TOPOLOGIE A TEORIE KATEGORIÍ (2017/2018) 2. PREDNÁŠKA - SPOJITÁ ZOBRAZENÍ, ODDĚLOVACÍ AXIOMY.

PAVEL RŮŽIČKA

2.1. **Spojitá zobrazení.** Nechť X, Y jsou množiny a $f: X \to Y$ zobrazení. *Vzorem* podmnožiny $Z \subseteq Y$ (vzhledem k danému zobrazení f) budeme rozumět podmnožinu

$$f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$$

množiny X.

Definice. Nechť (X, τ), (Y, υ) jsou topologické prostory. Zobrazení $f: X \to Y$ je *spojité* pokud $f^{-1}(A) \in \tau$ pro každé $A \in \upsilon$, tj., pokud je vzorem každé otevřené množiny v Y otevřená množina v X.

Nísledující tvrzení je triviální ale důležité.

Tvrzení 2.1. *Složením spojitých zobrazení dostaneme opět spojité zobrazení.*

Důkaz. Nechť jsou $f: X \to Y$ a $g: Y \to Z$ spojitá zobrazení. Pro každou otevřenou $A \subseteq Z$ platí, že $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Množina $g^{-1}(A)$ je otevřená, neboť je g spojité. Ze spojitosti f pak dostaneme otevřenost $f^{-1}(g^{-1}(A))$. □

Lemma 2.2. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f: X \to Y$ je spojité právě když je vzorem každé uzavřené množiny v Y uzavřená množina X.*

Důkaz. Pro každou $Z \subseteq Y$ je X disjunktním sjednocením vzorů $f^{-1}(Z)$ a $f^{-1}(X \setminus Z)$ a tedy

$$f^{-1}(Z) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus Z).$$

Odtud snadno odvodíme dokazované tvrzení. □

Lemma 2.3. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f: X \to Y$ je spojité právě když pro každé $x \in X$ a každé okolí U bodu $f(x)$ v Y je $f^{-1}(U)$ okolím bodu x.*

Date: 20. března 2018.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité. Zvolme bod $x \in X$ a okolí U bodu $f(x)$ libovolně. Potom je $f(x) \in \breve{U}$ a tedy $x \in f^{-1}(\breve{U})$. Protože je zobrazení f spojité, je množina $f^{-1}(\breve{U})$ otevřená. Odtud plyne, že $f^{-1}(U)$ je okolím bodu x. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že vzory okolí obrazů bodů z X jsou jejich okolími. Buď A libovolná otevřená podmnožina prostoru Y. Pro každé $x \in f^{-1}(A)$ je A okolím bodu $f(x)$ a z našeho předpokladu plyne, že $f^{-1}(A)$ je okolím x. Množina $f^{-1}(A)$ je tedy okolím každého svého bodu. To znamená, že je otevřená. □

Definice. Buď (X, τ) topologický prostor. Množina $\mathcal{S} \subseteq \tau$ je *sub-bází* prostoru X pokud pro každý bod $x \in X$ a každé jeho okolí U existuje konečná $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ taková, že $x \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq U$.

Z definice je vidět, že $\mathcal{S} \subseteq \tau$ je sub-bází prostoru (X, τ) právě když je množina

$$\{\bigcap \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ je konečná podmnožina } \mathcal{S}\}$$

bází. Proto je každá báze prostoru X také jeho sub-bází.

Lemma 2.4. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Pro zobrazení $f\colon X \to Y$ je ekvivalentní:*

(1) *Zobrazení f je spojité;*
(2) *Existuje báze $\mathcal{B}$ prostoru Y taková, že množina $f^{-1}(B)$ je otevřená pro každé $B \in \mathcal{B}$.*
(3) *Existuje sub-báze $\mathcal{S}$ prostoru Y taková, že množina $f^{-1}(S)$ je otevřená pro každé $S \in \mathcal{S}$.*

Důkaz. Implikace ($1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$) jsou zřejmé z definic. Předpokládejme, že platí (3). Buď $x \in X$ a U okolí bodu $f(x)$ v Y. Z definice sub-báze plyne, že existují $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ takové, že $f(x) \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq U$. Potom platí, že

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) \subseteq f^{-1}(U).$$

Z podmínky (3) plyne, že je množina

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i)$$

otevřená. Proto je $f^{-1}(U)$ je okolím bodu x. Vzhledem k Lemmatu 2.3 je zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité. □

Definice. Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *spojité v bodě* $x \in X$ jestliže pro každé okolí U bodu $f(x)$ je $f^{-1}(U)$ okolím x.

Z Lemmatu 2.3 plyne, že

Tvrzení 2.5. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité právě když je spojité v každém bodě prostoru X.*

Cvičení 2.1. *Ukažte, že zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojité v bodě $x \in \mathbb{R}$ (podle výše uvedené definice) právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pro každé $y \in \mathbb{R}$. Zobecněte toto tvrzení pro zobrazení metrických prostorů.*

Podívejme se ještě na souvislost spojitosti a konvergence.

Lemma 2.6. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité právě když*

$$f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)} \tag{2.1}$$

pro každou podmnožinu Z prostoru X.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že je zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité a nechť $Z \subseteq X$. Z Lemmatu 2.2 plyne, že je množina $f^{-1}(\overline{f(Z)})$ uzavřená. Tato množina zřejmě obsahuje Z a proto platí, že $\overline{Z} \subseteq f^{-1}(\overline{f(Z)})$. Odtud plyne dokazovaná inkluze $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že platí inluze (2.1) pro každou $Z \subseteq X$. Buď G libovolná uzavřená podmnožina množiny Y. Inkluze (2.1) pro množinu $Z = f^{-1}(G)$ implikuje, že

$$f(\overline{f^{-1}(G)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(G))} = \overline{G} = G,$$

odkud dostaneme, že $\overline{f^{-1}(G)} \subseteq f^{-1}(G)$. Proto je množina $f^{-1}(G)$ uzavřená. Z Lemmatu 2.2 plyne, že je zobrazení f spojité. □

Tvrzení 2.7. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité právě když pro každou síť $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \rangle$ v prostoru X platí, že*

$$f(\lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma) \subseteq \lim_{\sigma \in \Sigma} f(x_\sigma). \tag{2.2}$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že je zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité a buď $x \in \lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$. Buď dále U libovolné okolí bodu $f(x)$. Podle Lemmatu 2.3 je $f^{-1}(U)$ okolím bodu x a z definice limity sítě plyne, že existuje $\sigma_U \in \Sigma$ tak, že $\sigma \in f^{-1}(U)$ pro všechna $\sigma \geq \sigma_U$. Odtud dostaneme, že $f(x_\sigma) \in U$ pro všechna $\sigma \geq \sigma_U$. Proto platí, že $f(x) \in \lim_{\sigma \in \Sigma} f(x_\sigma)$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že pro každou síť S v X platí (2.2). Vzhledem k Lemmatu 1.6 pak $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$ pro každou $Z \subseteq X$. Z Lemmatu 2.6 plyne, že je zobrazení f spojité. □

2.2. **Axiomy oddělitelnosti.**

Definice. Řekneme, že topologický prostor X je T_0, pokud pro každou dvojici bodů prostoru X existuje otevřená podmnožina obsahující právě jeden z nich.

Definice. Řekneme, že topologický prostor X je T_1, pokud pro každou dvojici bodů $x, y \in X$ existuje otevřená podmnožina A prostoru X taková, že $\{x, y\} \cap X = \{x\}$.

Z definice je vidět, že topologický prostor X je T_1 právě když pro každou dvojici x, y jeho různých bodů existuje okolí bodu x, které neobsahuje y.

Tvrzení 2.8. *Topologický prostor X je T_1 právě když jsou všechny jeho jednoprvkové podmnožiny uzavřené.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že prostor X je T_1 a buď $y \in X$. Potom pro každé $x \in X \setminus \{y\}$ existuje okolí bodu x obsažené v množině $X \setminus \{y\}$. Odtud plyne, že je množina $X \setminus \{y\}$ otevřená. Proto je množina $\{y\}$ uzavřená. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že jsou všechny jednoprvkové podmnožiny prostoru X uzavřené. Jsou-li x, y dva různé body v X je potom $X \setminus \{y\}$ otevřená množina obsahující x a neobsahující y. $\square$

Příklad 2.1. *Uvažme dvouprvkovou množinu $X = \{x, y\}$ s topologií $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$. Topologický prostor (X, τ) je T_0, ale není T_1.*

Definice. Topologický prostor X je T_2 (nebo také *Hausdorffův*), pokud pro každou dvojici různých bodů $x, y \in X$ existují disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $x \in A$ a $y \in B$.

Příklad 2.2. *Uvažme nekonečnou množinu X s topologií*

$$\tau := \{X \setminus F \mid F \text{ je konečná podmnožina } X\} \cup \{\emptyset\}.$$

Protože jsou množiny $X \setminus \{x\}$, $x \in X$, otevřené, topologický prostor (X, τ) je T_1. Protože je množina X nekonečná, je průnik dvou neprázdných otevřených podmnožin X neprázdný. Odtud plyne, že prostor (X, τ) není T_2.

Hausdorffovy prostory lze charakterizovat pomocí konvergence.

Lemma 2.9. *Topologický prostor X je T_2 právě když má každá síť v X nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Nejprve předpokládejme, že je prostor X Hausdorffův. Pro spor navíc předpokládejme, že existuje síť $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \rangle$ a dva body $x \neq y$ v X takové, že $x, y \in \lim S$. Protože je prostor X Hausdorffův, existují disjunktní otevřené A, B takové, že $x \in A$ a $y \in B$. Protože síť

S konverguje k bodu x, existuje $\sigma_A \in \Sigma$ taková, že $x_\sigma \in A$ pro všechny $\sigma \geq \sigma_A$. Podobně protože S konverguje k y, existuje $\sigma_B \in \Sigma$ taková, že $x_\sigma \in B$ pro všechny $\sigma \geq \sigma_B$. Protože je množina Σ usměrněná, existuje $\sigma \geq \sigma_A, \sigma_B$. Z předešlého plyne, že $x_\sigma \in A \cap B = \emptyset$, což je spor.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že v prostor X není Hausdorffův. Potom v X existují dva různé body x, y takové, že $U \cap V \neq \emptyset$, kdykoli je U okolí bodu x a V okolí bodu y. Uvažme množinu

$$\Sigma := \{U \cap V \mid U \text{ je okolí bodu } x \text{ a } V \text{ je okolí bodu } y\}$$

a na ní definujme uspořádání opačnou inkluzí. Všimněme si, že Σ je uzavřena na konečné průniky. Odtud je vidět, že je usměrněná. Pro každé $W \in \Sigma$ zvolme $x_W \in W$. Tak dostaneme síť $S := \langle x_W \mid W \in \Sigma \rangle$. Buď U libovolné okolí bodu x a $W \in \Sigma$. Potom je $U \cap W \in \Sigma$, a $x_{W'} \in W' \subseteq U$ pro každé $W' \subseteq U \cap W$. Odtud plyne, že $x \in \lim S$. Podobně ukážeme, že $y \in \lim S$ a tedy síť S má alespoň dvě různé limity. □

Tvrzení 2.10. *Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f, g \colon X \to Y$ je dvojice spojitých zobrazení. Je-li prostor Y Hausdorffův, je množina $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ uzavřená.*

Důkaz. Buď $y \in X$ bod takový, že $f(y) \neq g(y)$. Protože je protor Y Hausdorffův, existují disjunktní okolí U a V bodů $f(y)$ a $g(y)$. Protože jsou obě zobrazení f a g spojitá, jsou vzory $f^{-1}(U)$, $g^{-1}(V)$ okolími bodu y. Jejich průnik $W := f^{-1}(U) \cap g/-1(V)$ je také okolím bodu y. Pro každé $w \in W$ je $f(w) \in U$ a $g(w) \in V$ a tedy $f(w) \neq g(w)$. Odtud plyne, že je množina $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ otevřená. Proto je množina $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ uzavřená. □

Definice. Topologický prostor X je *T_3* (též *regulární*), jestliže je T_1 a pro každé $x \in X$ a každou uzavřenou $G \subseteq X$ takovou, že $x \notin G$ existují disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $x \in A$ a $G \subseteq B$.

Protože v T_1 prostoru tvoří každý bod uzavřenou podmnožinu a každý T_3 prostor je z definice T_1 je každý T_3 prostor T_2.

Definice. Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Množina $\mathcal{B}(x)$ je *bází okolí* bodu x pokud sestává z okolí bodu x a pro každé okolí V bodu x existuje množina $U \in \mathcal{B}(x)$ taková, že $U \subseteq V$.

Příklad 2.3. *Uvažme množinu*

$$G := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

a reálnou přímku s obvyklou topologií rozšířenou o bázi okolí bodu 0 *sestávající z množin*

$$\{(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus G \mid 0 < \varepsilon\}.$$

V takto definované topologii, označne ji τ*, je množina* G *uzavřená. Nechť* A *je otevřená množina obsahující* 0*. Potom existuje* $\varepsilon > 0$ *takové, že* $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus G \subseteq A$*. Buď* $n \in \mathbb{N}$ *takové, že* $1/n < \varepsilon$*. Buď* B *otevřená množina obsahující* G*. Potom* B *obsahuje nějaké okolí bodu* $1/n$ *a tedy* $B \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \neq \emptyset$*. Odtud dostaneme, že* $A \cap B \neq \emptyset$*. Ukázali jsme, že bod* 0 *a uzavřenou množinu* G *nelze oddělit disjunktními otevřenými množiny a proto není zkonstruovaný topologický prostor* T_3*. Protože topologie* τ *obsahuje všechny otevřené intervaly, je Hausdorffova.*

Lemma 2.11. *Buď* (X, τ) *topologický prostor, který je* T_1*. Potom je tento prostor* T_3 *právě když pro každé* $x \in X$ *a každou otevřenou množinu* A *obsahující bod* x*, existuje okolí* U *tohoto bodu takové, že* $\overline{U} \subseteq V$*.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že X je T_3 prostor. Buď x bod v X a $A \in \tau$ taková, že $x \in A$. Položme $G = X \setminus A$. Množina G je uzavřená a neobsahuje bod x. Z předpokladu, že je prostor X regulární plyne, že existují disjunktní otevřené množiny U, B takové, že $x \in U$ a $G \subseteq B$. Z $U \cap B = \emptyset$ a z $G \subseteq B$ dostaneme, že $\overline{U} \subseteq X \setminus B \subseteq X \setminus G = A$. Proto je U hledané okolí bodu x jehož uzávěr je obsažen v B. ($\Leftarrow$) Buď x bod a G uzavřená podmnožina taková, že $x \notin G$. Všimněme si, že $X \setminus G$ je otevřená množina obsahující X. Podle předpokladu existuje okolí U bodu x takové, že $\overline{U} \subseteq X \setminus G$. Položme $A = \breve{U}$ a $B = X \setminus \overline{U}$. Z konstrukce snadno nahlédneme, že A, B jsou disjunktní otevřené množiny, $x \in A$ a $G \subseteq B$. □

Důsledek 2.12. *Topologický prostor, který je* T_1 *je* T_3 *právě když má každý jeho bod bázi z uzavřených okolí.*

Definice. Buď Y topologický prostor. Topologický prostor (X, τ) je *podprostorem* prostoru Y pokud $X \subseteq Y$ a

$$\tau := \{X \cap A \mid A \text{ je otevřená množina v } Y\}.$$

Symbolem $\mathcal{I}$ označme podprostor $\langle 0, 1\rangle$ reálně přímky.

Definice. Topologický prostor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ (nebo-li *Tichonovův*), jestliže je T_1 a pro každé $x \in X$ a každou uzavřenou množinu $G \subseteq X$ takovou, že $x \notin G$ existuje spojité zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ takové, že $f(x) = 0$ a $f(G) \subseteq \{1\}$.

Všimeme si, že pokud je topologický prostor X Tichonovův, je nutně T_3. Je-li totiž G jeho uzavřená podmnožina a x bod, který v ní neleží, existuje podle definice spojité zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ takové, že $f(x) = 0$ a $f(G) \subseteq \{1\}$. Potom jsou $A := f^{-1}(\langle 0, 1/3))$ a $B := f^{-1}((2/3, 1\rangle)$ disjunktní otevřené podmnožiny X takové, že $x \in A$ a $G \subseteq B$.

Definice. Topologický prostor X je T_4 (též *normální*), jestliže je T_1 a pro každou dvojici G, H disjunktních uzavřených množin existují disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $G \subseteq A$ a $H \subseteq B$.

Lemma 2.13. *Buď (X, τ) topologický prostor, který je T_1. Potom je tento prostor T_4 právě když pro každou uzavřenou množinu G a každou otevřenou množinu B takovou, že $G \subseteq B$, existuje otevřená množina A splňující $G \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq B$.*

Důkaz. Obdobný důkazu Lemmatu 2.11. □

Lemma 2.14 (Urysohnovo lemma)**.** *Je-li topologický prostor X normální a jsou-li G, H disjunktní uzavřené podmnožiny X, potom existuje spojité zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ takové, že $f(G) \subseteq \{0\}$ a $f(H) \subseteq \{1\}$.*

Důkaz. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná. Proto lze uspořádat množinu $\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq 1\}$ do nekonečné posloupnosti q_0, q_1, $q_2, \ldots$ indexované přirozenými čísly. Předpokládejme navíc, že $q_0 = 0$ a $q_1 = 1$. Protože jsou uzavřené množiny G, H disjunktní, existuje podle Lemmatu 2.13 otevřená množina U_0 taková, že $G \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq X \setminus H$. Položme $U_1 = X$.

Induktivně budeme dále konstruovat otevřené množiny $U_{q_i} \subseteq X \setminus G$, $i = 2, 3, \ldots$ tak, že

$$\overline{U_p} \subseteq U_q, \tag{2.3}$$

pro všechna racionální čísla $0 \leq p < q < 1$.

Buď n přirozené číslo $(1 \leq n)$ a předpokládejme, že jsme již sestrojili posloupnost otevřených množin $U_{q_0}, \ldots, U_{q_n}$, která splňuje podmínku (2.3). Pro $j, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ položme $j \prec_n k$ pokud $q_j < q_k$ a v intervalu (q_j, q_k) neleží žádné z racionálních čísel q_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Racionální číslo q_{n+1} padne právě do jednoho z intervalů (q_j, q_k), $j \prec_n k$. Nechť je to interval (q_l, q_r). Z předpokladu (2.3), že $\overline{U_{q_l}} \subseteq U_{q_r}$ a z Lemmatu 2.13 plyne, že existuje otevřená množina $U_{q_{n+1}}$ splňující

$$\overline{U_{q_l}} \subseteq U_{q_{n+1}} \subseteq \overline{U}_{q_{n+1}} \subseteq U_{q_r} \cap (X \setminus G).$$

Tak získáme další otevřenou množinu $U_{q_{n+1}}$ v konstruované posloupnosti.

Definujme zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ předpisem

$$f(x) := \inf\{q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} \mid x \in U_q\}.$$

Protože je $G \subseteq U_0$, je $f(x) = 0$ pro všechna $x \in G$. Protože $U_1 = X$ a $U_q \subseteq X \setminus G$ pro všechna $q < 1$, je $f(x) = 1$ pro všechna $x \in G$.

Zbývá ukázat, že je zobrazení f spojité. Všimněme si, že interval $\mathcal{I}$ má sub-bází sestávající z polouzavřených intervalů $\langle 0, a)$, $0 < a \leq 1$ a $(b, 1\rangle$, $0 \leq b < 1$. Ukážeme, že jejich vzory jsou otevřené. Ve následujících výrazech značí q racionální číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Nechť $0 < a \leq 1$. Potom

$$\begin{aligned} f^{-1}(\langle 0, a)) &= \{x \in X \mid f(x) < a\} \\ &= \{x \in X \mid \exists\, q < a, : x \in U_q\} = \bigcup_{q<a} U_q, \end{aligned}$$

je sjednocením otevřených množin a tedy množina otevřená.

Nechť $0 \leq b < 1$. Buď $x \in X$ a předpokládejme, že $f(x) > b$. Potom podle definice existuje racionální $p > b$ takové, že $x \notin U_p$. Pro libovolné racionální číslo q takové, že $b < q < p$ pak vzhledem k (2.3) platí, že $x \notin \overline{U_q}$. Odtud dostaneme, že

$$\begin{aligned} f^{-1}((b, 1\rangle) &= \{x \in X \mid b < f(x)\} \\ &= \{x \in X \mid \exists\, q > b, : x \notin \overline{U_q}\} = \bigcup_{q>b} (X \setminus \overline{U_q}), \end{aligned}$$

je opět sjednocením otevřených množin a tedy množina otevřená. Z Lemmatu 2.4 plyne, že je zobrazení f spojité. $\square$

Důsledek 2.15. *Každý normální prostor je Tichonovův.*