qquad \textit{pro všechna } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

*V tomto případě říkáme, že $\mathbf{A}_\varphi$ **reprezentuje** zobrazení φ.*

Věta 15.14. *Pokud $n = m$ a $\mathbf{A}_\varphi \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ reprezentuje lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, platí*

$$\varphi \textit{ je prosté} \iff \varphi \textit{ je "na"} \iff \mathbf{A}_\varphi \textit{ je regulární.}$$

Předchozí dvě věty zůstanou v platnosti, nahradíme-li všude symbol $\mathbb{R}$ symbolem $\mathbb{C}$.

Učivo 2. ročníku

Definice. Buď $\varphi : V_n \to W_m$ lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory konečné dimenze, se skaláry z $\mathbb{K}$ (říkáme též "**nad** $\mathbb{K}$"), $\dim V_n = n$, $\dim W_m = m$. Buď dále $\{\vec{v}^{\,(1)}, \ldots, \vec{v}^{\,(n)}\}$ báze ve V_n, $\{\vec{w}^{\,(1)}, \ldots, \vec{w}^{\,(m)}\}$ báze ve W_m. Zobrazení φ a zvoleným dvěma bazím lze přiřadit matici $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\, j=1\ldots,n}$, předpisem

$$\varphi(\vec{v}^{\,(j)}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{w}^{\,(i)}\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Matici $\mathbf{A}$ říkáme **matice zobrazení** φ **vzhledem k bazím** $\{\vec{v}^{\,(1)}, \ldots, \vec{v}^{\,(n)}\}$, $\{\vec{w}^{\,(1)}, \ldots, \vec{w}^{\,(m)}\}$.

Poznámka. Je-li $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$ pro $\vec{x} \in V_n$, a jsou-li $\vec{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ resp. $\vec{\beta} \in \mathbb{K}^m$ souřadnice vektorů $\vec{x}$ resp. $\vec{y}$ v bazích $\{\vec{v}^{\,(1)}, \dots, \vec{v}^{\,(n)}\}$, resp. $\{\vec{w}^{\,(1)}, \dots, \vec{w}^{\,(m)}\}$, platí

$$\vec{\beta} = \mathbf{A}\vec{\alpha}\,,$$

kde $\mathbf{A}$ je matice zobrazení φ vzhledem k bazím $\{\vec{v}^{\,(1)}, \dots, \vec{v}^{\,(n)}\}$, $\{\vec{w}^{\,(1)}, \dots, \vec{w}^{\,(m)}\}$.

Připomeňme: vektor $\vec{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ je vektor souřadnic vektoru $\vec{x} \in V_n$ vzhledem k bázi $\{\vec{v}^{\,(1)}, \dots, \vec{v}^{\,(n)}\}$ prostoru V_n, pokud platí

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{v}^{\,(j)}\,.$$

Cvičení. Ukažte, že matice zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definovaného předpisem $\varphi((x, y, z)) = (2x, 3y + z)$ vzhledem k eukleidovským bazím příslušných prostorů, je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 15.15. *Buď $\vec{\varphi} : V_n \to V_n$ lineární zobrazení, $\dim V_n = n$. Matice, které v různých bazích odpovídají stejnému lineárnímu zobrazení $\vec{\varphi}$, jsou si navzájem podobné.*

Poznámka.

Matice a lineární zobrazení si v konečnědimenzionálním případě (a při daných bazích) vzájemně jednoznačně odpovídají. Terminologii, kterou používáme u matic, používáme proto i pro lineární zobrazení, tehdy, když má jeho matice příslušnou vlastnost.

Definice. Buď V lineární vektorový prostor (obecně libovolné dimenze) nad $\mathbb{K}$. Řekneme, že **na V je definován skalární součin** (nebo též: V **je prostor se skalárním součinem**), pokud je na V definována funkce $(\cdot, \cdot)$, která dvojici vektorů z V přiřazuje skalár z $\mathbb{K}$, a která pro všechna $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ a všechna $\alpha \in \mathbb{K}$ splňuje:

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) &= (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})\,, \\ (\alpha\vec{x}, \vec{y}) &= \alpha(\vec{x}, \vec{y})\,, \\ (\vec{x}, \vec{y}) &= \overline{(\vec{y}, \vec{x})}\,, \\ (\vec{x}, \vec{x}) &\geq 0 \qquad (\in \mathbb{R})\,, \qquad (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0\,. \end{aligned}$$

Poznámka. Z definice skalárního součinu lze odvodit, že pro všechna $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ a všechna $\alpha \in \mathbb{K}$ také platí:

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) &= (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})\,, \\ (\vec{x}, \alpha\vec{y}) &= \overline{\alpha}(\vec{x}, \vec{y})\,. \end{aligned}$$

Příklad 3. *Ukažte, že následující výrazy (definované na příslušných vektorových prostorech) splňují všechny vlastnosti skalárního součinu:*

- $(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$, *pro* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$;
- $(f, g) := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$, *pro* $f, g \in \mathbb{C}(\langle 0, 1\rangle)$.

Definice. Buď V lineární vektorový prostor se skalárním součinem.

- Řekneme, že vektory $\vec{x}$, $\vec{y} \in V$ jsou **kolmé (ortogonální)**, pokud $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, a přitom ani jeden z vektorů $\vec{x}$, $\vec{y}$ není nulový.

- Na V je přirozeně definovaná norma předpisem

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}\,.$$

Tuto normu nazýváme **norma indukovaná skalárním součinem na** V.

Poznámka (bonusová). • Abstraktní (obecná) norma na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ je každé zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a všechna $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \text{(trojúhelníková nerovnost)}, \\ \|\alpha\vec{x}\| &= |\alpha|\,\|\vec{x}\|\,, \\ \|\vec{x}\| &\geq 0\,, \qquad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = 0\,. \end{aligned}$$

Lze snadno ukázat (zkuste to), že každá norma indukovaná nějakým skalárním součinem (ve smyslu předchozí definice) má výše uvedené vlastnosti.

- Ne každá norma ovšem musí být indukovaná nějakým skalárním součinem.

Definice. Buď V lineární vektorový prostor se skalárním součinem.

- Řekneme, že množina vektorů $M \subset V$ je **ortogonální**, pokud platí $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ pro všechna $\vec{x} \neq \vec{y} \in M$, a přitom žádný z vektorů z M není nulový. Platí-li navíc $\|\vec{x}\| = 1$ pro všechna $\vec{x} \in M$, nazvu množinu M **ortonormální**.

- Je-li $B \subset V$ báze ve V, která je navíc ortogonální resp. ortonormální množinou vektorů, nazýváme ji **ortogonální** resp. **ortonormální bazí** ve V.

Úmluva.
V dalším textu budeme symbolem V značit lineární vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, (obecně libovolné dimenze), se skalárním součinem, zatímco symbolem V_n budeme značit lineární vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, dimenze n, se skalárním součinem.

Definice. Buď φ lineární zobrazení z prostoru V opět do V. Zobrazení $\varphi^* : V \to V$ nazveme **adjungovaným (přidruženým)** k φ, pokud platí

$$(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \varphi^*(\vec{y}))\,, \qquad \text{pro všechna } x, y \in V.$$

Tvrzení 15.16. • *Adjungované zobrazení, pokud existuje, je určeno jednoznačně. (V prostorech nekonečné dimenze obecně adjungované zobrazení nemusí existovat).*

- *V případě konečné dimenze ($\varphi : V_n \to V_n$) adjungované zobrazení k danému lineárnímu zobrazení φ vždy existuje (a tedy existuje právě jedno). Jestliže v nějaké ortonormální bázi $\{\vec{e}^{(1)}, \ldots, \vec{e}^{(n)}\}$ odpovídá zobrazení φ matice $\mathbf{A}$, odpovídá v téže bázi adjungovanému zobrazení φ^* adjungovaná matice $\mathbf{A}^*$ (=$\mathbf{A}^H$), tedy matice, jejíž prvky a^*_{ij} splňují rovnost $a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $i, j = 1, \ldots, n$.*

Definice. Zobrazení $\varphi : V \to V$ nazvu

- **hermitovským (samoadjungovaným)**, pokud je $\varphi = \varphi^*$;

- **unitárním**, pokud je prosté, a $\varphi^{-1} = \varphi^*$;

- **normálním**, pokud $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ (tedy pokud φ komutuje s φ^*).

Pozn.
Hermitovskou a unitární matici už jsme definovali (viz též opakování na začátku celé kapitoly), obdobně lze definovat, že matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ je **normální**, pokud $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ (tedy pokud $\mathbf{A}$ komutuje s $\mathbf{A}^*$).

Tvrzení 15.17. *Buď $\varphi : V_n \to V_n$ lineární zobrazení konečně dimenzionálního prostoru (nad $\mathbb{C}$) se skalárním součinem do sebe, a buď $\mathbf{A}$ jeho matice v pevně zvolené ortonormální bázi. Potom*

- *φ je hermitovské (samoadjungované) $\iff$ $\mathbf{A}$ je hermitovská $\iff$ $(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \varphi(\vec{y}))\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$;*
- *φ je unitární $\iff$ $\mathbf{A}$ je unitární $\iff$ $(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$;*
- *φ je normální $\iff$ $\mathbf{A}$ je normální $\iff$ ve V_n existuje ortonormální báze, složená z vlastních vektorů $\mathbf{A}$. Tuto bázi lze volit tak, že její prvky jsou i vlastními vektory $\mathbf{A}^*$.*

Poznámka. Vlastní vektor $\vec{x} \in V$ lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ je takový nenulový vektor, pro který existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. **V konečně dimenzionálním případě**, kdy φ je reprezentováno maticí, splývá pojem vlastního vektoru (vlastního čísla) zobrazení φ a jeho matice $\mathbf{A}$.

Tvrzení 15.18. *Nechť $\varphi : V_n \to V_n$ je normální. Potom:*

- *Vlastní vektory, odpovídající různým vlastním číslům, jsou ortogonální.*
- *Vlastní vektory zobrazení φ a φ^* jsou stejné, a odpovídající vlastní čísla zobrazení φ jsou komplexně sdružená k odpovídajícím vlastním číslům zobrazení φ^*.*

Tvrzení 15.19. *Nechť $\varphi : V_n \to V_n$ je hermitovské. Potom*

- *Všechna vlastní čísla zobrazení φ (odpovídající matice $\mathbf{A}$) jsou reálná.*
- *Je-li matice $\mathbf{A}$ zobrazení φ reálná (má reálné prvky), pak existuje v $\mathbb{C}^n$ ortonormální báze, složená z reálných vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. Tato báze je tedy pak i bází v $\mathbb{R}^n$.*

Tvrzení 15.20. *Nechť $\varphi : V_n \to V_n$ je unitární. Potom*

- *Všechna vlastní čísla zobrazení φ (odpovídající matice $\mathbf{A}$) jsou v absolutní hodnotě rovna jedné.*
- *Je-li matice $\mathbf{A}$ unitární (je maticí unitárního zobrazení φ), pak platí $|\det \mathbf{A}| = 1$.*

Definice. Unitátní matici $\mathbf{A}$ nazýváme **vlastní**, pokud je $\det \mathbf{A} = 1$, a **nevlastní**, pokud je $\det \mathbf{A} = -1$.

Tvrzení 15.21.

- *Matice $\mathbf{A}$ je normální $\iff$ existuje unitární matice $\mathbf{P}$, taková, že $\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ je diagonální.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je hermitovská $\iff$ ($\mathbf{A}$ je normální & všechna vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou reálná).*

15.4 Lineární, bilineární a kvadratické formy

Definice. Lineární formou (lineárním funkcionálem) nad (reálným resp. komplexním) vektorovým prostorem V nazvu lineární zobrazení f prostoru V do $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$.

Věta 15.22. *Nechť $\{\vec{e}^{(1)}, \dots, \vec{e}^{(n)}\}$ je báze v n-dimenzionálním vektorovém prostoru V_n. Potom každý lineární funkcionál f nad V_n je tvaru*

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_j \,,$$

kde $\gamma_j = f(\vec{e}^{(j)})$, $j = 1, \dots, n$, a $\vec{\alpha}$ jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\{\vec{e}^{(1)}, \dots, \vec{e}^{(n)}\}$, tj. $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}^{(j)}$.

Definice. **Bilineární formou** na (reálném resp. komplexním) vektorovém prostoru V nazvu zobrazení $A = A(\vec{x},\vec{y})$ z prostoru $V \times V$ do $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$, které splňuje následující požadavky pro všechna $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V$ a pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) &= A(\vec{x},\vec{z}) + A(\vec{y},\vec{z})\,, &(6)\\ A(\vec{x},\vec{y}+\vec{z}) &= A(\vec{x},\vec{y}) + A(\vec{x},\vec{z})\,, &(7)\\ A(\alpha\vec{x},\vec{y}) &= \alpha A(\vec{x},\vec{y})\,, &(8)\\ A(\vec{x},\alpha\vec{y}) &= \overline{\alpha} A(\vec{x},\vec{y})\,. &(9)\end{aligned}$$

Poznámka. Vlastnosti (6)–(8) jsou vlastnosti linearity, vlastnost (9) je tzv. **antilinearita** vzhledem ke druhé složce. Pokud jsou skaláry z $\mathbb{R}$, je bilinearita totéž co linearita v každé z obou složek.

Definice. Bilineární forma $A(\vec{x},\vec{y})$ na V se nazývá **hermitovská** (resp. **symetrická**), pokud pro všechna $\vec{x}$, $\vec{y} \in V$ platí

$$A(\vec{x},\vec{y}) = \overline{A(\vec{y},\vec{x})} \qquad \text{(resp. } A(\vec{x},\vec{y}) = A(\vec{y},\vec{x})\text{)}\,.$$

Poznámka.
- Příkladem hermitovské bilineární formy je skalární součin na vektorovém prostoru.
- Je-li $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, je zobrazení

  $$A(\vec{x},\vec{y}) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y_j} \equiv (\mathbf{A}\vec{x},\vec{y})\,, \qquad \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{K}^n\,,$$

  bilineární formou na $\mathbb{K}^n$, která je hermitovská právě tehdy, když je hermitovská matice $\mathbf{A}$.

Na konečnědimenzionálních prostorech je výše zmíněná situace typická:

Věta 15.23. *Buď $A(\vec{x},\vec{y})$ bilineární forma na V_n, $\dim V_n = n$. Buď $\{\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}\}$ báze ve V_n. Potom*

$$A(\vec{x},\vec{y}) = (\mathbf{A}\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\alpha_i\overline{\beta_j}\,,$$

kde pro prvky matice $\mathbf{A}$ platí $a_{ij} = A(\vec{e}^{(i)},\vec{e}^{(j)})$, a $\vec{\alpha}$, resp. $\vec{\beta}$ jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$ resp. $\vec{y}$ v bázi $\{\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}\}$.

Poznámka. Je-li $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitovská matice, pak platí $(\mathbf{A}\vec{x},\vec{x}) \in \mathbb{R}$ (ukažte to). Pokud je navíc $(\mathbf{A}\vec{x},\vec{x}) \geq 0$ a $(\mathbf{A}\vec{x},\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$, je výrazem $(\mathbf{A}\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$, (kde $(\cdot,\cdot)$ je eukleidovský skalární součin v $\mathbb{C}^n$), maticí $\mathbf{A}$ definován (určen) jiný skalární součin (bilineární forma $A(\vec{x},\vec{y}) = (\mathbf{A}\vec{x},\vec{y})$ má všechny vlastnosti skalárního součinu). Tento nový skalární součin generuje odpovídající normu,

$$\|\vec{x}\|_{\mathbf{A}} := \sqrt{(\mathbf{A}\vec{x},\vec{x})}\,, \tag{10}$$

čímž zavádí i nový pojem **vzdálenosti** (**metriky**) v $\mathbb{C}^n$, $\rho_{\mathbf{A}}(\vec{x},\vec{y}) := \|\vec{x}-\vec{y}\|_{\mathbf{A}}$.

Poznámka. Často se používají pojmy "skalární součin", "norma", "metrika" i tehdy, když forma $(\mathbf{A}\vec{x},\vec{y})$ nemá všechny vlastnosti skalárního součinu. Například tzv. Minkowského metrika (používaná v teorii relativity) je definovaná diagonální maticí $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{4\times 4}(\mathbb{R})$, mající na diagonále prvky $(1,1,1,-c^2)$. Odpovídající časoprostorová metrika generuje časoprostorovou "normu" tvaru

$$\|(x,y,z,t)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2\,.$$

Definice (Kvadratická forma)**.** Je-li $A(\vec{x},\vec{y})$ bilineární forma na vektorovém prostoru V, nazvu zobrazení

$$Q(\vec{x}) := A(\vec{x},\vec{x}) : V \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

kvadratickou formou na V, generovanou (vytvořenou) bilineární formou A. Kvadratická forma se nazývá **hermitovskou**, pokud je vytvořena hermitovskou bilineární formou.

Tvrzení 15.24. *Bilineární forma $A(\vec{x},\vec{y})$ v komplexním prostoru je hermitovská právě tehdy, když $A(\vec{x},\vec{x}) \in \mathbb{R}$ pro každé $\vec{x}$.*

Tvrzení 15.25. *V reálném prostoru lze každou kvadratickou formu vytvořit pomocí* ***jediné symetrické*** *bilineární formy.*

Příklad 4. *Kvadratická forma $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ může být vytvořena jednak (nesymetrickou) bilineární formou*

$$A_N(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_2\,,$$

jednak symetrickou formou

$$A_S(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{3}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) + 2x_2y_2\,.$$

Poznámka. Předchozím dvěma bilineárním formám A_N resp. A_S odpovídají příslušné dvě matice

$$\mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Věta 15.26 (o převedení na kanonický tvar)**.** *Ke každé hermitovské kvadratické formě $Q(\vec{x})$ v komplexním vektorovém prostoru (resp. ke každé reálné kvadratické formě v reálném vektorovém prostoru) V_n ($\dim V_n = n$) se skalárním součinem existuje ortonormální báze $\{\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}\}$ ve V_n taková, že*

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\alpha_j|^2\,, \qquad \textit{pro}\ \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}^{(j)}\,, \tag{11}$$

kde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ jsou určena jednoznačně až na pořadí.

Definice (Kanonický tvar)**.** Kanonickým tvarem kvadratické formy $Q(\vec{x})$ v komplexním vektorovém prostoru (resp. v reálném vektorovém prostoru) V_n ($\dim V_n = n$) se skalárním součinem nazveme tvar

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\alpha_j|^2\,, \qquad \text{pro}\ \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}^{(j)}\,, \tag{12}$$

kde $\{\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}\}$ ve V_n je nějaká báze ve V_n a λ_j jsou nějaké skaláry.

Věta 15.27 (Zákon setrvačnosti kvadratické formy)**.** *Ke každé hermitovské kvadratické formě $Q(\vec{x})$ v komplexním vektorovém prostoru (resp. ke každé reálné kvadratické formě v reálném vektorovém prostoru) V_n se skalárním součinem ($\dim V_n = n$) existuje (nikoli nutně ortonormální) báze $\{\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}\}$ ve V_n taková, že*

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j |\alpha_j|^2\,, \qquad \textit{pro}\ \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}^{(j)}\,, \tag{13}$$

kde $\rho_j \in \mathbb{R}$ jsou buď 0, 1 nebo -1, přičemž počet nul, jedniček a minus jedniček nezávisí na bázi, v níž má $Q(\vec{x})$ tvar (13).

Poznámka. Podle Tvrzení 15.21 je matice $\mathbf{A}$ hermitovská (resp. ortogonální) $\Longleftrightarrow$ (existuje unitární (resp. ortogonální) matice $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ je diagonální & všechna vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou reálná). Proces hledání kanonického tvaru kvadratické formy je tedy ekvivalentní procesu diagonalizace příslušné matice, která ji vytvořuje.

Cvičení (na závěr). Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ reálná symetrická matice a $Q(\vec{x}) := (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, odpovídající kvadratická forma. Najděte nejmenší a největší hodnotu této kvadratické formy na jednotkové sféře v $\mathbb{R}^n$. Pro jaké vektory se tyto hodnoty nabývají?

Řešení.

Jde o nalezení globálních extrémů funkce $Q(\vec{x})$ na kompaktní množině $\mathbb{S}^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\vec{x}\|^2 = 1\}$. Použitím metody Lagrangeových multiplikátorů zjistíme, že hledáme ty hodnoty $\vec{x} \in \mathbb{S}^n$, pro které je

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x}) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_k}(\|\vec{x}\|^2 - 1) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Tento systém rovnic je ekvivalentní vektorové rovnici $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (ukažte to podrobně). Hodnota $Q(\vec{x})$ v takových vektorech je pak $Q(\vec{x}) = (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x}) = (\lambda\vec{x}, \vec{x}) = \lambda\|\vec{x}\|^2 = \lambda$.

Rozmyslete si, že tedy platí:

- Reálná symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ má pouze reálná vlastní čísla.
- Kvadratická forma $Q(\vec{x}) := (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x})$ nabývá na jednotkové sféře **největší** hodnoty λ_{max}, rovné **největšímu** vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$, a to ve vlastním vektoru, který tomuto vlastnímu číslu odpovídá.
- Kvadratická forma $Q(\vec{x})$ nabývá na jednotkové sféře **nejmenší** hodnoty λ_{min}, rovné **nejmenšímu** vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$, a to ve vlastním vektoru, který tomuto vlastnímu číslu odpovídá.

16 Obyčejné diferenciální rovnice a jejich soustavy

16.1 Úvod - opakování

<u>**Opakování z 1. ročníku (z kapitoly 5)**</u>

Definice. Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(t). \tag{1}$$

Návod k řešení:

- Pokud $g(c) = 0$, je funkce $y(t) = c$ řešením rovnice.
- Na intervalech, kde $g(y) \neq 0$ uvažte $\frac{y'}{g(y)} = h(t)$ s následným $\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\,\mathrm{d}t$.
- Nutná je diskuse o možnostech navazování řešení předchozích dvou typů!

Definice. Lineární ODR prvního řádu je rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t), \tag{2}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.

Návod k řešení:

- Násobte rovnici výrazem $e^{P(t)}$, kde P je primitivní funkce k p na (a, b).
- Upravte na levé straně do tvaru derivace součinu.
- Integrujte.

Definice. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$Ay'' + By' + Cy = f(t), \tag{3}$$

kde A, B, $C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a, b). Pokud je f identicky nulová na (a, b), nazýváme rovnici (3) **homogenní**.

Případ I:

$\boxed{f \equiv 0, \text{ rovnice: } Ay'' + By' + Cy = 0, \text{ obecné řešení } y_h}$

Pokud **charakteristická** rovnice $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ má:

1. dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

2. jeden dvojnásobný reálný kořen λ:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

3. dva komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$:

$$y_h(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

Případ II:

$\boxed{f \not\equiv 0, \text{ rovnice: } Ay'' + By' + Cy = f(t)}$

Pro řešení $y(t)$ platí:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

kde $y_h(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice (viz předchozí případ) a $y_p(t)$ je **jedno** (jakékoliv), tzv. **partikulární** řešení rovnice $Ay'' + By' + Cy = f(t)$.

Některá partikulární řešení lze "uhodnout" podle tvaru pravé strany.

- Je-li $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a P je polynom, potom existuje polynom Q, st Q = st P, že
  1. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$,
  2. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha = \lambda_2 \implies y_p(t) = tQ(t)e^{\alpha t}$,
  3. $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \implies y_p(t) = t^2Q(t)e^{\alpha t}$.
- Je-li $f(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + R(t)\sin\beta t)$, ($P$, R polynomy), existují polynomy Q, S, stupně nejvýše $\max($st $P,$ st $R)$, takové, že
  1. $\alpha + i\beta \neq \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = e^{\alpha t}(Q(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$,
  2. $\alpha + i\beta = \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = te^{\alpha t}(Q(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$.

Konec opakování.

16.2 Lineární DR n-tého řádu s (ne)konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{4}$$

kde $a_0, \ldots, a_n$ a f jsou funkce spojité na daném intervalu (a, b), $a_n(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$ (**lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s nekonstantními koeficienty**). Jsou-li **všechny** funkce $a_0, \ldots, a_n$ konstantní na intervalu (a, b), jde o **lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty**, ($f(t)$ nemusí být konstantní).

Homogenní rovnicí k rovnici (4) rozumíme rovnici

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{5}$$

Věta 16.1. *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice* (4) *resp.* (5)*, které splňuje tzv.* ***počáteční podmínky***

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b).

Věta 16.2 (o struktuře všech řešení)**.**

(i) *Maximální řešení rovnice* (5) *jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(a, b)$ dimenze n. Jeho jakoukoli bázi nazýváme* ***fundamentálním systémem*** *rovnice* (5).

(ii) *Nechť y_p je maximální řešení rovnice* (4)*. Pak funkce y je jejím maximálním řešením, právě když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice* (5).

I. Hledání fundamentálního systému

Pro rovnici (5) s konstantními koeficienty lze použít tzv. **metodu charakteristického polynomu.** Pro rovnici (5), kde alespoň jeden z koeficientů je nekonstatní, nelze obecně explicite najít její fundamentální systém. (V některých speciálních případech to lze, jak uvidíme později) .

Definice. Nechť jsou koeficienty homogenní rovnice (5) konstantní. **Charakteristickým polynomem** rovnice (5) rozumíme polynom

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 16.3. *Nechť jsou koeficienty homogenní rovnice* (5) *konstantní. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu P, s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_\ell + \beta_\ell i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu P, s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_\ell$.*

Pak funkce

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, & te^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, & \dots & t^{q_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, \\
e^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t, & te^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t, & \dots & t^{q_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t
\end{array}$$

tvoří fundamentální systém homogenní rovnice (5) (s konstantními koeficienty).

II. Hledaní partikulárního řešení

Věta 16.4 (o uhodnutí partikulárního řešení)**.** *Nechť* (4) *je rovnice s **konstatními koeficienty**. Nechť*

$$f(t) = e^{\alpha t} \cdot (P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)\,,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (4) *ve tvaru*

$$y_p(t) = t^m e^{\alpha t} \cdot (R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)\,,$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{$stupeň P, stupeň $Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\alpha + i\beta$ jakožto kořen charakteristického polynomu.

Následující Lemma je základem tzv. **metody variace konstant** pro hledání partikulárního řešení lineární (nehomohenní) ODR, a to jak s konstantními tak s nekonstantními koeficienty.

Lemma 16.5. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém homogenní rovnice* (5) ***(s obecně nekonstatními koeficienty)**. Potom matice*

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Věta 16.6 (variace konstant)**.** *Nechť $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice* (5) ***(s obecně nekonst. koeficienty)****, $\mathbf{U}(t)$ buď jako v předchozí větě. Nechť $c_1(t), \dots, c_n(t)$ řeší soustavu*

$$\mathbf{U}(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(t) \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t)/a_n \end{pmatrix}.$$

Pak funkce

$$y_p(t) := c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t)$$

je (partikulární) řešení rovnice (4).

III. Fundamentální systém lineární rovnice s nekonstantními koeficienty, Wronskián

Definice. Buďte $y_1, \dots, y_n$ funkce, definované na (a, b) a mající na něm $(n-1)$ vlastních derivací. Determinant

$$W(t) \equiv W_{[y_1,\dots,y_n]}(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nazýváme **Wronského determinantem (Wronskiánem)** funkcí $y_1, \dots, y_n$.

Věta 16.7. *Nechť funkce $y_1, \dots, y_n$ řeší na (a, b) lineární homogenní rovnici ($a_0, \dots, a_n \in \mathcal{C}(a, b)$, $a_n(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$)*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.$$

Buď $W(t)$ Wronskián funkcí $y_1, \dots, y_n$ na (a, b). Potom nastane právě jedna z následujících dvou možností:

1. $W(t) = 0 \, \forall t \in (a, b) \iff y_1, \dots, y_n$ *jsou LZ na* (a, b)*;*
2. $W(t) \neq 0 \, \forall t \in (a, b) \iff y_1, \dots, y_n$ *jsou LN na* (a, b)*.*

Věta 16.8. *Nechť funkce $y_1, \dots, y_n$ řeší na (a, b) lineární homogenní rovnici ($a_0, \dots, a_n \in \mathcal{C}(a, b)$, $a_n(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$)*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.$$

Buď $W(t)$ Wronskián funkcí $y_1, \dots, y_n$ na (a, b). Potom

- $a_n(t)W'(t) + a_{n-1}(t)W(t) = 0, \quad t \in (a, b)$*;*
- $W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}\, ds\right), \quad t, t_0 \in (a, b)$*.*

Příklad 1. *Mějme rovnici $ty'' + (1-t)y' - y = 0$. Tato rovnice degeneruje pro $t = 0$, řešíme ji tedy separátně na $t > 0$ a $t < 0$. Uvažujme například $t > 0$. Není příliš obtížné "uhodnout" jedno řešení rovnice, $y_1 = e^t$. V této situaci může pomoci Wronskián nalézt druhý prvek fundamentálního systému, funkci y_2. Příslušný Wronskián je jednak podle definice roven $e^t(y_2' - y_2)$, jednak platí $W(t) = W(1) \exp\left(-\int_1^t \frac{1-s}{s}\, ds\right) = \dots = c\frac{e^t}{t}$. Odtud srovnáním dostaneme $y_2' - y_2 = c/t$ a řešením této lineární rovnice 1. řádu dostaneme (netriviální) druhý prvek fundamentálního systému původní rovnice. Dořešte úlohu podrobně.*

16.3 Speciální typy ODR

16.3.1 Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu

Obecná rovnice 1. řádu s vyřešenou 1. derivací: $y' = f(x,y)$ lze formálně psát takto:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(x,y)\,\mathrm{d}x \\ 0 &= f(x,y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y \end{aligned}$$

obecněji:

$$\begin{aligned} 0 &= P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{?}{=} \mathrm{d}\Phi(x,y) \\ 0 &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi(x,y) \end{aligned}$$

Definice. Řekneme, že rovnice $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ **je ve tvaru totálního diferenciálu** na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$, pokud existuje $\Phi \in \mathcal{C}^1(G)$ taková, že $\nabla\Phi = (P,Q)$ v G.

Řešení je poté:

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(x,y) = c\,.$$

Poznámka. Rovnici ve tvaru totálního diferenciálu říkáme také **exaktní rovnice**.

Pozorování 1. *Pokud je $P, Q \in \mathcal{C}^1(G)$, je nutná podmínka pro to, aby rovnice $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ byla exaktní, rovnost $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ v G.*

Příklad 2. *Uvažujte rovnici*

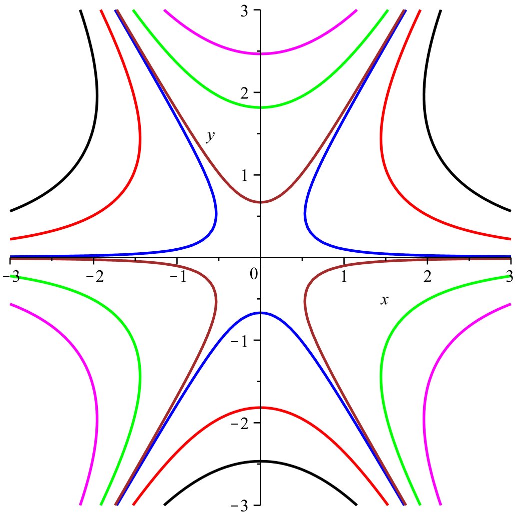
$$2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0\,.$$

Máme $P_y = 2x = Q_x$. Potenciálem je funkce $\Phi = x^2y - \frac{y^3}{3}$. Všechna řešení původní rovnice jsou tedy tvaru

$$x^2y - \frac{y^3}{3} = c\,.$$

Všimněte si, že v původní rovnici je role proměnných x, y rovnocenná, že tedy lze uvážit jak $y = y(x)$ a mít rovnici $y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$, ale také $x = x(y)$, a $x' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$. Dopočtěte, včetně určení definičních oborů řešení v obou případech, a provedení zkoušky dosazením.

Obrázek:
Množiny bodů $[x,y]$ v rovině, splňující vztah $x^2y - \frac{y^3}{3} = c$ pro hodnoty $c = 0.1$, 2, 5, -0.1, -2, -5.



Definice. Řeknu, že $\mu = \mu(x, y)$ je **integračním faktorem** rovnice $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$, pokud je rovnice

$$\mu(x, y)P(x, y)\,\mathrm{d}x + \mu(x, y)Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{6}$$

exaktní v G.

Poznámka. Nutná podmínka exaktnosti rovnice (6) je rovnost $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$, tedy $\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$. Nalezení integračního faktoru je obecně těžká úloha, proto se často předpokládá, že integrační faktor závisí pouze na x nebo pouze na y, nebo na výrazu $(x+y)$, případně na xy atd.

Cvičení. Řešte rovnici $xy' = xy^2 + y$ metodou převedení na exaktní tvar pomocí integračního faktoru, víte-li, že integrační faktor závisí pouze na proměnné y.

Návod k řešení.

- Zjistěte nejprve, že daná rovnice není exaktní.
- Najděte integrační faktor $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$.
- Najděte potenciál $\Phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y}$ rovnice, přenásobené integračním faktorem, a odvoďte odtud, že řešeními původní rovnice jsou funkce $y(x) = \frac{2x}{2c-x^2}$, $c \in \mathbb{R}$. Udělejte kontrolu dosazením. Nezapomeňte diskutovat definiční obory pro řešení s různými c.

Cvičení. Řešte následující rovnice:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad && xy^2\,\mathrm{d}x + (x^2y - x)\,\mathrm{d}y &&= 0 \\ &\text{b)} \qquad && x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' &&= 0 \end{aligned}$$

víte-li, že integrační faktor μ závisí pouze na součinu xy.

Řešení. a) $xy - \ln|y| = c$; b) $x^2y^2 + 2\ln\left|\frac{x}{y}\right| = c$.

16.3.2 Bernoulliho rovnice

Definice. Bernoulliovou rovnicí nazýváme ODR tvaru

$$y' + a(t)y = b(t)y^n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad n \notin \{0, 1\}\,, \tag{7}$$

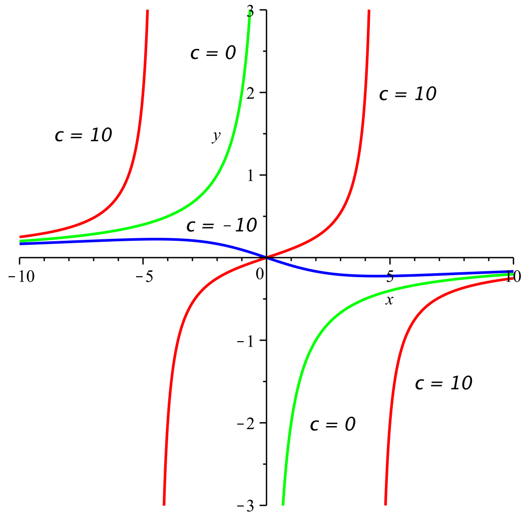
kde $a, b \in \mathcal{C}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval.

Návod k řešení: Pro $n = 0$ nebo $n = 1$ jde o lineární ODR 1. řádu. Pro jiná celá n zavedeme novou funkci $z = z(t)$ substitucí

$$y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-n}}\,,$$

která převede rovnici (7) na lineární ODR 1. řádu.

Cvičení. Řešte rovnici $y' = y^2 + \frac{y}{t}$ jako Bernoulliovu. Porovnejte s postupem z přechozího paragrafu. Prohlédněte si grafy řešení, $y(t) = \frac{2t}{2c-t^2}$, pro hodnoty $c = 10, 0, -10$.



16.3.3 Speciální typy rovnic 2. řádu

Pro obecnou rovnici 2. řádu (vyřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci), tj. pro rovnici tvaru

$$y'' = f(t, y, y') \tag{8}$$

nelze obecně stanovit postup pro řešení.

Pokud je však funkce f na pravé straně vztahu (8) jednodušší (speciálně není-li závislá na některém z výše uvedených argumentů), lze **v některých případech** řešení rovnice (8) najít.

Níže uvedená tabulka navrhuje postup řešení v případě, že rovnice $y'' = f(t, y, y')$ nabývá některého z jednodušších tvarů. Ne vždy je však zaručeno, že se řešení explicite najde (že úloha lze "dopočítat").

V $f(t, y, y')$ ...	**Tvar rovnice (8)**	**Návod k řešení**
1) "nechybí" nic	$y'' = f(t, y, y')$	obecně není
2) "chybí" t	$y'' = f(y, y')$	polož $y'(t) = p(y)$
3) "chybí" y	$y'' = f(t, y')$	polož $y'(t) = u(t)$
4) "chybí" y'	$y'' = f(t, y)$	obecně není
5) "chybí" t, y	$y'' = f(y')$	polož $y'(t) = u(t)$
6) "chybí" t, y'	$y'' = f(y)$	násob $2y'$
7) "chybí" y, y'	$y'' = f(t)$	dvakrát integruj
8) "chybí" t, y, y'	$y'' = c$	dvakrát integruj

Komentář k některým výše zmíněným případům:

ad 2): $y'(t) = p(y) \implies y''(t) = \frac{dy'(t)}{dt} = \frac{dp(y)}{dt} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy(t)}{dt} = p' \cdot p.$
Tedy $y'' = f(y, y') \quad \rightsquigarrow \quad p' \cdot p = f(y, p).$
Dostáváme rovnici 1. stupně pro $p = p(y)$. Ta však nemusí být vždy řešitelná.

ad 6): $y''(t) = f(y) \overset{\cdot 2y'}{\rightsquigarrow} 2y'y''(t) = 2y'f(y) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \left((y')^2\right)' = (2F(y))' \rightsquigarrow (y')^2 = 2F(y) + c.$
(F je primitivní k f.)
Dostáváme (po odmocnění) rovnici 1. řádu v separovaných proměnných.

Příklad 3 (k případu "2)"). • *Rovnici $y'' = (y')^2 y + 3y$ převede navrhovaná úprava na rovnici $p' - py = 3yp^{-1}$, což je Bernoulliho rovnice. Jejím řešením dostaneme $p^2(y) = ce^{y^2} - 3$, a po zpětném dosazení tedy $(y')^2 = ce^{y^2} - 3$, $c \in \mathbb{R}$. Jde (po odmocnění) o rovnici v separovaných proměnných. Její řešení však nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.*

- *Rovnici $y''y = (y')^2$ půjde uvedenou metodou zcela vyřešit. Výsledek (spočtěte): $y(t) = c_1 e^{c_2 t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

16.3.4 Eulerova rovnice

Definice. Eulerovou rovnicí nazýváme **lineární ODR s nekonstantními koeficienty** tvaru

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} \cdots + a_1 t y' + a_0 y = f(t)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{9}$$

kde $a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $f \in \mathcal{C}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval neobsahující nulu.

Poznámka. Pro $t = 0$ rovnice (9) **degeneruje**. Rovnici tedy uvažujeme separátně pro $t > 0$ a pro $t < 0$.

Poznámka. Jde o lineární rovnici (i když s nekonstantními koeficienty), pro její řešení proto platí příslušná teorie. Jde tedy o nalezení n prvkového fundamentálního systému pro homogenní rovnici (s $f = 0$), a poté o nalezení jednoho (partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou. Pro nalezení partikulárního řešení lze použít např. metodu variace konstant. Eulerova rovnice tedy bude vyřešena, nalezneme-li její fundamentální systém.

Metoda nalezení FS Eulerovy rovnice

- Použijeme ansatz $y = t^\lambda$, který vede k tzv. charakteristickému polynomu pro Eulerovu ODR.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ kořenem tohoto polynomu násobnosti p, jsou odpovídajícími prvky fundamentálního systému funkce

$$\boxed{|t|^\lambda \ln^k |t|,} \qquad k = 0, \dots, p-1.$$

- Je-li $\alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) kořenem tohoto polynomu násobnosti p, jsou odpovídajícími prvky fundamentálního systému funkce

$$\boxed{|t|^\alpha \ln^k |t| \cdot \cos(\beta \ln |t|)\,, \quad |t|^\alpha \ln^k |t| \cdot \sin(\beta \ln |t|),}$$
$$k = 0, \dots, p-1.$$

Poznámka. Eulerovu rovnici dostaneme např. při hledání sféricky symetrických řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$ v celém $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Je-li u sféricky symetrická, je $u(x) = w(r)$, kde $r = |x| > 0$. Funkce w pak (jak lze ukázat) splňuje Eulerovu rovnici

$$r^2 w''(r) + (n-1) r\, w'(r) = 0\,.$$

Jejím řešením (proveďte) a zpětným dosazením dostaneme ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad u(|x|) \;=\; c_1 + c_2 \ln |x|\,, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \\ n > 2 \quad &\Longrightarrow \quad u(|x|) \;=\; c_1 + \frac{c_2}{|x|^{n-2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,. \end{aligned}$$

16.4 Řešení ODR pomocí Taylorových řad

Věta 16.9. *Uvažujme lineární rovnici n-tého řádu,*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \tag{10}$$

na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J$. Dají-li se koeficienty a pravá strana rovnice (10) *rozložit do Taylorových řad na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(t_0)$, přičemž $a_n(t_0) \neq 0$, lze každé řešení rovnice* (10) *rozložit na nějakém okolí $\mathcal{U}^\eta(t_0)$ do Taylorovy řady.*

Řešení: Uvážíme ansatz $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-t_0)^k$, který formálně n-krát proderivujeme člen po členu a dosadíme do rovnice. Jsou-li k (10) zadány počáteční podmínky (v bodě t_0), dosadíme uvedený ansatz i do nich.

Poznámky k řešení:

- Nejsou-li koeficienty a_j a pravá strana f ve tvaru mocninné řady, je potřeba rozložit do řady i je.
- Po formálním provedení všech algebraických operací s řadami porovnáme koeficienty u stejných mocnin t.
- Tím dostaneme soustavu nekonečně mnoha rovnic pro nekonečně mnoho koeficientů a_k, $k = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jejím vyřešením nalezneme hledanou funkci $y(t)$ ve tvaru mocninné řady. Na závěr určíme poloměr konvergence této řady.
- V případě homogenní rovnice ($f \equiv 0$) můžeme různou volbou počátečních podmínek obdržet různá řešení. Jejich lineární (ne)závislost je možno ověřit např. pomocí Wronskiánu.

16.5 Soustavy ODR 1. řádu

Uvažujme soustavu (obecných) diferenciálních rovnic 1. řádu, vyřešených vzhledem k 1. derivaci, ve tvaru

$$\begin{aligned}
x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\vdots\\
x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned} \tag{11}$$

kde f_j, $j = 1, \ldots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Vektorový tvar soustavy (11):

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)),$$

kde $\vec{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)^T$, $\vec{x}'(t) = \big(x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)\big)^T$, $\vec{f} = \big(f_1, f_2, \ldots, f_n\big)^T$.

Definice.

- **Řešením soustavy** (11) rozumíme vektorovou funkci $\vec{x} = \big(x_1, \ldots, x_n\big)^T$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_j'(t)$, $j = 1, \ldots, n$, a platí (11).
- **Počáteční úlohou** pro (11) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\vec{x}$ soustavy (11) splňující navíc předem zadanou podmínku $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$, kde $[t_0, \vec{x}^{\,0}]$ je daný bod z G (tzv. **počáteční podmínka**).
- **Maximální řešení** soustavy (11) je takové řešení $\vec{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\vec{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

Věta 16.10 (Peanova věta o existenci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\vec{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, \vec{x}^{\,0}] \in G$ existuje maximální řešení rovnice* (11) *splňující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$.*

Věta 16.11 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\vec{f}$: $[t, \vec{x}] \mapsto \vec{f}(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je "lokálně lipschitzovské v $\vec{x}$", tj. pro každý bod $[t, \vec{x}] \in G$ existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, \vec{x}^1]$, $[s, \vec{x}^2]$ z $\mathcal{U}^\varepsilon([t, \vec{x}])$ máme*

$$||\vec{f}(s, \vec{x}^{\,1}) - \vec{f}(s, \vec{x}^{\,2})|| \leq L||\vec{x}^{\,1} - \vec{x}^{\,2}||.$$

Jestliže $[t_0, \vec{x}^{\,0}] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice (11) *splňující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$.*

Uvažujme nyní soustavu **lineárních** diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{12}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar lineární soustavy (12) je:

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{b}(t),$$

kde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 16.12 (o existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\vec{x}$ soustavy* (12) *splňující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β).*

Definice. **Homogenní soustavou** k soustavě (12) rozumíme soustavu

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x}. \tag{13}$$

Věta 16.13. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, a $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (13) *tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n. Jakoukoli bázi tohoto podprostoru, (složenou z vektorových funkcí $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^n$), nazýváme* ***fundamentálním systémem*** *rovnice* (13).

Věta 16.14. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$. Nechť $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $\vec{x}_P$ je jedno (partikulární) řešení* (12) *na intervalu (α, β). Potom každé řešení $\vec{x}$ soustavy* (12) *na intervalu (α, β) má tvar $\vec{x}_P + \vec{x}_H$, kde $\vec{x}_H$ je řešení homogenní soustavy* (13).

Definice. Nechť vektorové funkce $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^n$ tvoří fundamentální systém rovnice (13). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ pak nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (13).

Lemma 16.15. *Nechť Φ je fundamentální matice soustavy* (13). *Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.*

Věta 16.16 (variace konstant)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení $\vec{x}$ rovnice* (12) *s počáteční podmínkou $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$ má tvar*

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}^{\,0} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (13).

Věta 16.17 (regularita řešení lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}$ a vektorová funkce $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$. Pak $\vec{x}$ je třídy C^∞ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\vec{x}^{(k)}(t) = \mathbf{A}^k\vec{x}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.*

• Vztah mezi soustavou rovnic 1. řádu a jednou rovnicí vyššího řádu

Nechť

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{14}$$

je rovnice n-tého řádu a nechť je $y(t)$ její řešení pro $t \in J \subset \mathbb{R}$.

Potom je vektorová funkce $\vec{x}(t) = \big(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big)$ řešením soustavy

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x})\,, \tag{15}$$

na intervalu J, kde $F_j(t, \vec{x}) = x_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $F_n(t, \vec{x}) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(A) Řešení soustav lineárních rovnic pomocí upravování

Soustavu rovnic upravujeme takovým způsobem, abychom získali jednu rovnici vyššího řádu s jednou neznámou funkcí. Tento způsob je vhodný pro soustavy s nemnoha (např. se dvěma) rovnicemi, nebo tehdy, obsahuje-li matice soustavy rovnic hodně nulových prvků (je tzv. řídká). Uvedeným způsobem je možno řešit i nehomogenní soustavy.

Příklad 4. *Najděte všechna maximální řešení soustavy*

$$\begin{aligned} y' &= 3y - 5z - 3e^t \\ z' &= y - z - e^t \end{aligned}$$

(B) Řešení soustav lineárních rovnic pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů

Věta 16.18. *Nechť matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů $\vec{q}^{\,1}, \ldots \vec{q}^{\,n}$, které po řadě přísluší vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potom funkce*

$$e^{\lambda_1 t}\vec{q}^{\,1}, \ldots, e^{\lambda_n t}\vec{q}^{\,n} \tag{16}$$

tvoří fundamentální systém lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty)

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}.$$

Věta 16.19. *Nechť $\vec{v}^{\,1}, \ldots \vec{v}^{\,k}$, je řetězec vektorů, přidružený vlastnímu číslu λ matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$. Potom funkce*

$$e^{\lambda t}\vec{v}^{\,1}, e^{\lambda t}(t\vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,2}), \ldots, e^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\vec{v}^{\,1} + \cdots + t\vec{v}^{\,k-1} + \vec{v}^{\,k}\right) \tag{17}$$

jsou lineárně nezávislá řešení lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty)

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}.$$

Poznámka. Tvrzení předchozích dvou vět umožní sestavit fundamentalní systém dané lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty), která je reprezentována maticí $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ tak, že převedeme matici $\mathbf{A}$ na Jordanův kanonický tvar, a nalezneme příslušné vlastní vektory resp. jejich řetězce. Prvky fundamentalního systému pak dostaneme jako sjednocení všech funkcí tvaru (16) resp. (17), které odpovídají všem blokům v Jordanově kanonickém tvaru matice $\mathbf{A}$.

Poznámka. Z tvaru řešení, které je uvedeno ve Větě 16.16, a sice, že maximální řešení $\vec{x}$ rovnice (12) s počáteční podmínkou $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$ má tvar

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}^{\,0} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

plyne, že

$$\vec{x}_P(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{18}$$

je **partikulární řešení** (13), přičemž Φ je fundamentální matice soustavy (12).

Příklad 5. *Najděte oběma metodami (pomocí úprav i pomocí vlastních čísel a vektorů) řešení soustavy*

$$x' = x + 3y + e^t\,, \tag{19}$$

$$y' = 2x + 2y - e^t\,. \tag{20}$$

Sestavte v obou případech fundamentální matici soustavy; porovnejte jejich tvar.

Řešení.

a) Metoda postupných úprav: Pokusíme se převést systém na jednu rovnici druhého řádu pro funkci x. Derivováním rovnice (19) dostaneme $x'' = x' + 3y' + e^t$. Dosazení za y' z (20) by nebylo dobré, protože bychom se tím nezbavili funkce y. Je proto správným krokem nejprve pomocí (19) vyloučit z (20) funkci y: odečtením dvojnásobku (19) od trojnásobku (20) dostaneme $3y' - 2x' = 4x - 5e^t$. Odtud dosadíme za y' do rovnice $x'' = x' + 3y' + e^t$ a dostaneme po úpravě

$$x'' - 3x' - 4x = -4e^t\,. \tag{21}$$

Příslušnou homogenní soustavu vyřešíme metodou charakteristického polynomu, což dá pro x fundamentální systém $\{e^{-t}, e^{4t}\}$.

Partikulární řešení pro x hledáme ve tvaru ce^t, což dá $x_p = \frac{2}{3}e^t$. Z rovnice (19) pak lze vyjádřit y pomocí x a jeho derivace, což umožní y dopočítat. Celkově vyjde

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} + \frac{2}{3}e^t\,, \tag{22}$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - \frac{1}{3}e^t\,. \tag{23}$$

Fundamentální matice $\Phi(t)$ a vektor partikulárních řešení $(x_p, y_p)^T$ mají tedy tvar

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}, \tag{24}$$

neboť vektorový zápis (22)–(23) je

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}.$$

b) Metoda vlastních čísel a vektorů: Matice soustavy (19)–(20) je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, charakteristický polynom je tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ (porovnejte s charakterisktickým polynomem v metodě a) — proč musí být stejné?). Pro vlastní číslo $\lambda = -1$ je $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, tedy vlastním vektorem je například $\vec{v}^1 = (-3,2)^T$. Pro vlastní číslo $\lambda = 4$ je $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, tedy vlastním vektorem je například $\vec{v}^2 = (1,1)^T$. To dává fundamentální matici

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-t} & e^{4t} \\ 2e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix} .$$

Porovnejte tento tvar s tvarem fundamentální matice, který jsme obdrželi při aplikaci předchozí metody výpočtu. Obě matice se liší pouze konstantou, kterou je vynásoben první sloupec. To však koresponduje s našimi znalostmi: sloupce konstant ve fundamentální matici jsou (v případě různých vlastních čísel) tvořeny vlastními vektory matice $\mathbf{A}$, a ty jsou skutečně určeny až na multiplikativní konstantu.

Vektor partikulárních řešení můžeme spočíst například pomocí (18). Postupně dostáváme (počítejte podrobně)

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -e^{t} & e^{t} \\ 2e^{-4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix} ,$$

tedy pro $\vec{b}(t) = (e^t, -e^t)^T$ je $\Phi^{-1}(t)\vec{b}(t) = \frac{1}{5}(-2e^{2t}, -e^{-3t})$.

Zvolíme $t_0 = 0$ a dostaneme

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds = \Big(\frac{1}{5}(1-e^{2t}), \frac{1}{15}(e^{-3t}-1)\Big).$$

Konečně,

$$\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t - 3e^{-t} - \frac{1}{15}e^{4t} \\ -\frac{1}{3}e^t + 2e^{-t} - \frac{1}{15}e^{4t} \end{pmatrix} .$$

Vektor na pravé straně je vektorem (nějakých) partikulárních řešení. Části, obsahující e^{-t} a e^{4t} jsou však prvky fundamentálního systému (odůvodněte), tedy je v případě hledání partikulárního řešení není nutno uvažovat. Proto je jednodušším vektorem partikulárních řešení vektor (srovnejte s (24))

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix} .$$

17 Posloupnosti a řady funkcí

17.1 Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice. Nechť M je množina, $f, f_n : M \to \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

- **konverguje bodově** k f na M, jestliže $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

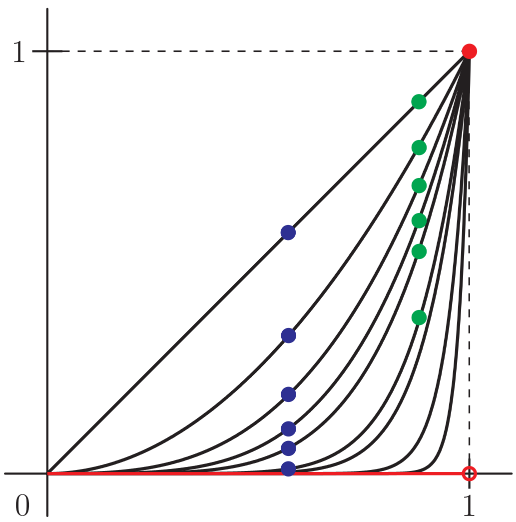
Značíme $f_n \to f$ na M.

Definice. Nechť M je množina, $f, f_n : M \to \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

- **konverguje stejnoměrně** k f na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$ na M.



Obr.: Konvergence posloupnosti funkcí x^n pro $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Definice. Nechť $f, f_n : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $m, k, n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k f na M, jestliže pro každý kompakt $K \subset M$ konverguje $\{f_n|_K\}_{n=1}^{\infty}$ k $f|_K$ stejnoměrně na K. Značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na M.

Věta 17.1. *Nechť M je neprázdná množina, $f, f_n : M \to \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Označme*

$$\sigma_n := \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\|\,.$$

Pak platí

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$$

Věta 17.2 (Moore–Osgood). *Nechť* $M \subset \mathbb{R}^k$, $x_0 \in M$ *a nechť funkce* f, f_n *z* M *do* $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *splňují*

(i) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $M \cap \mathcal{P}^r(x_0)$ *pro jisté* $r > 0$,

(ii) $\lim_{x \to x_0, x \in M} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x)$ *a jsou si rovny. Tedy*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0, x\in M} f_n(x) = \lim_{x\to x_0, x\in M} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.}$$

Věta 17.3. *Nechť* $f, f_n : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $k, m, n \in \mathbb{N}$, *přičemž* $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ *na* P. *Jsou-li* f_n *spojitá zobrazení, pak* f *je také spojité.*

Věta 17.4. *Nechť* (a, b) *je omezený interval,* $f_n \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Nechť*

(i) f_n *mají vlastní derivaci na intervalu* (a, b), $n \in \mathbb{N}$,

(ii) *existuje* $x_0 \in (a, b)$ *takové, že* $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ *konverguje,*

(iii) $\{f'_n\}$ *konverguje stejnoměrně na* (a, b).

Potom existuje funkce f *taková, že* $f_n \rightrightarrows f$ *na* (a, b), f *má vlastní derivaci na* (a, b) *a platí* $f'_n \rightrightarrows f'$ *na* (a, b).

Tedy speciálně pro všechna $x \in (a, b)$ *platí*

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)\,.}$$

Věta 17.5. *Nechť* $f_n \rightrightarrows f$ *na neprázdném omezeném intervalu* (a, b) *a* $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (N) \int_a^b f_n = (N) \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.}$$

Věta 17.6 (Dini). *Nechť* $K \subset \mathbb{R}^m$ *je kompaktní množina. Nechť* $\{f_n\} : K \to \mathbb{R}$ *je monotónní posloupnost spojitých funkcí, která konverguje bodově ke spojité funkci* $f \colon K \to \mathbb{R}$. *Pak* $f_n \rightrightarrows f$ *na* K.

Věta 17.7 (Weierstrassova o aproximaci). *Nechť* f *je spojitá funkce na uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje polynom* $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takový, že*

$$\forall x \in \langle a, b\rangle : \ |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

17.2 Stejnoměrná konvergence řad funkcí

Definice. Nechť M je množina, $f, f_n : M \to \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^\infty f_n$ je **bodově konvergentní** na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^m f_k\}_{m=1}^\infty$ je bodově konvergentní na M. Pojmy **stejnoměrné konvergence** a **lokálně stejnoměrné konvergence** řady $\sum_{n=1}^\infty f_n$ se definují analogicky.

Věta 17.8 (Weierstrassovo kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *je řada funkcí definovaných na neprázdné množině* $M \subset \mathbb{R}$ *s hodnotami v* $\mathbb{R}$ *a nechť pro* $S_n = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in M\}$ *platí* $\sum_{n=1}^\infty S_n < \infty$. *Potom* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *konverguje stejnoměrně na* M.

Věta 17.9 (Abelovo kritérium). *Nechť $M \subset \mathbb{R}^k$ je množina, $a_n : M \to \mathbb{R}$ a $b_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dále nechť platí*

(i) *$\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní pro každé $x \in M$,*

(ii) *$\{b_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí, tj.*

$$\exists K \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\colon\ |b_n(x)| \leq K,$$

(iii) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje stejnoměrně na M.*

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Věta 17.10 (Dirichletovo kritérium). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je množina, $a_n : M \to \mathbb{R}$ a $b_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dále nechť platí*

(i) *$\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní pro každé $x \in M$,*

(ii) *$\{b_n\}$ konverguje stejnoměrně k nulové funkci na M,*

(iii) *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má stejně omezené částečné součty na M, tj.*

$$\exists K \in \mathbb{R}\, \forall m \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\colon\ \Big|\sum_{j=1}^{m} a_j(x)\Big| \leq K.$$

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Věta 17.11 (záměna sumy a derivace). *Nechť (a,b) je omezený neprázdný interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ splňující:*

(i) *f_n má vlastní derivaci na (a,b), $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) *existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje,*

(iii) *řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na (a,b).*

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$\boxed{\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).}$$

Věta 17.12 (záměna sumy a integrálu). *Nechť (a,b) je omezený neprázdný interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí splňující:*

(i) *$f_n \in \mathcal{N}(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) *řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci f na (a,b).*

Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n.}$$

Věta 17.13. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada ($x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) s poloměrem konvergence $R \in \langle 0, \infty\rangle$. Potom řada konverguje lokálně stejnoměrně na množině $(x_0 - R, x_0 + R)$.*

18 Fourierovy řady

18.1 Úvod, základní pojmy

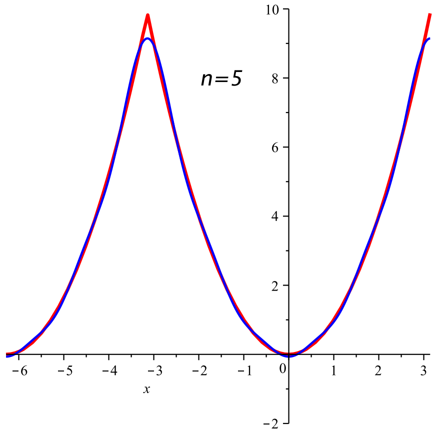
- **Otázka J. Fouriera**: Lze každou periodickou funkci napsat jako součet nějakých "elementárních" periodických funkcí?
  - Konkrétněji: lze každou 2π-periodickou funkci napsat jako součet "sinů a kosinů"?
  - Škálování: $a_k \cos(kx)$, $b_k \sin(kx)$ $\Longrightarrow$ řada typu

$$c + \sum_{k \in I_1 \subseteq \mathbb{N}} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad c, a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

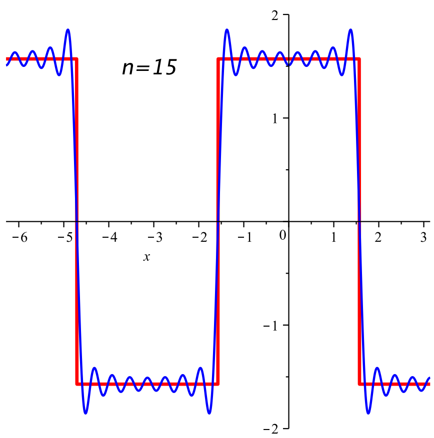
  - Využití komplexní exponenciály: $\cos(kx) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, $\sin(kx) = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$ $\Longrightarrow$ řada typu

$$\sum_{k \in I_2 \subseteq \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

  - p-periodicita místo 2π-periodicity: faktor $\frac{2\pi}{p}$.



Obr.: Aproximace spojité, po částech hladké funkce, pomocí trigonometrického polynomu řádu n.



Obr.: Aproximace nespojité, po částech hladké funkce, pomocí trigonometrického polynomu řádu n.

Definice. • **Reálným trigonometrickým (p-periodickým) polynomem** rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right),$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, ($k = 0, \ldots, n$), $p > 0$.

• **Komplexním trigonometrickým (p-periodickým) polynomem** rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbb{C}$, ($k = -n, \ldots, n$), $p > 0$.

Definice. • **Reálnou trigonometrickou (p-periodickou) řadou** rozumíme řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right),$$

kde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $p > 0$.

• **Komplexní trigonometrickou (p-periodickou) řadou** rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx},$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $p > 0$.

Cvičení. Ukažte, že pokud pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx},$$

kde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $p > 0$, pak

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k}\,, & c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{N}, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k})\,, & c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{N}, \\ a_0 &= 2c_0\,, & c_0 &= \frac{a_0}{2}\,. \end{aligned}$$

Lemma 18.1. *Pro všechna $k, m \in \mathbb{N}$ a $p > 0$ platí:*

$$\begin{aligned} \int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)dx = \int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)dx &= 0\,, \\ \int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}mx\right)dx &= 0\,, \\ \int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}mx\right)dx &= \frac{p}{2}\delta_{km}\,, \\ \int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}mx\right)dx &= \frac{p}{2}\delta_{km}\,, \\ k \in \mathbb{Z} \implies \int_0^p e^{\frac{2\pi}{p}ikx}\,dx &= p\delta_{k0}\,. \end{aligned}$$

Věta 18.2. *Nechť $p > 0$ a nechť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big) + b_k \sin\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big),$$

*přičemž konvergence řady vpravo je **stejnoměrná** na $\mathbb{R}$. Potom*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx\,, \\ a_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big)\,dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \\ b_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big)\,dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Věta 18.3. *Nechť $p > 0$ a nechť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx},$$

*přičemž konvergence řady vpravo je **stejnoměrná** na $\mathbb{R}$. Potom*

$$c_k = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-\frac{2\pi}{p}ikx}\,dx\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

18.2 Bodová konvergence Fourierových řad

Označení.

(i) Buďte $-\infty \le a < b \le \infty$ a buď dále $q \ge 1$. Množinu všech funkcí (s hodnotami v $\mathbb{C}$), definovaných alespoň skoro všude na (a, b), pro které je

$$\|f\|_q := \left(\int_a^b |f(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} < \infty,$$

označíme symbolem $L^q(a, b)$.

(ii) Buď $p > 0$. Množinu všech p-periodických funkcí, definovaných na $\mathbb{R}$, s hodnotami v $\mathbb{C}$, které jsou navíc prvky prostoru $L^1(0, p)$, budeme značit $\mathcal{P}_p$.

Lemma 18.4. *Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom*

$$\int_0^p f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+p} f(x)\,dx.$$

Definice (reálná Fourierova řada)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$. Definujeme čísla a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$, pomocí vztahů z Věty 18.2. Tato čísla pak nazýváme **("reálnými") Fourierovými koeficienty** funkce f a řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)$ nazýváme **"reálnou" (sinově-kosinovou) Fourierovou řadou funkce** f. Jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme součet

$$s_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big) + b_k \sin\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definice (komplexní Fourierova řada)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$. Definujeme čísla c_k, $k \in \mathbb{Z}$, pomocí vztahů z Věty 18.3. Tato čísla pak nazýváme **(komplexními) Fourierovými koeficienty** funkce f a řadu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx}$ nazýváme **komplexní Fourierovou řadou funkce** f. Jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme součet

$$s_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Definice. Buď $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$, $x \in \mathbb{R}$, a $s_{f,n}(x)$ buď n-tý částečný součet (reálné resp. komplexní) Fourierovy řady funkce f. Pokud existuje vlastní

$$\lim_{n\to\infty} s_{f,n}(x) =: F_f(x),$$

nazvu tuto hodnotu **součtem (reálné resp. komplexní) Fourierovy řady funkce** f v bodě $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 18.5. *Buď $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$.*

- *Je-li f **sudá** funkce, je $b_k = 0$ pro všechna $k = 1, 2, \dots$, a*

$$a_k = \frac{4}{p}\int_0^{p/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)dx\,, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

- *Je-li f **lichá** funkce, je $a_k = 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \dots$, a*

$$b_k = \frac{4}{p}\int_0^{p/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Problém:

$$f \in \mathcal{P}_p \quad \rightsquigarrow \quad F_f \quad \rightsquigarrow \quad F_f(x) \stackrel{?}{=} f(x).$$

Příklad:

- $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ na $\langle 0, 2\pi)$ a dále 2π-periodicky ($f \in \mathcal{P}_{2\pi}$)
- $F_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(kx)}{k}$ konverguje bodově $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $F_f(0) = 0$.

Studované otázky:

- Vlastnosti Fourierových koeficientů v závislosti na vlastnostech f.
- Rovnost f a F_f v závislosti na vlastnostech f.

Věta 18.6 (Riemann-Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$. Potom Fourierovy koeficienty a_k, b_k, resp. c_k existují a jsou konečné $\forall k \in \mathbb{N}$ resp. $\mathbb{Z}$. Navíc platí*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\pm\infty} c_k = 0.$$

Věta 18.7. *Nechť $f \in \mathcal{P}_p \cap \mathcal{C}^{s+1}(\mathbb{R})$ pro $p > 0$, $s \in \{0, 1, 2 \dots\}$. Potom řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^j(|a_k| + |b_k|) \quad a \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j |c_k|$$

konvergují pro všechna $j = 0, 1, \dots, s$.

Věta 18.8 (o lokalizaci)**.** *Nechť* $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, $p > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{P}_p$ *a* $f(t) = g(t)$ *pro každé* $t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty}(s_{f,n}(x) - s_{g,n}(x)) = 0$.

Věta 18.9. *Nechť* $f, g \in \mathcal{P}_p$, $p > 0$, *přičemž všechny odpovídající si Fourierovy koeficienty funkcí* f *a* g *jsou stejné. Potom* $f = g$ *s.v. na* $\mathbb{R}$.

Věta 18.10 (Carleson)**.** *Nechť* $p > 0$, $f \in \mathcal{P}_p$ *a nechť navíc platí* $f \in L^2(0, p)$. *Potom* $F_f = f$ *s.v. na* $\mathbb{R}$.

Úmluva: až do konce kapitoly bude $p > 0$ mít význam délky periody.

Definice. Řekneme, že funkce $f \in \mathcal{P}_p$ je **po částech hladká**, pokud existují body $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = p$ tak, že f je spojitá na každém intervalu (x_i, x_{i+1}), v krajních bodech těchto intervalů má vlastní limity zprava i zleva (označme je $f(x_i+)$ a $f(x_{i+1}-)$) a má uvnitř těchto intervalů omezenou derivaci, pro všechna $i = 0, \dots n - 1$.

Věta 18.11. *Nechť* $f \in \mathcal{P}_p$ *je po částech hladká ve smyslu předchozí definice. Potom*

- $$F_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Speciálně $F_f(x) = f(x)$ *v bodech spojitosti* f.

- *Je-li navíc* f *spojitá na nějakém otevřeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *pak* $s_{f,n} \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ *na intervalu* I.

Věta 18.12 (Diniho kritérium)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_p$, $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ *a nechť existuje* $\delta > 0$ *takové, že integrál*

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t}\, dt$$

konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} s_{f,n}(x) = s$.

Věta 18.13 (Parsevalova rovnost)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_p$ *a nechť navíc platí* $f \in L^2(0, p)$. *Buďte* a_k, b_k *resp.* c_k *reálné resp. komplexní Fourierovy koeficienty funkce* f. *Potom platí*

$$\frac{2}{p}\int_0^p |f(x)|^2\, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)\,,$$

resp.

$$\frac{1}{p}\int_0^p |f(x)|^2\, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2\,.$$

Cvičení.

1. Modifikujte funkci x^2 tak, aby Fourierova řada výsledné funkce obsahovala pouze členy tvaru $\cos(kx)$. Dosazením vhodných bodů sečtěte řady $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ a $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Pomocí Parsevalovy rovnosti sečtěte řadu $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4}$.
2. Rozmyslete si, jakou funkci by bylo potřeba rozvinout do Fourierovy řady, abyste sečetli číselnou řadu $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^6}$. Na jaké problémy narazíte, pokusíte-li se touto metodou sečíst číselnou řadu $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3}$?
3. Modifikujte funkci $\cos x$ tak, aby Fourierova řada výsledné funkce obsahovala pouze členy tvaru $\sin(kx)$ (tj. tzv. "rozviňte kosinus do sinové řady").

Výsledky a komentáře

1. Uvažte x^2 na $\langle -\pi, \pi)$ a dále dodefinovanou 2π-periodicky. Výsledná funkce f je sudá, po částech hladká a spojitá na $\mathbb{R}$. Tedy $F_f(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $F_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$. Dosazení bodů $x = \pi$ resp. $x = 0$ dá $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ resp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Konečně, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
2. Uvažte např. x^3 na $\langle -\pi, \pi)$ a dále dodefinovanou 2π-periodicky. Z Parsevalovy rovnosti dostanete $\frac{\pi^6}{14} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2\pi^2-6)^2}{k^6}$. Umocněním v čitateli a s využitím výsledků předchozího bodu je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$.
3. Uvážíme $\cos x$ na $(0, \pi)$, rozšířenou liše na $(-\pi, 0)$ a dále dodefinovanou 2π-periodicky. Výsledek: $\frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2kx)}{4k^2-1}$.

18.3 Derivování a integrování Fourierových řad

Věta 18.14 (o derivování). *Buď $f \in \mathcal{P}_p$ taková, že řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s(|a_k| + |b_k|) \quad \textit{resp.} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^s |c_k| \tag{1}$$

konvergují. Potom

$$s_{f,n}^{(j)} \rightrightarrows f^{(j)} \ \textit{ na } \mathbb{R}, \qquad j = 0, 1, \ldots, s,$$

a tedy $f \in \mathcal{P}_p \cap \mathcal{C}^s(\mathbb{R})$.

Poznámka. Podle věty 18.7 je podmínka (1) splněna například pro $f \in \mathcal{P}_p \cap \mathcal{C}^{s+1}(\mathbb{R})$.

Věta 18.15 (o integrování). *Buď $f \in \mathcal{P}_p$ a buďte a_k, b_k její Fourierovy koeficienty. Potom*

$$\int_0^x f(t)\,dt = A_0 + \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big) - \frac{b_k}{k} \cos\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big),$$

kde (integrační konstanta)

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Pozn. Tato věta platí bez ohledu na to, jestli Fourierova řada pro f konverguje či ne.

18.4 Aplikace: rovnice vedení tepla

Uvažujme **rovnici vedení tepla**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Hledáme funkci $u = u(x,t) : \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$, která uvnitř svého defničního oboru řeší (2) a navíc splňuje **počáteční podmínku** $u(x, 0) = f(x)$, kde f je daná 2π-periodická a lichá funkce. Současně u splňuje **okrajové podmínky** $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ pro všechna $t > 0$.

Hledejme nejprve řešení (2) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.

Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ. Nenulová funkce A musí splňovat $A(0) = A(\pi) = 0$, a proto (spočtěte přesně) $\lambda = -n^2$, kde $n \in \mathbb{N}$. Funkce A je potom (až na násobek konstantou) tvaru $\sin nx$. Funkce B (spočtěte) je pak nutně násobkem $e^{-n^2 t}$.

Tyto úvahy nás vedou k hledání řešení ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin nx. \tag{3}$$

Pro $t = 0$ má ale platit

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sin nx,$$

Koeficienty a_n ve (3) jsou tedy Fourierovými koeficienty zadané funkce f.

19 Hilbertovy prostory

19.1 Úvod, základní pojmy

Poznámka (připomenutí).
- Nechť $(X, (\cdot,\cdot))$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbb{K}$ reálných nebo komplexních čísel (říkáme též, že X je **unitární prostor** nad $\mathbb{K}$). Potom $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ je norma na X, nazývaná někdy též "norma indukovaná skalárním součinem".
- Nechť $(X, (\cdot,\cdot))$ je unitární prostor nad $\mathbb{K}$. Na $X \times X$ uvažujme normu

$$\big\| \, [x,y] \, \big\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

  Potom je zobrazení $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ spojité.

Definice. Nechť $(X, (\cdot,\cdot))$ je unitární prostor nad $\mathbb{K}$, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.
- Řekneme, že posloupnost $x_n \in X$ je **cauchyovská v** X, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq n_0 \ \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon \, .$$

- Řekneme, že prostor X je **úplný** vzhledem k normě $\|\cdot\|$, pokud každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní v X.
- Pokud je X úplný vzhledem k normě $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, pak se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

Příklad 1. *Prostory $\mathbb{R}^n$ (opatřené eukleidovským skalárním součinem) jsou Hilbertovými prostory **konečné dimenze**.*

Příklad 2. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ definujme tzv. **Lebesgueovy (L^p) prostory** předpisem $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}, \ \int_\Omega |f|^p < \infty\}$. Na prostoru $L^2(\Omega)$ definujme skalární součin*

$$(f,g)_2 = \int_\Omega f \, \overline{g} \, .$$

*Prostor $L^2(\Omega)$ s tímto skalárním součinem je Hilbertovým prostorem **nekonečné dimenze**.*

Příklad 3. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Mějme na Ω definovanou tzv. **váhovou funkci (váhu, hustotu)** ρ takovou, že $\rho \in \mathcal{C}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $\rho > 0$ na Ω. Pro $p \in (1,\infty)$ definujme tzv. **Lebesgueovy (váhové) prostory s vahou** ϱ předpisem $L^p_\varrho(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}, \ \int_\Omega \varrho |f|^p < \infty\}$. Na prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$ definujme skalární součin*

$$(f,g)_{2,\varrho} = \int_\Omega \varrho f \, \overline{g} \, .$$

*Prostor $L^2_\varrho(\Omega)$ s tímto skalárním součinem je Hilbertovým prostorem **nekonečné dimenze**.*

Poznámka.
- Mezi všemi L^p (resp. L^p_ϱ) prostory je prostor L^2 (resp. L^2_ϱ) jediný, na kterém lze zavést skalární součin.
- Pokud má $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **konečnou míru**, platí

$$1 \leq p < r < \infty \quad \Longrightarrow \ L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega) \, .$$

Cvičení.
- Ukažte: je-li $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ omezená na omezeném intervalu (a,b), pak $f \in L^p(a,b)$ $\forall \, p \in \langle 1, \infty)$.
- Nalezněte funkci $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ takovou, že $f \in L^3(0,1)$ a přitom $f \notin L^4(0,1)$. (*Návod: uvažujte funkce $1/x^\alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.*)

19.2 Fourierovy řady v Hilbertově prostoru

Definice. Nechť X je Hilbertův prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma' \colon \ \big(x_\gamma, x_{\gamma'}\big) = 0.$$

Jestliže navíc $\|x_\gamma\| = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ **ortonormální**.

(ii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **úplný**, jestliže jeho lineární obal je **hustý v** X, tedy jestliže platí $\overline{\mathrm{Lin}(\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})} = X$.

(iii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **maximální**, jestliže neexistuje prvek $u \in X \setminus \{0\}$ kolmý na všechna x_γ, tedy pokud platí $(u, x_\gamma) = 0 \ \forall \gamma \in \Gamma \implies u = 0$.

Poznámka. • Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.

- Ortogonální systém vektorů tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů.
- Z každého lineárně nezávislého systému lze učinit systém ortogonální pomocí tzv. Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu. (*Viz Příklad 4 za touto poznámkou.*)
- Z každého ortogonálního systému lze učinit systém ortonormální (prvky vydělíme jejich normami).
- Systém $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ je ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$.
- Systém $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$.

Příklad 4 (Gram-Schmidtův OG proces)**.** *Buď $\{v_1, v_2, \dots\}$ lineárně nezávislá množina nenulových prvků v Hilbertově prostoru X. Položme $e_1 := v_1$ a dále, pro $n \geq 2$,*

$$e_n := v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(v_n, e_j)}{\|e_j\|^2} e_j \,. \tag{1}$$

Ukažte, že $\{e_1, e_2, \dots\}$ je ortogonální množina nenulových prvků, přičemž

$$\mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}\,, \quad k = 1, 2, \dots$$

Věta 19.1. *Nechť $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků Hilbertově prostoru X nad $\mathbb{K}$. Nechť $x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$, kde $c_n \in \mathbb{K}$. Potom*

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Definice. Číslo c_n, definované pomocí (2), nazýváme n**-tým Fourierovým koeficientem** prvku x vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Definice. Buď $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ortogonální posloupnost nenulových prvků v Hilbertově prostoru X nad $\mathbb{K}$ a mějme $x \in X$. Uvažujme Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, tj.

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Pak řadu

$$\sum_{n=1}^\infty c_n e_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \tag{3}$$

nazvu **(abstraktní) Fourierovou řadou prvku x v prostoru X podle ortogonálního systému** $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Otázky:

- Jak zajistit, abych měl "všechny prvky OG systému" (tj. aby tvořil bázi)? (Úplnost? Maximalita?)
- Mám $x \in X$, rozvinu jej do (Fourierovy) řady. Konverguje vůbec tato řada?
- Pokud konverguje, co má společného její součet s původním prvkem x?

Věta 19.2 (Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost)**.** *Nechť X je Hilbertův prostor nekonečné dimenze, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků v X, $x \in X$, a $c_n = \frac{(x,e_n)}{\|e_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom*

- *Vždy platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselova nerovnost);*
- *Fourierova řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ vždy konverguje k nějakému prvku $y \in X$;*
- *Je $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 = \|x\|^2$ (Parsevalova rovnost).*

Poznámka. S ohledem na (2) lze Parsevalovu rovnost psát také ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\,(x,e_n)\,|^2}{\|e_n\|^2} = \|x\|^2 \,.$$

Definice. Nechť X je Hilbertův prostor nad $\mathbb{K}$. Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z X se nazývá **(Schauderova) báze** prostoru X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z $\mathbb{K}$, pro kterou platí $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n u_n$.

Věta 19.3. *Nechť X je Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Schauderova báze,*

(ii) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný ortogonální systém,*

(iii) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je maximální ortogonální systém.*

(iv) *Pro každé $x \in X$ platí Parsevalova rovnost (vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).*

(v) *Každý prvek $x \in X$ je roven součtu své Fourierovy řady (vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).*

Definice. Nechť X Hilbertův prostor. Řeknu, že X je **separabilní**, pokud existuje spočetná množina prvků z X, která je hustá v X (tedy jejíž uzávěr je celé X).

Věta 19.4.

(i) *Nechť X je separabilní Hilbertův prostor. Potom v X existuje ortonormální spočetná (Schauderova) báze.*

(ii) *Nechť X_1, X_2 jsou nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertovy prostory. Potom jsou X_1 a X_2 **izometricky izomorfní** (tj. existuje mezi nimi bijekce, která zachovává skalární součin).*

(iii) *Každý separabilní Hilbertův prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ je izometricky izomorfní $\mathbb{R}^n$.*

Věta 19.5.

- *Systém* $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je úplný ortogonální systém v* $L^2(0, 2\pi)$ *a tvoří v něm ortogonální bázi.*
- *Systém* $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *je úplný ortogonální systém v* $L^2(0, 2\pi)$ *a tvoří v něm ortogonální bázi.*

Věta 19.6 (o nejlepší aproximaci)**.** *Buď* X *Hilbertův prostor a* $\{e_n\} \subset X$ *ortogonální systém v* X*. Buď* $x \in X$*. Potom pro libovolná* $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{K}$ *platí*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}\, e_n \right\| \le \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \beta_n\, e_n \right\|, \tag{4}$$

přičemž nerovnost v (4) *je ostrá, pokud je alespoň jedno* β_j *různé od* $\frac{(x,e_j)}{\|e_j\|^2}$.

19.3 Ortogonální systémy polynomů, operátory

Důležité otázky:

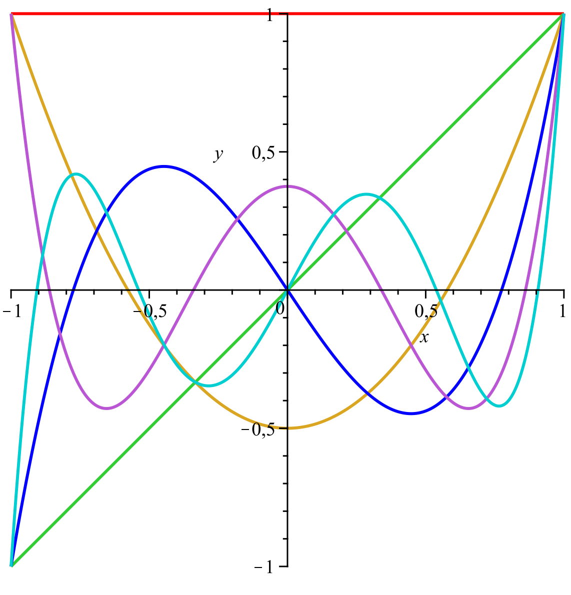
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v $L^2_\varrho(a, b)$? Lze to například zařídit tak, aby tato báze byla složena z polynomů?

Metoda I: ortogonalizace dané husté LN množiny pomocí Gram-Schmidtova procesu

Uvažujme na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ polynomy

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \dots \tag{5}$$

a uvažujme (pokud (a, b) je neomezený) váhovou funkci ϱ takovou, aby $x^n \in L^2_\varrho(a, b)$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ortogonalizací pomocí Gram-Schmidtova procesu dostaneme úplný systém ortogonálních polynomů v $L^2_\varrho(a, b)$.



Obr.: Legendreovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)**.** *Ortogonalizací systému* (5) *v prostoru* $L^2(-1, 1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$*. Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prvních několik Legendreových polynomů je:

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$,...

Podle předchozí teorie tedy platí, že pro každou funkci $f \in L^2(-1,1)$ platí

$$f(x) \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

kde

$$c_n = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

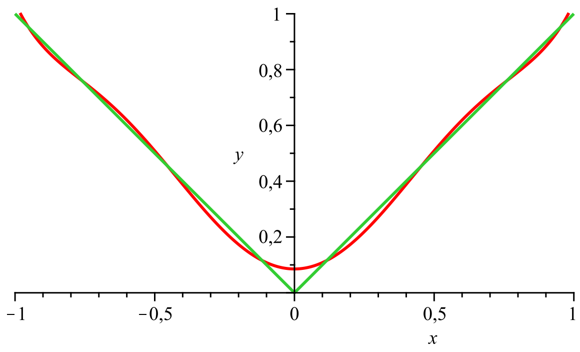
Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

což dá (spočtěte) $c_{2k+1} = 0\ \forall k = 0,1,\ldots$, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{8}$, $c_4 = -\frac{3}{16}$, $c_6 = \frac{13}{128}$ ... například aproximace do šestého řádu dá $|x| \approx \frac{175}{2048} + \frac{4725}{2048}x^2 - \frac{5775}{2048}x^4 + \frac{3003}{2048}x^6$ na $(-1,1)$.



Obr.: Aproximace $|x|$ pomocí Legendreova polynomu do šestého řádu.

Poznámka. Legendreovy polynomy splňují tzv. **rekurentní vztah**

$$\begin{aligned}(n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \\ & P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\end{aligned}$$

a jsou řešením tzv. **generující diferenciální rovnice**

$$\big((1-x^2)y'\big)' = -\lambda y, \qquad \lambda = n(n+1), n = 0,1,2,\ldots.$$

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)**.** *Ortogonalizací systému* (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$*. Lze ukázat, že platí*

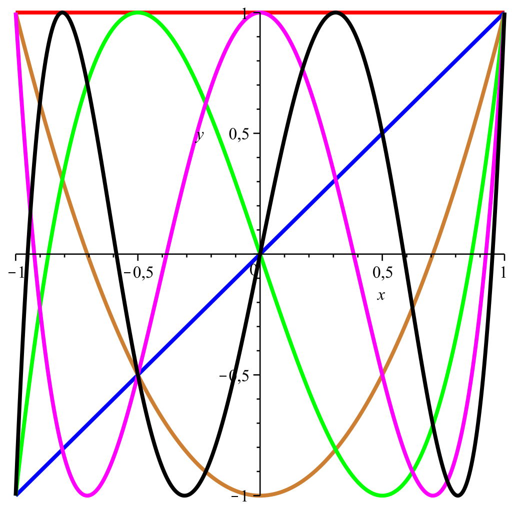
$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|^2_\varrho = \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Prvních několik Čebyševových polynomů je:

$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 - 1$, $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \ldots$



Obr.: Čebyševovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Poznámka. Čebyševovy polynomy splňují **rekurentní vztah**

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ & T_0(x) = 1,\; T_1(x) = x\,, \end{aligned}$$

a jsou řešením **generující diferenciální rovnice**

$$\left(\sqrt{1-x^2}\,y'\right)' = -\frac{\lambda y}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \lambda = n^2\,,\; n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Poznámka. • Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \ldots$ v příslušných prostorech $L^2_\varrho(a,b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\varrho(a,b)$. Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v $L^2_\varrho(a,b)$.

- Takto dostaneme například **Hermiteovy polynomy** H_n (v prostoru $L^2_{e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$), **Laguerrovy polynomy** L^s_n **řádu** $s > -1$ (v prostoru $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$) a mnoho dalších. Pro každý takový systém existuje rekurentní vztah a generující diferenciální rovnice. Podrobněji viz tabulku ortogonálních systémů polynomů na stránce této přednášky.

Metoda II: generující diferenciální rovnice, resp. generující operátor

Definice. Buď $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval, p, q, ϱ dané funkce definované na $\langle a,b\rangle$. Nechť dále $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$. **Okrajovou úlohou v samoadjungovaném tvaru** pro neznámou funkci $y = y(t)$ nazveme diferenciální rovnici druhého řádu v tzv. **samoadjungovaném tvaru**,

$$-(p(t)y')' + q(t)y = \lambda\varrho(t)y\,, \qquad t \in (a,b)\,,\ \ \lambda \in \mathbb{C}\,, \tag{6}$$

doplněnou o tzv. **okrajové podmínky**

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0\,, \qquad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0\,. \tag{7}$$

Věta 19.7. *Uvažujme okrajovou úlohu tvaru* (6)–(7)*, kde p je spojitá a kladná na $\langle a,b\rangle$, p' je spojitá na (a,b), q je reálná a spojitá na $\langle a,b\rangle$, ϱ je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na (a,b). Navíc nechť alespoň jedno z čísel α,β a alespoň jedno z čísel γ,δ je nenulové. Potom existují $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lim \lambda_n = \infty$ taková, že:*

- *Pro všechna $\lambda \neq \lambda_n$ má úloha* (6)–(7) ***pouze*** *řešení $y \equiv 0$.*
- *Pro každé $\lambda = \lambda_n$ existuje právě jedno (až na násobek konstantou)* ***nenulové*** *řešení y_n úlohy* (6)–(7).
- *Systém $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ je* ***úplný ortogonální systém funkcí*** *v $L^2_\varrho(a,b)$.*

Definice. Čísla λ_n resp. funkce y_n z předchozí věty nazýváme **vlastní čísla** resp. **vlastní funkce** úlohy (6)–(7).

Poznámka. Zobrazení mezi dvěma prostory nazýváme **operátorem**. Definujeme-li operátor $T : \mathcal{C}^1(\langle a,b\rangle) \to L^2_\varrho(a,b)$ předpisem $T(y) = -(py')' + qy$, lze rovnici (6) psát ve tvaru tzv. **operátorové rovnice**:

$$Ty = \lambda\varrho y\,. \tag{8}$$

Analogicky nazýváme nenulová řešení y_n úlohy (8), (7) **vlastními funkcemi (s vahou ϱ)** operátoru T, přináležejícími **vlastnímu číslu** λ_n.

Poznámka.
- Pro váhu $\varrho = 1$ má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru T tvar $Ty = \lambda y$. (Srovnejte to s definicí vlastního vektoru a vlastního čísla matice.)
- Věta 19.7 je formulována pouze pro omezené intervaly. Existují také její varianty pro neomezené intervaly, ty však jsou složitější. Existují také varianty s obecnější sadou okrajových podmínek. Obecně však jde vždy o věty, odpovídající na otázku "Za jakých podmínek tvoří vlastní funkce nějakého operátoru T úplný ortogonální systém v daném Hilbertově prostoru?" Studiem (m.j.) i těchto otázek (které jdou nad rámec tohoto kurzu) se zabývá matematická disciplína jménem **funkcionální analýza**.

Cvičení.
- Aplikujte Větu 19.7 pro $a = 0$, $b = \pi$, $p = \varrho = 1$, $q = 0$, a pro $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \delta = 1$ resp. pro $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$.
- Uvažujte rovnici (6) s $a = -\pi$, $b = \pi$, $p = \varrho = 1$, $q = 0$, a se zobecněnou sadou okrajových podmínek $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$.

Poznámka.
- Existuje varianta Věty 19.7, která připouští, aby funkce p nabývala v některém krajním bodě intervalu $\langle a,b\rangle$ nulové hodnoty. V takovém případě se ovšem předpokládá omezenost řešení y v tomto bodě. Za těchto předpokladů dostávame pro $a = -1$, $b = 1$, $p = 1 - t^2$, $\varrho = 1$, $q = 0$ generující rovnici pro Legendreovy polynomy.
- Naznačené úvahy lze zobecnit i pro parciální diferenciální rovnice. Můžeme tak mluvit o vlastních funkcích Laplaceova operátoru jako o nenulových řešeních rovnice $-\Delta y = \lambda y$ pro $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, s nulovými okrajovými podmínkami na $\partial\Omega$, atd.

20 Funkce komplexní proměnné

20.1 Holomorfní funkce

<u>**Opakování, značení**</u>

$\mathbb{C}$ - komplexní rovina
$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy \ldots$ algebraický tvar z,
$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$
$z \in \mathbb{C} \implies z = |z|(\underbrace{\cos\varphi + i\sin\varphi}_{e^{i\varphi}}) \ldots$ goniometrický tvar z
$z \in \mathbb{C} \implies z = |z|e^{i\varphi} \ldots$ exponenciání tvar z

$\varphi \ldots$ **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!)

$z = x + iy \implies \overline{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Moivreova věta: $\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}_{(e^{i\varphi})^n} = \underbrace{\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}_{e^{in\varphi}}$

$$\implies |z^n| = |(|z|e^{i\varphi})^n| = |z|^n \underbrace{|e^{in\varphi}|}_{=1} = |z|^n$$

$$|e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Rozšířená komplexní rovina ≡ sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \to \infty \iff |z_n| \to +\infty$, $\quad z_n \to \infty \iff 1/z_n \to 0$
- $z_n = x_n + iy_n \to a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \to a \;\&\; y_n \to b$

Pozor na <u>zásadní</u> rozdíl:
Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + i \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$
- $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + i\int f_2(x)\,\mathrm{d}x$

Komplexní funkce **komplexní proměnné**, tj. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

- $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$, $z = x + iy$, $f(z) \approx f_1(x, y) + if_2(x, y)$
- Jaký je vztah (například) mezi $f'(z)$ a $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$? A co integrál? $dz = d(x + iy)$?

(**Konec opakování**.)

Definice. Nechť pro $w \in \mathbb{C}$ je funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definována alespoň na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(w) := \{z \in \mathbb{C}, |z - w| < \delta\}$. Pokud existuje (vlastní) limita

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = A \in \mathbb{C}\,, \tag{1}$$

říkáme, že f má v bodě w (komplexní) derivaci A. Značíme $\frac{df}{dz}(w)$ nebo $f'(w)$.

Pozn. Komplexní derivace je komplexní číslo. Nekonečnou derivaci nedefinujeme, v $\mathbb{C}$ uvažujeme pouze konečné derivace.

Věta 20.1 (Cauchy-Riemannovy (C-R) podmínky). • *Nechť existuje $f'(z)$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$. Potom v $z = [x, y]$ platí tzv. C-R podmínky:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)\,. \tag{2}$$

- *Buďte $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ funkce třídy $\mathcal{C}^1$ v bodě $[x, y]$, splňující v tomto bodě C-R podmínky* (2)*. Potom funkce $f(z) := f_1(x, y) + if_2(x, y)$ má v bodě $z = x + iy$ komplexní derivaci a platí*

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)\,. \tag{3}$$

Definice. • Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní (**říkáme též **analytická) v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.

- Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) v** Ω, pokud je f holomorfní v každém bodě Ω. V takovém případě píšeme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Buď $M \subset \mathbb{C}$ jakákoli množina. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) na** M ($f \in \mathcal{H}(M)$), pokud existuje otevřená množina $\Omega \supset M$ taková, že $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Je-li $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, říkáme, že f je **celá** funkce.

Lemma 20.2 (souvislost holomorfních a harmonických funkcí). • *Nechť $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$. Potom*

$$\Delta f_1 = 0\,, \quad \Delta f_2 = 0 \quad v\,\mathcal{U}(x, y),$$

*tj. f_1 a f_2 jsou **harmonické** v $\mathcal{U}(x, y)$.*

- *Nechť $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$, $\Delta f = 0$ v $\mathcal{U}(x, y)$. Potom existují funkce $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$ takové, že $\Delta g = 0 = \Delta h$ v $\mathcal{U}(x, y)$, přičemž funkce $f + ig, h + if \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$.*

20.2 Křivkový integrál a primitivní funkce

Definice. Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \ldots, n$ je funkce φ třídy $\mathcal{C}^1$ na $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$.

Poznámka. Podobně jako v definici křivky v $\mathbb{R}^n$ definujeme pojmy **geometrický obraz křivky** $\langle\varphi\rangle$, **počáteční bod křivky** $\varphi(a)$, **koncový bod křivky** $\varphi(b)$, **uzavřená křivka** ($\varphi(a) = \varphi(b)$), **opačná křivka** $\ominus\varphi$, **součet křivek** $\varphi \oplus \psi$.

Příklad 1. ***Kladně orientovanou kružnicí o středu** w **a poloměru** r nazýváme křivku $\varphi(t) = w + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. **Orientovanou úsečkou** $\langle w, z\rangle$, $w, z \in \mathbb{C}$, nazýváme křivku $\varphi(t) = w + t(z - w)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.*

Definice. Řetězcem v $\mathbb{C}$ nazýváme výraz tvaru $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$, kde φ_j, $j = 1, \ldots, n$, jsou cesty v $\mathbb{C}$. Jsou-li všechny cesty φ_j, $j = 1, \ldots, n$ uzavřené, nazýváme řetězec $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$ **cyklem** v $\mathbb{C}$.

Definice (křivkový integrál v $\mathbb{C}$). Je-li φ cesta v $\mathbb{C}$ a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **(křivkový) integrál funkce** f **podél** φ předpisem

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt, \tag{4}$$

pokud integrál vpravo existuje (např. jako Lebesgueův). Pro řetězec resp. cykl definujeme křivkový integrál jako součet integrálů přes jednotlivé cesty, které řetězec resp. cykl tvoří, má-li tento součet smysl.

Poznámka. • Je-li φ cesta v $\mathbb{C}$, je $L(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$ číselně rovna její délce.

- Hodnota křivkového integrálu v $\mathbb{C}$ je komplexní číslo. Je-li φ cesta v $\mathbb{C}$, a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, platí
$$\Big| \int_\varphi f \Big| \le L(\varphi) \cdot \max_{z \in \langle\varphi\rangle} |f(z)|\,.$$

- Jsou-li níže uvedené integrály definovány, platí:
$$\int_{\ominus\varphi} f = -\int_\varphi f\,, \qquad \int_{\varphi\oplus\psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f\,.$$

Definice. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \to \mathbb{C}$ nazvu **primitivní funkcí k** f **na** G, pokud platí $F'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in G$. (Zde F' značí komplexní derivaci F).

Lemma 20.3. *Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : G \to \mathbb{C}$ spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G, pak pro každou cestu $\varphi : \langle a, b\rangle \to G$ platí*
$$\int_\varphi f = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big)\,.$$
Speciálně, je-li φ uzavřená cesta (resp. cykl), je $\int_\varphi f = 0$.

Věta 20.4 (primitivní funkce a křivkový integrál)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast v $\mathbb{C}$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *Existuje primitivní funkce k f* ***v celé*** *oblasti Ω.*
- *Křivkový integrál z f v Ω* ***nezávisí na cestě****, tj. kdykoli jsou $\varphi : \langle a, b\rangle \to \Omega$ a $\psi : \langle c, d\rangle \to \Omega$ dvě cesty takové, že $\varphi(a) = \psi(c)$, $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\int_\varphi f = \int_\psi f$.*
- *Pro každou uzavřenou cestu φ v Ω je $\int_\varphi f = 0$.*

20.3 Cauchyova věta a Cauchyův vzorec

Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{C}$ je **hvězdovitá**, pokud existuje takový bod $z \in M$, že pro každé $w \in M$ je úsečka $\langle z, w\rangle$ obsažena celá v M.

Věta 20.5 (Cauchyova věta (pro hvězdovitou množinu))**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina a φ uzavřená cesta v Ω. Je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pak $\int_\varphi f = 0$, a tedy f má primitivní funkci v Ω.*

Věta 20.6 (Cauchyův vzorec)**.** *Buď $K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ kruh v komplexní rovině a označme $\gamma_{z_0,r}(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ jeho kladně orientovaný obvod. Nechť $f \in \mathcal{H}(\overline{K_r(z_0)})$ (tj. je holomorfní na otevřeném okolí tohoto kruhu). Potom f má v $K_r(z_0)$ derivace všech řádů, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in K_r(z_0)$ platí*
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw\,. \tag{5}$$

20.4 Taylorovy a Laurentovy řady

Věta 20.7 (Weierstrass)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Nechť $\sum_{n=1}^\infty f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na Ω. Potom*

- *$f \in \mathcal{H}(\Omega)$;*

- *řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je možno uvnitř Ω* ***libovolněkrát*** *derivovat člen po členu, přičemž*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)} \text{ na } \Omega, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Poznámka. • Při derivování řady reálných funkcí bylo potřeba navíc předpokládat stejnoměrnou konvergenci derivované řady. U řad, jejichž členy mají **komplexní** derivaci toto předpokládat nemusíme.

- Jinými slovy lze tedy říci, že řady, které konvergují na reálném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ lokálně stejnoměrně a přesto "zlobí" v reálném oboru (= nelze je automaticky derivovat) jsou zúžením (na $\mathbb{R}$) komplexních řad, které buď nemají komplexní derivaci na žádném "komplexním okolí" intervalu J (na žádné oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, obsahující J) nebo nekonvergují stejnoměrně na žádné takové oblasti Ω.

Věta 20.8 (mocninná řada v $\mathbb{C}$). *Buď'te $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \ldots$. Potom existuje $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ takové, že komplexní mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$*

- *konverguje lokálně stejnoměrně* ***k holomorfní funkci*** *f uvnitř kruhu $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$;*

- *diverguje vně kruhu $K_R(z_0)$.*

Přitom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ lze uvnitř $K_R(z_0)$ libovolněkrát derivovat člen po členu a platí

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1)(z - z_0)^{n-k} \quad \text{v } K_R(z_0).$$

Věta 20.9 (Taylorova řada v $\mathbb{C}$). *Buď $f \in \mathcal{H}(K_R(z_0))$ pro $R > 0$. Potom existují $a_n \in \mathbb{C}$, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K_R(z_0), \tag{6}$$

přičemž řada v (6) *konverguje lokálně stejnoměrně v $K_R(z_0)$. Navíc je*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

a tedy řada (6) *je Taylorovou řadou funkce f na kruhu $K_R(z_0)$.*

Definice. • Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = -1, -2, \ldots$, definujme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n := \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro které existuje limita vpravo.

- Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, definujme **zobecněnou mocninnou řadu**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro které má součet vpravo smysl.

Definice. Buď'te $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, a buď $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ zobecněná mocninná řada. Řadu $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ nazýváme **hlavní část**, a řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ nazýváme **regulární část** zobecněné mocninné řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Věta 20.10 (zobecněná mocninná řada v $\mathbb{C}$). *Buďte $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Potom existují $r, R \in \langle 0, +\infty\rangle$, taková, že zobecněná mocninná řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$*

- *konverguje lokálně stejnoměrně **k holomorfní funkci** f uvnitř mezikruží $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z-z_0| < R\}$;*
- *diverguje vně mezikruží $K_{r,R}(z_0)$.*

Přitom řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ lze uvnitř mezikruží $K_{r,R}(z_0)$ libovolněkrát derivovat člen po členu a platí

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k} \quad \text{v } K_{r,R}(z_0).$$

Věta 20.11 (Laurentova řada v $\mathbb{C}$). *Buď $f \in \mathcal{H}(K_{r,R}(z_0))$ pro $R > r > 0$. Potom existují $a_n \in \mathbb{C}$, že*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in K_{r,R}(z_0), \tag{8}$$

přičemž řada vpravo konverguje lokálně stejnoměrně v mezikruží $K_{r,R}(z_0)$. Navíc je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0,\varrho}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

kde $\gamma_{z_0,\varrho}(t) = z_0 + \varrho e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je obvod kruhu o poloměru $\varrho \in (r, R)$. Řadu (8) *nazýváme **Laurentovou** řadou funkce f na mezikruží $K_{r,R}(z_0)$.*

Poznámka. Porovnáním Cauchyova vzorce (5) pro z_0 a $\gamma_{z_0,\varrho}$, tj.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0,\varrho}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw\,, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

a vzorce pro Laurentovy koeficienty (9). tj.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0,\varrho}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw\,, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dostaneme

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\,, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Poznámka. Speciálním případem mezikruží je prstencové okolí bodu: $\mathcal{P}^r(a) = K_{0,r}(a) = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z-a| < r\}$. Je-li tedy $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$, lze ji podle předchozí věty rozvinout do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$. Této situaci tzv. izolované singularity se budeme věnovat v následujícím paragrafu podrobněji.

20.5 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta

Definice. Bod $a \in \mathbb{C}$ nazvu **izolovanou singularitou** funkce f, pokud $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$.

Definice. Izolovanou singularitu $a \in \mathbb{C}$ funkce f nazvu

- **odstranitelnou singularitou**, pokud existuje $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;
- **pólem**, pokud existuje $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;
- **podstatnou singularitou**, pokud neexistuje $\lim_{z\to a} f(z)$.

Věta 20.12 (o odstranitelné singularitě). *Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f. Potom následující je ekvivalentní:*

1. *$a \in \mathbb{C}$ je **odstranitelnou singularitou** funkce f;*
2. *f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$;*
3. *f lze spojitě dodefinovat v bodě $a \in \mathbb{C}$ (limitou), a poté je f holomorní v a;*
4. *Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ má prázdnou hlavní část, je to tedy Taylorova řada, tj. pro $z \in \mathcal{U}(a)$ lze psát*
$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots .$$

Věta 20.13 (o pólech). *Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f. Potom následující je ekvivalentní:*

1. *$a \in \mathbb{C}$ je **pólem** funkce f;*
2. *existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^{n-1} = \infty$;*
3. *je-li Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ s koeficienty a_k, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{-n} \neq 0$ a přitom $a_{-k} = 0$ pro všechna $k > n$. Hlavní čast této Laurentovy řady má tedy jen konečný počet nenulových členů, tj. pro $z \in \mathcal{P}(a)$ lze psát*
$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots .$$

Poznámka.

- Hodnota čísla $n \in \mathbb{N}$ z druhého o třetího bodu předchozí věty je tatáž — tj. je-li $n \in \mathbb{N}$, pro který je (jako v bodu 2) $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^{n-1} = \infty$, pak a_{-n} je i (jako v bodu 3) "poslední nenulový koeficient v hlavní části Laurentovy řady f v $\mathcal{P}(a)$", a naopak.
- V této situaci říkáme, že f má v a **pól násobnosti** n.
- Předchozí věta tedy mimo jiné říká, že **každý pól má nějakou násobnost**.

Věta 20.14 (o podstatné singularitě). *Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f. Potom následující je ekvivalentní:*

1. *$a \in \mathbb{C}$ je **podstatnou singularitou** funkce f;*
2. *pro všechna $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existuje posloupnost $z_n \to a$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$;*
3. *je-li Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ s koeficienty a_k, pak její hlavní část obsahuje nekonečně mnoho nenulových členů, tj. pro $z \in \mathcal{P}(a)$ lze psát*
$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots .$$

Poznámka. Implikace "(1) $\Longrightarrow$ (2)" z předchozí věty se nazývá **věta Casorati-Weierstrassova**.

Definice (reziduum). Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovaná singularita funkce f, a buď

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{10}$$

rozvoj f do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$. Koeficient a_{-1} této řady nazveme **reziduem funkce f v bodě** a, píšeme

$$\operatorname{Res}_a f(z)\,. \tag{11}$$

Věta 20.15 (pravidla pro výpočet reziduí). *1. Je-li a odstranitelnou singularitou f, je* $\boxed{\operatorname{Res}_a f(z) = 0.}$

2. Má-li f v a pól násobnosti 1, a g je holomorfní v a, je $\boxed{\operatorname{Res}_a (f(z)g(z)) = g(a) \operatorname{Res}_a f(z).}$

3. Jsou-li f i g holomorfní v a, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, pak

$$\boxed{\operatorname{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}\,.}$$

4. Má-li f v a pól násobnosti $k \in \mathbb{N}$, je

$$\boxed{\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \Big(f(z)(z-a)^k \Big)^{(k-1)}\,.}$$

Věta 20.16 (reziduová věta). *Buď φ jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{C}$, která je orientována kladně vůči svému vnitřku $\operatorname{Int}\varphi$. Buď $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast obsahující $\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle$. Nechť přitom $\{z_1, \ldots, z_n\} \cap \langle\varphi\rangle = \emptyset$. Potom*

$$\boxed{\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \operatorname{Int}\varphi} \operatorname{Res}_{z_k} f(z)\,.} \tag{12}$$

Pozn. Křivka je orientovaná kladně vůči $\operatorname{Int}\varphi$, pokud při "pohybu po křivce" leží oblast $\operatorname{Int}\varphi$ "po levé ruce". V případě opačně orientované křivky je před sumou na pravé straně (12) znaménko minus.

Reziduová věta je jedním z velmi silných prostředků pro výpočet mnoha typů reálných určitých integrálů. Viz bonusový materiál "Použití reziduové věty k výpočtům".

Pro výpočty pomocí reziduové věty se hodí následující dvě lemmata.

Lemma 20.17 (lemma o velkých obloucích, Jordanovo lemma). *Nechť $0 \le \alpha < \beta \le \pi$, a nechť $f \in \mathcal{C}(A_R)$, kde $A_R := \{z \in \mathbb{C};\, \arg z \in \langle\alpha, \beta\rangle,\, |z| \ge R\}$ pro nějaké $R > 0$. Nechť dále platí $\lim_{A_R \ni z \to \infty} f(z) = 0$. Je-li $\varphi_r(t) := re^{it}$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, oblouk kružnice o poloměru $r > 0$, pak*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{iz}\, dz = 0\,. \tag{13}$$

Lemma 20.18 (lemma o malých obloucích). *Nechť $a \in \mathbb{C}$ a nechť f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu a, přičemž v bodě a má f nejvýše pól násobnosti 1. Nechť dále $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, a nechť $\varphi_r(t) := a + re^{it}$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, je oblouk kružnice o poloměru $r > 0$. Pak*

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\varphi_r} f(z)\, dz = i(\beta-\alpha) \operatorname{Res}_a f\,. \tag{14}$$

20.6 Věta o jednoznačnosti

Věta 20.19 (o jednoznačnosti). *Buď $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Buď $A := \{z \in \Omega;\ f(z) = g(z)\}$. Pokud A má hromadný bod v Ω, je $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \Omega$.*

Důsledek 20.20. *Buď $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$. Buď $f = g$ na neprázdném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Potom $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$.*

Příklad 2 (goniometrické funkce v $\mathbb{C}$). • *Pro všechna* $y \in \mathbb{R}$ *je* $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$. *Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)* $\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh y$ *pro všechna* $y \in \mathbb{R}$. *Podobně* $\sin(iy) = i \sinh y$ *pro všechna* $y \in \mathbb{R}$.

- *Pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$ *je* $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. *Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)* $\sin(x + w) = \sin x \cos w + \cos x \sin w$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$. *Pro* $w = iy$, $y \in \mathbb{R}$, *dostaneme* $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$. *S využitím předchozího bodu dostaneme* $$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$ *a podobně* $$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Příklad 3 (komplexní logaritmus). *Pro* $z = |z|e^{i \arg z}$ *máme* $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$. *Protože argument (*$\arg z$*) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:*
$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi)\,, \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina). • $\sqrt{-1} = \exp(\frac{1}{2} \ln(-1)) = \exp(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i) = \exp(i\frac{\pi}{2} + k\pi i) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

- $i^i = \exp(i \ln(i)) = \exp(i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i) = \exp(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$.
- $\sqrt[i]{i} = \exp(\frac{1}{i} \ln(i)) = \exp(\frac{1}{i}(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i) = \exp(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$.

<table>
<tr><th colspan="4">Ortogonální systémy polynomů</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Polynomy</th><th>Prostor</th><th>Definice polynomu</th><th>Norma</th></tr>
<tr><th colspan="3">Generující diferenciální rovnice</th></tr>
<tr><th colspan="3">Rekurentní vztah</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Legendreovy</td><td>$L^2(-1,1)$</td><td>$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$</td><td>$\|P_n\|_\rho^2 = \frac{2}{2n+1}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$((1-x^2)y')' = -\lambda y\,, \qquad \lambda = n(n+1)\,, n = 0, 1, 2, \dots$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$
$P_0 = 1, P_1 = x$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Laguerrovy[1]</td><td>$L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$</td><td>$L_n^s(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-s}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+s}e^{-x})$</td><td>$\|L_n^s\|_\rho^2 = \frac{\Gamma(s+n+1)}{n!}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(x^{s+1}e^{-x}y')' = -\lambda x^s e^{-x} y\,, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \dots$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(n+1)L_{n+1}^s + (x - s - 2n - 1)L_n^s + (s+n)L_{n-1}^s = 0$
$L_0^s = 1, L_1^s = 1 + s - x$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Čebyševovy</td><td>$L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$</td><td>$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$</td><td>$\|T_n\|_\rho^2 = \frac{\pi}{2}\ (n > 0)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\left(\sqrt{1-x^2}\,y'\right)' = -\frac{\lambda y}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \lambda = n^2\,,\ n = 0, 1, 2, \dots$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$
$T_0 = 1, T_1 = x$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Hermiteovy[2]</td><td>$L^2_{e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$</td><td>$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$</td><td>$\|H_n\|_\rho^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(e^{-x^2}y')' = -\lambda e^{-x^2} y\,, \qquad \lambda = 2n\,,\ n = 0, 1, 2, \dots$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$
$H_0 = 1, H_1 = 2x$</td></tr>
</table>

Poznámky:

1. Laguerrovy polynomy se definují pro $s > -1$. Pokud není specifikováno žádné s, myslí se $s = 0$.

2. Pro Hermiteovy polynomy platí ještě následující zajímavý vztah:

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)\,.$$

3. Proderivováním a úpravou rovnice pro Hermiteovy polynomy lze dostat její jednodušší tvar

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0\,.$$

Podobně lze naložit s rovnicí pro Čebyšeovovy polynomy a obdržet

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0\,.$$

Použití reziduové věty k výpočtům

1. Integrály z racionální funkce sinu a cosinu přes interval délky 2π

$P(z,w)$, $Q(z,w)$ jsou polynomy ve dvou proměnných takové, že $Q(\sin x, \cos x)$ nemá žádné kořeny pro $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Potom

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{z_k \in K_1(0)} \operatorname{Res}_{z_k} \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{P\Big(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\Big)}{Q\Big(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\Big)} \right), \tag{1}$$

kde $K_1(0)$ je otevřený jednotkový kruh. (Česky: dosaďte do P a Q za $\sin x$ resp. $\cos x$ výrazy $\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$ resp. $\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, vydělte ještě jedním z, upravte a sečtěte rezidua ve všech singularitách, které leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině. Tento součet se vynásobí 2π a je zintegrováno.)

Pomocí (1) spočtěte následující příklady (goniometrické funkce s násobnými úhly lze například vyjádřit pomocí jednoduchých úhlů, například $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{3} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{12}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^2}{3+2\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{5}(4\sqrt{5}-5) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{13+12\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{32} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = 2\pi(2-\sqrt{3})$$

(Díky 2π-periodicitě sinů a kosinů je jedno přes jaký interval délky 2π se integruje, tedy $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_0^{2\pi}$ atd.)

2. Integrály z funkcí od $-\infty$ do $+\infty$

Buď $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$, $A = \{z_1, \dots, z_n\}$. Nechť f nemá žádné singularity na reálné ose, a nechť dále platí

$$\lim_{R\to+\infty} R \cdot \max_{\gamma_R^+} |f(z)| = 0\,, \tag{2}$$

kde $\gamma_R^+ := Re^{it}$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ (horní půlkružnice o poloměru R). Položme $A^+ := \{z_k \in A,\ \mathrm{Im}(z_k) > 0\}$. Potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k \in A^+} \operatorname{Res}_{z_k} f(z)\,. \tag{3}$$

Speciálně pro f racionální, tj. $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde $P(z)$ a $Q(z)$ jsou polynomy, jsou předpoklady věty splněny, pokud Q nemá žádné kořeny na reálné ose, a stupeň $(Q) >$ stupeň $(P) + 1$.

Vyzbrojeni touto znalostí spočtěte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-4x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{9} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+3}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+3}{(x^4+x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{13\pi\sqrt{3}}{18}$$

3. Integrály z $f(x)\,e^{iax}$ od $-\infty$ do $+\infty$

Buď $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$, $A = \{z_1, \dots, z_n\}$. Nechť f nemá žádné singularity na reálné ose, a nechť dále platí

$$\lim_{R\to+\infty} \max_{\gamma_R^+} |f(z)| = 0\,, \tag{4}$$

kde $\gamma_R^+ := Re^{it}$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ (horní půlkružnice o poloměru R). Položme $A^+ := \{z_k \in A,\ \mathrm{Im}(z_k) > 0\}$. Potom pro $a > 0$ platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k \in A^+} \mathrm{Res}_{z_k}\Big(f(z)e^{iaz}\Big)\,. \tag{5}$$

Speciálně pro f racionální, tj. $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde $P(z)$ a $Q(z)$ jsou polynomy, jsou předpoklady věty splněny, pokud Q nemá žádné kořeny na reálné ose, a stupeň $(Q) >$ stupeň (P).

Všimněte si rozdílu mezi (4) a (2): ono R chybějící ve (4) způsobí, že v případě racionální f stačí, když je stupeň jmenovatele pouze větší než stupeň čitatele.

Pomocí (5) nyní spočtěte (pro integrály se sinem a kosinem použijte $\sin ax = \mathrm{Im}(e^{iax})$, $\cos ax = \mathrm{Re}(e^{iax})$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{1+3\,x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\pi\, e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4+4}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}\,e^{-\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\,\xi\,x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\, e^{-2\,\pi\,\xi}\,, \quad \xi > 0$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\,\sin ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}e^{-ab}\,,\ a>0,\ b>0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+2\,x+5\,x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\,e^{-\frac{2}{5}}\sin\frac{1}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2\,x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\,(3\,\cos 1 + \sin 1)}{3\,e^3}$$

Poznámka: později uvidíme, že integrál vlevo je zpětná Fourierova transformace funkce $\frac{1}{x^2+1}$, a že tedy reziduová věta se u F.T. velmi hodí.

Návod: sudost funkce implikuje $\displaystyle\int_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}$

4. Další integrály

Reziduová věta umožňuje spočíst mnoho dalších integrálů, nejen integrály výše uvedených (jednoduchých) typů. Jako příklad ukážeme výpočet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xs}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi s}\,, \qquad s \in (0,1). \tag{6}$$

Postupujte podle tohoto návodu:

- Integrujte funkci $f(z) = \frac{e^{zs}}{1+e^z}$ přes obvod obdélníku, jehož základnou je interval $\langle -R, R\rangle$, a jehož výška je $2\pi i$ (horní dva vrcholy mají tedy souřadnice $\pm R + 2\pi i$).
- Uvnitř obdélníka je jediná izolovaná singularita funkce f: v bodě πi, ve kterém platí
$$\mathrm{Res}_{\pi i} f(z) = -e^{\pi i s}.$$
- Ukažte (odhadem integrálů v absolutní hodnotě), že integrály přes obě boční stěny obdélníka jdou k nule, když $R \to +\infty$ (zde bude hrát roli také hodnota parametru s).
- Po limitním přechodu $R \to +\infty$ tedy zůstanou jen oba integrály přes nekonečně natažené horní a dolní strany obdélníka, a výsledek křivkové integrace, známý z reziduové věty. Konkrétně vyjde:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xs}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xs}\,e^{2\pi i s}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,(-e^{\pi i s}).$$

Z posledně uvedeného vztahu plyne (6). Zkuste provést celý výpočet pečlivě, se všemi podrobnostmi!

M.Rokyta