

Geometrické modelování

B-spline křivky

Zbyněk Šír



Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

Po částech polynomiální prostory

- Prozatím jsme modelovali s bází prostoru polynomů nejvýše n na intervalu $[0, 1]$:

$$\mathcal{P}_n([0, 1]) = \text{LO} \left\{ B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}, i = 0, \dots, n \right\}$$

- Z mnoha důvodů potřebujeme funkce, které jsou nenulové jen na části definičního oboru.
- Příklad: Studujte prostor funkcí $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, které zůženy na intervaly $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 6]$ jsou polynomy stupně 2, v bodě 1 mají spojitost C^1 a v bodě 3 spojitost C^0 .
- Je to vektorový prostor? Jakou má dimenzi? Jak najít jeho bázi?
- Pozorování: zvýšení počtu intervalů (při zachování maximální možné spojitosti $(p - 1)$) i snížení spojitosti v bodě zvyšují dimenzi o 1.

B-spline báze

- Pro posloupnost uzlů (t_0, t_1, \dots, t_m) , $t_i \leq t_{i+1}$ definujeme rekurentně funkce $N_{i,p}(t)$, $i = 0, \dots, (m - p - 1)$ stupně p takto

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$
$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

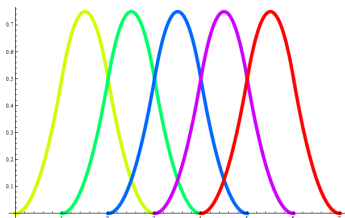
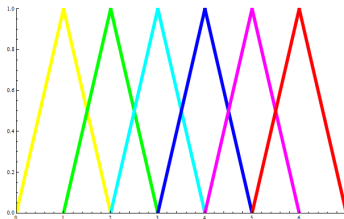
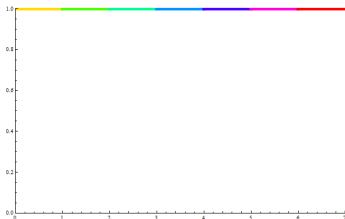
- Jestliže $t_i = t_{i+1}$ (násobný uzel), pak chápeme $[t_i, t_{i+1})$ jako prázdnou množinu.
- Funkce $N_{i,p}(t)$ je zjevně nulová mimo interval $[t_i, t_{i+p+1})$ (pro $p = 0$ z definice, pro vyšší stupeň dokážeme indukcí).
- Pro případ $t_{i+p} - t_i = 0$ bude vždy platit, že $N_{i,p-1}(t)$ je všude nulová a v rekurzi uijeme konvenci $\frac{0}{0} = 0$.
- Pro zvolený stupeň p je funkcí právě $m - p$ položíme $n = m - p - 1$ a funkce jsou indexovány $i = 0, \dots, n$.
- Tyto funkce jsou definovány na celém \mathbb{R} , ale všechny jsou nulové mimo $[t_0, t_m]$ a nás budou zajímat pouze na intervalu $[t_p, t_{m-p}]$. Jedná se o bázi prostoru všech funkcí které jsou definovány na $[t_p, t_{m-p}]$, zúžený na každý podinterval jsou polynomy stupně p a v bodě t_ℓ mají hladkost $p - k_\ell$, kde k_ℓ je násobnost uzlu t_ℓ .

- pro řídicí body \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, n$, a bázové funkce $N_{i,p}$, $i = 0, \dots, n$, je B-spline křivka stupně p dána vztahem

$$c(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)$$

B-spline báze – uniformní vektor uzlů

- **bázové funkce pro uniformní vektor $T = (0, 1, 2, \dots, 7)$ různého stupně – je vidět, že se vždy jedná o stejné, pouze posunuté bázové funkce**



- spočtěme báze funkce pro $p = 2$ a uzle $(0, 1, 3, 4, 5)$
- spočtěme báze funkce pro $p = 2$ a uzle $(0, 1, 1, 4, 5)$
- spočtěme báze funkce pro $p = 2$ a uzle $(0, 1, 1, 1, 5)$

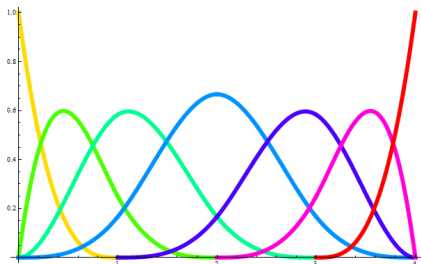
Důležité vlastnosti B-spline bázových funkcí:

- bázové funkce jsou nezáporné, tedy $N_{i,p}(t) \geq 0$ na celém \mathbb{R} .
- pro každé n funkce tvoří rozklad jednotky $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \equiv 1$.
- support (kde je funkce nenulová) $N_{i,p}(t)$ je lokální, jde o interval $[t_i, t_{i+p+1})$.
- na intervalu $[t_i, t_{i+1})$ jsou nenulové pouze bázové funkce $N_{i-p,p}(t), \dots, N_{i,p}(t)$.
- bázové funkce jsou zúženy na každý interval polynomem stupně p (tedy C^∞) a v uzlu násobnosti k mají hladkost C^{p-k}

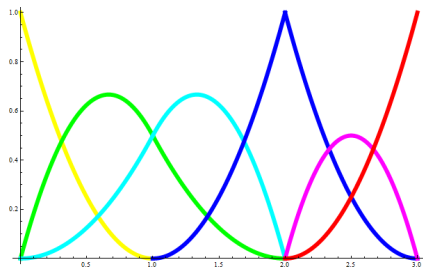
Otevřená (clamped) B-spline křivka

Nejčastěji se používá uzlová posloupnost, kde první a poslední uzel mají násobnost $p + 1$.

- uzly $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$,
tj. uniformní vektor uzlů,
 $p = 3$, $n = 6$, výsledný
spline je třídy C^2



- vektor uzlů
 $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$,
tj. neuniformní vektor uzlů,
 $p = 2$, $n = 5$, výsledný
spline je obecně třídy C^0



- **Bernsteinovy polynomy stupně n** jsou speciální B-spline bází pro uzlový vektor

$$T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1})$$

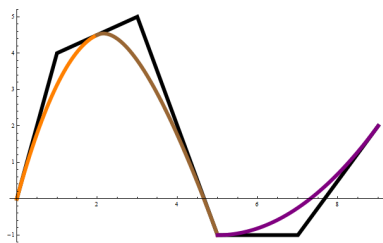
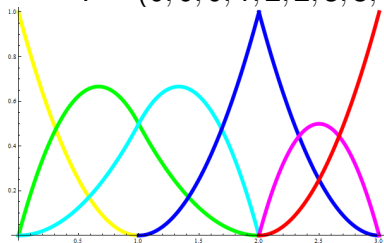
- otevřené (clamped) bázové funkce **interpolují kraje** intervalu parametru, příp. další řídicí body, pokud některý uzel je násobnosti p

Důležité vlastnosti B-spline křivek:

- **hladkost** B-spline křivka stupně p má v uzlu násobnosti k hladkost C^{p-k} a mimo uzlové body C^∞
- **lokalizace změn** – poloha řídicího bodu \mathbf{P}_i ovlivňuje tvar křivky pro parametr $t \in [t_i, t_{i+p+1}]$
- **podmínka konvexního obalu** – každý oblouk křivky stupně p leží v konvexním obalu $p + 1$ bodů řídicího polygonu
- **afinní invariantnost** – je jedno, jestli transformuje afinní transformací křivku nebo její řídicí polygon, výsledek je stejný

B-spline křivka – příklad

- najděme B-spline křivku určenou řídicím polygonem $\mathbf{P}_1 = [0, 0]$, $\mathbf{P}_2 = [1, 4]$, $\mathbf{P}_3 = [3, 5]$, $\mathbf{P}_4 = [5, -1]$, $\mathbf{P}_5 = [7, -1]$, $\mathbf{P}_6 = [9, 2]$ a uzlovým vektorem $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$.



- křivka je složena ze 3 oblouků (částí) a je třídy C^0 , jak naznačoval uzlový vektor
- první a poslední hrana řídicího polygonu určují tečny ke křivce na začátku a na konci, vlivem snížení spojitosti také hrany $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$ určují tečny křivky v okolí napojení druhého a třetího oblouku

Vložení uzlu do uzlového vektoru

- chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**

Vložení uzlu do uzlového vektoru

- chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- jelikož platí $m = n + p + 1$, vložení uzlu je spojeno se **zvýšením počtu řídicích bodů** o jeden.

Vložení uzlu do uzlového vektoru

- chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- jelikož platí $m = n + p + 1$, vložení uzlu je spojeno se **zvýšením počtu řídicích bodů** o jeden.
- mějme dány řídicí body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$, uzlový vektor $T = (t_0, \dots, t_m)$, stupeň křivky p a chtějme vložit nový uzel t^*
- necht' $t^* \in [t_k, t_{k+1})$, potom dále stačí pracovat s body **$\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$**

Vložení uzlu do uzlového vektoru

- chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- jelikož platí $m = n + p + 1$, vložení uzlu je spojeno se **zvýšením počtu řídicích bodů** o jeden.
- mějme dány řídicí body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$, uzlový vektor $T = (t_0, \dots, t_m)$, stupeň křivky p a chtějme vložit nový uzel t^*
- nechť $t^* \in [t_k, t_{k+1})$, potom dále stačí pracovat s body **$\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$**
- hledáme **nové řídicí body \mathbf{Q}_i** , $i = k - p + 1, \dots, k$, takové, že původní řídicí body $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$ nahradíme body **\mathbf{Q}_i** , $i = k - p + 1, \dots, k$ „odřezáváním vrcholů“

Vložení uzlu do uzlového vektoru

- chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- jelikož platí $m = n + p + 1$, vložení uzlu je spojeno se **zvýšením počtu řídicích bodů** o jeden.
- mějme dány řídicí body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$, uzlový vektor $T = (t_0, \dots, t_m)$, stupeň křivky p a chtějme vložit nový uzel t^*
- nechť $t^* \in [t_k, t_{k+1})$, potom dále stačí pracovat s body **$\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$**
- hledáme **nové řídicí body \mathbf{Q}_i** , $i = k - p + 1, \dots, k$, takové, že původní řídicí body $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$ nahradíme body **\mathbf{Q}_i** , $i = k - p + 1, \dots, k$ „odřezáváním vrcholů“
- **nový bod na hraně $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$** najdeme ze vztahu

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i)\mathbf{P}_{i-1} + a_i\mathbf{P}_i, \quad a_i = \frac{t^* - t_i}{t_{i+p} - t_i}, \quad \text{pro } k-p+1 \leq i \leq k$$

Vložení uzlu do uzlového vektoru

- chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- jelikož platí $m = n + p + 1$, vložení uzlu je spojeno se **zvýšením počtu řídicích bodů** o jeden.
- mějme dány řídicí body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$, uzlový vektor $T = (t_0, \dots, t_m)$, stupeň křivky p a chtějme vložit nový uzel t^*
- nechť $t^* \in [t_k, t_{k+1})$, potom dále stačí pracovat s body **$\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$**
- hledáme **nové řídicí body \mathbf{Q}_i** , $i = k - p + 1, \dots, k$, takové, že původní řídicí body $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$ nahradíme body **\mathbf{Q}_i** , $i = k - p + 1, \dots, k$ „odřezáváním vrcholů“
- **nový bod na hraně $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$** najdeme ze vztahu

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i)\mathbf{P}_{i-1} + a_i\mathbf{P}_i, \quad a_i = \frac{t^* - t_i}{t_{i+p} - t_i}, \quad \text{pro } k-p+1 \leq i \leq k$$

- **geometricky**: nový uzel t^* definuje poměry a_{k-p+1}, \dots, a_k , ve kterých t^* rozděljuje intervaly $(t_{k-p+1}, t_{k+1}), \dots, (t_k, t_{k+p})$

Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem

$$T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) =$$

$$(0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1) \text{ a chceme vložit uzel } t^* = 1/2$$

Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem
 $T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) =$
 $(0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$ a chceme vložit uzel $t^* = 1/2$
- $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$ a tedy pracujeme **pouze s body P_2, \dots, P_5** , ostatní body zůstávají neměnné

Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem
 $T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) =$
 $(0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$ a chceme vložit uzel $t^* = 1/2$
- $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$ a tedy pracujeme **pouze s body P_2, \dots, P_5** , ostatní body zůstávají neměnné
- body P_3, P_4 chceme odříznout a **nahradit novými body Q_3, Q_4, Q_5**

Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem $T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$ a chceme vložit uzel $t^* = 1/2$
- $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$ a tedy pracujeme **pouze s body P_2, \dots, P_5** , ostatní body zůstávají neměnné
- body P_3, P_4 chceme odříznout a **nahradit novými body Q_3, Q_4, Q_5**
- tedy dosazením

$$a_3 = \frac{t^* - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{t^* - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{t^* - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{1}{6}$$

a

$$\mathbf{Q}_3 = (1 - \frac{5}{6})\mathbf{P}_2 + \frac{5}{6}\mathbf{P}_3, \quad \mathbf{Q}_4 = (1 - \frac{1}{2})\mathbf{P}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_4, \quad \mathbf{Q}_5 = (1 - \frac{1}{6})\mathbf{P}_4 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_5$$

Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem $T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$ a chceme vložit uzel $t^* = 1/2$
- $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$ a tedy pracujeme **pouze s body P_2, \dots, P_5** , ostatní body zůstávají neměnné
- body P_3, P_4 chceme odříznout a **nahradit novými body Q_3, Q_4, Q_5**
- tedy dosazením

$$a_3 = \frac{t^* - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{t^* - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{t^* - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{1}{6}$$

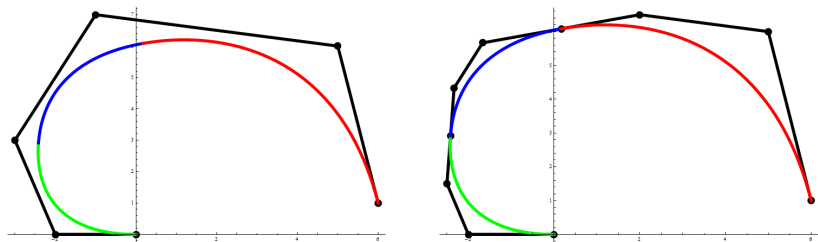
a

$$Q_3 = (1 - \frac{5}{6})P_2 + \frac{5}{6}P_3, \quad Q_4 = (1 - \frac{1}{2})P_3 + \frac{1}{2}P_4, \quad Q_5 = (1 - \frac{1}{6})P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

- dostáváme tak **nový řídicí polygon $P_0, P_1, P_2, Q_3, Q_4, Q_5, P_5, P_6, P_7$** a nový uzlový vektor $T^* = (t_0, \dots, t_5, t^*, t_6, \dots, t_{11})$

Rozdělení B-spline křivky na Bézierovské segmenty

- B-spline křivku stupně p je možné **rozdělit na sekvenci Bézierovských segmentů** pouze s využitím algoritmu vložené uzlu do uzlového vektoru
- stačí vložit každý vnitřní uzel tolikrát, aby jeho **výsledná násobnost byla p**
- vedlejším efektem je samozřejmě výrazné zvýšení počtu řídicích bodů



de Boorův algoritmus

- je zobecněním algoritmu de Casteljaou

de Boorův algoritmus

- je zobecněním algoritmu de Casteljau
- algoritmus je založen na faktu, že zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu, tj. v uzlu násobnosti k je nejvýše $p - k + 1$ nenulových bázových funkcí

de Boorův algoritmus

- je zobecněním algoritmu de Casteljaou
- algoritmus je založen na faktu, že zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu, tj. v uzlu násobnosti k je nejvýše $p - k + 1$ nenulových bázových funkcí
- je-li t^* uzel násobnosti p , je v něm pouze jedna bázová funkce nenulová a nabývá v něm nutně hodnoty 1, tedy $C(t^*) = N_{i,p}(t^*)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$

de Boorův algoritmus

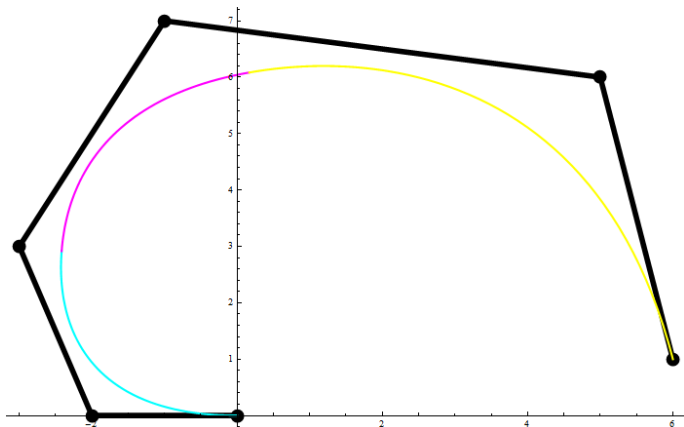
- je zobecněním algoritmu de Casteljaou
- algoritmus je založen na faktu, že zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu, tj. v uzlu násobnosti k je nejvýše $p - k + 1$ nenulových bázových funkcí
- je-li t^* uzel násobnosti p , je v něm pouze jedna bázová funkce nenulová a nabývá v něm nutně hodnoty 1, tedy $C(t^*) = N_{i,p}(t^*)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$
- pokud tedy hledáme bod $\mathbf{C}(t^*)$ na křivce, stačí vložit uzel t^* do uzlového vektoru tolikrát, aby jeho násobnost byla p – poslední vygenerovaný bod je přímo bodem $\mathbf{C}(t^*)$ na křivce

de Boorův algoritmus

- je **zobecněním algoritmu de Casteljaou**
- algoritmus je založen na faktu, že **zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu**, tj. v uzlu násobnosti k je nejvýše $p - k + 1$ nenulových bázových funkcí
- je-li t^* uzel násobnosti p , je v něm pouze **jedna** bázová funkce nenulová a nabývá v něm nutně hodnoty 1, tedy $C(t^*) = N_{i,p}(t^*)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$
- pokud tedy hledáme bod $\mathbf{C}(t^*)$ na křivce, stačí vložit uzel t^* do uzlového vektoru tolikrát, aby jeho násobnost byla p – poslední vygenerovaný bod je přímo bodem $\mathbf{C}(t^*)$ na křivce
- de Boorův algoritmus se tedy od algoritmu de Casteljaou liší ve dvou základních věcech:
 - na rozdíl od pevně daných koeficientů $1 - t^*$ a t^* , které se používají v průběhu celého algoritmu de Casteljaou, se **koeficienty v de Boorově algoritmu mění a závisí na uzlovém vektoru**
 - v de Boorově algoritmu pracujeme pouze s $p + 1$ řídicími body, které určují oblouk B-spline křivky pro $t^* \in (t_k, t_{k+1})$; algoritmus de Casteljaou vždy pracuje s celým řídicím polygonem

de Boorův algoritmus – příklad

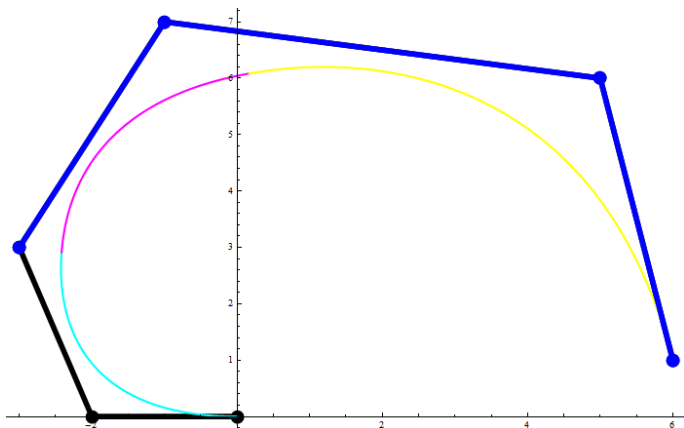
- mějme dán řídící polygon $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$ a uzlový vektor $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$, chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr $t^* = 4/5$



de Boorův algoritmus – příklad

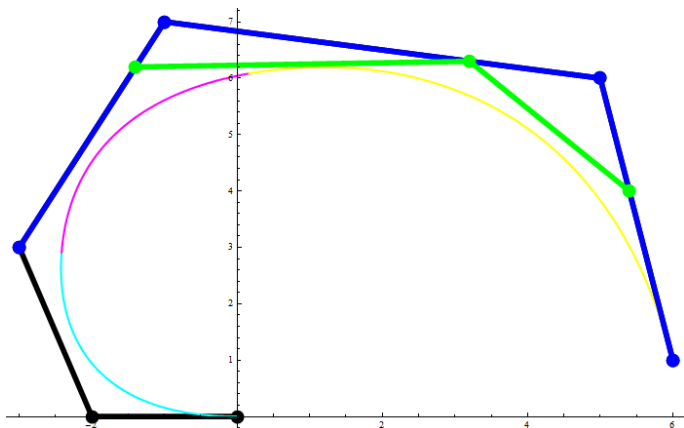
- mějme dán řídící polygon

$\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$ a uzlový vektor $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$, chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr $t^* = 4/5$



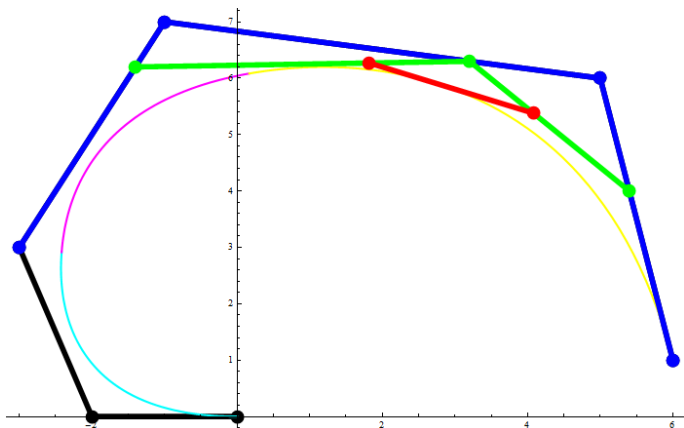
de Boorův algoritmus – příklad

- mějme dán řídicí polygon
 $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$ a uzlový vektor $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$, chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr $t^* = 4/5$



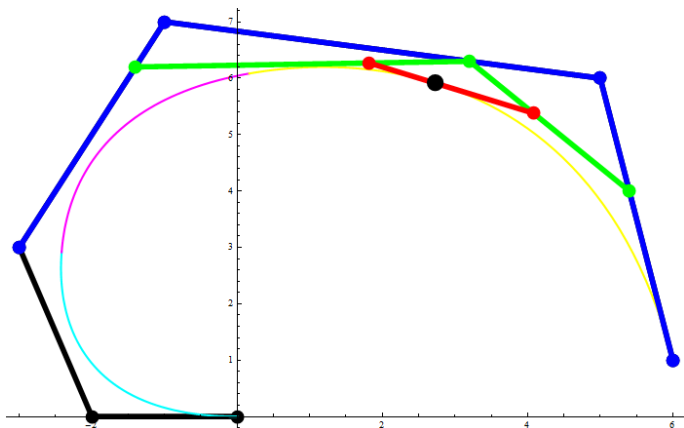
de Boorův algoritmus – příklad

- mějme dán řídicí polygon
 $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$ a uzlový vektor $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$, chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr $t^* = 4/5$



de Boorův algoritmus – příklad

- mějme dán řídicí polygon
 $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$ a uzlový vektor $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$, chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr $t^* = 4/5$



- Zjemnění intervalů a získání více stupňů volnosti (uzel vložíme jednou).
- Snížení spojitosti (např. za účelem vytvoření ostrých rohů).
- Nalezení bodu na křivce (uzel vložíme do násobnosti p).
- Nalezení tečny (uzel vložíme do násobnosti $p - 1$).
- Rozdělení křivky na dvě (uzel vložíme do násobnosti $p + 1$.)