KMA/GPM — Barycentrické souřadnice a trojúhelníkové pláty

František Ježek – jezek@kma.zcu.cz

Katedra matematiky Západočeské univerzity v Plzni, 2008

19. dubna 2009

Z plátu čtyřúhelníkového lze vytvořit plát trojúhelníkový těmito cestami:

- *redukcí jedné strany hranice na bod* – pro plochy určené sítí napr. volbou $\mathbf{V}_{0,n} = \cdots = \mathbf{V}_{m,n}$,
- *tečným napojením dvou sousedních okrajových křivek* – pro Bézierovu plochu např. pro $n = m$ volbou

$$\mathbf{V}_{1,0} - \mathbf{V}_{0,0} = \mathbf{V}_{0,1} - \mathbf{V}_{0,0}$$

Z plátu čtyřúhelníkového lze vytvořit plát trojúhelníkový těmito cestami:

- *redukcí jedné strany hranice na bod* – pro plochy určené sítí např. volbou $\mathbf{V}_{0,n} = \cdots = \mathbf{V}_{m,n}$,
- *tečným napojením dvou sousedních okrajových křivek* – pro Bézierovu plochu např. pro $n = m$ volbou

$$\mathbf{V}_{1,0} - \mathbf{V}_{0,0} = \mathbf{V}_{0,1} - \mathbf{V}_{0,0}$$

Barycentrické souřadnice na přímce

Barycentrické souřadnice (x_0, x_1) *bodu* $\mathbf{X}$ *na úsečce* s krajními body $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ definujeme předpisem

$$\mathbf{X} = x_0\mathbf{P}_0 + x_1\mathbf{P}_1$$

a podmínkou $x_0 + x_1 = 1$ $(x_0 \geq 0, x_1 \geq 0)$.

Barycentrické souřadnice v rovině

Barycentrické souřadnice (x_0, x_1, x_2) bodu $\mathbf{X}$ splňují vztahy:

$$\mathbf{X} = x_0\mathbf{P}_0 + x_1\mathbf{P}_1 + x_2\mathbf{P}_2, \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1.$$

Pokud $x_i \geq 0, \ i = 0, 1, 2,$ náleží bod $\mathbf{X}$ trojúhelníku $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$.

Barycentrické souřadnice na přímce

Barycentrické souřadnice (x_0, x_1) *bodu* $\mathbf{X}$ *na úsečce* s krajními body $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ definujeme předpisem

$$\mathbf{X} = x_0\mathbf{P}_0 + x_1\mathbf{P}_1$$

a podmínkou $x_0 + x_1 = 1$ $(x_0 \geq 0, x_1 \geq 0)$.

Barycentrické souřadnice v rovině

Barycentrické souřadnice (x_0, x_1, x_2) bodu $\mathbf{X}$ splňují vztahy:

$$\mathbf{X} = x_0\mathbf{P}_0 + x_1\mathbf{P}_1 + x_2\mathbf{P}_2, \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1.$$

Pokud $x_i \geq 0, \; i = 0, 1, 2,$ náleží bod $\mathbf{X}$ trojúhelníku $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$.

Simplex v E_n

Simplexem v E_n rozumíme $n+1$ lineárně nezávislých bodů $P_i, i = 0, \ldots, n$.

Barycentrické souřadnice v E_n

Barycentrické souřadnice $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ bodu $\mathbf{X}$ vzhledem k simplexu $\mathbf{P}_0, \ldots \mathbf{P}_n$ definujeme předpisem

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathbf{P}_i$$

a podmínkou $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1, \quad (x_i \geq 0, i = 0, \ldots n)$.

Simplex v E_n

Simplexem v E_n rozumíme $n+1$ lineárně nezávislých bodů $P_i, i = 0, \ldots, n$.

Barycentrické souřadnice v E_n

Barycentrické souřadnice $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ bodu $\mathbf{X}$ vzhledem k simplexu $\mathbf{P}_0, \ldots \mathbf{P}_n$ definujeme předpisem

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathbf{P}_i$$

a podmínkou $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1, \quad (x_i \geq 0, i = 0, \ldots n)$.

Geometrický význam barycentrických souřadnic

Věta

Pro barycentrické souřadnice x_0, x_1, x_2 bodu P vzhledem k trojúhelníku $P_0P_1P_2$ platí

$$x_0 = \frac{O(\triangle PP_1P_2)}{O(\triangle P_0P_1P_2)}, \quad x_1 = \frac{O(\triangle P_0PP_2)}{O(\triangle P_0P_1P_2)} \quad x_2 = \frac{O(\triangle P_0P_1P)}{O(\triangle P_0P_1P_2)}$$

Důkaz: Z definice barycentrických souřadnic plyne:

$$\mathbf{P} = x_0\mathbf{P}_0 + x_1\mathbf{P}_1 + x_2\mathbf{P}_2 \quad \text{a} \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

což je soustava tří rovnic pro neznáme x_0, x_1, x_2 a její řešení (Cramerovým pravidlem) vede spolu s výpočtem obsahu trojúhelníka pomocí velikosti vektorové součinu vektorů dvou stran k dokazovaným vztahům.

∎

Geometrický význam barycentrických souřadnic

Věta

Pro barycentrické souřadnice x_0, x_1, x_2 bodu P vzhledem k trojúhelníku $P_0P_1P_2$ platí

$$x_0 = \frac{O(\triangle PP_1P_2)}{O(\triangle P_0P_1P_2)}, \quad x_1 = \frac{O(\triangle P_0PP_2)}{O(\triangle P_0P_1P_2)} \quad x_2 = \frac{O(\triangle P_0P_1P)}{O(\triangle P_0P_1P_2)}$$

Důkaz: Z definice barycentrických souřadnic plyne:

$$\mathbf{P} = x_0\mathbf{P}_0 + x_1\mathbf{P_1} + x_2\mathbf{P}_2 \quad \text{a} \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

což je soustava tří rovnic pro neznáme x_0, x_1, x_2 a její řešení (Cramerovým pravidlem) vede spolu s výpočtem obsahu trojúhelníka pomocí velikosti vektorové součinu vektorů dvou stran k dokazovaným vztahům.

∎

Bernsteinův polynom v barycentrických souřadnicích

Zobecněný Bernsteinův polynom definujeme vztahem

$$B^n_{i,j,k}(x_0,x_1,x_2) = \frac{n!}{i!j!k!} x_0^i x_1^j x_2^k, \quad i+j+k=n, \quad x_0+x_1+x_2=1.$$

Nutno je doplnit, že $0! = 1$ a $\binom{q}{0} = 1$.

Vlastnosti zobecněných Bernsteinových polynomů

Věta

Pro $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ platí

$$\sum_{i+j+k=n} B^n_{i,j,k}(x_0, x_1, x_2) = 1$$

Věta

Pro barycentrické souřadnice $x_0 = 0, x_1 + x_2 = 1$ a $j + k = n$ platí

$$B^n_{0,j,k}(0, x_1, x_2) = B^n_j(x_1) = B^n_k(x_2)$$

Vlastnosti zobecněných Bernsteinových polynomů

Věta

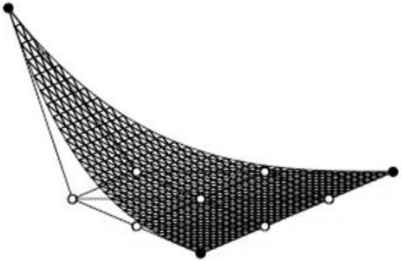
Pro $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ *platí*

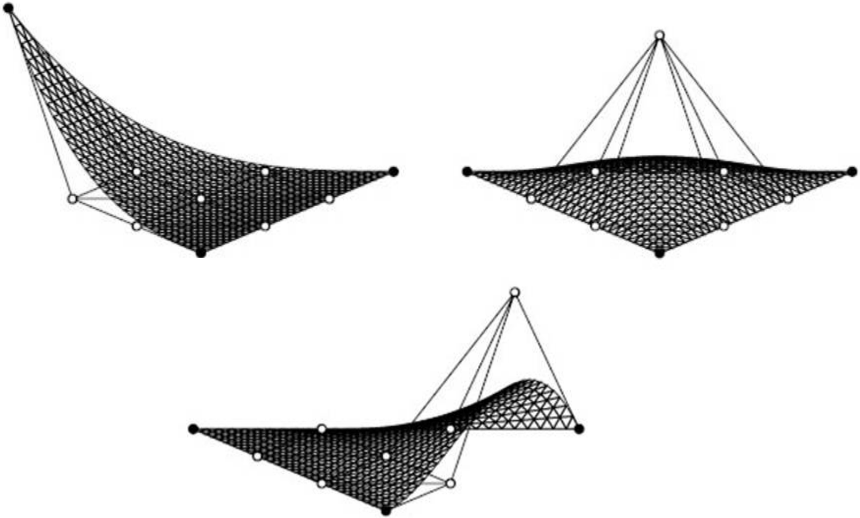
$$\sum_{i+j+k=n} B^n_{i,j,k}(x_0, x_1, x_2) = 1$$

Věta

Pro barycentrické souřadnice $x_0 = 0, x_1 + x_2 = 1$ *a* $j + k = n$ *platí*

$$B^n_{0,j,k}(0, x_1, x_2) = B^n_j(x_1) = B^n_k(x_2)$$





Trojúhelníková síť

Řídící polygon zde nahrazuje trojúhelníková řídící síť bodů, jež v případě $n = 4$ má podobu:

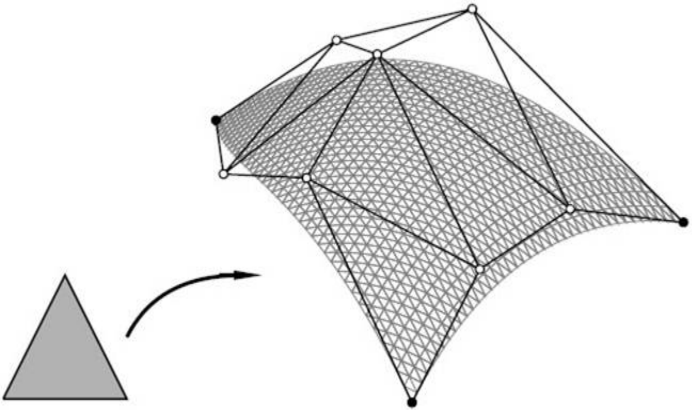
$$
\begin{array}{c}
\mathbf{V}_{040} \\[1em]
\mathbf{V}_{031}\ \mathbf{V}_{130} \\
\mathbf{V}_{022}\ \mathbf{V}_{121}\ \mathbf{V}_{220} \\
\mathbf{V}_{013}\ \mathbf{V}_{112}\ \mathbf{V}_{211}\ \mathbf{V}_{310} \\
\mathbf{V}_{004}\ \mathbf{V}_{103}\ \mathbf{V}_{202}\ \mathbf{V}_{301}\ \mathbf{V}_{400}
\end{array}
$$

Síť tvoří v obecném případě $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ bodů. Jejich počet se nazývá *trojúhelníkové číslo*.

Definice trojúhelníkového plátu

Označme $\mathbf{V}_{ijk}$ polohové vektory vrcholů trojúhelníkové řídící sítě. Indexy nabývají hodnot 0 až n a pro každý bod platí $i + j + k = n$. Pak trojúhelníkový Bézierův plát pro tuto síť je dán rovnicí ($u_1 + u_2 + u_3 = 1$):

$$\mathbf{P}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i,j,k}^{i+j+k=n} \mathbf{V}_{ijk} B^n_{ijk}(u_1, u_2, u_3).$$



Vlastnosti trojúhelníkového Bézierova plátu

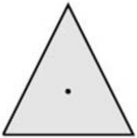
- Algoritmus de Casteljau
  - Dána je řídící trojúhelníková síť a trojice parametrů (u_1, u_2, u_3), $u_1 + u_2 + u_3 = 1$. Určujeme bod Bézierovy plochy, který odpovídá daným parametrům.
  - Pro trojúhelníky sítě určujeme opakovaně (rekurentně) body o barycentrických souřadnicích daných trojicí (u_1, u_2, u_3).
  - Po zredukování sítě na bod dostáváme bod plochy, který odpovídá zadaným parametrům.

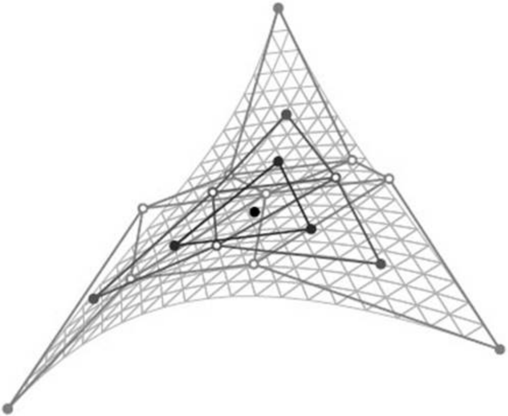
Vlastnosti trojúhelníkového Bézierova plátu

- Algoritmus de Casteljau
  - Dána je řídící trojúhelníková síť a trojice parametrů (u_1, u_2, u_3), $u_1 + u_2 + u_3 = 1$. Určujeme bod Bézierovy plochy, který odpovídá daným parametrům.
  - Pro trojúhelníky sítě určujeme opakovaně (rekurentně) body o barycentrických souřadnicích daných trojicí (u_1, u_2, u_3).
  - Po zredukování sítě na bod dostáváme bod plochy, který odpovídá zadaným parametrům.

Vlastnosti trojúhelníkového Bézierova plátu

- Algoritmus de Casteljau
  - Dána je řídící trojúhelníková síť a trojice parametrů (u_1, u_2, u_3), $u_1 + u_2 + u_3 = 1$. Určujeme bod Bézierovy plochy, který odpovídá daným parametrům.
  - Pro trojúhelníky sítě určujeme opakovaně (rekurentně) body o barycentrických souřadnicích daných trojicí (u_1, u_2, u_3).
  - Po zredukování sítě na bod dostáváme bod plochy, který odpovídá zadaným parametrům.





Vlastnosti trojúhelníkového Bézierova plátu

- Podmínka konvexního obalu – bod Bézierovy plochy leží v konvexním obalu řídící sítě.
- Afinní invariance – použití generátoru plochy a transformace je zaměnitelné.
- Okrajovými křivkami trojúhelníkové Bézierovy plochy jsou Bézierovy křivky určené okrajovými lomenými čarami trojúhelníkové sítě.
- Napojení plátů ve třídě spojitosti C_1: okrajové trojúhelníky jsou koplanární (dvojice trojúhelníků leží v jedné rovině) a všechny si odpovídají v jedné afinní transformaci.

Vlastnosti trojúhelníkového Bézierova plátu

- Podmínka konvexního obalu – bod Bézierovy plochy leží v konvexním obalu řídící sítě.
- Afinní invariance – použití generátoru plochy a transformace je zaměnitelné.
- Okrajovými křivkami trojúhelníkové Bézierovy plochy jsou Bézierovy křivky určené okrajovými lomenými čarami trojúhelníkové sítě.
- Napojení plátů ve třídě spojitosti C_1: okrajové trojúhelníky jsou koplanární (dvojice trojúhelníků leží v jedné rovině) a všechny si odpovídají v jedné afinní transformaci.

Vlastnosti trojúhelníkového Bézierova plátu

- Podmínka konvexního obalu – bod Bézierovy plochy leží v konvexním obalu řídící sítě.
- Afinní invariance – použití generátoru plochy a transformace je zaměnitelné.
- Okrajovými křivkami trojúhelníkové Bézierovy plochy jsou Bézierovy křivky určené okrajovými lomenými čarami trojúhelníkové sítě.
- Napojení plátů ve třídě spojitosti C_1: okrajové trojúhelníky jsou koplanární (dvojice trojúhelníků leží v jedné rovině) a všechny si odpovídají v jedné afinní transformaci.

Vlastnosti trojúhelníkového Bézierova plátu

- Podmínka konvexního obalu – bod Bézierovy plochy leží v konvexním obalu řídící sítě.
- Afinní invariance – použití generátoru plochy a transformace je zaměnitelné.
- Okrajovými křivkami trojúhelníkové Bézierovy plochy jsou Bézierovy křivky určené okrajovými lomenými čarami trojúhelníkové sítě.
- Napojení plátů ve třídě spojitosti C_1: okrajové trojúhelníky jsou koplanární (dvojice trojúhelníků leží v jedné rovině) a všechny si odpovídají v jedné afinní transformaci.