

19 Hilbertovy prostory

19.1 Úvod, základní pojmy

Poznámka (připomenutí). • Necht' $(X, (\cdot, \cdot))$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem \mathbb{K} reálných nebo komplexních čísel (říkáme též, že X je **unitární prostor** nad \mathbb{K}). Potom $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ je norma na X , nazývaná někdy též "norma indukovaná skalárním součinem".

- Necht' $(X, (\cdot, \cdot))$ je unitární prostor nad \mathbb{K} . Na $X \times X$ uvažujme normu

$$\|[x, y]\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Potom je zobrazení $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ spojitě.

Definice. Necht' $(X, (\cdot, \cdot))$ je unitární prostor nad \mathbb{K} , $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

- Řekneme, že posloupnost $x_n \in X$ je **cauchyovská v X** , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

- Řekneme, že prostor X je **úplný** vzhledem k normě $\|\cdot\|$, pokud každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní v X .
- Pokud je X úplný vzhledem k normě $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, pak se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

Příklad 1. Prostory \mathbb{R}^n (opatřené eukleidovským skalárním součinem) jsou Hilbertovými prostory **konečné dimenze**.

Příklad 2. Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ definujme tzv. **Lebesgueovy (L^p) prostory** předpisem $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\Omega} |f|^p < \infty\}$. Na prostoru $L^2(\Omega)$ definujme skalární součin

$$(f, g)_2 = \int_{\Omega} f \bar{g}.$$

Prostor $L^2(\Omega)$ s tímto skalárním součinem je Hilbertovým prostorem **nekonečné dimenze**.

Příklad 3. Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Mějme na Ω definovanou tzv. **váhovou funkci (váhu, hustotu)** ρ takovou, že $\rho \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $\rho > 0$ na Ω . Pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ definujme tzv. **Lebesgueovy (váhové) prostory s vahou ρ** předpisem $L_{\rho}^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\Omega} \rho |f|^p < \infty\}$. Na prostoru $L_{\rho}^2(\Omega)$ definujme skalární součin

$$(f, g)_{2, \rho} = \int_{\Omega} \rho f \bar{g}.$$

Prostor $L_{\rho}^2(\Omega)$ s tímto skalárním součinem je Hilbertovým prostorem **nekonečné dimenze**.

Poznámka. • Mezi všemi L^p (resp. L_{ρ}^p) prostory je prostor L^2 (resp. L_{ρ}^2) jediný, na kterém lze zavést skalární součin.

- Pokud má $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **konečnou míru**, platí

$$1 \leq p < r < \infty \implies L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Cvičení. • Ukažte: je-li $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ omezená na omezeném intervalu (a, b) , pak $f \in L^p(a, b) \forall p \in \langle 1, \infty \rangle$.

- Nalezněte funkci $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $f \in L^3(0, 1)$ a přitom $f \notin L^4(0, 1)$. (Návod: uvažujte funkce $1/x^{\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.)

19.2 Fourierovy řady v Hilbertově prostoru

Definice. Necht' X je Hilbertův prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ je systém prvků prostoru X .

(i) Řekneme, že systém $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma': (x_\gamma, x_{\gamma'}) = 0.$$

Jestliže navíc $\|x_\gamma\| = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ **ortonormální**.

(ii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je **úplný**, jestliže jeho lineární obal je **hustý** v X , tedy jestliže platí $\overline{\text{Lin}(\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})} = X$.

(iii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je **maximální**, jestliže neexistuje prvek $u \in X \setminus \{0\}$ kolmý na všechna x_γ , tedy pokud platí $(u, x_\gamma) = 0 \forall \gamma \in \Gamma \implies u = 0$.

Poznámka. • Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.

- Ortogonální systém vektorů tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů.
- Z každého lineárně nezávislého systému lze učinit systém ortogonální pomocí tzv. Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu. (Viz Příklad 4 za touto poznámkou.)
- Z každého ortogonálního systému lze učinit systém ortonormální (prvky vydělíme jejich normami).
- Systém $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k \in \mathbb{N}}$ je ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$.
- Systém $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$.

Příklad 4 (Gram-Schmidtův OG proces). Bud' $\{v_1, v_2, \dots\}$ lineárně nezávislá množina nenulových prvků v Hilbertově prostoru X . Položme $e_1 := v_1$ a dále, pro $n \geq 2$,

$$e_n := v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(v_n, e_j)}{\|e_j\|^2} e_j. \quad (1)$$

Ukažte, že $\{e_1, e_2, \dots\}$ je ortogonální množina nenulových prvků, přičemž

$$\text{Lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Věta 19.1. Necht' $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků Hilbertově prostoru X nad \mathbb{K} . Necht' $x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$, kde $c_n \in \mathbb{K}$. Potom

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Definice. Číslo c_n , definované pomocí (2), nazýváme **n -tým Fourierovým koeficientem** prvku x vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Definice. Bud' $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ortogonální posloupnost nenulových prvků v Hilbertově prostoru X nad \mathbb{K} a mějme $x \in X$. Uvažujme Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, tj.

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak řadu

$$\sum_{n=1}^\infty c_n e_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \quad (3)$$

nazvu (**abstraktní**) **Fourierovou řadou** prvku x v prostoru X podle ortogonálního systému $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Otázky:

- Jak zajistit, abych měl "všechny prvky OG systému" (tj. aby tvořil bázi)? (Úplnost? Maximalita?)
- Mám $x \in X$, rozvinu jej do (Fourierovy) řady. Konverguje vůbec tato řada?
- Pokud konverguje, co má společného její součet s původním prvkem x ?

Věta 19.2 (Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost). *Nechť X je Hilbertův prostor nekonečné dimenze, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků v X , $x \in X$, a $c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom*

- Vždy platí $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselova nerovnost);
- Fourierova řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ vždy konverguje k nějakému prvku $y \in X$;
- Je $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \iff \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 = \|x\|^2$ (Parsevalova rovnost).

Poznámka. S ohledem na (2) lze Parsevalovu rovnost psát také ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} = \|x\|^2.$$

Definice. Nechť X je Hilbertův prostor nad \mathbb{K} . Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z X se nazývá (**Schauderova**) **báze** prostoru X , jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z \mathbb{K} , pro kterou platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$.

Věta 19.3. *Nechť X je Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Schauderova báze,
- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný ortogonální systém,
- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je maximální ortogonální systém.
- Pro každé $x \in X$ platí Parsevalova rovnost (vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).
- Každý prvek $x \in X$ je roven součtu své Fourierovy řady (vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Definice. Nechť X Hilbertův prostor. Řeknu, že X je **separabilní**, pokud existuje spočetná množina prvků z X , která je hustá v X (tedy jejíž uzávěr je celé X).

Věta 19.4.

- Nechť X je separabilní Hilbertův prostor. Potom v X existuje ortonormální spočetná (Schauderova) báze.
- Nechť X_1, X_2 jsou nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertovy prostory. Potom jsou X_1 a X_2 **izometricky izomorfní** (tj. existuje mezi nimi bijekce, která zachovává skalární součin).
- Každý separabilní Hilbertův prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ je izometricky izomorfní \mathbb{R}^n .

Věta 19.5.

- Systém $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k \in \mathbb{N}}$ je úplný ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$ a tvoří v něm ortogonální bázi.
- Systém $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je úplný ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$ a tvoří v něm ortogonální bázi.

Věta 19.6 (o nejlepší aproximaci). *Bud' X Hilbertův prostor a $\{e_n\} \subset X$ ortogonální systém v X . Bud' $x \in X$. Potom pro libovolná $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{K}$ platí*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \right\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^N \beta_n e_n \right\|, \quad (4)$$

přičemž nerovnost v (4) je ostrá, pokud je alespoň jedno β_j různé od $\frac{(x, e_j)}{\|e_j\|^2}$.

19.3 Ortogonální systémy polynomů, operátory**Důležité otázky:**

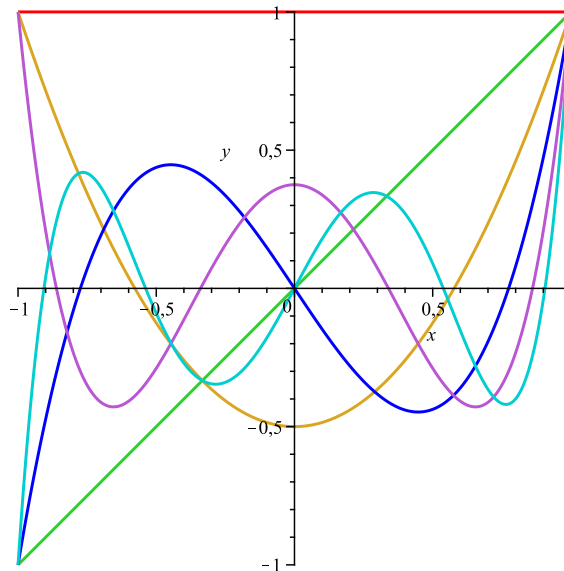
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v $L^2_\rho(a, b)$? Lze to například zařídit tak, aby tato báze byla složena z polynomů?

Metoda I: ortogonalizace dané husté LN množiny pomocí Gram-Schmidtova procesu

Uvažujme na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ polynomy

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \dots \quad (5)$$

a uvažujme (pokud (a, b) je neomezený) váhovou funkci ρ takovou, aby $x^n \in L^2_\rho(a, b)$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ortogonalizací pomocí Gram-Schmidtova procesu dostaneme úplný systém ortogonálních polynomů v $L^2_\rho(a, b)$.



Obr.: Legendreovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Příklad 5 (Legendreovy polynomy). *Ortogonalizací systému (5) v prostoru $L^2(-1, 1)$ dostaneme tzv. **Legendreovy polynomy** $P_n(x)$. Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

přičemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prvních několik Legendreových polynomů je:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, \dots$$

Podle předchozí teorie tedy platí, že pro každou funkci $f \in L^2(-1, 1)$ platí

$$f(x) \stackrel{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

kde

$$c_n = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

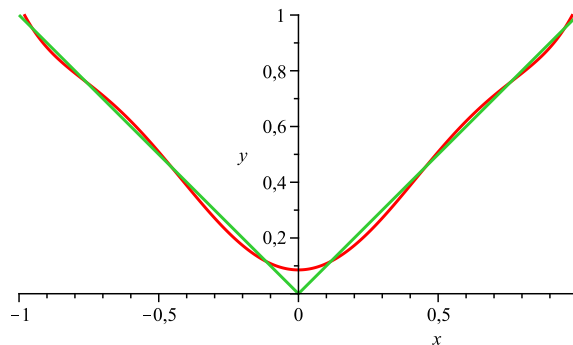
Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1, 1)$ dostaneme

$$|x| \stackrel{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 |x| P_n(x) dx,$$

což dá (spočtete) $c_{2k+1} = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots$, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{8}$, $c_4 = -\frac{3}{16}$, $c_6 = \frac{13}{128}$... například aproximace do šestého řádu dá $|x| \approx \frac{175}{2048} + \frac{4725}{2048}x^2 - \frac{5775}{2048}x^4 + \frac{3003}{2048}x^6$ na $(-1, 1)$.



Obr.: Aproximace $|x|$ pomocí Legendreova polynomu do šestého řádu.

Poznámka. Legendreovy polynomy splňují tzv. **rekurentní vztah**

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x,$$

a jsou řešením tzv. **generující diferenciální rovnice**

$$((1-x^2)y')' = -\lambda y, \quad \lambda = n(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$$

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy). Ortogonalizací systému (5) v prostoru $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1, 1)$ dostaneme tzv. **Čebyševovy polynomy** (1. druhu) $T_n(x)$. Lze ukázat, že platí

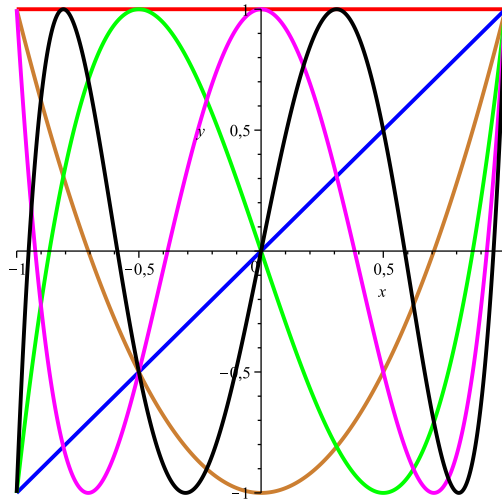
$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|_0^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prvních několik Čebyševových polynomů je:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \dots$$



Obr.: Čebyševovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Poznámka. Čebyševovy polynomy splňují **rekurentní vztah**

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x), \quad n \in \mathbb{N} \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \end{aligned}$$

a jsou řešením **generující diferenciální rovnice**

$$\left(\sqrt{1-x^2} y' \right)' = -\frac{\lambda y}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Poznámka. • Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \dots$ v příslušných prostorech $L^2_\rho(a, b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\rho(a, b)$. Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v $L^2_\rho(a, b)$.

- Takto dostaneme například **Hermiteovy polynomy** H_n (v prostoru $L^2_{e^{-x^2}}(-\infty, \infty)$), **Laguerrovy polynomy** L_n^s řádu $s > -1$ (v prostoru $L^2_{x^s e^{-x}}(0, \infty)$) a mnoho dalších. Pro každý takový systém existuje rekurentní vztah a generující diferenciální rovnice. Podrobněji viz tabulku ortogonálních systémů polynomů na stránce této přednášky.

Metoda II: generující diferenciální rovnice, resp. generující operátor

Definice. Bud' $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval, p, q, ϱ dané funkce definované na $\langle a, b \rangle$. Necht' dále $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. **Okrajovou úlohou v samoadjungovaném tvaru** pro neznámou funkci $y = y(t)$ nazveme diferenciální rovnici druhého řádu v tzv. **samoadjungovaném tvaru**,

$$-(p(t)y')' + q(t)y = \lambda \varrho(t)y, \quad t \in (a, b), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (6)$$

doplňenou o tzv. **okrajové podmínky**

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \quad (7)$$

Věta 19.7. Uvažujme okrajovou úlohu tvaru (6)–(7), kde p je spojitá a kladná na $\langle a, b \rangle$, p' je spojitá na (a, b) , q je reálná a spojitá na $\langle a, b \rangle$, ϱ je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na (a, b) . Navíc necht' alespoň jedno z čísel α, β a alespoň jedno z čísel γ, δ je nenulové. Potom existují $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lim \lambda_n = \infty$ taková, že:

- Pro všechna $\lambda \neq \lambda_n$ má úloha (6)–(7) **pouze** řešení $y \equiv 0$.
- Pro každé $\lambda = \lambda_n$ existuje právě jedno (až na násobek konstantou) **nenulové** řešení y_n úlohy (6)–(7).
- Systém $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ je **úplný ortogonální systém funkcí** v $L^2_\varrho(a, b)$.

Definice. Čísla λ_n resp. funkce y_n z předchozí věty nazýváme **vlastní čísla** resp. **vlastní funkce** úlohy (6)–(7).

Poznámka. Zobrazení mezi dvěma prostory nazýváme **operátorem**. Definujeme-li operátor $T: C^1(\langle a, b \rangle) \rightarrow L^2_\varrho(a, b)$ předpisem $T(y) = -(py')' + qy$, lze rovnici (6) psát ve tvaru tzv. **operátorové rovnice**:

$$Ty = \lambda \varrho y. \quad (8)$$

Analogicky nazýváme nenulová řešení y_n úlohy (8), (7) **vlastními funkcemi** (s vahou ϱ) operátoru T , přináležejícími **vlastnímu číslu** λ_n .

Poznámka. • Pro váhu $\varrho = 1$ má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru T tvar $Ty = \lambda y$. (Srovnejte to s definicí vlastního vektoru a vlastního čísla matice.)

- Věta 19.7 je formulována pouze pro omezené intervaly. Existují také její varianty pro neomezené intervaly, ty však jsou složitější. Existují také varianty s obecnější sadou okrajových podmínek. Obecně však jde vždy o věty, odpovídající na otázku "Za jakých podmínek tvoří vlastní funkce nějakého operátoru T úplný ortogonální systém v daném Hilbertově prostoru?" Studium (m.j.) i těchto otázek (které jdou nad rámec tohoto kurzu) se zabývá matematická disciplína jménem **funkcionální analýza**.

Cvičení. • Aplikujte Větu 19.7 pro $a = 0, b = \pi, p = \varrho = 1, q = 0$, a pro $\alpha = \gamma = 0, \beta = \delta = 1$ resp. pro $\alpha = \gamma = 1, \beta = \delta = 0$.

- Uvažujte rovnici (6) s $a = -\pi, b = \pi, p = \varrho = 1, q = 0$, a se zobecněnou sadou okrajových podmínek $y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi)$.

Poznámka. • Existuje varianta Věty 19.7, která připouští, aby funkce p nabývala v některém krajním bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ nulové hodnoty. V takovém případě se ovšem předpokládá omezenost řešení y v tomto bodě. Za těchto předpokladů dostáváme pro $a = -1, b = 1, p = 1 - t^2, \varrho = 1, q = 0$ generující rovnici pro Legendreovy polynomy.

- Naznačené úvahy lze zobecnit i pro parciální diferenciální rovnice. Můžeme tak mluvit o vlastních funkcích Laplaceova operátoru jako o nenulových řešeních rovnice $-\Delta y = \lambda y$ pro $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, s nulovými okrajovými podmínkami na $\partial\Omega$, atd.