Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Pavel Ludvík

Isomorfní vlastnosti prostorů spojitých afinních funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: *doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.*
Studijní program: *Matematika, Matematická analýza*

2008

Chtěl bych poděkovat doc. RNDr. Jiřímu Spurnému za příkladné vedení diplomové práce, za spoustu připomínek a podnětů k její podobě a zejména za obrovskou trpělivost, se kterou reagoval na všechny mé (i ty úplně hloupé) dotazy. Dále dlužím kolegům Mgr. Janu Březinovi a zejména Mgr. Petru Poštovi řadu drobných matematických i nematematických rozhovorů, které měly také vliv na utváření této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 4. srpna 2008 Pavel Ludvík

Obsah

Název práce: Isomorfní vlastnosti prostorů spojitých afinních funkcí
Autor: Pavel Ludvík
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.
E-mail vedoucího: Jiri.Spurny@mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce se zabývá Banach-Stoneovou větou, jejími obměnami a zobecněními. Úvodní část obsahuje řadu známých výsledků a pomocných tvrzení z oblastí teorie míry, funkcionální analýzy, topologie a zejména z konvexní analýzy, které jsou využity v dalším výkladu. Druhá kapitola je věnována dvěma důkazům klasické Banach-Stoneovy věty a Eilenbergově větě, která platnost Banach-Stoneovy věty přenáší do kontextu jiných než kompaktních prostorů. Kapitola třetí obsahuje příspěvek A. Lazara, který dokázal variaci Banach-Stoneovy věty pro pro prostory afinních funkcí nad Choquetovými simplexy. V dalším průběhu kapitoly je požadavek simpliciality zmírněn a její závěr je věnován našemu jemnému zobecnění dosud známých výsledků. V závěrečné čtvrté kapitole hrají hlavní roli „skoro isometrie“. Kapitola vychází z věty dokázané A. Amirem, pokračuje jejím zobecněním, které vynašli H.B. Cohen a C.-H. Chu a je zakončena opět naším vylepšením jejich výsledků.

Klíčová slova: Banach-Stoneova věta, isometrie, afinní funkce

Title: Isomorphic properties of spaces of continuous affine functions
Author: Pavel Ludvík
Department: Departement of mathematical analysis
Supervisor: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Jiri.Spurny@mff.cuni.cz

Abstract: The thesis deals with Banach-Stone theorem, its modifications and generalizations. The preface of the thesis contains a lot of well known results and useful assertions from such fields of mathematics as measury theory, functional analysis, topology and most importantly convex analysis. The second chapter pursues proofs of classical Banach-Stone theorem and Eilenberg theorem, which works in another context than the original theorem. Chapter number three contains contribution of A. Lazar, who proved variation of Banach-Stone theorem for affine functions on simplexes. The chapter follows with generalizations of his results and it is closed with our own slight generalization. The last chapter pays attention to "almost isometries". The chapter comes out from theorem proved by A. Amir and continues with improvements achieved by H.B. Cohen and C.-H. Chu. The last part includes our own contribution to the subject.

Keywords: Banach-Stone theorem, isometry, affine functions

Kapitola 1

Úvod

Naše práce se zabývá klasickou verzí Banach-Stoneovy věty a jejími zobecněními. Připomeneme její znění:

Věta 1.0.1. *Nechť K a Y jsou kompaktní prostory. Potom je $C(K)$ isometricky isomorfní s $C(S)$, právě když jsou S a K homeomorfní. Označíme-li isometrický isomorfismus jako T, můžeme nalézt dokonce homeomorfismus $\phi : S \xrightarrow{na} K$ a funkci $h \in C(S)$ takové, že platí $|h(y)| = 1$ a*

$$Tf(y) = h(y)f(\phi(y)) \quad \textit{pro všechna } y \in S, f \in C(K).$$

Věta byla v roce 1932 dokázána S. Banachem pro případ kompaktních metrických prostorů a jeho výsledek zobecnil v roce 1937 M. H. Stonem pro třídu všech kompaktních Hausdorffových prostorů.

Zobecňování Banach-Stoneovy věty se ubíralo několika směry – kompaktní prostory byly nahrazovány obecnějšími topologickými strukturami (například úplně regulární spočetně kompaktní prostory splňující první axiom spočetnosti jako v případě Eilenbergovy věty), D. Amir a mnoho dalších pracovalo se „skoro isometrí“ namísto isometrického isomorfismu. A. Lazar dokázal větu Banach-Stoneova typu pro prostory afinních funkcí na simplexech (poznamenejme, že každý prostor spojitých funkcí na kompaktní množině je isometricky isomorfní prostoru afinních funkcí na vhodném simplexu), čímž otevřel cestu dalšímu zobecňování. Přístup D. Amira a A. Lazara sjednotil H. B. Cohen. Takový je stručný výčet zobecnění, které si naše práce klade za cíl zpracovat a některé z výsledků zobecnit.

Naše práce samozřejmě obsahuje pouze zlomek tématu „Banach-Stoneova věta a její zobecnění“. Řada matematiků se jí zabývala v mnoha dalších podobách, které naše práce nezahrnuje: například její vektorovou verzi, analogii pro Banachovy algebry, zobecnění pro Bairovské funkce atd.

Budeme využívat základních pojmů z oblasti funkcionální analýzy, teorie míry, Choquetovy teorie a poznatky o struktuře konvexních množin.

Všechny topologické prostory vyskytující se v textu jsou Hausdorffovy. Všechny funkce jsou uvažovány nad tělesem reálných čísel.

1.1 Značení

$A(K)$	...	prostor spojitých afinních funkcí na kompaktní konvexní množině K
$A^b(K)$	...	prostor omezených afinních funkcí na kompaktní konvexní množině K
$C(K)$	...	prostor spojitých funkcí na kompaktní množině K
$C^b(K)$	...	prostor omezených spojitých funkcí na množině K
$\operatorname{lin} K$	...	lineární obal množiny K
$\operatorname{co} A$	...	konvexní obal množiny A
B_X	...	uzavřená jednotková koule v normovaném lineárním prostoru X
S_X	...	jednotková sféra v normovaném lineárním prostoru X
$P(K)$	...	prostor spojitých konvexních funkcí na kompaktní konvexní množině K
$Q(K)$	...	prostor zdola polospojitých konvexních funkcí na kompaktní konvexní množině K
$\mathcal{M}(K)$	...	prostor znaménkových Radonových měr na kompaktní množině K
$\mathcal{M}^+(K)$	...	prostor nezáporných Radonových měr na kompaktní množině K
$\mathcal{M}^1(K)$	...	prostor pravděpodobnostních Radonových měr na kompaktní množině K
$\mathcal{B}(X)$	...	Borelovská σ-algebra nad topologickým prostorem X
$\operatorname{supp}(\mu)$	...	nosič míry μ
μ_*	...	vnitřní míra indukovaná mírou μ
$f_\sharp\mu$	...	obraz míry míry μ skrze měřitelné zobrazení f
Id	...	identické zobrazení

1.2 Teorie míry

Věta 1.2.1 ([20], Theorem 6.7)**.** *Nechť K je kompaktní prostor a $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Potom existuje tzv. Jordanův rozklad míry μ na $\mu = \mu^+ - \mu^-$, kde $\mu^+, \mu^- \in \mathcal{M}^+(K)$. Pro něj platí $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$.*

Pro každý jiný rozklad $\mu = \nu_1 - \nu_2$, kde $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}^+(K)$ platí $\|\nu_1\| \geq \|\mu^+\|$ a $\|\nu_2\| \geq \|\mu^-\|$.

Lemma 1.2.2. *Nechť K je kompaktní množina, $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ taková, že $\mu(\{x\}) = 0$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje uzavřené okolí U bodu x takové, že $\mu(U) < \varepsilon$.*

Důkaz. Vnější regularita nezáporných Radonových měr na kompaktní množině nám dává existenci otevřeného okolí x s vlastností $\mu(U) < \varepsilon$. Protože kompaktní prostor je normální, existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset \overline{G} \subset U$. Takže $\overline{G}$ je uzavřeným okolím bodu x a $\mu(\overline{G}) < \varepsilon$. □

1.3 Funkcionální analýza

Značení 1.3.1. Nechť je K kompaktní topologický prostor. Potom pro každé $x \in K$ označme jako $\varepsilon_x : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ evaluační funkci, která každé $f \in \mathbb{R}^K$ přiřadí $\varepsilon_x(f) = f(x)$.

Lemma 1.3.2 ([12], s. 105, Ex. 5)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a zobrazení $T : X \to Y$ je isometrický isomorfismus X na Y. Potom je T^* isometrickým isomorfismem mezi prostory Y^* a X^*.*

Lemma 1.3.3. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je isometrický isomorfismus X na Y. Potom $T(\operatorname{ext} B_X) = \operatorname{ext} B_Y$.*

Důkaz. Zřejmě platí, že $T(\operatorname{ext} B_X) \subset B_Y$. Vezměme si $x \in \operatorname{ext} B_X$. Nechť $T(x) = \frac{y+z}{2}$, kde $y, z \in B_X$. Protože je T je surjektivní, existují $y', z' \in B_X$ takové, že $y = T(y'), z = T(z')$. Z linearity zobrazení T platí

$$T(x) = \frac{y+z}{2} = \frac{T(y') + T(z')}{2} = T\Big(\frac{y'+z'}{2}\Big).$$

Zobrazení T je prosté, a proto $x = \frac{y'+z'}{2}$. Protože je x extremálním bodem B_X, platí nutně $y' = z'$ a z toho $y = z$. Takže $T(\operatorname{ext} B_X) \subset \operatorname{ext} B_Y$.

Stejnou úvahu můžeme provést také pro T^{-1}, čímž bychom získali opačnou inkluzi a důkaz je hotov. □

1.4 Topologie

Topologické pojmy, které zde nedefinujeme, jsou používány ve shodě s monografií [11].

Lemma 1.4.1 ([11], Theorem 3.1.1)**.** *Nechť K je kompaktní prostor, I je libovolná indexová množina a $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ soubor jeho uzavřených podmnožin s konečnou průnikovou vlastností. Potom*

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset.$$

Lemma 1.4.2 ([11], Theorem 3.10.3)**.** *Pro každý Hausdorffův prostor K jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) Prostor K je spočetně kompaktní.

(ii) Každá spočetná nekonečná podmnožina K má hromadný bod.

Lemma 1.4.3 ([11], Theorem 3.10.6)**.** *Každá spojitá funkce definovaná na spočetně kompaktním prostoru je omezená a nabývá svých extrémů.*

Lemma 1.4.4 ([14], Tvrzení *13.5(d))**.** *Je-li X topologický vektorový prostor a B konečné sjednocení jeho kompaktních konvexních podmnožin, je množina $\operatorname{co} B$ kompaktní.*

Lemma 1.4.5 ([11], Theorem 3.1.13)**.** *Mějme spojité bijektivní zobrazení ϱ mezi topologickými prostory X, Y, přičemž Y je kompaktní. Potom je ϱ homeomorfismem.*

Lemma 1.4.6. *Nechť $\phi : X \to Y$ je spojité zobrazení kompaktního prostoru X na topologický prostor Y a mějme zobrazení $f : Y \to Z$, kde Z je topologický prostor. Potom je zobrazení $f \circ \phi$ spojité na X, právě když je f spojité na Y.*

Důkaz. Pokud je $f : Y \to Z$ spojité zobrazení, potom je spojité také $f \circ \phi : X \to Z$, protože jde o složení spojitých zobrazení.

Dokažme opačnou implikaci. Nechť je spojité $f \circ \phi$. Mějme uzavřenou množinu $F \subset Z$. Dokážeme, že $f^{-1}(F)$ je uzavřená. K tomu využijeme množinovou identitu

$$(\phi^{-1} \circ f^{-1})(F) = (f \circ \phi)^{-1}(F).$$

Potom totiž

$$f^{-1}(F) = (\phi \circ \phi^{-1} \circ f^{-1})(F) = (\phi \circ (f \circ \phi)^{-1})(F) = \phi((f \circ \phi)^{-1}(F)).$$

Protože je zobrazení $f \circ \phi$ spojité, je $H = (f \circ \phi)^{-1}(F)$ uzavřená podmnožina kompaktního prostoru X, tedy je sama kompaktní. Dále ze spojitosti ϕ dostáváme, že $\phi(H)$ je kompaktní podmnožinou Y. Množina $f^{-1}(F)$ je uzavřená a zobrazení f je spojité. □

Lemma 1.4.7 ([11], Problem 1.7.15.(c)). *Nechť f je shora polospojitá funkce na normálním topologickém prostoru X, pro niž jsou $f^{-1}[-\infty, \alpha)$ množiny typu F_σ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom je f bodovou limitou klesající posloupnosti funkcí z $C(X)$.*

Lemma 1.4.8 ([11], Excercise 3.8.A.(b)). *Lindelöfův prostor X je dědičně Lindelöfův, právě když je X perfektně normální.*

Lemma 1.4.9 ([22], Example 3.4.3). *Fundamentální grupa kružnice v $\mathbb{R}^2$ je isomorfní s grupou $\mathbb{Z}$ celých čísel.*

Lemma 1.4.10 ([22], Example 3.2.11). *Každá konvexní podmnožina Euklidovského prostoru je kontraktibilní (*contractible*).*

Lemma 1.4.11 ([22], Corollary 3.4.12). *Fundamentální grupa každého kontraktibilního prostoru je jednoprvková.*

Lemma 1.4.12 ([22], Corollary 3.4.11). *Pokud jsou obloukově souvislé prostory X, Y homeomorfní, potom jsou jejich fundamentální grupy isomorfní.*

Lemma 1.4.13. *Kružnice v $\mathbb{R}^2$ není homeomorfní s uzavřeným intervalem $I = [0, 1]$.*

Důkaz. Protože je I konvexní podmnožinou Euklidovského prostoru, je podle Lemmatu 1.4.10 kontraktibilním prostorem. Lemma 1.4.11 nám říká, že fundamentální grupa kontraktibilního prostoru je triviální.

Podle Lemmatu 1.4.9 je fundamentální grupa kružnice v $\mathbb{R}^2$ isomorfní grupě $\mathbb{Z}$. Proto z Lemmatu 1.4.12 plyne, že kružnice a interval I nejsou homeomorfní. □

1.5 Konvexní analýza

V následujících definicích je K je kompaktní konvexní podmnožinou lokálně konvexního topologického prostoru.

Podmnožinu $F \subset K$ nazveme *extremální*, pokud pro každý bod $x \in F$ platí:

$$\text{Pokud } x = \lambda y + (1-\lambda)z, \text{ kde } y, z \in K \text{ a } 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ potom } y, z \in F.$$

Jednobodové extremální množiny budeme nazývat *extremálními body* a množinu všech takových bodů označíme $\operatorname{ext} K$.

Konvexní extremální množiny nazýváme *hranami*.

Pro každou hranu $F \subset K$ můžeme definovat *komplementární množinu* $F' \subset K$ jako sjednocení všech hran, které jsou disjunktní s F. Poznamenáme, že množina F nemusí být konvexní. Konvexní komplementární množiny jsou již hranami.

Hranu $F \subset K$ nazveme *rozkladnou hranou (split face)*, pokud je její komplementární množina F' hranou, $K = F \cup F'$, a navíc ke každému bodu $x \in K \setminus (F \cup F')$ existuje jediná konvexní kombinace taková, že $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, kde $y, z \in K$ a $0 < \lambda < 1$.

Mějme dvojici disjunktních uzavřených hran F_1, F_2 prostoru K s vlastností $K = F_1 \cup F_2$. Potom dvojici F_1, F_2 nazveme *dvojicí vzájemně komplementárních hran.* Tato definice je ve shodě s dřívější definicí komplementární množiny, protože - jak ukazuje Lemma 1.5.6 – pokud jsou hrany F_1, F_2 vzájemně komplementární, potom je F_1 komplementární množinou F_2 a F_2 je komplementární množinou F_1.

Uzavřenou hranu F nazveme *paralelní hranou (parallel face)*, pokud $K = \operatorname{co}(F \cup F')$ a platí, že v konvexní kombinaci $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, kde $x \in K \setminus (F \cup F')$, $0 < \lambda < 1$, $y \in F$, $z \in F'$, je koeficient λ určen jednoznačně.

Definice 1.5.1 ([1])**.** Nechť K je kompaktní konvexní množina. Uvažujme funkci $f : X \to \mathbb{R}$. Potom definujeme horní obálku funkce f jako

$$f^* = \inf\{a \in A(K) : a_{|\operatorname{ext} K} \geq f\}.$$

Přímo z definice vyplývá, že je f^* shora polospojitá konkávní funkce.

Definice 1.5.2 ([1]; [2]; [18], Veta 2.67)**.** Kompaktní konvexní množinu K nazveme Choquetovým simplexem (nebo jen simplexem), je-li splněna jedna z následujících ekvivalentních podmínek

(i) $A(K)^*$ je svaz ve svém přirozeném uspořádání,

(ii) K má Rieszovu dekompoziční vlastnost. To znamená, že pro každé $u, v_1, v_2 \in A(K)$, které splňují $0 \leq u \leq v_1 + v_2$, $0 \leq v_1, v_2$ existují funkce $u_1, u_2 \in A(K)$ takové, že $0 \leq u_1 \leq v_1$, $0 \leq u_2 \leq v_2$ a $u_1 + u_2 = u$.

(iii) $A(K)$ má F.2.I.P. *(finite binary intersection property)*. To znamená, že platí $\bigcap_{i=1}^n B_i \neq \emptyset$ pro každý konečný systém uzavřených koulí $\{B_i\}_{i=1}^n$ v $A(K)$ takový, že $B_i \cap B_j$ pro všechny i, j.

Definice 1.5.3. Nechť K je kompaktní konvexní prostor a $x \in K$. Potom míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ reprezentuje bod x, pokud pro každé $a \in A(K)$ platí $\mu(a) = a(x)$. Říkáme také, že bod x je barycentrem míry μ. Potom píšeme $r(\mu) = x$ a množinu všech měr reprezentujících bod x značíme $\mathcal{M}_x(K)$.

Definice 1.5.4. Na prostoru $\mathcal{M}(K)$ zavedeme uspořádání. Mějme $\mu, \nu \in \mathcal{M}(K)$. Řekneme, že $\mu \prec \nu$, pokud pro každou funkci $f \in P(K)$ platí $\mu(f) \leq \nu(f)$.

Z definice ihned plyne, že pokud $\mu \leq \nu$, potom pro $h \in A(K)$ platí $\mu(h) = \nu(h)$.

Definice 1.5.5. Nechť K je kompaktní konvexní množina. Řekneme, že funkce f na K splňuje barycentrickou formuli (nebo také je silně afinní), pokud je f unviverzálně měřitelná (tj. měřitelná vzhledem ke každé míře $\mathcal{M}(K)$) a pro každou $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ platí $\mu(f) = f(r(\mu))$. Prostor funkcí splňujících barycentrickou formuli značíme $A_{bf}(K)$.

Lemma 1.5.6. *Nechť K je kompaktní konvexní množina a F_1, F_2 jsou její disjunktní uzavřené hrany s vlastností $K = \mathrm{co}\,(F_1 \cup F_2)$. Potom jsou F_1, F_2 vzájemně komplementární hrany.*

Důkaz. Chceme ukázat, že $F_1' = F_2$, tj. F_2 je komplementární hranou F_1. Budeme postupovat sporem. Nechť tomu tak není. Potom existuje hrana F_3 disjunktní s F_1 taková, že $F_3 \setminus F_2 \neq \emptyset$. Vezměme tedy $x \in F_3 \setminus F_2$. Podle předpokladu $x \notin F_2$ a protože $F_1 \cap F_3 = \emptyset$, také $x \notin F_1$. Proto existují $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ a $0 < \lambda < 1$ takové, že $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Množina F_3 je hrana, proto nutně $x_1, x_2 \in F_3$. To je spor s $F_1 \cap F_3 = \emptyset$ a tvrzení je dokázáno.

Stejně tak by se ukázalo, že $F_2' = F_1$. □

Lemma 1.5.7 ([2], Theorem 4.7)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní množina. Potom*

$$B_{A(K)^*} = \mathrm{co}\,(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K)),$$

přičemž množiny $\varepsilon(K)$, $-\varepsilon(K)$ jsou paralelními hranami $B_{A(K)^*}$.

Důkaz. Dokážeme, že $\varepsilon(K)$, $-\varepsilon(K)$ jsou paralelními hranami $B_{A(K)^*}$. Snadno se ověří, že jsou to uzavřené hrany. Podle Lemmatu 1.5.6 jsou tedy vzájemně komplementární.

Mějme $a \in B_{A(K)^*}$, $a = \lambda\varepsilon_x - (1-\lambda)\varepsilon_y$, kde $x, y \in K$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Ukážeme, že je v tomto rozkladu koeficient λ určen jednoznačně. Nechť existují $x', y' \in K$, $0 \leq \lambda' \leq 1$ takové, že

$$\lambda\varepsilon_x - (1-\lambda)\varepsilon_y = \lambda'\varepsilon_{x'} - (1-\lambda')\varepsilon_{y'}. \tag{1.1}$$

Po dosazení $1 \in A(K)$ do obou stran rovnosti dostaneme, že $\lambda = \lambda'$. □

Lemma 1.5.8 ([13],§14. Example 4)**.** *Nechť je K kompaktní prostor. Potom* $\mathrm{ext}\, B_{C(K)^*} = \{\pm\varepsilon_x : x \in K\}$.

Lemma 1.5.9. *Nechť je K kompaktní konvexní množina. Potom* $\mathrm{ext}\, B_{A^*(K)} = \{\pm\varepsilon_x : x \in \mathrm{ext}\, K\}$.

Důkaz. Z Lemmatu 1.5.7 víme, že $B_{A(K)^*} = \mathrm{co}\,(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K))$. Protože je $B_{A(K)^*}$ kompaktní konvexní množina, platí z Milmanovy věty, že $\mathrm{ext}\, B_{A(K)^*} \subset \varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K)$.

Vezměme $x \in K \setminus \mathrm{ext}\, K$. Potom existuje $0 < \lambda < 1$ a $x_1, x_2 \in K$ takové, že $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Potom $\varepsilon_x = \lambda\varepsilon_{x_1} + (1-\lambda)\varepsilon_{x_2}$, protože pro každé $h \in A(K)$ je

$$\varepsilon_x(h) = \lambda\varepsilon_{x_1}(h) + (1-\lambda)\varepsilon_{x_2}(h) = \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2) = h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \varepsilon_{(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}(h).$$

Proto $\varepsilon_x \notin \mathrm{ext}\, B_{A(K)^*}$. Stejně tak bychom ukázali, že pro každé $x \in K \setminus \mathrm{ext}\, K$ je $-\varepsilon_x \notin \mathrm{ext}\, B_{A(K)^*}$. Nutně tedy platí $\mathrm{ext}\, B_{A(K)^*} \subset \varepsilon(\mathrm{ext}\, K) \cup -\varepsilon(\mathrm{ext}\, K)$. Dokážeme, že platí také opačná inkluze.

Mějme ε_x, kde $x \in \mathrm{ext}\, K$. Mějme $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$ a $0 \leq \alpha, \beta, \lambda \leq 1$ takové, že

$$\varepsilon_x = \lambda(\alpha\varepsilon_{a_1} - (1-\alpha)\varepsilon_{a_2}) + (1-\lambda)(\beta\varepsilon_{b_1} - (1-\beta)\varepsilon_{b_2}).$$

Do této rovnosti dosadíme konstantní funkci $1 \in A(K)$. Potom po úpravě dostaneme

$$1 = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \leq 1,$$

přičemž rovnost nastává, právě když $\alpha = \beta = 1$. Platí tedy

$$\varepsilon_x = \lambda\varepsilon_{a_1} + (1-\lambda)\varepsilon_{a_2}.$$

Pro každé $h \in A(K)$ proto

$$h(x) = \lambda h(a_1) + (1-\lambda)h(a_2) = h(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2))$$

a protože funkce $A(K)$ oddělují body, platí $x = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$. Podle předpokladu $x \in \operatorname{ext} K$, tedy $x = a_1 = a_2$, a tudíž $\varepsilon_x = \varepsilon_{a_1} = \varepsilon_{a_2}$. Dokázali jsme, že $\varepsilon_x \in \varepsilon(\operatorname{ext} K) \subset \operatorname{ext} B_{A(K)^*}$. Stejně tak bychom dokázali, že $-\varepsilon(\operatorname{ext} K) \subset \operatorname{ext} B_{A(K)^*}$.

□

Věta 1.5.10 ([1], Proposition I.4.5 a Remark 1)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní množina a $\mu \in \mathcal{M}^+$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní*

(i) μ *je maximální prvek* $\mathcal{M}^+$ *vzhledem k uspořádání* $\prec$.

(ii) $\mu(f^*) = \mu(f)$ *pro každou* $f \in C(K)$.

(iii) $\mu(f^*) = \mu(f)$ *pro všechny* $f \in P(K)$.

(iv) $\mu(f^*) = \mu(f)$ *pro všechny shora polospojité funkce* f.

Lemma 1.5.11. *Nechť K je konvexní množina a množina F je její hrana. Potom* $\operatorname{ext} F \subset \operatorname{ext} K$.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že existuje $x \in \operatorname{ext} F \setminus \operatorname{ext} K$. To znamená, že existují $a, b \in K$ takové, že $x = \frac{a+b}{2}$.

Potom z definice hrany platí $a, b \in F$, ale to je spor s předpokladem, že $x \in \operatorname{ext} F$. □

Věta 1.5.12 ([1], Proposition II.6.5)**.** *Nechť F je uzavřená hrana kompaktní konvexní množiny K. Potom pro každé $x \in K$ existuje konvexní kombinace*

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z, \quad \text{kde } y \in F,\ z \in F',\ \lambda = \chi_F^*(x).$$

Z toho plyne, že

$${\chi_F^*}^{-1}(1) = F, \quad {\chi_F^*}^{-1}(0) = F' \quad \text{a} \quad K = \operatorname{co}(F \cup F').$$

Lemma 1.5.13. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny a $\sigma : K \to S$ je afinní zobrazení. Dále nechť existují uzavřené konvexní množiny F_1, F_2 takové, že $K = \operatorname{co}(F_1 \cup F_2)$ a zobrazení σ je spojité na $F_1 \cup F_2$. Potom je σ spojité na celém K.*

Důkaz. Položme $S = F_1 \times F_2 \times [0,1]$. Prostor S je kompaktní, protože je součinem kompaktních prostorů. Definujme zobrazení $\phi : S \to K$ následovně

$$\phi(k_1, k_2, \lambda) = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2.$$

Protože podle předpokladu je $K = \operatorname{co}(F_1 \cup F_2)$, je zobrazení ϕ surjektivní a jako složení spojitých zobrazení je samo spojité.

Definujme zobrazení $\sigma' : S \to K$ jako

$$\sigma'(x_1, x_2, \lambda) = \lambda\sigma(x_1) + (1-\lambda)\sigma(x_2).$$

Potom $\sigma' = \sigma \circ \phi$, protože ϕ je afinní zobrazení. Protože je σ spojité na $F_1 \cup F_2$, je σ' spojité na S.

Můžeme tedy použít Lemmat 1.4.6 a zobrazení σ je tedy spojité na K.

□

Lemma 1.5.14. *Nechť K je kompaktní konvexní množina a F je její paralelní hrana. Potom χ_F^* je shora polospojitá afinní funkce taková, že $\chi_F^*(s) = 1$ pro $s \in F$.*

Důkaz. Podle Lemmatu 1.5.12 je ${\chi_F^*}^{-1}(1) = F$ a ${\chi_F^*}^{-1}(0) = F'$. Z definice horní obálky přímo plyne, že je to funkce shora polospojitá. Zbývá dokázat, že jde o afinní funkci.

Mějme $x, y \in K$. Z Lemmatu 1.5.12 existují rozklady $x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$, $y = \beta y' + (1-\beta)y''$, kde $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $x', y' \in F$ a $x'', y'' \in F'$. Protože je hrana F paralelní hranou, je konvexní koeficient v kombinaci jednoznačně určen a ze zmiňovaného lemmatu platí $\chi_F^*(x) = \alpha$, $\chi_F^*(y) = \beta$.

Volme $0 \leq \lambda \leq 1$. Výpočtem můžeme ověřit, že platí identita

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \gamma A + (1-\gamma)B,$$

kde

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta, \\
A &= \frac{\lambda\alpha}{\gamma}x' + \frac{(1-\lambda)\beta}{\gamma}y', \\
B &= \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\gamma}x'' + \frac{(1-\lambda)(1-\beta)}{1-\gamma}y'',
\end{aligned}$$

přičemž z konvexnosti hran F, F' platí $A \in F$ a $B \in F'$. Protože je v tomto konvexním rozkladu koeficient opět jednoznačně určen a informaci o jeho hodnotě nám dává Lemma 1.5.12, platí

$$\chi_F^*(\lambda x + (1-\lambda)y) = \gamma = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta = \lambda\chi_F^*(x) + (1-\lambda)\chi_F^*(y).$$

Důkaz afinity je hotov.

□

Lemma 1.5.15. *Nechť K je Lindelöfův topologický prostor a f je bodovou limitou klesající posloupnosti $\{h_n\}$ funkcí z $C(K)$. Nechť $\mathcal{F}$ je dolů usměrněný systém funkcí z $C(K)$ a $f = \inf\{h \in \mathcal{F} : h \geq f\}$. Potom existuje klesající posloupnost $\{f_n\}$ funkcí z $\mathcal{F}$, která konverguje bodově k f.*

Důkaz. Volme $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $x \in K$ existuje funkce $g_x \in \mathcal{F}$ a otevřené okolí $U(x)$ bodu x takové, že $f \leq g_x$ (díky tomu, že je f shora polospojitá a g_x spojitá) a $g_x < h_n$ na $U(x)$. Tím jsme získali otevřené pokrytí K.

Díky Lindelöfově vlastnosti můžeme z pokrytí $\{U_x\}_{x \in K}$vybrat spočetné podpokrytí $\{U(x_{n,m})\}_{m=1}^{\infty}$. Přejmenujeme funkce posloupnosti $\{g_{x_{n,m}}\}$ na $\{g_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$. Potom dostáváme $\inf\{g_{n,m} : m \in \mathbb{N}\} < h_n$.

Uspořádáme spočetnou množinu $\{g_{n,m} : m, n \in \mathbb{N}\}$ do posloupnosti $\{g_n\}$. Potom $f = \inf\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$. Protože je systém $\mathcal{F}$ dolů usměrněný, můžeme indukcí sestrojit posloupnost $\{f_n\}$ takto: $f_1 = g_1$, $f_n \leq g_n \wedge f_{n-1}$. Potom má $\{f_n\}$ požadované vlastnosti. □

Lemma 1.5.16 (viz důkaz [1] Corrollary I.1.4)**.** *Nechť K je kompaktní konvexní prostor a $f : K \to \mathbb{R}$ je shora polospojitá afinní funkce. Potom*

$$f = \inf\{h > f : h \in A(K)\}$$

a systém funkcí na pravé straně rovnosti je dolů usměrněný.

Lemma 1.5.17. *Nechť K je metrizovatelný (perfektně normální) kompaktní konvexní prostor a h je afinní shora polospojitá funkce. Potom existuje klesající posloupnost $\{a_n\}$ funkcí z $A(K)$, která bodově konverguje k h.*

Důkaz. Protože je f shora polospojitá, je pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ množina $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ otevřená. V metrickém (perfektně normálním) prostoru je každá otevřená množina také množinou typu F_σ, a proto je podle Lemmatu 1.4.7 funkce f bodovou limitou klesající posloupnosti funkcí z $C(K)$.

Podle Lemmatu 1.5.16 platí $f = \inf\{h > f : h \in A(K)\}$, kde systém funkcí na pravé straně rovnosti je dolů usměrněný. Nyní můžeme s přihlédnutím k Lemmatu 1.5.15 najít klesající posloupnost $\{a_n\}$ funkcí z $A(K)$ konvergující bodově k h.

□

Věta 1.5.18 ([1], Theorem II.6.22)**.** *Nechť K je simplex, potom každá uzavřená hrana F simplexu K je rozkladnou hranou.*

Lemma 1.5.19. *Nechť K je simplex a I je afinní homeomorfismus K na S, kde S je podmnožina lokálně konvexního topologického prostoru. Potom $I(K)$ je také simplex.*

Nástin důkazu.. Tvrzení můžeme dokázat přímočarým využitím charakteristiky simplexu pomocí Rieszovy dekompoziční vlastnosti. Využije se poznatku, že afinní homemorfismus zachovává uspořádání $A(K)$, to znamená, že pro $a, b \in A(K)$, $a \leq b$, platí $a \circ I \leq b \circ I$. □

Lemma 1.5.20. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny, F_1, F_2 je dvojice vzájemně komplementárních rozkladných hran K a G_1, G_2 je dvojice uzavřených komplementárních rozkladných hran S. Nechť je dále $\phi : F_1 \cup F_2 \to S$ takové zobrazení, že $\phi_{|F_1}$ a $\phi_{|F_2}$ jsou prostá afinní spojitá zobrazení a platí $\phi(F_1) = G_1$ a $\phi(F_2) = G_2$.*

Potom je zobrazení $\tilde{\phi} : K \to S$, které každému $a \in K$, kde $a = \lambda x + (1-\lambda)y$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $x \in F_1$, $y \in F_2$ přiřadí $\tilde{\phi}(a) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)$, afinním homeomorfismem prostorů K a S.

Důkaz. **Krok 1.** Zobrazení $\tilde{\phi}$ je dobře definováno, protože pro každé $x \in K$ je jeho rozklad jako konvexní kombinace prvků rozkladných hran F_1, F_2 jednoznačně určen.
Krok 2. Dokážeme afinitu $\tilde{\phi}$. Mějme body $x, y \in K$ a jejich vyjádření $x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$ a $y = \beta y' + (1-\beta)y''$, kde $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $x', y' \in F_1$ a $x'', y'' \in F_2$. Volme $0 \leq \lambda \leq 1$. V

následujícím výpočtu nalezneme vyjádření prvku $\lambda x + (1-\lambda)y$ jako konvexní kombinaci bodů komplementárních rozkladných hran F_1, F_2.

$$\begin{aligned}
\lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(\alpha x' + (1-\alpha)x'') + (1-\lambda)(\beta y' + (1-\beta)y'') = \\
&= (\lambda\alpha x' + (1-\lambda)\beta y') + (\lambda(1-\alpha)x'' + (1-\lambda)(1-\beta)y'') = \\
&= (\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)A + (\lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\beta))B,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\lambda\alpha}{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}x' + \frac{(1-\lambda)\beta}{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}y' \\
B &= \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\beta)}x'' + \frac{(1-\lambda)(1-\beta)}{\lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\beta)}y''.
\end{aligned}$$

Ukážeme, že konečný výraz je konvexní kombinací prvků F_1 a F_2. Prvek A je zřejmě konvexní kombinací prvků F_1 a tedy je sám prvkem F_1. Z analogického důvodu $B \in F_2$. Nyní stačí pouze ověřit, že

$$\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta + \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\beta) = 1.$$

Roznásobením výrazu na levé straně rovnosti nahlédneme, že tomu tak skutečně je.

Afinitu $\tilde{\phi}$ nyní ověříme přímým výpočtem.

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)\phi(A) + (\lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\beta))\phi(B) = \\
&= (\lambda\alpha\phi(x') + (1-\lambda)\beta\phi(y')) + (\lambda(1-\alpha)\phi(x'') + (1-\lambda)(1-\beta)\phi(y'')) \\
&= \lambda(\alpha\phi(x') + (1-\alpha)\phi(x'')) + (1-\lambda)(\beta\phi(y') + (1-\beta)\phi(y'')) = \\
&= \lambda\tilde{\phi}(x) + (1-\lambda)\tilde{\phi}(y).
\end{aligned}$$

Krok 3. Zobrazení $\tilde{\phi}$ je prosté.

Dokazujme sporem. Předpokládejme, že $\tilde{\phi}$ není prosté. Potom existují $x, y \in K$, $x \neq y$ takové, že $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(y)$.

Najděme jejich vyjádření $x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$ a $y = \beta y' + (1-\beta)y''$, kde $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $x', y' \in F_1$ a $x'', y'' \in F_2$.

Protože jsou vyjádření jednoznačná a $x \neq y$, nutně $(\alpha, x', x'') \neq (\beta, y', y'')$.

Podle definice zobrazení $\tilde{\phi}$ platí

$$\alpha\phi(x') + (1-\alpha)\phi(x'') = \tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(y) = \beta\phi(y') + (1-\beta)\phi(y'').$$

Protože jsou G_1, G_2 rozkladnými hranami, platí $\alpha = \beta$, $\phi(x') = \phi(y')$ a $\phi(x'') = \phi(y'')$.

Z prostoty restrikce zobrazení ϕ na F_1 a F_2, která je zaručena předpoklady tvrzení, dostáváme, že $x' = y'$, $x'' = y''$. To je spor a zobrazení $\tilde{\phi}$ je tedy prosté.

Krok 4. Zobrazení $\tilde{\phi}$ je surjektivní.

Mějme $y \in S$. Budeme hledat $x \in K$ takové, že $\tilde{\phi}(x) = y$.

Vzhledem k tomu, že G_1, G_2 jsou rozkladnými hranami S, můžeme nalézt jednoznačné vyjádření $y = \lambda y' + (1-\lambda)y''$. Protože podle předpokladu platí $\phi(F_1) = G_1$ a $\phi(F_2) = G_2$, můžeme najít $x' \in F_1$ a $x'' \in F_2$ takové, že $\phi(x') = y'$ a $\phi(x'') = y''$.

Definujme bod $x \in K$ jako $x = \lambda x' + (1-\lambda)x''$. Potom z definice zobrazení $\tilde{\phi}$ platí

$$\tilde{\phi}(x) = \lambda\phi(x') + (1-\lambda)\phi(x'') = \lambda y' + (1-\lambda)y'' = y,$$

což jsme chtěli dokázat.
Krok 5. Zobrazení ϕ je homeomorfismus K a S.

Využitím Lemmatu 1.5.13 ukážeme, že je ϕ spojité. Zobrazení ϕ tedy bude spojitá bijekce kompaktních množin, což podle Lemmatu 1.4.5 znamená, že ϕ je homeomorfismus.

Zbývá tedy ověřit předpoklady Lemmatu 1.5.13. Podle předpokladů platí $K = \operatorname{co}(F_1 \cup F_2)$, kde F_1, F_2 jsou uzavřené konvexní množiny a $\tilde{\phi}_{|F_1} = \phi_{|F_1}$ a $\tilde{\phi}_{|F_2} = \phi_{|F_2}$ jsou afinní spojitá zobrazení. Předpoklady Lemmatu 1.5.13 jsou tedy splněny.

□

Poznámka 1.5.21. *V dalším textu využijeme identifikace prostoru $A(K)^{**}$ s prostorem $A^b(K)$ vybaveným supremovou normou a bodovým uspořádáním. Tato identifikace je zprostředkována isometrickým isomorfismem T*

$$\begin{aligned} T : A(K)^{**} &\to A^b(K) \\ f &\to f \circ \varepsilon, \\ T^{-1} : A^b(K) &\to A(K)^{**} \\ g &\to \hat{g}. \end{aligned}$$

Důkaz. Dokážeme, že toto zobrazení je dobře definováno a je isometrickým isomorfismem.
a) $f \circ \varepsilon \in A^b(K)$. Dokážeme pouze afinitu. Omezenost vyplyne z bodu c).

Mějme $0 \le \lambda \le 1$ a $x, y \in K$. Potom

$$\begin{aligned} Tf(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f \circ \varepsilon(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\varepsilon_{\lambda x + (1-\lambda)y}) \\ &= f(\lambda\varepsilon_x + (1-\lambda)\varepsilon_y) = \lambda f(\varepsilon_x) + (1-\lambda)f(\varepsilon_y) \\ &= \lambda f \circ \varepsilon(x) + (1-\lambda) f \circ \varepsilon(y) = \lambda Tf(x) + (1-\lambda)Tf(y). \end{aligned}$$

b) Zobrazení T je zřejmě lineární.
c) Dokážeme, že T je isometrie.

K tomu využijeme Lemmatu 1.5.7, které říká, že $B_{A(K)^*} = \operatorname{co}(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K))$. Platí tedy

$$\begin{aligned} \|f\|_{A(K)^{**}} &= \sup\{|f(y)| : y \in \operatorname{co}(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K))\} = \sup\{|f(x)| : x \in \varepsilon(K)\}, \\ \|Tf\|_\infty &= \|f \circ \varepsilon\| = \sup\{|f \circ \varepsilon(y)| : y \in K\} = \sup\{|f(x)| : x \in \varepsilon(K)\}. \end{aligned}$$

V první rovnosti jsme využili nerovnosti $|f(\lambda x + (1-\lambda)y)| \le \max\{|f(x)|, |f(y)|\}$, která platí pro všechna $f \in A(X)$, $x, y \in X$ a $0 \le \lambda \le 1$, kde X je vektorový prostor.
d) Definujeme zobrazení „stříška“, které $f \in A^b(K)$ přiřadí $\hat{f} \in A(K)^{**}$.

Mějme $f \in A^b(K)$. Definujme $\hat{f} \in A(K)^{**}$ následovně. Pro $a \in A(K)^*$ existují z Lemmatu 1.5.7 body $x, y \in K$, $0 \le \lambda \le 1$ takové, že $a = \|a\|(\lambda\varepsilon_x - (1-\lambda)\varepsilon_y)$. Protože jsou $\varepsilon(K)$, $-\varepsilon(K)$ paralelními hranami $B_{A(K)^*}$, je λ v tomto vyjádření dáno jednoznačně. Položme

$$\hat{f}(a) = \|a\|(\lambda f(x) - (1-\lambda)f(y))).$$

Dokažme nejprve, že je funkce $\hat{f}$ dobře definovaná. Mějme dvě vyjádření bodu a.

$$a = \|a\|(\lambda\varepsilon_x - (1-\lambda)\varepsilon_{x'}) = \|a\|(\lambda\varepsilon_y - (1-\lambda)\varepsilon_{y'}),$$

kde $0 \le \lambda \le 1$ a $x, x', y, y' \in K$. Potom

$$\begin{aligned} \lambda f(x) - (1-\lambda) f(x') &= \lambda \varepsilon_x(f) - (1-\lambda)\varepsilon_{x'}(f) \\ &= \lambda \varepsilon_y(f) - (1-\lambda)\varepsilon_{y'}(f) = \lambda f(y) - (1-\lambda) f(y'). \end{aligned}$$

Dalším postupným krokem bude ověřit afinitu $\hat{f}$. Mějme $a = \alpha\varepsilon_x - (1-\alpha)\varepsilon_{x'}$, $b = \beta\varepsilon_y - (1-\beta)\varepsilon_{y'}$, kde $0 \le \alpha, \beta \le 1$ a $x, x', y, y' \in K$. Volme $0 \le \lambda \le 1$. Výpočtem můžeme ověřit, že platí identita

$$\lambda a + (1-\lambda) b = \gamma \varepsilon_A - (1-\gamma)\varepsilon_B,$$

kde

$$\begin{aligned} \gamma &= \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta, \\ A &= \frac{\lambda\alpha}{\gamma} x + \frac{(1-\lambda)\beta}{\gamma} y, \\ B &= \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\gamma} x' + \frac{(1-\lambda)(1-\beta)}{1-\gamma} y', \end{aligned}$$

Takže využitím afinity f po úpravě dostáváme

$$\hat{f}(\lambda a + (1-\lambda) b) = \gamma f(A) - (1-\gamma) f(B) = \lambda \hat{f}(a) + (1-\lambda)\hat{f}(b).$$

Konečně pro $a = \|a\|(\lambda x - (1-\lambda) y)$ platí

$$|\hat{f}(a)| = \|a\|(\lambda |f(x)| + (1-\lambda)|f(y)|) \le \|a\| \|f\|,$$

takže $\hat{f} \in A(K)^{**}$.

d) Pro každou funkci $f \in A^b(K)$ platí $T\hat{f} = f$ a pro každé $g \in A(K)^{**}$ platí $\widehat{Tg} = g$.

Ukážeme, že pro všechna $f \in A^b(K)$ platí $T\hat{f} = f$. Pro každé $x \in K$ máme

$$T\hat{f}(x) = \hat{f} \circ \varepsilon(x) = \hat{f}(\varepsilon_x) = f(x).$$

Dokažme druhou rovnost. Mějme $a \in A(K)^*$. Potom existují body $x, y \in K$, $0 \le \lambda \le 1$ takové, že $a = \|a\|(\lambda\varepsilon_x - (1-\lambda)\varepsilon_y)$ a můžeme počítat

$$\widehat{Tg}(a) = \|a\|(\lambda Tg(x) - (1-\lambda) Tg(y))) = \|a\|(\lambda g(\varepsilon_x) - (1-\lambda) g(\varepsilon_y))) = g(a).$$

e) Zobrazení T je surjektivní.

Tvrzení je přímým důsledkem bodu d).

f) Zobrazení T zachovává uspořádání.

Nechť $f, g \in A(K)^{**}$, $f \le g$. Potom pro každé $x \in K$ máme

$$Tf(x) = f(\varepsilon_x) \le g(\varepsilon_x) = Tg(x).$$

$\square$

Lemma 1.5.22. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny a $\phi : A(K) \to A(S)$ je isomorfismus. Mějme $f_\alpha, f \in A^b(K)$ takové, že $f_\alpha \to f$ bodově. Potom*

$$\phi^{**}\hat{f}_\alpha(\varepsilon_y) \to \phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y) \text{ pro každé } y \in S.$$

Důkaz. Víme, že pro každé $x \in K$ platí $f_\alpha(x) \to f(x)$. Dokážeme, že potom pro každé $z \in A(K)^*$ platí $\hat{f}_\alpha(z) \to \hat{f}(z)$.

Mějme $z \in A(K)^*$ a $a, b \in K$, $0 \leq \lambda \leq 1$ takové, že $z = \|z\|(\lambda a - (1-\lambda)b)$. Potom z definice zobrazení „stříška“ v Poznámce 1.5.21 a z předpokladů tohoto tvrzení platí

$$\hat{f}_\alpha(z) = \|z\|(\lambda f_\alpha(a) - (1-\lambda)f_\alpha(b)) \to \|z\|(\lambda f(a) - (1-\lambda)f(b)) = \hat{f}(z).$$

S využitím tohoto poznatku pro každé $y \in S$ dostáváme

$$\phi^{**}\hat{f}_\alpha(\varepsilon_y) = \hat{f}_\alpha(\phi^*\varepsilon_y) \to \hat{f}(\phi^*\varepsilon_y) = \phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y),$$

což bylo dokázat.

□

Lemma 1.5.23. *Nechť je K kompaktní konvexní množina, $\phi \in A(K)^*$, $\mu \in \mathcal{M}(K)$ a platí $\mu(h) = \phi(h)$ pro všechna $h \in A(K)$. Potom pro shora polospojitou funkci $f \in A^b(K)$ platí $\mu(f) = \hat{f}(\phi)$.*

Důkaz. Z definice zobrazení „stříška“ z Poznámky 1.5.21 víme, že můžeme každé $\phi \in A(K)^*$ psát jako

$$\phi = a_1\varepsilon_{x_1} - a_2\varepsilon_{x_2}, \text{ kde } a_1, a_2 \geq 0 \text{ a } x_1, x_2 \in K,\ x_1 \neq x_2.$$

Takže pro každé $h_0 \in A(K)$ platí $\phi(h_0) = a_1h_0(x_1) - a_2h_0(x_2)$.

Dále platí $\hat{f}(\phi) = a_1f(x_1) - a_2f(x_2)$. Dostáváme tedy nerovnost

$$|\hat{f}(\phi) - \phi(h)| \leq a_1|f(x_1) - h(x_1)| + a_2|f(x_2) - h(x_2)|. \tag{1.2}$$

Z Lemmatu 1.5.16 plyne, že

$$f = \inf\{h > f : h \in A(K)\} = \inf \mathcal{F}, \tag{1.3}$$

kde systém funkcí na pravé straně je dolů usměrněný.

Volme $\varepsilon > 0$. Díky (1.2) a (1.3) můžeme najít funkci $h_1 \in \mathcal{F}$ takovou, že pro každou $h_0 \in \mathcal{F}$, $h_0 \leq h_1$ platí

$$|\hat{f}(\phi) - \phi(h_0)| \leq \varepsilon.$$

Potom nám Lemma 1.5.39 říká, že

$$\mu(f) = \mu^+(f) - \mu^-(f) = \inf\{\mu^+(h) : h \in \mathcal{F}\} - \inf\{\mu^-(h) : h \in \mathcal{F}\}.$$

Pro každé $h_0 \in A(K)$ platí

$$\begin{aligned} |\mu(h_0) - \mu(f)| &= |\mu^+(h_0) - \mu^+(f)| + |\mu^-(h_0) - \mu^-(f)| \\ &\leq |\mu^+(h_0) - \inf\{\mu^+(h) : h \in \mathcal{F}\}| + |\mu^-(h_0) - \inf\{\mu^-(h) : h \in \mathcal{F}\}|. \end{aligned}$$

Můžeme tedy najít $h_2 \in \mathcal{F}$ a $h_3 \in \mathcal{F}$ takové, že pro každou funkci $h_0 \in \mathcal{F}$, $h_0 \leq h_2 \wedge h_3$ platí

$$\begin{aligned} |\mu^+(h_0) - \mu^+(f)| &= |\mu^+(h_0) - \inf\{\mu^+(h) : h \in \mathcal{F}\}| \leq \varepsilon, \\ |\mu^-(h_0) - \mu^-(f)| &= |\mu^-(h_0) - \inf\{\mu^-(h) : h \in \mathcal{F}\}| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože je $\mathcal{F}$ dolů usměrněný systém, existuje $h \in \mathcal{F}$ taková, že $h \leq h_1 \wedge h_2 \wedge h_3$. Taková funkce pak splňuje

$$|\hat{f}(\phi) - \phi(h)| \leq \varepsilon \quad \text{a} \quad |\mu(h) - \mu(f)| \leq 2\varepsilon.$$

Konečně tedy dostáváme

$$|\hat{f}(\phi) - \mu(f)| \leq |\hat{f}(\phi) - \phi(h)| + |\phi(h) - \mu(h)| + |\mu(h) - \mu(f)| \leq \varepsilon + 0 + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo voleno libovolně, platí $\hat{f}(\phi) = \mu(f)$, což bylo dokázat.

□

Věta 1.5.24. *Nechť K je kompaktní konvexní množina a F je jeho uzavřená rozkladná hrana. Označme F' její komplementární hranu. Potom platí*

$$A(K)^* = \operatorname{lin} \varepsilon(F) \oplus_{l_1} \operatorname{lin} \varepsilon(F').$$

Důkaz. Mějme $\phi \in A(K)^*$. Protože platí $K = \operatorname{co}(F \cup F')$ a podle Lemmatu 1.5.7 platí $B_{A(K)^*} = \operatorname{co}(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K)$, dostáváme

$$A(K)^* = \operatorname{lin} \varepsilon(K) = \operatorname{lin}(\varepsilon(F) \cup \varepsilon(F')).$$

Protože zřejmě $\operatorname{lin} \varepsilon(F) \cap \operatorname{lin} \varepsilon(F') = \emptyset$, platí $A(K)^* = \operatorname{lin} \varepsilon(F) \oplus \operatorname{lin} \varepsilon(F')$. Tím je dokázána první část tvrzení. Z ní plyne, že existence $\phi_1 \in \operatorname{lin} \varepsilon(F)$ a $\phi_2 \in \operatorname{lin} \varepsilon(F')$ takových, že $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

Ve zbývající části dokážeme platnost l_1-vztahu pro normy. To znamená, že pro $\phi \in A(K)^*$ navíc platí

$$\|\phi\| = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|.$$

Zobrazení $\phi \in A(K)^*$ z Hahn-Banachovy věty rozšíříme se zachováním normy na $\mu \in C(K)^* = \mathcal{M}(K)$. Míru μ můžeme rozložit na $\mu = \mu^+ - \mu^-$, kde $\mu^+ \in \mathcal{M}^+(K)$, $\mu^- \in \mathcal{M}^+(K)$.

K mírám μ^+ a μ^- najdeme maximální míry $\nu^+, \nu^- \in \mathcal{M}^+(K)$ při uspořádání $\prec$ a definujeme míru $\nu \in \mathcal{M}(K)$ jako $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Protože $\mu^+, \mu^-, \nu^+, \nu^- \in \mathcal{M}^+(K)$, platí s přihlédnutí k Definici 1.5.4

$$\|\mu^+\| = \mu^+(1) = \nu^+(1) = \|\nu^+\|,$$

$$\|\mu^-\| = \mu^-(1) = \nu^-(1) = \|\nu^-\|.$$

Z Věty 1.2.1

$$\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\| = \|\nu^+\| + \|\nu^-\| \geq \|\nu\|.$$

Protože podle poznámky v Definici 1.5.4 pro všechna $h \in A(K)$ platí

$$\nu(h) = \nu^+(h) - \nu^-(h) = \mu^+(h) - \mu^-(h) = \mu(h) = \phi(h),$$

takže $\nu_{|A(K)} = \phi$. Proto platí nerovnost

$$\|\nu\|_{\mathcal{M}(K)} \geq \|\nu_{|A(X)}\|_{A(K)^*} = \|\phi\|_{A(K)^*}.$$

Protože je F uzavřenou rozkladnou hranou, je podle Věty 1.5.25 funkce χ_F^* afinní shora polospojitá. Podle Mokobodského charakteristiky maximálních měr (Věta 1.5.10) je $\mu^+(\chi_F^*) = \mu^+(\chi_F)$. Proto platí

$$\mu^+(K \setminus (F \cup F')) = \mu(\{x \in K : \chi_F^*(x) > \chi_F(x)\}) = 0.$$

Stejně tak bychom dostali $\mu^-(K \setminus (F \cup F')) = 0$, a proto platí

$$\mu(K \setminus (F \cup F')) = 0. \tag{1.4}$$

Označme nyní $\mu_1 = \mu_{|F}$ a $\mu_2 = \mu_{|F'}$. Díky (1.4) platí $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Dokážeme, že $\mu_1 = \phi_1$ na $A(K)$. Mějme $h \in A(K)$. Tvrzení dokážeme pro h s vlastností $0 \leq h \leq 1$. Potom z linearity μ_1, ϕ_1 platí rovnost pro všechny prvky $A(K)$. Položme $f = \chi_F \cdot h$ a $g = f^*$. Funkce g je podle Věty 1.5.33 shora polospojitá afinní. Dále platí, že $g = 0$ na F' a $g = h$ na F. Platnost uvedených rovností snadno nahlédneme přímo z definice horní obálky. Počítejme

$$\mu_1(h) = \mu_1(f) = \mu_1(g) = \mu_1(g) = \mu_1(g) + \mu_2(g) = \mu(g). \tag{1.5}$$

Využili jsme po řadě toho, že μ_1 je nesená F, potom Mokobodského charakteristiky maximálních měr. Další rovnost platí díky faktu $\mu_2(g) = 0$. Ten plyne z toho, že $g = 0$ na F' a μ_2 je nesena F'.

Afinní funkce g je shora polospojitá na kompaktním prostoru, proto je omezená shora a z definice horní obálky je také omezená zdola. Proto $g \in A^b(K)$ a podle Lemmatu 1.5.23 platí

$$\mu(g) = \hat{g}(\phi). \tag{1.6}$$

Konečně platí identity

$$\hat{g}(\phi) = \hat{g}(\phi_1) + \hat{g}(\phi_2) = \phi_1(h), \tag{1.7}$$

které dokážeme přímým výpočtem. První nerovnost plyne z faktu $\phi = \phi_1 + \phi_2$. V dalším kroku dokážeme, že $\hat{g}(\phi_2) = 0$ a $\hat{g}(\phi_1) = \phi_1(h)$.

Protože jsou $\phi_1 \in \operatorname{lin} \varepsilon(F)$ a $\phi_2 \in \operatorname{lin} \varepsilon(F')$, existují $m, n \in \mathbb{N}$ a pro $i = 1, \dots n$ dále $a_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in F$ a pro $j = 1, \dots, m$ prvky $b_j \in \mathbb{R}$, $y_j \in F'$ takové, že

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{x_i} \quad \text{a} \quad \phi_2 = \sum_{j=1}^{m} b_j \varepsilon_{y_j}.$$

Počítejme tedy

$$\hat{g}(\phi_2) = \sum_{j=1}^{m} b_j \hat{g}(\varepsilon_{y_j}) = \sum_{j=1}^{m} b_j g(y_j) = 0,$$

protože $g = 0$ na F' a $y_j \in F'$.

Dále

$$\hat{g}(\phi_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{g}(\varepsilon_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i h(x_i) = \phi_1(h).$$

Při druhé rovnosti jsme využili definice zobrazení „stříška“ z Poznámky 1.5.21 a ve třetí rovnosti faktu, že $g = h$ na F a $x_i \in F$.

Složením identit (1.5), (1.6) a (1.7) dostaneme, že $\mu_1(h) = \phi_1(h)$ pro každé $h \in A(K)$. Protože $\phi_2 = \phi - \phi_1$ a z konstrukce $\mu_{|A(K)} = \phi$, dostáváme, že také $\mu_2(h) = \phi_2(h)$ pro všechna $h \in A(K)$.

Proto můžeme provést závěrečný výpočet

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{A(K)^*} &= \|\mu\|_{\mathcal{M}(K)} = \|\mu_1\|_{\mathcal{M}(K)} + \|\mu_2\|_{\mathcal{M}(K)} \\ &\geq \|\mu_{1|A(K)}\|_{A(K)^*} + \|\mu_{2|A(K)}\|_{A(K)^*} = \|\phi_1\|_{A(K)^*} + \|\phi_2\|_{A(K)^*}.\end{aligned}$$

Protože opačná nerovnost je zřejmá díky trojúhelníkové nerovnosti, dostáváme

$$\|\phi\|_{A(K)^*} = \|\phi_1\|_{A(K)^*} + \|\phi_2\|_{A(K)^*},$$

což bylo dokázat. □

Věta 1.5.25 ([1], Proposition II.6.9). *Pokud je F uzavřená rozkladná hrana kompaktní konvexní množiny K, potom je χ_F^* afinní shora polospojitá funkce.*

Věta 1.5.26 ([1], Proposition I.4.10). *Nechť K je kompaktní konvexní množina a $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$, kde $\{f_n\}$ je shora omezená posloupnost funkcí z $Q(K)$. Pokud platí $f(x) \leq \alpha$ pro všechna $x \in \operatorname{ext} K$, potom $f(x) \leq \alpha$ pro všechna $x \in K$.*

Lemma 1.5.27. *Nechť K je kompaktní konvexní množina, $x \in \operatorname{ext} K$ a U je otevřené okolí bodu x. Potom $x \notin \overline{\text{co}}\,(K \setminus U)$.*

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že $x \in \overline{\text{co}}\,(K \setminus U)$. Potom existují $x_i^\alpha \in K \setminus U$, $n_\alpha \in \mathbb{N}$ a $\lambda_i^\alpha \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = 1$ pro každé α takové, že

$$\lim_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha x_i^\alpha = x.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro každé α a $1 \leq i \leq j \leq n_\alpha$ platí $\lambda_i^\alpha \leq \lambda_j^\alpha$.

Protože jsou $K \setminus U$, a interval $[0,1]$ kompaktní množiny, můžeme také bez újmy na obecnosti předpokládat, že λ_1^α a x_1^α jsou konvergentní nety a položme $\lim_\alpha \lambda_1^\alpha = \lambda_1$ a $\lim_\alpha x_1^\alpha = x_1 \in K \setminus U$.

Potom můžeme psát

$$x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \lim_\alpha \sum_{i=2}^{n_\alpha} k_i^\alpha x_i^\alpha, \tag{1.8}$$

kde $k_i^\alpha = 0$, pokud $\lambda_1^\alpha = 1$ a $k_i^\alpha = \frac{\lambda_i^\alpha}{1-\lambda_1^\alpha}$, pokud $\lambda_1^\alpha < 1$.

Limita v (1.8) zřejmě musí existovat a protože jde o net konvexních kombinací prvků $K \setminus U$, bude konvergovat k prvku $y \in \overline{\text{co}}\,(K \setminus U) \subset K$. Získali jsme tedy vyjádření x jako konvexní kombinace $x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y$, přičemž $x_1 \neq x$, protože $x_1 \in K \setminus U$. To je spor s definicí extremálních bodů. Tím je tvrzení dokázáno. □

Lemma 1.5.28 ([1], Corollary I.1.4). *Nechť K je kompaktní konvexní množina a funkce $a : K \to [-\infty, \infty)$ je shora polospojitá afinní. Potom existuje klesající net z $A(K)$, který bodově konverguje k a.*

Lemma 1.5.29. *Nechť K je kompaktní konvexní prostor a F jeho uzavřená rozkladná hrana. Potom existuje net $\{a_\alpha\}$ funkcí z $A(K)$ takový, že $a_\alpha \searrow \chi_F^*$ bodově.*

Důkaz. Podle Věty 1.5.25 je χ_F^* afinní shora polospojitá funkce. Naše věta je pak přímým důsledkem Lemmatu 1.5.28. □

Lemma 1.5.30. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny a $T : A(K) \to A(S)$ je isometrický isomorfismus. Potom je zobrazení T^* afinním homeomorfismem $\varepsilon(S)$ a $T^*(\varepsilon(S))$.*

Důkaz. Afinita zobrazení T^* je zřejmá. Protože je $\varepsilon(S)$ kompaktní a T^* je spojitá bijekce $\varepsilon(S)$ na kompaktní množinu $T^*(\varepsilon(S))$, plyne z Věty 1.4.5, že T^* je homeomorfismus. □

Lemma 1.5.31. *Buď K kompaktní konvexní množina a $f \in A(K)$. Potom jsou množiny $F_1 = \{x \in K : f(x) = \|f\|\}$ a $F_2 = \{x \in K : f(x) = -\|f\|\}$ uzavřenými hranami množiny K.*

Důkaz. Uzavřenost uvedených množin plyne ze spojitosti funkce f.

Dokážeme, že F_1 je hrana. Nechť $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, kde $x \in F_1$, $a, b \in K$. Potom

$$\|f\| = f(x) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \leq \lambda \|f\| + (1-\lambda)\|f\| = \|f\|.$$

Proto nutně $f(a) = f(b) = \|f\|$, a tedy $a, b \in F_1$. Dokázali jsme, že F_1 je hrana.

Pro důkaz tvrzení, že F_2 je hrana, aplikujeme první část na funkci $g = -f$. □

Věta 1.5.32 ([1], Proposition I.3.1). *Nechť μ, ν jsou nezáporné míry na kompaktní konvexní množině K. Potom $\mu \prec \nu$, právě když*

$$\nu(f) \leq \mu(f^*),$$

pro každou shora polospojitou funkci $f : K \to \mathbb{R}$.

Věta 1.5.33 ([1], Theorem II.6.18). *Nechť K je kompaktní konvexní množina a F je její uzavřená hrana. Potom je F rozkladnou hranou, právě když je b^* afinní pro každou funkci b na K takovou, že $b_{|F} \in A(F)$, $b_{|F} \geq 0$ a $b_{|K \setminus F} = 0$.*

Lemma 1.5.34 ([1], Proposition I.4.6). *Nechť K je kompaktní konvexní množina. Pokud je $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ maximální, potom $\operatorname{supp}(\mu) \subset \overline{\operatorname{ext} K}$.*

Věta 1.5.35 ([2], Theorem 6.8). *Nechť K je kompaktní konvexní množina. Potom ke každému bodu $x \in K$ existuje maximální míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, která bod x reprezentuje.*

Věta 1.5.36 ([18], Veta 2.41). *Nechť je μ maximální míra na kompaktní konvexní množině K, $F \subset G \subset (K \setminus \operatorname{ext} K)$, přičemž F je uzavřená a G je typu G_δ. Potom $\mu(F) = 0$.*

Lemma 1.5.37. *Nechť K je kompaktní konvexní prostor, $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ a $\operatorname{ext} K$ je Lindelöfův prostor. Potom pro maximální míru $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ platí $\mu_*(K \setminus \operatorname{ext} K) = 0$,*

Důkaz. Chceme dokázat, že pro každou $F \in \mathcal{B}$, $F \subset K \setminus \operatorname{ext} K$ platí $\mu(F) = 0$. Protože je míra μ regulární, stačí rovnost dokázat pro kompaktní množiny F. Nechť je tedy F kompaktní. Pro každý bod $x \in \operatorname{ext} K$ můžeme z normality prostoru K najít jeho uzavřené okolí U_x takové, že $U_x \subset K \setminus F$. Protože je množina $\operatorname{ext} K$ Lindelöfova, můžeme vybrat spočetně mnoho bodů $x_n \in \operatorname{ext} K$ takových, že $\operatorname{ext} K \subset \bigcup_n U_{x_n}$.

Potom je množina

$$A = K \setminus \bigcup_n U_{x_n} = \bigcap_n (K \setminus U_{x_n})$$

disjunktní s $\operatorname{ext} K$, je typu G_δ a platí $F \subset A$. Podle Věty 1.5.36 pro každou kompaktní podmnožinu $C \subset A$ platí $\mu(C) = 0$. Proto z regularity míry μ také $\mu(A) = 0$ a odtud dostáváme $\mu(F) = 0$. $\square$

Lemma 1.5.38 ([15], Lemma 2.4)**.** *Nechť F_1, F_2 jsou uzavřené konvexní podmnožiny kompaktního konvexního prostoru K takového, že $\operatorname{co}(F_1 \cup F_2) = K$. Nechť f je afinní funkce na K.*

(i) Funkce f je univerzálně měřitelná (borelovská, bairovské třídy α) na K, právě když je f univerzálně měřitelná (borelovská, bairovské třídy α) na $F_1 \cup F_2$.

(ii) $f \in A_{bf}(K)$, právě když $f|_{F_1} \in A_{bf}(F_1)$ a $f|_{F_2} \in A_{bf}(F_2)$.

Věta 1.5.39 ([17], důkaz Lemmatu 10.2)**.** *Nechť K je kompaktní prostor, $\mathcal{F}$ je dolů usměrněný systém shora polospojitých funkcí a $\mu \in M^+(K)$. Pak platí*

$$\mu(\inf \mathcal{F}) = \inf\{\mu(f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Lemma 1.5.40. *Nechť K, S jsou kompaktní prostory a $U : K \to S$ je afinní spojité zobrazení. Mějme $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Potom platí*

$$r(U_\sharp(\mu)) = U(r(\mu)).$$

Důkaz. Pro každé $h \in A(S)$ platí

$$h(r(U_\sharp\mu)) = U_\sharp\mu(h) = \mu(h \circ U) = h(U(r(\mu))).$$

Využili jsme toho, že $h \circ U \in A(K)$. Protože prvky $A(S)$ oddělují body, platí $r(U_\sharp\mu) = U(r(\mu))$. $\square$

Věta 1.5.41 ([16], Theorem 2.1)**.** *Nechť K, S jsou kompaktní prostory a $\phi : K \to S$ je spojitá surjekce. Mějme funkci g na S a položme $f = g \circ \phi$. Potom je f univerzálně měřitelná, právě když je g univerzálně měřitelná.*

Lemma 1.5.42 ([16], Proposition 3.2)**.** *Nechť $\phi : K \to S$ je spojité afinní zobrazení kompaktní konvexní množiny K na kompaktní množinu S a f je omezená funkce na S.*

Potom $f \circ \phi \in A_{bf}(K)$, právě když $f \in A_{bf}(S)$.

Kapitola 2

Variace na Banach-Stoneovu větu pro spojité funkce

2.1 Původní Banach-Stoneova věta

Věta 2.1.1 (Banach-Stoneova). *Nechť K a S jsou kompaktní prostory. Potom $C(K)$ je isometricky isomorfní s $C(S)$, právě když S a K jsou homeomorfní. Označíme-li isometrický isomorfismus jako T, můžeme nalézt dokonce homeomorfismus $\phi : S \xrightarrow{na} K$ a funkci $h \in C(S)$ takovou, že platí $|h(y)| = 1$ a*

$$Tf(y) = h(y)f(\phi(y)) \quad \textit{pro všechna } y \in S, f \in C(K). \tag{2.1}$$

Důkaz lze najít například v [[3], Theorem V.8.7].

Důkaz. Nejprve dokážeme implikaci zprava doleva. Mějme ϕ homeomorfismus S na K podle předpokladu. Definujme zobrazení $T : C(K) \to C(S)$ jako $Tf(s) = f(\phi(s))$ pro $f \in C(K)$, $s \in S$. Nyní přímočaře ověříme, že je T požadovanou isometrií mezi $C(K)$ a $C(S)$. Linearita je zřejmá. Dále nechť $f \in C(K)$. Pak

$$\|Tf\| = \max_{y\in S} |Tf(y)| = \max_{y\in S} |f(\phi(y))| \leq \|f\|.$$

Pro důkaz opačné nerovnosti využijeme toho, že $f \in C(K)$ nabývá svého maxima. Existuje tedy $x_0 \in K$, že $|f(x_0)| = \|f\|$. Protože podle předpokladu je ϕ surjektivní, existuje $y_0 \in S$, že $\phi(y_0) = x_0$. Proto platí $\|Tf\| \geq |f(\phi(y_0))| = \|f\|$ a T je skutečně isometrický isomorfismus na $C(S)$. Navíc zvolíme-li $h \in C(K)$ jako $h = 1$, dostaneme požadovanou identitu (2.1).

Přejděme k důkazu implikace zleva doprava. Předpokládejme, že T je isometrický isomorfismus $C(K)$ na $C(S)$. Podle Lemmatu 1.3.2 je potom T^* isometrickým isomorfismem $C(S)^*$ na $C(K)^*$ a Lemma 1.3.3 říká, že pro extremální body uzavřené koule v $C(S)^*$ platí $\operatorname{ext} B_{C(S)^*} = \{\pm\varepsilon_y : y \in S\}$.

Existuje tedy funkce $h : S \to \{-1, 1\}$ a $\phi : S \to K$ tak, že $T^*(\varepsilon_y) = h(y)\varepsilon_{\phi(y)}$, kde $y \in S$ a $\phi(y) \in K$.

Dále nahlédneme, že $h = T1$. Vezmeme-li si konstantní funkci $1 \in C(K)$, můžeme psát pro každé $y \in S$

$$h(y) = h(y)\varepsilon_{\phi(y)}(1) = (T^*\varepsilon_y)(1) = \varepsilon_y(T1) = T1(y).$$

Protože $T1 \in C(S)$ je spojitou funkcí, je $h = T1$ spojitá.

Nyní ve třech krocích dokážeme, že zobrazení ϕ je homeomorfismem S na K.

Krok 1. Zobrazení ϕ je prosté.

Důkaz prostory provedeme sporem. Nechť tedy ϕ není prosté, potom existují $y_1, y_2 \in S$ takové, že $y_1 \neq y_2$ a $\phi(y_1) = \phi(y_2)$. Definice zobrazení ϕ říká, že platí rovnosti

$$T^*(\varepsilon_{y_1}) = h(y_1)\varepsilon_{\phi(y_1)}, \quad T^*(\varepsilon_{y_2}) = h(y_2)\varepsilon_{\phi(y_2)} = h(y_2)\varepsilon_{\phi(y_1)}.$$

Protože $\phi(y_1) = \phi(y_2)$ a zobrazení T^* je prosté (viz například Lemma 1.3.2), platí $h(y_1) = -h(y_2)$. Takže $T^*(\varepsilon_{y_1}) = -T^*(\varepsilon_{y_2}) = T^*(-\varepsilon_{y_2})$. Využijeme-li ještě jednou prostotu T^*, dostaneme, že $\varepsilon_{y_1} = -\varepsilon_{y_2}$. To však není možné, jak můžeme nahlédnout například dosazením konstantní funkce $1 \in C(S)$:

$$\varepsilon_{y_1}(1) = 1 \neq -1 = -\varepsilon_{y_2}(1).$$

Tím jsme dostali spor a ϕ je tedy prosté zobrazení.

Krok 2. Zobrazení ϕ je surjektivní zobrazení S na K.

Vezměme si libovolné $x \in K$. Pak díky lemmatům 1.3.3 a 1.5.8 existuje prvek $u \in \{\pm\varepsilon_y : y \in S\}$ takový, že $T^*(u) = \varepsilon_x$. Pokud existuje bod $y \in S$ takový, že $u = \varepsilon_y$, dostáváme $\phi(y) = x$ a jsme hotovi. Pokud existuje $y \in S$ takové, že $u = -\varepsilon_y$, pak také $\phi(y) = x$.

Krok 3. V závěrečném kroku dokážeme, že je ϕ homeomorfismem.

Nejprve ukážeme, že je zobrazení ϕ spojité. Protože $h \in C(K)$ a pro každé $x \in K$ je $h(x) \neq 0$, je funkce $1/h$ spojitá. Z definice ϕ platí, že $\phi(y) = \varepsilon^{-1}(T^*(\varepsilon_y)/h(y))$, a zobrazení ϕ je tedy spojité, protože je složením spojitých zobrazení. Z toho již podle Lemmatu 1.4.5 plyne, že je ϕ homeomorfismus, protože je to spojitá bijekce na kompaktní množinu K.

Pro dokončení důkazu stačí obhájit platnost identity (2.1). To provedeme přímočarým výpočtem. Pro všechna $y \in S$ a $f \in C(K)$ platí

$$Tf(y) = \varepsilon_y(Tf) = T^*(\varepsilon_y)(f) = (h(y)\varepsilon_{\phi(y)})(f) = h(y)f(\phi(y)),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Původní Stoneův důkaz nevyužíval toho, že isometrie zobrazuje extremální body na extremální body, ale jistého chování isometrie k bodům, ve kterých spojitá funkce nabývá své normy.

Důkaz. V první části důkazu provedeme konstrukci zobrazení $\psi : K \to S$. O něm v další části dokážeme, že je homeomorfismem prostorů K a S. Pro jeho konstrukci však bude potřeba definovat několik pomocných objektů a všimnout si jejich vlastností.

Krok 1. Definujme nejprve zobrazení i, které každému $x \in K$ přiřadí podmnožinu množiny spojitých funkcí předpisem $i(x) = \{f \in C(K) : |f(x)| = \|f\|\}$. Množina $i(x)$ zřejmě obsahuje konstantní funkce a má tu vlastnost, že pokud $f_1, f_2, \dots, f_n \in i(x)$, potom také funkce g definovaná jako

$$g = \sum_{i=1}^{n} f_j \operatorname{sgn}(f_j(x))$$

náleží do $i(x)$, protože $\|g\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_j\|$ a současně

$$|g(x)| = \sum_{i=1}^{n} f_j(x)\operatorname{sgn}(f_j(x)) = \sum_{i=1}^{n} |f_j(x)| = \sum_{i=1}^{n} \|f_j\|.$$

Předchozí výpočet dává také identitu $\|g\| = \sum_{i=1}^{n} \|f_j\|$.

Pro každé $y \in S$ označme analogicky jako v předchozím

$$j(y) = \{f \in C(S) : |f(y)| = \|f\|\}.$$

Fakt 1. Dokážeme, že pokud pro $x_1, x_2 \in K$ platí $i(x_1) \subset i(x_2)$, potom $x_1 = x_2$.

Důkaz povedeme sporem. Nechť je $x_1 \neq x_2$. V kompaktním prostoru K můžeme použít Urysohnovo lemma a zkonstruovat funkci $f \in C(K)$ s vlastnostmi: $\|f\| = 1$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 0$. Potom $f \in i(x_1)$, ale $f \notin i(x_2)$. Tím jsme dostali spor s $i(x_1) \subset i(x_2)$, a tedy $x_1 = x_2$.

Platí také analogické tvrzení pro zobrazení j. Pokud pro $y_1, y_2 \in S$ platí $j(y_1) \subset j(y_2)$, potom $y_1 = y_2$.

Fakt 2. Dokážeme, že pro každé $x \in K$ existuje $y \in S$ takové, že $T(i(x)) \subset j(y)$ a ke každému $y \in S$ existuje bod $x \in K$ takový, že $j(y) \subset T(i(x))$.

Zvolme si libovolné $x_0 \in K$. K takto pevně zvolenému bodu x_0 definujeme zobrazení F, které každé funkci $f \in i(x_0)$ přiřadí množinu $F(f) = \{y \in S : |Tf(y)| = \|Tf\|\}$.

Nyní si vezmeme $f_1, f_2, \ldots, f_n \in i(x)$ a definujeme $g = \sum_{j=1}^{n} f_j \mathrm{sgn}(f_j(x))$. Funkce g je spojitá, a proto musí existovat $t \in S$ takové, že $|Tg(y)| = \|Tg\|$. Dále počítejme

$$\|Tg\| = |Tg(y)| \leq \sum_{j=1}^{n} |Tf_j(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|Tf_j\| = \sum_{i=1}^{n} \|f_j\| = \|g\| = \|Tg\|.$$

Ve výpočtu jsme použili po řadě trojúhelníkovou nerovnost, definici maximové normy a fakt, že T je isometrie. Z rovnosti výrazů na koncích nerovnosti nutně plyne, že pro $j = 1, \ldots, n$ platí $|Tf_j(y)| = \|Tf_j\|$, neboli $y \in F(f_j)$.

Soubor $\{F(f) : f \in i(x)\}$ uzavřených podmnožin S (uzavřenost plyne ze spojitosti funkce Tf) má tedy konečnou průnikovou vlastnost, a protože je S kompaktní množina, plyne z Lemmatu 1.4.1, že má uvedený soubor množin neprázdný průnik. Vezměme libovolný prvek průniku a označme ho jako y_0.

Dokázali jsme, že pro každé $f \in i(x_0)$ platí $Tf \in j(y_0)$, tedy $T(i(x_0)) \subset j(y_0)$. Tím je první část tvrzení dokázána.

Výše uvedenou úvahu bychom mohli analogicky provést se zobrazením T^{-1} namísto zobrazení T. V tom případě bychom dostali, že pro každý bod $y \in S$ existuje $x \in K$ takový, že $T^{-1}(j(y)) \subset i(x)$ (neboli $j(y) \subset T(i(x))$).

Fakt 3. Dokážeme, že pro každé $x \in K$ existuje právě jedno $y \in S$ takové, že $T(i(x)) \subset j(y)$ a pro každé $y \in S$ existuje právě jedno $x \in K$ takové, že $T^{-1}(j(y)) \subset i(x)$ (neboli $j(y) \subset T(i(x))$).

Tvrzení dokážeme opět sporem. Nechť existuje $x \in K$ a $y_1, y_2 \in S$, $y_1 \neq y_2$ takové, že $T(i(x)) \subset j(y_1) \cap j(y_2)$.

Podle Faktu 2 můžeme nalézt $x_1 \in K$ takové, že $j(y_1) \subset T(i(x_1))$. Dostáváme tedy, že $T(i(x)) \subset T(i(x_1))$, což je díky prostotě T ekvivalentní $i(x) \subset i(x_1)$. Fakt 1 říká, že potom $x = x_1$.

Složením inkluzí získaných v předchozích dvou odstavcích dostáváme

$$T(i(x)) \subset j(y_1) \subset T(i(x_1)) = T(i(x)).$$

Tedy $T(i(x)) = j(y_1)$. Analogicky bychom dokázali, že $T(i(x)) = j(y_2)$, a proto $j(y_1) = j(y_2)$. Protože podle předpokladu je $y_1 \neq y_2$, můžeme opět použít Urysohnovo lemma k nalezení funkce $g \in C(S)$ takové, že $g \in j(y_1)$, ale $g \notin j(y_2)$. To je však ve sporu s $j(y_1) = j(y_2)$ a první část Faktu 3 je dokázána.

Druhou část bychom dokázali analogickým postupem provedeným s T^{-1} namísto zobrazení T.

Krok 2. Nyní můžeme konečně definovat zobrazení $\psi : K \to S$. Volme $x \in K$, potom dle Faktu 3 existuje právě jedno $y \in S$ takové, že $T(i(x)) \subset j(y)$. Takto nalezené y označíme jako $\psi(x)$.

Fakt 4. Dokážeme platnost identity $T(i(x)) = j(\psi(x))$.

Volme $x \in K$. Inkluze $T(i(x)) \subset j(\psi(x))$ plyne přímo z definice zobrazení ψ.

Podle Faktu 2 existuje k $\psi(x) \in S$ právě jedno $x_1 \in K$ takové, že $j(\psi(x)) \subset T(i(x_1))$. Složením inkluzí dosáváme $T(i(x)) \subset T(i(x_1))$, což je díky prostotě T ekvivalentní $i(x) \subset i(x_1)$. Podle Faktu 1 je $x = x_1$ a dostáváme tedy i druhou požadovanou inkluzi $j(\psi(x)) \subset T(i(x))$.

Krok 3. Zobrazení ψ je prosté.

Dokazujme sporem. Nechť existují $x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$ takové, že $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.

Podle Faktu 4 to znamená, že $T(i(x_1)) = T(i(x_2))$, neboli $i(x_1) = i(x_2)$. Z toho opět jednoduchým použitím Urysohnova lemmatu plyne, že $x_1 = x_2$, což je spor s předpokladem, a ψ je proto prosté zobrazení.

Krok 4. Zobrazení ψ je surjekce.

Mějme $y \in S$. Podle Faktu 2 můžeme nalézt $x \in K$ takové, že $j(y) \subset T(i(x))$. Navíc díky Faktu 4 víme, že $T(i(x)) = j(\psi(x))$, a tedy $j(y) \subset j(\psi(x))$. Z Faktu 1 plyne, že $y = \psi(x)$. Zobrazení ψ tedy zobrazuje K na S.

Krok 5. Nyní ověříme, že ψ je homeomorfismus.

K tomu ukážeme, že množiny $U_f = \{x \in K : |f(x)| = \|f\|\}$ skrze ψ korespondují s $V_f = \{y \in S : |Tf(y)| = \|Tf\|\}$ (tzn. $\psi(U_f) = V_f$) a jejich komplementy jsou po řadě bázemi prostorů K a S. Zobrazení ϕ tedy bude zobrazovat bázi K na bázi S, což je ekvivalentní definice homeomorfismu.

Důkaz korespondence je snadný, protože platí

$$\psi(U_f) = \psi\Big(\bigcup_{f \in i(x)} \{x\}\Big) = \bigcup_{f \in i(x)} \{\psi(x)\} = \bigcup_{Tf \in j(\psi(x))} \{\psi(x)\} = \bigcup_{Tf \in j(y)} \{y\} = V_f.$$

Dokážeme, že systém $\mathcal{Q} = \{K \setminus U_f, f \in C(K)\}$ tvoří bázi prostoru K. Prvky $\mathcal{Q}$ jsou zřejmě otevřené množiny v topologii K. Stačí dokázat, že tvoří bázi nějaké topologie. Z toho již vyplyne, že jde o bázi naší topologie uvažované na K.

Aby bylo $\mathcal{Q}$ bází, musí pro každé $f_1, f_2 \in C(K)$ a $x \in (K \setminus U_{f_1}) \cap (K \setminus U_{f_2})$ existovat $g \in C(K)$, že $x \in K \setminus U_g \subset (K \setminus U_{f_1}) \cap (K \setminus U_{f_2})$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ a $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ – jinak bychom přešli k $|f_1|/\|f_1\|$ a $|f_2|/\|f_2\|$.

Označme pro přehlednost $f = f_1 \vee f_2$. Potom $(K \setminus U_{f_1}) \cap (K \setminus U_{f_2}) = K \setminus U_f$. . Zvolme nyní $x \in K \setminus U_f$ a k němu $c \in \mathbb{R}$ takové, aby $f(x) < c < 1$ a definujme množiny

$$A = \{t \in K : c \leq f(t)\}, \quad B = \{t \in K : f(t) < c\}.$$

Množina B je otevřená a $x \in B$. Definujeme funkci $g \in C(K)$ jako $g = f/c \wedge 1$.

Zřejmě platí $g \in C(K)$. Dále $g = 1$ na A a $|g| < 1$ na množině B. A protože $A \cup B = K$, máme $K \setminus U_g = B \ni x$, což jsme chtěli ukázat.

Krok 6. Na závěr definujme zobrazení $\phi = \psi^{-1}$ a funkci $h = T1$. Dokážeme, že splňují identitu požadovanou ve znění věty.

Protože $1 \in i(x)$ pro každé $x \in K$, platí podle Kroku 2, že $T1 \in j(\psi(x))$ pro každé $x \in K$. To znamená, že h nabývá normy v každém bodě $y \in S$ a tedy $|h| = 1$.

Naším dalším cílem je dokázat platnost identity

$$Tf(\psi(x)) = T1(\psi(x))f(x) \qquad \text{pro každé } x \in K, f \in C(K), \tag{2.2}$$

která je jen přepisem identity (2.1).

Pro dané $x \in K$ ji dokážeme pro každou funkci z $i(x)$. Protože $i(x)$ zřejmě obsahuje konstanty, odděluje body a je to algebra, jde podle Stone-Weierstrassovy věty o hustou podmnožinu $C(K)$. Ze spojitosti objektů vystupujících v identitě odvodíme závěr, že platí pro všechna $f \in C(K)$.

Mějme tedy $x \in K$. Potom pro každou funkci $f \in i(x)$ z definice zobrazení ψ platí

$$|Tf(\psi(x))| = |f(x)| = |h(\psi(x))f(x)|. \tag{2.3}$$

Stačí tedy dokázat, že výrazy na obou stranách rovnosti mají korespondující znaménka. Konstanty náleží do $i(x)$ a snadno ověříme, že splňují dokazovanou identitu. Předpokládejme nyní, že $T1(\psi(x)) = 1$. Chápejme $\|f\|$ jako konstantní funkci na S. Potom

$$0 \leq Tf(\psi(x)) + \|f\|(\psi(x)) = Tf(\psi(x)) + (T\|f\|)(\psi(x)) = T(f + \|f\|)(\psi(x))$$

a protože $f + \|f\| \geq 0$, platí s přihlédnutím k (2.3) rovnost

$$T(f + \|f\|)(\psi(x)) = T1(\psi(x))(f + \|f\|)(x)$$

a díky platnosti identity pro konstanty proto máme $Tf(\psi(x)) = T1(\psi(x))f(x)$.

Pokud je $T1(\psi(x)) = -1$, potom

$$0 \geq Tf(\psi(x)) - \|f\|(\psi(x)) = Tf(\psi(x)) + (T\|f\|)(\psi(x)) = T(f + \|f\|)(\psi(x)).$$

Opět jsme využili platnosti (2.2) pro konstanty. Protože $f + \|f\| \geq 0$, platí s přihlédnutím k (2.3) rovnost

$$T(f + \|f\|)(\psi(x)) = -(f + \|f\|)(x) = T1(\psi(x))(f + \|f\|)(x).$$

Díky platnosti (2.2) pro konstanty a z linearity T snadno vidíme, že také f splňuje požadovanou identitu. Tím je důkaz hotov.

$\square$

2.2 Eilenbergova věta

Eilenbergova věta modifikuje původní Banach-Stoneovu větu v tom smyslu, že klade na prostory, nad nimiž pracujeme, odlišnou podmínku. Požaduje se, aby byly spočetně kompaktní, úplně regulární a splňovaly první axiom spočetnosti. Pro nás bude mít význam zejména způsob, jakým se v důkazu věty konstruuje požadovaný homeomorfismus. Ten využívá jiného postřehu, než uvedené dva důkazy Banach-Stoneovy věty a v tom bude spočívat její přínos. Její myšlenka je ve vlastnosti isometrie a exponujících funkcí. Nejprve budeme potřebovat několik definic.

Definice 2.2.1. Nechť X je topologický prostor. Funkci $f \in C^b(X)$ nazveme exponující funkcí s exponovaným bodem $t_0 \in K$, pokud platí $|f(t)| < |f(x_0)|$ pro všechna $t \in K$, $t \neq t_0$. V dalším textu budeme v tomto smyslu používat také obratu „funkce f exponuje bod t_0“.

Definice 2.2.2. Nechť X je Banachův prostor a $x \in B_X$. Pak definujeme

$$\operatorname{st}(x) = \{y \in B_X : \|y\| \leq 1, \|x + y\| = 2\}.$$

Pozorování. *Pokud* $\operatorname{st}(x) \neq \emptyset$, *potom* $\|x\| = 1$.

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Nechť existuje $x \in B_X$, $\|x\| < 1$ a $y \in \operatorname{st}(x)$. Potom z definice $2 = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| < 2$. To je spor a pozorování je tedy dokázáno. □

Než dokážeme Eilenbergovu větu, uvedeme ještě dvě pomocná technická lemmata a užitečnou charakteristiku exponujících funkcí.

Lemma 2.2.3. *Mějme úplně regulární prostor X splňující první axiom spočetnosti. Potom pro každý bod $x_0 \in X$ existuje nezáporná funkce $f \in S_{C(X)}$ exponující bod x_0.*

Důkaz. Protože X splňuje první axiom spočetnosti, existuje spočetná báze $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtru otevřených okolí bodu x_0.

Jako důsledek úplné regularity prostoru X, že $\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Zřejmě $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Pokud by existovalo $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ takové, že $y \neq x_0$, mohli bychom najít otevřené okolí x_0 neobsahující bod y. To by bylo ve sporu s vlastnostmi báze filtru.

Nyní přejděme k vlastní konstrukci funkce $f \in S_{C(X)}$ exponující bod x_0. Díky úplné regularitě existují funkce $f_n \in C(X)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n(x_0) = 1$ a pro každé $x \in X \setminus G_n$ platí $f_n(x) = 0$. Hledanou exponující funkci potom definujeme jako $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n$. Ověření všech vlastností je snadné. □

Lemma 2.2.4. *Nechť K je spočetně kompaktní topologický prostor. Mějme funkce $f, g \in B_{C(K)}$. Potom $g \in \operatorname{st}(f)$, právě když existuje $t_0 \in K$, pro než platí $f(t_0) = g(t_0)$ a $|f(t_0)| = |g(t_0)| = 1$.*

Důkaz. Dokažme nejprve první implikaci. Nechť platí uvedená podmínka. Potom

$$2 \geq \|f + g\| \geq |f(t_0) + g(t_0)| = 2|f(t_0)| = 2$$

a $g \in \operatorname{st}(f)$ podle definice.

Přejděme k důkazu druhé implikace. Nechť $g \in \operatorname{st}(f)$. Můžeme najít body $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $\|f+g\| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)+g(x_n)|$. Protože je K spočetně kompaktní, má podle Lemmatu 1.4.2 množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ hromadný bod. Můžeme tedy nalézt $t_0 \in K$, pro něž platí

$$2 = \|f + g\| = |f(t_0) + g(t_0)| \leq |f(t_0)| + |g(t_0| \leq 2. \tag{2.4}$$

Z toho nutně plyne, že $|f(t_0)| = |g(t_0)| = 1$. Pokud by $f(t_0) = -g(t_0)$, dostali bychom spor s (2.4). Proto platí $f(t_0) = g(t_0)$ a důkaz je hotov.

□

Věta 2.2.5. *Nechť je K spočetně kompaktní úplně regulární topologický prostor. Potom je funkce $f \in S_{C(K)}$ exponující funkcí, právě když je $\mathrm{st}(f)$ konvexní.*

Důkaz. Dokažme nejprve snazší implikaci. Mějme exponující funkci $f \in S_{C(K)}$. Potom z definice existuje $t_0 \in K$ takové, že $|f(t_0)| = 1$ a $|f(t)| < 1$ pro $t \neq t_0$. Snadným důsledkem Lemmatu 2.2.4 je fakt, že $\mathrm{st}(f) = \{g \in B_{C(K)} : g(t_0) = f(t_0)\}$. Přímočarým výpočtem ověříme, že je tato množina konvexní.

Nechť $g_1, g_2 \in \mathrm{st}(f)$ a $0 \leq \lambda \leq 1$. Potom $g_1, g_2 \in B_{C(K)}$ a $\|\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2\| \leq 1$ z trojúhelníkové nerovnosti. Dále

$$\lambda g_1(t_0) + (1-\lambda)g_2(t_0) = \lambda f(t_0) + (1-\lambda)f(t_0) = f(t_0).$$

Takže $\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2 \in \mathrm{st}(f)$ a první část věty je dokázána.

Důkaz opačné implikace provedeme tak, že dokážeme její obměnu. Nechť $f \in S_{C(K)}$ není exponující. Funkce $|f| \in S_{C(K)}$ nabývá dle Lemmatu 1.4.3 svého maxima $\||f|\| = 1$. Protože f není exponující, není ani $|f|$ exponující, a proto musí maxima nabývat alespoň ve dvou různých bodech $t_1, t_2 \in K$.

Protože je K úplně regulární, existují disjunktní otevřené množiny G_1, G_2 takové, že $t_1 \in G_1$ a $t_2 \in G_2$, a spojité funkce g_1, g_2 takové, že pro $i = 1, 2$ platí $\|g_i\| = 1$, $g_i(t_i) = f(t_i)$ a $g_i(t) = 0$ pro $t \in K \setminus G_i$. Pro $i = 1, 2$ tedy dostáváme

$$2 \geq \|f\| + \|g_i\| \geq \|f + g_i\| \geq |f(t_i) + g_i(t_i)| = 2,$$

takže $\|f + g_i\| = 2$.

Z konstrukce vyplývá, že $\|g_1 + g_2\| = 1$. Protože $\|g_1\| = \|g_2\| = 1$ a $\|f + g_1\| = \|f + g_2\| = 2$, platí $g_1, g_2 \in \mathrm{st}(f)$. Přitom však funkce $\frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in \mathrm{st}(f)$, protože

$$\|\frac{1}{2}(g_1 + g_2) + f\| \leq \frac{1}{2}\|g_1 + g_2\| + \|f\| = \frac{1}{2} + 1 < 2.$$

Množina $\mathrm{st}(f)$ tedy není konvexní a věta je dokázána.

□

Důsledek 2.2.6. *Mějme úplně regulární spočetně kompaktní prostory S a K. Nechť je T isometrický isomorfismus mezi $C(S)$ a $C(K)$. Potom $f \in C(S)$ je exponující funkcí, právě když $Tf \in C(K)$ je exponující funkcí.*

Důkaz. Vezměme si funkci $f \in C(S)$ exponující bod $s_0 \in S$.

Z charakteristiky dané Větou 2.2.5 je $\mathrm{st}(f)$ konvexní množina. Protože je T isometrie, platí rovnost $\mathrm{st}(Tf) = T(\mathrm{st}(f))$. To nahlédneme přímočarým výpočtem z definice

$$\begin{aligned} \mathrm{st}(Tf) &= \{g \in C(K) : \|g\| \leq 1, \|g + Tf\| = 2\} && (2.5)\\ &= \{Tg' \in C(S) : \|g'\| \leq 1, \|g' + f\| = 2\} = T(\mathrm{st}(f)). && (2.6) \end{aligned}$$

Z linearity T plyne, že také $T(\mathrm{st}(f))$ je konvexní množina. Díky identitě (2.5) a použitím Věty 2.2.5 dostáváme, že je Tf exponovanou funkcí. Existuje tedy bod $t_0 \in K$, který je exponovaným bodem funkce Tf.

Využitím toho, že T^{-1} je také isometrický isomorfismus bychom mohli předchozí úvahu aplikovat na funkci $Tf \in C(K)$ exponující bod $t_0 \in K$. Dostali bychom, že potom je také funkce $T^{-1}Tf = f \in C(S)$ exponující. Tím je důsledek dokázán. □

Nyní přejděme k vlastnímu důkazu Eilenbergovy věty.

Věta 2.2.7. *Mějme úplně regulární spočetně kompaktní prostory S a K, které splňují první axiom spočetnosti. Nechť je T isometrický isomorfismus mezi $C(S)$ a $C(K)$. Potom existuje homeomorfismus ϕ prostorů K a S a funkce $h \in C(K)$ taková, že platí $|h(t)| = 1$ a navíc*

$$Tf(t) = h(t)f(\phi(t)) \qquad \textit{pro všechna } t \in K, f \in C(S). \tag{2.7}$$

Důkaz. **Úvod.** Vezměme si bod $s_0 \in S$. Podle Lemmatu 2.2.3 existuje funkce $f \in S_{C(S)}$, která jej exponuje. Potom podle Důsledku 2.2.6 je také $Tf \in C(K)$ exponující funkcí. Její exponovaný bod označme $t_0 \in K$.
Fakt 1. Nechť $f \in C(S)$ exponuje bod s_0 a $g \in C(S)$ v s_0 nabývá své normy, pak funkce $Tf \in C(K)$ exponuje stejný bod, v jakém $Tg \in C(K)$ nabývá normy.

Důkaz. Nechť je tedy $f \in S_{C(S)}$ funkce exponující $s_0 \in S$. Označme jako $t_0 \in K$ bod, který exponuje funkce Tf. Nyní uvažujme libovolnou funkci $g \in S_{C(S)}$, která nabývá své normy v bodě s_0. Ukážeme, že potom funkce Tg nabývá normy v bodě t_0.

Funkce $v = \frac{f(s_0)}{g(s_0)} g \in \mathrm{st}(f)$. To ověříme z definice. Platí

$$\|v\| = \|\frac{f(s_0)}{g(s_0)} g\| \leq \|g\| \leq 1,$$

takže $\|v\| \leq 1$. Dále

$$2 \geq \|v + f\| \geq \|\frac{f(s_0)}{g(s_0)} g + f\| \geq \|f(s_0) + f(s_0)\| = 2|f(s_0)| = 2,$$

a tedy $\|v + f\| = 2$.

Protože $v \in \mathrm{st}(f)$, platí $Tv \in T(\mathrm{st}(f)) = \mathrm{st}(Tf)$. Podle Lemmatu 2.2.4 musí existovat $t_1 \in K$, kde $|Tv(t_1)| = |Tf(t_1)| = 1$. A protože je Tf exponující funkcí s exponovaným bodem t_0, nutně $t_1 = t_0$. Platí, že $\|Tv\| = 1$, a proto Tv v bodě t_0 nabývá normy.

Dále dostáváme, že

$$1 = |Tv(t_0)| = |\frac{f(s_0)}{g(s_0)} Tg(t_0)| = |Tg(t_0)|.$$

Protože je T je isometrie a $\|g\| = 1$, nabývá Tg v bodě t_0 své normy. □

Fakt 2. Nechť funkce f, g exponují bod s_0, potom funkce $Tf, Tg \in C(K)$ exponují stejný bod.

Důkaz. Tvrzení je důsledkem Faktu 1, protože funkce $f \in S_{C(S)}$ exponující bod $x \in S$ v tomto bodě nabývá své normy. □

Krok 1. Definice zobrazení $\psi : S \to K$.

Mějme bod $s \in S$. K němu najdeme funkci $f \in S_{C(S)}$, která exponuje bod $x \in K$. Podle Úvodu je Tf exponující funkce. Její exponovaný bod označíme jako $t \in K$. Položíme $\psi(s) = t$. Díky Faktu 2 je ψ dobře definováno.
Fakt 3. Pokud $f \in C(S)$ nabývá normy v $s_0 \in S$, potom $Tf \in C(K)$ nabývá normy v bodě $\psi(s_0) \in K$.

Důkaz. K bodu s_0 nalezneme exponující funkci $g \in C(S)$. Potom dle definice ψ funkce Tg exponuje bod $\psi(s_0)$ a z Faktu 2 v něm funkce Tf nabývá své normy. $\square$

Krok 2. Konstrukce zobrazení $\phi : K \to S$.

Analogickým postupem, jakým jsme zkonstruovali zobrazení $\psi : S \to K$ bychom mohli zkonstruovat zobrazení $\phi : K \to S$ s vlastnostmi:

(i) Pokud $f \in C(K)$ exponuje bod t_0 a $g \in C(K)$ v t_0 nabývá své normy, pak funkce $T^{-1}g$ nabývá své normy v bodě, který $T^{-1}f$ exponuje. Tímto bodem je $\phi(t_0)$.

(ii) Pokud $f \in C(K)$ nabývá normy v $t_0 \in K$, potom $T^{-1}f \in C(S)$ nabývá normy v bodě $\psi(t_0) \in S$.

Fakt 5. Platí, že $\psi \circ \phi$ a $\phi \circ \psi$ jsou identity.

Důkaz. Mějme $s \in S$. Potom můžeme najít funkci $f \in C(S)$ exponující bod s. Podle definice ψ exponuje $Tf \in C(S)$ bod $\psi(s)$. Přitom však $T^{-1}Tf = f$ exponuje podle definice ϕ bod $\phi(\psi(s))$. To znamená, že na $s = \phi(\psi(s))$.

Zcela analogicky bychom dostali, že pro každé $t \in K$ platí $\psi(\phi(t)) = t$. $\square$

Krok 3. Zobrazení ψ a ϕ jsou prostá a surjektivní.

Toto je přímý důsledek Faktu 5.

Fakt 6. Funkce $f \in C(S)$ nabývá normy v $s_0 \in S$, právě když $Tf \in C(K)$ nabývá normy v bodě $\psi(s_0) \in K$.

Důkaz. Implikace zleva doprava je obsahem Faktu 3.

Přistupme k důkazu druhé implikace. Nechť $Tf \in C(K)$ nabývá normy v bodě $\psi(s_0) \in K$. Potom podle vlastnosti (ii) zobrazení ϕ nabývá funkce $T^{-1}Tf = f \in C(K)$ normy v $\phi(\psi(s_0))$. Podle Faktu 5 potom platí $\phi(\psi(s_0)) = s_0$. Tvrzení je dokázáno. $\square$

Krok 4. Zobrazení ψ je homeomorfismus.

Nejprve dokážeme, že je ψ spojité zobrazení. Vezměme si otevřenou množinu $G \subset K$. Ukážeme, že $\psi^{-1}(G)$ je také otevřená množina. Důkaz provedeme standardním způsobem. Pro libovolný bod $s_0 \in \psi^{-1}(G)$ nalezneme okolí N takové, že $N \subset \psi^{-1}(G)$.

Protože je K je úplně regulární, můžeme najít $g \in C(K)$ s $\|g\| = 1$ takovou, že $g(\psi(s_0)) = 0$ a $g(t) = 1$ pro všechna $t \in K \setminus G$. Najděme funkci $f \in C(S)$ takovou, že $Tf = g$. Definujme množinu $N = \{s \in S : |f(s)| < \|f\|\}$.

Ukážeme, že je N otevřeným okolím bodu s_0. Množina N je otevřená díky spojitosti f. Dále dokážeme, že $|f(s_0)| < \|f\|$. Pokud by platilo $|f(s_0)| = \|f\|$ (tj. f v bodě s_0 nabývá své normy), podle Faktu 6 by funkce $Tf = g$ nabývala normy v $\psi(s_0)$. To však není pravda, protože $g(\psi(s_0)) = 0$ a $\|g\| = 1$.

Pro dokončení důkazu otevřenosti $\psi^{-1}(G)$ stačí ověřit, že $N \subset \psi^{-1}(G)$, neboli $\psi(N) \subset G$. Mějme $s \in N$, potom f v bodě s nenabývá své normy. To plyne přímo z definice množiny N.

Podle Faktu 6 tedy $Tf = g$ nenabývá své normy ve $\psi(s)$. To znamená, že $\psi(s) \in G$, protože v každém bodě množiny $K \setminus G$ funkce g své normy nabývá. Tím je důkaz spojitosti zobrazení ψ hotov. Spojitost inverze se ukáže analogicky. Zobrazení ψ je tedy homeomorfismus S a K.

Krok 5. Na závěr dokážeme, že pro $\phi = \psi^{-1}$ a pro vhodnou volbu funkce $h \in C(K)$ je splněn vztah (2.7).

Díky Faktu 6 víme, že zobrazení ψ zobrazuje body, v nichž nějaká funkce $f \in C(S)$ nabývá normy, na body, v nichž nabývá normy funkce Tf. Proto platí pro každé $t \in K$ rovnost $|T1(t)| = 1$. Položme $h = T1$ a definujme lineární zobrazení $V : C(S) \to C(K)$, které každému $f \in C(S)$ přiřadí $Vf = \frac{1}{h} \cdot Tf$. Dosazením můžeme ověřit, že $V1 = 1$.

Při důkazu (2.7) využijeme následujícího faktu.

Fakt 7. Pro jakoukoli funkci $f \in C(S)$, která splňuje $f(s) = 0$, platí $Vf(\psi(s)) = 0$.

Důkaz. Nechť $s_0 \in S$. Mějme nezápornou funkci $v \in S_{C(S)}$, která navíc splňuje $v(s_0) = 0$ a $v(s) > 0$ pro $s \neq s_0$.

Platí, že $0 \leq 1 - v(s) \leq 1$ pro všechna $s \in S$, a tedy $\|1 - v\| \leq 1$. Dále

$$2 \geq \|2 - v\| \geq 2 - v(s_0) = 2.$$

Proto $1 - v \in \mathrm{st}(1)$. Takže

$$V(1 - v) \in V(\mathrm{st}(1)) = \mathrm{st}(V1) = \mathrm{st}(1).$$

Rovnost $V((\mathrm{st}(1)) = \mathrm{st}(V(1))$ platí díky tomu, že V je lineární isometrie. Podle charakteristiky z Lemmatu 2.2.4 existuje bod $t_0 \in K$, ve kterém $V(1 - v)(t_0) = 1$.

Funkce $1 - v$ exponuje bod s_0 a z Kroku 1 víme, že potom $T(1 - v)$ exponuje bod $\psi(s_0)$. Protože $|h| = |T1| = 1$, také $\frac{1}{h} \cdot T(1 - v) = V(1 - v)$ exponuje bod $\psi(s_0)$. Takže platí $|V(1 - v)(\psi(s_0))| = 1$. Z toho již plyne, že $t_0 = \psi(s_0)$. Dostáváme tedy

$$1 = V(1 - v)(\psi(s_0)) = 1 - Vv(\psi(s_0))$$

a snadnou úpravou $Vv(\psi(s_0)) = 0$.

Tato rovnost platí pro všechny funkce $v \in C(Q)$, pro než $v(s_0) = 0$ a $v(s) > 0$. Rovnost totiž platí pro $\frac{v}{\|v\|}$, tedy $0 = V(\frac{v}{\|v\|})(\psi(s_0)) = \frac{1}{\|v\|}Vv(\psi(s_0))$.

Mějme nyní libovolnou nezápornou funkci $f \in C(S)$ s vlastností $f(s_0) = 0$ a v jako v předchozím odstavci. Uvědomme si, že pro dané $s_0 \in S$ příslušnou funkci v s požadovanými vlastnostmi vždy najdeme – podle Lemmatu 2.2.3 totiž můžeme nalézt funkci $v' \in C(S)$, $\|v'\| = 1$ exponující bod s_0. Funkce $v = 1 - |v'|$ bude právě námi hledanou funkcí.

Potom $v + f$ splňuje předpoklady, pro něž jsme dosud platnost pozorování dokázali – platí tedy $V(v + f)(\psi(s_0)) = 0$ a díky tomu $Vf(\psi(s_0)) = 0$.

V případě obecné funkce $f \in C(S)$ s vlastností $f(s_0) = 0$ dostaneme platnost pozorování rozkladem na kladnou a zápornou část a díky linearitě V. $\square$

Nyní se vrátíme k důkazu (2.7). Vezměme libovolné $s \in S$ a $f \in C(S)$. Potom funkce $v = f - f(s)$ splňuje $v(s) = 0$ a podle pozorování platí

$$0 = Vv(\psi(s)) = Vf(\psi(s)) - f(s).$$

Po přejmenování $\psi(s) = t$ a dosazení za $V = \frac{1}{h} \cdot Tf$ dostaneme žádanou identitu. $\square$

Kapitola 3

Banach-Stoneova věta pro prostory afinních funkcí

3.1 Lazarova věta pro simplexy

Základním tvrzením této kapitoly bude Lazarova věta Banach-Stoneova typu. Byla dokázána A. J. Lazarem v [4].

Nejprve však dokážeme podstatně jednodušší tvrzení, které nám poslouží pro ilustraci důkazové techniky ve speciálním případě pozitivního isometrického isomorfismu. Toto tvrzení uvádíme samostatně také z toho důvodu, že pracuje s obecnými kompaktními konvexními množinami, a proto není Lazarova věta jeho přímým zobecněním.

Věta 3.1.1. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny. Nechť existuje isometrický isomorfismus $T : A(K) \to A(S)$, který je navíc pozitivním operátorem. Potom jsou K, S afinně homeomorfní.*

Důkaz. **Úvod.** Podle Lemmatu 1.3.2 je T^* isometrický isomorfismus $A(S)^*$ a $A(K)^*$ a jako takový zobrazuje zobrazuje $\operatorname{ext} B_{A(S)^*}$ na $\operatorname{ext} B_{A(K)^*}$ (Lemma 1.3.3). Lemma 1.5.9 nám dává informaci o tom, jak množina $\operatorname{ext} B_{A(K)^*}$ vypadá. Proto

$$T^* : \varepsilon(\operatorname{ext} S) \cup -\varepsilon(\operatorname{ext} S) \xrightarrow{na} \varepsilon(\operatorname{ext} K) \cup -\varepsilon(\operatorname{ext} K).$$

Protože je T pozitivní operátor, je také T^* pozitivní a platí $T^* : \varepsilon(\operatorname{ext} S) \xrightarrow{na} \varepsilon(\operatorname{ext} K)$ a $T^* : -\varepsilon(\operatorname{ext} S) \xrightarrow{na} -\varepsilon(\operatorname{ext} S)$.

Krok 1. Dokážeme, že $T^*(\varepsilon(S)) = \varepsilon(K)$.

Pro dané $y \in S$ najdeme z Krejn-Milmanovy věty $n_\alpha \in \mathbb{N}$ a pro každé $1 \leq i \leq n_\alpha$ objekty $0 \leq \lambda_i^\alpha \leq 1$ a $y_i^\alpha \in \operatorname{ext} S$ takové, že $y = \lim_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha y_i^\alpha$. Potom ze spojitosti a afinity T^* dostáváme

$$T^*(\varepsilon_y) = T^*(\lim_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \varepsilon_{y_i^\alpha}) = \lim_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha T^*(\varepsilon_{y_i^\alpha}). \tag{3.1}$$

Z Úvodu víme, že pro každé α a $1 \leq i \leq n_\alpha$ je $T^*(\varepsilon_{y_i^\alpha}) \in \varepsilon(\operatorname{ext} K)$. Proto díky tomu, že množina $\varepsilon(K)$ je konvexní a uzavřená, platí $T^*(\varepsilon_y) \in \varepsilon(K)$. Tedy $T^*(\varepsilon(S)) \subset \varepsilon(K)$.

Analogickou úvahou pro isometrický isomorfismus T^{-1} dostaneme

$$(T^{-1})^* : \varepsilon(\operatorname{ext} K) \xrightarrow{na} \varepsilon(\operatorname{ext} S) \qquad \text{a} \qquad (T^{-1})^*(\varepsilon(K)) \subset \varepsilon(S).$$

Tedy $T^*(\varepsilon(S)) = \varepsilon(K)$, což jsme chtěli dokázat.
Krok 2. Můžeme tedy definovat zobrazení $\phi : S \to K$ jako $\phi = \varepsilon^{-1} \circ T^* \circ \varepsilon$.

To je afinní, spojité a prosté, protože je složením afinních, spojitých a prostých zobrazení. Navíc je také surjektivní, protože podle Kroku 1 platí $T^*(\varepsilon(S)) = \varepsilon(K)$. Protože je ϕ spojitá bijekce na kompaktní prostor, je to podle Lemmatu 1.4.5 homeomorfismus.

□

Věta 3.1.2. *Mějme simplexy K a S. Potom jsou $A(K)$, $A(S)$ isometricky isomorfní, právě když jsou K a S afinně homeomorfní.*

Důkaz. Implikace zprava doleva je snadná. Mějme afinní homeomorfismus $\phi : K \xrightarrow{na} S$. Hledaným isometrickým isomorfismem potom bude zobrazení $T : A(K) \xrightarrow{na} A(S)$ definované jako $T(h) = h \circ \phi$. Přímočarým ověřením bychom dostali, že jde o isometrii.

Nyní dokažme opačnou implikaci. Než provedeme konstrukci požadovaného afinního homeomorfismu, učiníme několik úvodních pozorování.

Označíme jako T isometrický isomorfismus $A(K)$ na $A(S)$. Potom je podle Lemmatu 1.3.2 duální operátor T^* isometrický isomorfismus $A(S)^*$ na $A(K)^*$.

Podle Lemmatu 1.5.30 je restrikce T^* na $\varepsilon(S)$ afinní homeomorfismus $\varepsilon(S)$ a $T^*(\varepsilon(S))$. Evaluační zobrazení $\varepsilon : S \to A(S)^*$ je afinním homeomorfismem S na $\varepsilon(S)$. Složené zobrazení $T^* \circ \varepsilon$ je také afinním homeomorfismem. Protože je S simplex, víme díky Lemmatu 1.5.19, že je také $T^*(\varepsilon(S))$ simplex.
Krok 1. V první části definujeme podmnožiny F_1, F_2 množiny $A(K)^*$. Poté dokážeme, že (F_1, F_2) je dvojicí komplementárních rozkladných hran simplexu $\varepsilon(K)$ a $(F_1, -F_2)$ je dvojicí komplementárních rozkladných hran simplexu $T^*(\varepsilon(S))$.

Definujeme

$$F_1 = \varepsilon(K) \cap T^*(\varepsilon(S)) \quad \text{a} \quad F_2 = \varepsilon(K) \cap T^*(-\varepsilon(S)).$$

Dokážeme, že F_1 je uzavřená hrana $\varepsilon(K)$ i $T^*(\varepsilon(S))$. Protože zobrazení T^* a ε jsou homeomorfismy, je F_1 uzavřená množina. Zbývá dokázat, že F_1 je hranou uvedených dvou simplexů.

F_1 je hrana $\varepsilon(K)$: Nechť je $\lambda\varepsilon_a + (1-\lambda)\varepsilon_b \in F_1$, kde $a, b \in K$ a $0 \le \lambda \le 1$. Potřebujeme dokázat, že $\varepsilon_a, \varepsilon_b \in T^*(\varepsilon(S))$. Protože je uvedená konvexní kombinace prvkem F_1, existuje $y \in S$ takové, že

$$T^*(\varepsilon_y) = \lambda\varepsilon_a + (1-\lambda)\varepsilon_b. \tag{3.2}$$

Protože je T^* isometrický isomorfismus, zobrazuje uzavřenou kouli $B_{A(S)^*}$ na uzavřenou kouli $B_{A(K)^*}$. Podle Lemmatu 1.5.7 je $B_{A(S)^*} = \operatorname{co}(\varepsilon(S) \cup -\varepsilon(S))$. Protože $\varepsilon_a, \varepsilon_b \in B_{A(K)^*}$, existují body $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$ a konstanty $0 \le \alpha, \alpha' \le 1$ takové, že

$$\varepsilon_a = T^*(\alpha\varepsilon_{a_1} - (1-\alpha)\varepsilon_{a_2}) \quad \text{a} \quad \varepsilon_b = T^*(\alpha'\varepsilon_{b_1} - (1-\alpha')\varepsilon_{b_2}).$$

Po dosazení do (3.2) dostáváme

$$T^*(\varepsilon_y) = T^*\big(\lambda\alpha\varepsilon_{a_1} - \lambda(1-\alpha)\varepsilon_{a_2} + (1-\lambda)\alpha'\varepsilon_{b_1} - (1-\lambda)(1-\alpha')\varepsilon_{b_2}\big).$$

Zobrazení T^* je prosté, a proto

$$\varepsilon_y = \lambda\alpha\varepsilon_{a_1} - \lambda(1-\alpha)\varepsilon_{a_2} + (1-\lambda)\alpha'\varepsilon_{b_1} - (1-\lambda)(1-\alpha')\varepsilon_{b_2}.$$

Na obou stranách rovnosti máme prvky $A(S)^*$ – dosadíme konstantní funkci $1 \in A(S)$ a upravíme

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda\alpha - \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)\alpha' - (1-\lambda)(1-\alpha') \\ 1 &= \lambda(2\alpha - 1) + (1-\lambda)(2\alpha' - 1) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1. \end{aligned}$$

V poslední nerovnosti musí nastat rovnost, proto nutně $\alpha = \alpha' = 1$. Tedy $\varepsilon_a = T^*(\varepsilon_{a_1})$ a $\varepsilon_b = T^*(\varepsilon_{b_1})$ a $\varepsilon_a, \varepsilon_b \in T^*(\varepsilon(S))$, což jsme chtěli dokázat.

F_1 je hrana $T^*(\varepsilon(S))$: Nechť opět $\lambda T^*(\varepsilon_a) + (1-\lambda)T^*(\varepsilon_b) \in F_1$, kde $a, b \in S$ a $0 \leq \lambda \leq 1$. Potřebujeme dokázat, že $T^*(\varepsilon_a), T^*(\varepsilon_b) \in \varepsilon(K)$. Podobně jako v předchozím existují $y \in S$ a $x \in K$ takové, že

$$\varepsilon_x = \lambda T^*(\varepsilon_a) + (1-\lambda)T^*(\varepsilon_b) = T^*(\varepsilon_y). \tag{3.3}$$

Opět protože $T^*(B_{A(S)^*}) = B_{A(K)^*}$ a $B_{A(K)^*} = \operatorname{co}(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K))$, existují $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$ a konstanty $0 \leq \alpha, \alpha' \leq 1$ takové, že

$$T^*(\varepsilon_a) = \alpha\varepsilon_{a_1} - (1-\alpha)\varepsilon_{a_2} \quad \text{a} \quad T^*(\varepsilon_b) = \alpha'\varepsilon_{b_1} - (1-\alpha')\varepsilon_{b_2}.$$

Po dosazení do rovnosti (3.3) dostáváme

$$T^*(\varepsilon_y) = T^*(\lambda\alpha\varepsilon_{a_1} - \lambda(1-\alpha)\varepsilon_{a_2} + (1-\lambda)\alpha'\varepsilon_{b_1} - (1-\lambda)(1-\alpha')\varepsilon_{b_2}).$$

Dosazením konstantní funkce $1 \in A(S)^*$ stejně jako v předchozím případě dostaneme po úpravě

$$1 = \lambda(2\alpha - 1) + (1-\lambda)(2\alpha' - 1) \leq 1.$$

Proto nutně $\alpha = \alpha' = 1$ a $T^*(\varepsilon_a) = \varepsilon_{a_1}$ a $T^*(\varepsilon_b) = \varepsilon_{b_1}$. Tedy $T^*(\varepsilon_a), T^*(\varepsilon_b) \in \varepsilon(K)$, což jsme chtěli dokázat. F_1 je hranou $T^*(S)$.

Analogicky by se ukázalo, že $F_2 = K \cap T^*(-\varepsilon(S))$ je uzavřená hrana K a $T^*(-\varepsilon(S))$.

Nyní si uvědomme fakt, že $\operatorname{ext}\varepsilon(K) \subset T^*(\varepsilon(S)) \cup T^*(-\varepsilon(S))$. To ospravedlňuje následující řada inkluzí

$$\begin{aligned} T^*(\varepsilon(S)) \cup T^*(-\varepsilon(S)) &= T^*(\varepsilon(S) \cup -\varepsilon(S)) \supset T^*(\operatorname{ext} B_{A(S)^*}) = \\ &= \operatorname{ext} B_{A(K)^*} = \operatorname{ext}\varepsilon(K) \cup -\operatorname{ext}\varepsilon(K). \end{aligned}$$

Předposlední rovnost platí díky tomu, že isometrie zobrazuje extremální body na extremální body (Lemma 1.3.3). Proto $\operatorname{ext}\varepsilon(K) \subset \varepsilon(K) \cap (T^*(\varepsilon(S)) \cup T^*(-\varepsilon(S))) = F_1 \cup F_2$.

Protože jsou F_1, F_2 uzavřené hrany simplexu $\varepsilon(K)$, jsou to podle Lemmatu 1.5.18 také rozkladné hrany. Protože je T^* prosté, platí navíc, že $F_1 \cap F_2 = \varepsilon(K) \cap T^*(-\varepsilon(S)) \cap T^*(\varepsilon(S)) = \emptyset$.

Pro konečná sjednocení kompaktních konvexních množin F_i platí podle Lemmatu 1.4.4 $\overline{\operatorname{co}} \bigcup F_i = \operatorname{co} \bigcup F_i$. Takže z Krein-Milmanovy věty dostáváme

$$K = \overline{\operatorname{co}}\,(F_1 \cup F_2) = \operatorname{co}\,(F_1 \cup F_2).$$

Z toho již podle Lemmatu 1.5.6 plyne, že (F_1, F_2) je dvojicí komplementárních rozkladných hran simplexu $\varepsilon(K)$.

Podobně ukážeme, že $(F_1, -F_2)$ je dvojice komplementárních hran simplexu $T^*(\varepsilon(S))$. Platí $\operatorname{ext} T^*(\varepsilon(S)) \subset \varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K)$, protože

$$\begin{aligned}\operatorname{ext} T^*(\varepsilon(S)) &= T^*(\operatorname{ext}\varepsilon(S)) \subset T^*(\operatorname{ext}\varepsilon(S) \cup -\operatorname{ext}\varepsilon(S)) = T^*(\operatorname{ext} B_{A(S)^*}) = \\ &= \operatorname{ext} B_{A(K)^*} \subset \varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K).\end{aligned}$$

Proto $\operatorname{ext} T^*(\varepsilon(S)) \subset T^*(\varepsilon(S)) \cap (\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K)) = F_1 \cup -F_2$.

Hrany $F_1, -F_2$ jsou rozkladnými hranami simplexu $T^*(\varepsilon(S))$ s vlastností

$$F_1 \cap -F_2 = \varepsilon(K) \cap -\varepsilon(K) \cap T^*(\varepsilon(S)) = \emptyset.$$

Proto opět z Krein-Milmanovy věty $T^*(\varepsilon(S)) = \operatorname{co}(F_1 \cup -F_2)$ a $(F_1, -F_2)$ je podle Lemmatu 1.5.6 dvojicí komplementárních rozkladných hran.

Krok 2. Definujeme zobrazení $\tilde{\sigma} : \varepsilon(K) \to T^*(\varepsilon(S))$.

Pro tento účel definujme nejprve zobrazení $\sigma : F_1 \cup F_2 \subset \varepsilon(K) \to T^*(\varepsilon(S))$ následujícím způsobem

$$\sigma_{|F_1} = \mathrm{Id} \quad \text{a} \quad \sigma_{|F_2} = -\mathrm{Id}.$$

Mějme nyní prvek $\varepsilon_k \in \varepsilon(K)$. Protože je (F_1, F_2) dvojice komplementárních rozkladných hran simplexu $\varepsilon(K)$, můžeme ε_k jednoznačně vyjádřit jako $\varepsilon_k = \lambda\varepsilon_{k'} + (1-\lambda)\varepsilon_{k''}$, kde $0 \le \lambda \le 1$, $\varepsilon_{k'} \in F_1$ a $\varepsilon_{k''} \in F_2$. Potom definujme

$$\tilde{\sigma}(\varepsilon_k) = \lambda\sigma(\varepsilon_{k'}) + (1-\lambda)\sigma(\varepsilon_{k''}).$$

Krok 3. Dokážeme, že zobrazení $\tilde{\sigma}$ je afinním homeomorfismem množin $\varepsilon(K)$ a $T^*(\varepsilon(S))$.

K tomu stačí aplikovat Lemma 1.5.20 na zobrazení $\tilde{\sigma} : \varepsilon(K) \to T^*(\varepsilon(S))$, $\sigma : F_1 \cup F_2 \to T^*(\varepsilon(S))$ a dvojice uzavřených komplementárních rozkladných hran F_1, F_2 množiny $\varepsilon(K)$ a $F_1, -F_2$ množiny $T^*(\varepsilon(S))$.

Zbývá si pouze všimnout, že z definice zobrazení σ platí $\sigma(F_1) = F_1$ a $\sigma(F_2) = -F_2$ a zobrazení $\sigma_{|F_1}$ a $\sigma_{|F_2}$ jsou prostá.

Z Lemmatu 1.5.20 tedy víme, že σ je skutečně afinním homeomorfismem množin $\varepsilon(K)$ a $T^*(\varepsilon(S))$.

Krok 4. Na závěr definujeme zobrazení $\phi : K \to S$ požadované ve znění věty jako složení $\varepsilon^{-1} \circ (T^*)^{-1} \circ \tilde{\sigma} \circ \varepsilon$. To je zřejmě afinním homeomorfismem K a S.

□

3.2 Zobecnění Lazarovy věty

T.S.S.R.K. Rao v článku [5] Lazarovu větu upřesňuje v tom smyslu, že pro každý zadaný isometrický isomorfismus existuje afinní homeomorfismus, který je s touto isometrií určitým způsobem spjat.

Věta 3.2.1. *Nechť K, S jsou simplexy a $T : A(K) \to A(S)$ je isometrický isomorfismus těchto prostorů. Potom $|T1(t)| = 1$ pro všechna $t \in \operatorname{ext} S$ a existuje afinní homeomorfismus $\phi : S \to K$ takový, že platí*

$$Tf(s) = T1(s)f(\phi(s)) \quad \textit{pro všechna } s \in \operatorname{ext} S, f \in A(K). \tag{3.4}$$

Poznámka 3.2.2. *Lazar i Rao ve svých článcích požadují, aby byly obě množiny ze zadání simplexy. Jak vyplyne z následně uvedeného lemmatu, v obou tvrzeních stačí předpokládat simplicialitu pouze jedné z množin.*

Lemma 3.2.3. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny a S je simplex. Předpokládejme dále, že $A(K), A(S)$ jsou isometricky isomorfní. Potom také K je simplex.*

Důkaz. Využijeme charakteristiky simplexu pomocí F.2.I.S.P. (Definice 1.5.2, bod (iii)). Pro důkaz našeho tvrzení si stačí uvědomit, že isometrický isomorfismus zobrazuje uzavřené koule na uzavřené koule. $\square$

Vyvstává otázka, zda lze Větu 3.2.1 zobecnit i na jiné struktury, než jsou simplexy. Ukážeme, že pro případ obecné kompaktní množiny to možné není. Uvedu příklad kompaktní konvexní množiny a isometrického isomorfismu, ke které nemůže existovat homeomorfismus, aby byl splněn vztah (3.4).

Tuto otázku částečně zodpovídají dva následující výsledky. Dalším obsahem této kapitoly bude jejich zobecnění.

Věta 3.2.4 (Ellis a So, [7])**.** *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny takové, že každá dvojice jejích vzájemně komplementárních hran je již dvojicí rozkladných hran (tuto vlastnost pojmenujme ES). Potom $A(K)$ je isometricky isomorfní $A(S)$, právě když je K afinně homeomorfní s S. Přitom ke každé lineární isometrii existuje takový afinní homeomorfismus, že je splněna* (3.4)*.*

Než uvedeme druhou větu, uveďme následující definici.

Definice 3.2.5. K je jednoznačně rozložitelná (má *unique decomposition property*), pokud pro každé $\Phi \in A(K)^*$ existuje jednoznačně určený rozklad $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, kde $\Phi_1, \Phi_2 \geq 0$ a $\|\Phi_1\| + \|\Phi_2\| = \|\Phi\|$.

Věta 3.2.6 (Curnock, Howroyd, Wong, Ngai-Ching, [6])**.** *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny, které jsou jednoznačně rozložitelné. Potom $A(K)$ je isometricky isomorfní $A(S)$, právě když je K afinně homeomorfní s S. Přitom ke každé lineární isometrii existuje takový afinní homeomorfismus, že je splněna* (3.4)*.*

Curnock, Howroyd, Wong, Ngai-Ching na příkladech ukazují, že podmínka jednoznačné rozložitelnosti a ES z článku [7] jsou různé geometrické podmínky.

(i) Existuje množina, která je jednoznačně rozložitelná a má vlastnost ES.

(ii) Existuje množina, která je jednoznačně rozložitelná, ale nemá vlastnost ES.

(iii) Existuje množina, která není jednoznačně rozložitelná, ale má vlastnost ES.

V dalších úvahách nám pomůže následující lemma. Důkaz části (i) se inspiruje článkem [6].

Lemma 3.2.7. *Mějme kompaktní konvexní množiny K, S a isometrický isomorfismus $T : A(K) \to A(S)$. Definujme S_1 a S_2 jako $S_1 = \{x \in S : T1(x) = 1\}$ a $S_2 = \{x \in S : T1(x) = -1\}$. Potom platí, že*

(i) $\operatorname{ext} S \subset S_1 \cup S_2$ *a navíc jsou S_1 a S_2 vzájemně komplementární paralelní hrany.*

(ii) Pro všechna $s \in \operatorname{ext} S$ platí $|T1(s)| = 1$.

Existují-li navíc $h \in A(S)$ a afinní homeomorfismus $\phi : S \to K$ prostorů S a K takové, že platí

$$Tf(s) = h(s)f(\phi(s)) \quad \textit{pro všechna } s \in \operatorname{ext} S, f \in A(K), \tag{3.5}$$

potom

(iii) $h = T1$ na $\operatorname{ext} S$, a tedy i na S,

(iv) $\varepsilon_{\phi(s)} = T^*(\varepsilon_s)$ pro $s \in S_1$ a $\varepsilon_{\phi(s)} = -T^*(\varepsilon_s)$ pro $s \in S_2$,

(v) $Tf(s) = f(\phi(s))$ pro $s \in S_1$ a $Tf(s) = -f(\phi(s))$ pro $s \in S_2$,

(vi) Pro každé $s \in S$ existuje jednoznačný rozklad $s = \lambda x + (1 - \lambda)y$, kde $x \in S_1$, $y \in S_2$ a $0 \leq \lambda \leq 1$. Tedy S_1 a S_2 jsou rozkladné hrany.

Důkaz (i). Podle Lemmatu 1.5.31 víme, že jsou množiny S_1, S_2 hranami.

Protože je T isometrický isomorfismus $A(K)$ na $A(S)$, podle Lemmatu 1.3.2 je T^* isometrickým isomorfismem $A(S)^*$ na $A(K)^*$. Z Lemmatu 1.3.3 víme, že potom $T^*(\operatorname{ext}(B_{A(S)^*})) = \operatorname{ext}(B_{A(K)^*})$. Podle Lemmatu 1.5.9 platí $\operatorname{ext}(B_{A(S)^*}) = \varepsilon(\operatorname{ext} S) \cup -\varepsilon(\operatorname{ext} S)$, a proto $T^*(\varepsilon(\operatorname{ext} S) \cup -\varepsilon(\operatorname{ext} S)) = \varepsilon(\operatorname{ext} K) \cup -\varepsilon(\operatorname{ext} K)$.

Pro každé $s \in \operatorname{ext} S$ je tedy $T^*(\varepsilon_s) \in \varepsilon(\operatorname{ext} K)$ nebo $T^*(\varepsilon_s) \in -\varepsilon(\operatorname{ext} K)$. Z výpočtu

$$T1(s) = \varepsilon_s(T1) = (T^*\varepsilon_s)(1)$$

můžeme usoudit, že pokud $T^*(\varepsilon_s) \in \varepsilon(\operatorname{ext} K)$, potom $T1(s) = 1$ a $s \in S_1$. V případě varianty $T^*(\varepsilon_s) \in -\varepsilon(\operatorname{ext} K)$ platí $T1(s) = -1$, a proto $s \in S_2$.

Dostáváme tedy $\operatorname{ext} S \subset S_1 \cup S_2$ a z Krein-Milmanovy věty $S = \overline{\operatorname{co}}(S_1 \cup S_2) = \operatorname{co}(S_1 \cup S_2)$. Druhou rovnost dává Lemma 1.4.4, protože množiny S_1, S_2 jsou kompaktní konvexní.

Hrany S_1, S_1 jsou zřejmě disjunktní a platí $S = \operatorname{co}(S_1 \cup S_2)$, jde podle Lemmatu 1.5.6 o dvojici komplementárních hran.

Následující výpočet ukáže, že jsou to dokonce hrany paralelní. Mějme $s \in S$ takové, že $s = \lambda x + (1 - \lambda)y$, kde $x \in S_1$ a $y \in S_2$. Potom $T^*\varepsilon_s = \lambda T^*\varepsilon_x + (1 - \lambda)T^*\varepsilon_y$ a platí

$$T1(s) = T^*s(1) = \lambda T^*x(1) + (1 - \lambda)T^*y(1) = \lambda - (1 - \lambda) = 2\lambda - 1.$$

Z této rovnosti můžeme vyjádřit $\lambda = (T1(s) + 1)/2$ a vidíme tedy, že je koeficient λ nezávislý na volbě rozkladu, a proto jsou S_1, S_2 podle definice paralelní hrany.

□

(ii). Tvrzení je snadným důsledkem (i). Podle něj platí, že $\operatorname{ext} S \subset S_1 \cap S_2$. Proto pro každé $s \in \operatorname{ext} S$ je $|T1(s)| = 1$. $\square$

(iii). Dosadíme-li do (3.5) jednotkovou funkci $1 \in A(K)$, ihned dostaneme $T1(s) = h(s)$ pro všechna $s \in \operatorname{ext} S$. Díky Krein-Milmanově můžeme je spojitá funkce na množině S určena hodnotami na $\operatorname{ext} S$ jednoznačně. Proto platí $T1(s) = h(s)$ na S. $\square$

(iv). Pro $s \in \operatorname{ext} S$ a $f \in A(K)$ můžeme psát

$$T1(s)\varepsilon_{\phi(s)}(f) = T1(s)f(\phi(s)) = Tf(s) = \varepsilon_s(Tf) = T^*\varepsilon_s(f).$$

Proto pro $s \in S_1 \cap \operatorname{ext} S$ platí $(T^*\varepsilon_s)(f) = \varepsilon_{\phi(s)}(f)$. Tato rovnost platí pro všechna $f \in A(K)$, proto

$$\varepsilon_{\phi(s)} = T^*\varepsilon_s. \tag{3.6}$$

V bodě (i) jsme dokázali, že S_1, S_2 jsou uzavřené paralelní hrany, proto podle Lemmatu 1.5.11 platí $\operatorname{ext} S_1 \subset \operatorname{ext} S$. Identita (3.6) tedy platí pro všechna $s \in \operatorname{ext} S_1$.

Protože ε, T^* a ϕ jsou afinní zobrazení, můžeme platnost (3.6) rozšířit na množinu $\operatorname{co}(\operatorname{ext} S_1)$. Mějme konvexní kombinaci $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$, kde $s_i \in \operatorname{ext} S_1$. Potom totiž platí

$$T^*\varepsilon_{(\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i T^*\varepsilon_{s_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{\phi(s_i)} = \varepsilon_{\phi(\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i)}.$$

Z Krein-Milmanovy věty platí, že $S_1 = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} S_1)$. Proto díky spojitosti zobrazení ε, T^* a ϕ platí rovnost (3.6) pro všechna $s \in S_1$.

Analogicky bychom dostali, že pro $s \in S_2$ platí $\varepsilon_{\phi(s)} = -T^*(\varepsilon_s)$. $\square$

(v). Tvrzení je užitečnou reformulací předchozího. Pro každé $s \in S_1$ platí

$$f(\phi(s)) = \varepsilon_{\phi(s)}(f) = T^*(\varepsilon_s)(f) = \varepsilon_s(Tf) = Tf(s).$$

Předchozí tvrzení je využito při druhé rovnosti.

Analogicky bychom ukázali, že pro každé $s \in S_2$ platí $f(\phi(s)) = -Tf(s)$.

$\square$

(vi). Tvrzení budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že existuje $s \in \operatorname{co}(S_1 \cup S_2) = S$ a $x, x' \in S_1$ a $y, y' \in S_2$, $0 < \lambda, \lambda' < 1$ takové, že $(x, x', \lambda) \neq (y, y', \lambda')$ a $s = \lambda x + (1-\lambda)y = \lambda' x' + (1-\lambda')y'$.

Z bodu (i) víme, že S_1, S_2 je dvojice paralelních hran S, a proto $\lambda = \lambda'$.

Podle bodu (v) platí $Tf(x) = f(\phi(x))$, $Tf(x') = f(\phi(x'))$ a $Tf(y) = -f(\phi(y))$, $Tf(y') = f(\phi(y'))$. Využitím afinity $Tf \in A(S)$ počítejme

$$\begin{array}{ll} \lambda Tf(x) + (1-\lambda)Tf(y) & = \lambda f(\phi(x)) - (1-\lambda)f(\phi(y)) \\ \qquad\qquad \| & \\ \lambda Tf(x') + (1-\lambda)Tf(y') & = \lambda f(\phi(x')) - (1-\lambda)f(\phi(y')). \end{array}$$

Po snadné úpravě dostaneme

$$\lambda f(\phi(x)) + (1-\lambda)f(\phi(y')) = \lambda f(\phi(x')) + (1-\lambda)f(\phi(y)).$$

Dále využitím afinity $f \in A(K)$ máme $f(\phi(\lambda x + (1-\lambda)y')) = f(\phi(\lambda x' + (1-\lambda)y))$. Protože rovnost platí pro všechna $f \in A(K)$ a protože $A(K)$ oddělují body a ϕ je prosté zobrazení, nutně $\lambda x + (1-\lambda)y' = \lambda x' + (1-\lambda)y$. Získali jsme rovnosti

$$\begin{aligned} \lambda\varepsilon_x + (1-\lambda)\varepsilon_y &= \lambda\varepsilon_{x'} + (1-\lambda)\varepsilon_{y'}, \\ \lambda\varepsilon_x - (1-\lambda)\varepsilon_y &= \lambda\varepsilon_{x'} - (1-\lambda)\varepsilon_{y'}. \end{aligned}$$

Sečtením rovností zjistíme, že $x = x'$ a $y = y'$. To je spor s růzností dvojic bodů.

□

Příklad 3.2.8. *Ukážeme, že existuje isometrie mezi afinně homeomorfními konvexními kompaktními množinami, která není tvaru* (3.5).

Příklad je převzat z článku [5].

Důkaz. Uvažujme čtverec v $\mathbb{R}^2$ se středem v $(0,0)$.

$$K = \{(x,y) : |x| = |y| = 1\}.$$

Víme, že $f \in A(K)$, právě když existují $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $f(x,y) = ax + by + c$.

Definujeme isometrický isomorfismus $T : A(K) \to A(K)$ tak, že každému $f \in A(K)$, $f(x,y) = ax + by + c$, přiřadíme $Tf \in A(K)$

$$T(f)(x,y) = cx + by + a, \text{ pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Linearitu T můžeme snadno ověřit z definice a surjektivita plyne z isomorfismu $A(K)$ a $\mathbb{R}^3$. Dále například z principu maxima (Věta 1.5.26) můžeme usoudit, že f nabývá extrémů na $\operatorname{ext} K = \{(1,1), (-1,1), (-1,1), (-1,-1)\}$. Platí tedy $\|f\| = \max\{|a \pm b \pm c|\}$ a $\|Tf\| = \max\{|c \pm b \pm a|\}$. Vidíme, že $\|f\| = \|Tf\|$, a zobrazení T je proto lineární isometrie.

Je patrné, že množiny

$$K_1 = \{(x,y) \in K : T1(x,y) = x = 1\} \text{ a } K_2 = \{(x,y) \in K : T1(x,y) = x = -1\}$$

jsou neprázdné.

Předpokládejme nyní, že je možné zobrazení T vyjádřit ve tvaru (3.5). Potom jsou podle Lemmatu 3.2.7 (vi) množiny K_1, K_2 dvojicí rozkladných hran množiny K. Protože však čtverec žádné netriviální rozkladné hrany nemá, dostáváme spor. Isometrický isomorfismus T není vyjádřitelný ve tvaru (3.5).

□

Věta 3.2.9. *Mějme kompaktní konvexní množiny K, S s vlastností, že každá dvojice uzavřených komplementárních paralelních hran je již dvojicí rozkladných hran. Potom jsou $A(K)$ a $A(S)$ isometricky isomorfní, právě když jsou K a S afinně homeomorfní. Navíc pro každý isometrický isomorfismus existuje funkce $h \in A(S)$ a afinní homeomorfismus ϕ mezi S a K, že platí*

$$Tf(s) = h(s)f(\phi(s)) \quad \text{pro všechny } s \in \operatorname{ext} S \text{ a } f \in A(K). \tag{3.7}$$

Důkaz. **Příprava.** Pokud existuje afinní homeomorfismus ϕ mezi S a K, potom lineární isometrie $T : A(K) \to A(S)$ definovaná jako $Tf(s) = f(\phi(s))$ zřejmě splňuje všechny požadavky věty.

Zbývá dokázat druhou implikaci. Definujme nejprve množiny

$$S_1 = \{s \in S : T1(s) = 1\}, \qquad S_2 = \{s \in S : T1(s) = -1\},$$
$$K_1 = \{k \in K : T^{-1}1(k) = 1\}, \qquad K_2 = \{k \in K : T^{-1}1(k) = -1\}.$$

Podle Lemmatu 3.2.7(i) jsou to dvě dvojice komplementárních paralelních hran po řadě množin S a K.

Než přejdeme k definici homeomorfismu ϕ, učiňme několik užitečných pozorování. Dokážeme, že platí

$$T^*(\varepsilon(S_1)) = \varepsilon(K_1) \quad \text{a} \quad T^*(\varepsilon(S_2)) = -\varepsilon(K_2). \tag{3.8}$$

Protože je T isometrický isomorfismus, víme díky Lemmatu 1.5.7, že

$$T^*(\varepsilon(S) \cup -\varepsilon(S)) \subset \operatorname{co}(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K)).$$

Mějme $s \in S_1$, potom existují $a, b \in K$ a $0 \le \lambda \le 1$ takové, že $T^*\varepsilon_s = \lambda\varepsilon_a + (1-\lambda)\varepsilon_b$ a platí

$$1 = T1(s) = T^*(\varepsilon_s)(1) = \lambda\varepsilon_a(1) - (1-\lambda)\varepsilon_b(1) = 2\lambda - 1 \le 1,$$

proto nutně $\lambda = 1$, $T^*(\varepsilon_s) \in \varepsilon(K)$ a existuje $k \in K$ takové, že $T^*(\varepsilon_s) = \varepsilon_k$ (a tedy $(T^*)^{-1}\varepsilon_s = \varepsilon_k$). Dále

$$(T^{-1}1)(k) = \varepsilon_k(T^{-1}1) = ((T^{-1})^*\varepsilon_k)(1) = \varepsilon_s(1) = 1.$$

Proto $T^*(\varepsilon_s) \in \varepsilon(K_1)$ a $T^*(\varepsilon(S_1)) \subset \varepsilon(K_1)$.

Podobný postup můžeme provést s isometrickým isomorfismem T^{-1}. Platí

$$(T^{-1})^*(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K)) \subset \operatorname{co}(\varepsilon(S) \cup -\varepsilon(S)).$$

Mějme $k \in K_1$, potom existují $a, b \in S$ a $0 \le \lambda \le 1$ takové, že $(T^{-1})^*(\varepsilon_k) = \lambda\varepsilon_a + (1-\lambda)\varepsilon_b$. Platí tedy

$$1 = T^{-1}1(k) = \varepsilon_k(T^{-1}(1)) = (T^{-1})^*(\varepsilon_k)(1) = \lambda\varepsilon_a(1) - (1-\lambda)\varepsilon_b(1) = 2\lambda - 1 \le 1,$$

proto nutně $\lambda = 1$, $(T^{-1})^*(\varepsilon_k) \in \varepsilon(S)$ a existuje $s \in S$ takové, že $(T^{-1})^*\varepsilon_k = \varepsilon_s$ (neboli $\varepsilon_k = T^*\varepsilon_s$). Dále

$$T1(s) = \varepsilon_s(T1) = (T^*\varepsilon_s)(1) = \varepsilon_k(1) = 1.$$

Platí tedy $(T^{-1})^*(\varepsilon_k) \in \varepsilon(S_1)$ a $(T^{-1})^*(\varepsilon(K_1)) \subset \varepsilon(S_1)$.

Složíme-li oba výsledky, dostaneme rovnost $T^*(\varepsilon(S_1)) = \varepsilon(K_1)$. Využili jsme faktu, že $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Analogicky bychom dokázali, že $T^*(\varepsilon(S_2)) = -\varepsilon(K_2)$.

Krok 1. Přistoupíme k definici zobrazení $\tilde{\phi} : S \to K$.

Protože jsou hrany S_1, S_2 dvojicí paralelních hran, podle předpokladu věty jsou to také rozkladné hrany.

Definujme nejprve zobrazení $\phi : S_1 \cup S_2 \to K$ následovně

$$\phi_{|S_1} = \varepsilon^{-1} \circ T^* \circ \varepsilon \quad \text{a} \quad \phi_{|S_2} = \varepsilon^{-1} \circ -T^* \circ \varepsilon.$$

Přejděme nyní k definici zobrazení $\tilde{\phi} : S \to K$.

Mějme $s \in S$. Pro ně existuje jednoznačný rozklad $s = \lambda x + (1-\lambda)y$, kde $0 \le \lambda \le 1$ a $x \in S_1$, $y \in S_2$. Položíme

$$\tilde{\phi}(s) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).$$

Krok 2. Dokážeme, že $\tilde{\phi}$ je afinním homeomorfismem množin S a K.

K tomu využijeme Lemmatu 1.5.20. Aplikujeme jej na zobrazení $\tilde{\phi} : S \to K$, $\phi : S_1 \cup S_2 \to K$ a dvojice vzájemně komplementárních rozkladných hran S_1, S_2 a K_1, K_2.

Zobrazení $\phi_{|S_1}$ a $\phi_{|S_2}$ jsou zřejmě prostá spojitá afinní a v přípravné části bylo dokázáno, že platí $\phi(S_1) = K_1$ a $\phi(S_2) = K_2$, přičemž S_1, S_2 je dvojicí uzavřených komplementárních rozkladných hran S a K_1, K_2 je dvojicí uzavřených komplementárních rozkladných hran K.

Předpoklady Lemmatu 1.5.20 jsou tedy splněny a $\tilde{\phi}$ je skutečně afinním homeomorfismem množin S a K.

Krok 3. Nakonec ověříme platnost vztahu (3.7).

Z Lemmatu 3.2.7(iii) víme, že pro $s \in S$ nutně platí $h(s) = T1(s)$. Pokud je $s \in \operatorname{ext} S \cap S_1$, potom $T1(s) = 1$ a $\varepsilon_{\tilde{\phi}(s)} = T^*(\varepsilon_s)$. Platí tedy

$$T1(s)f(\tilde{\phi}(s)) = \varepsilon_{\tilde{\phi}(s)}(f) = T^*(\varepsilon_s)(f) = \varepsilon_s(Tf) = Tf(s),$$

což jsme chtěli dokázat. V případě, že $s \in \operatorname{ext} S \cap S_2$, máme $T1(s) = -1$ a $\varepsilon_{\tilde{\phi}(s)} = -T^*(\varepsilon_s)$. Proto platí

$$T1(s)f(\tilde{\phi}(s)) = -\varepsilon_{\tilde{\phi}(s)}(f) = T^*(\varepsilon_s)(f) = \varepsilon_s(Tf) = Tf(s).$$

A protože $\operatorname{ext} S \subset S_1 \cup S_2$, je důkaz hotov. □

Předchozí věta je snadným zobecněním Věty 3.2.4. V ní se předpokládá, že uzavřené hrany uvažovaných kompaktních konvexních množin K, S musí již být rozkladnými hranami.

Jak prostřednictvím následujícího lemmatu lehce nahlédneme, je naše věta také zobecněním Věty 3.2.6, protože kompaktní konvexní množina, která je jednoznačně rozložitelná, má již nutně vlastnost, že každá dvojice paralelních hran je dvojicí rozkladných hran.

Lemma 3.2.10. *Mějme kompaktní konvexní jednoznačně rozložitelnou množinu K. Potom je každá paralelní hrana již rozkladnou hranou množiny K.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Nechť hrana F není rozkladnou hranou. Potom existují $x, x' \in F$, $y, y' \in F'$ a $0 \le \lambda \le 1$ takové, že $\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda x' + (1-\lambda)y'$. Protože je evaluační zobrazení $\varepsilon : X \to A(K)^*$ afinní, dostáváme rovnost

$$\lambda\varepsilon_x - (1-\lambda)\varepsilon_{y'} = \lambda\varepsilon_{x'} - (1-\lambda)\varepsilon_y.$$

Definujeme $\Phi \in A(K)^*$ jako

$$\Phi = \lambda\varepsilon_x - (1-\lambda)\varepsilon_{y'} = \lambda\varepsilon_{x'} - (1-\lambda)\varepsilon_y.$$

Dále dokážeme, že tato rovnost zároveň dává dva různé rozklady Φ typu $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, kde $\Phi_1, \Phi_2 \ge 0$ a $\|\Phi_1\| + \|\Phi_2\| = \|\Phi\|$.

Zřejmě $\varepsilon_x, \varepsilon_{x'}, \varepsilon_y, \varepsilon_{y'} \geq 0$ a norma těchto prvků je rovna 1. Abychom dokázali, že jsou to skutečně požadované rozklady Φ, stačí ukázat, že $\|\Phi\| = 1$. Nerovnost $\|\Phi\| \leq 1$ platí z trojúhelníkové nerovnosti. Dokažme nyní opačnou nerovnost.

Podle Lemmatu 1.5.14 platí, že horní obálka χ_F^* je shora polospojitá afinní funkce taková, že $\chi_F^*(s) = 1$ pro $s \in F$ a $\chi_{F'}^*(s) = 0$ pro $s \in F'$.

Definujme funkci $f = 2\chi_F - 1$. Potom $f^* = (2\chi_F - 1)^* = 2\chi_F^* - 1$ je shora polospojitá afinní funkce taková, že $f^*_{|F} = 1$ a $f^*_{|F'} = -1$.

Z Definice 1.5.1 víme, že $f^* = \inf\{a \in A(K) : a > f\}$. Vezměme si nyní pevné $\varepsilon > 0$. Můžeme najít $b \in A(K)$ takovou, že $b > f$ a $b(y') < -1 + \varepsilon$. Protože dle Lemmatu 1.5.16 je systém funkcí $\{a \in A(K) : a > f\}$ dolů usměrněný, existuje $a \in A(K)$ takové, že $f < a \leq b \wedge (1 + \varepsilon)$.

Díky tomu je

$$\Phi(a) = \lambda a(x) - (1-\lambda)a(y') > \lambda f(x) - (1-\lambda)b(y') > \lambda + (1-\lambda)(-1+\varepsilon) = 1 + \varepsilon(\lambda - 1),$$

a proto

$$1 + \varepsilon(\lambda - 1) < \Phi(a) \leq |\Phi(a)| \leq \|\Phi\|\|a\| = \|\Phi\|(1 + \varepsilon).$$

Provedeme-li limitní přechod pro $\varepsilon \to 0$, dostaneme $\|\Phi\| \geq 1$ a důkaz je hotov. $\square$

Kapitola 4

Banach-Stoneova věta pro skoro isometrie

4.1 Amirova věta

Klasická Banach-Stoneova věta říká, že pokud jsou $C(K)$, $C(S)$, kde K, S jsou kompaktní prostory, isometrické, potom jsou K, S homeomorfní. Při jejím zobecňování se můžeme vydat několika směry. Jedním z nich je oslabování předpokladů na zobrazení mezi prostory $C(K)$ a $C(S)$. Tomu se budeme věnovat v této kapitole. Místo isometrie budeme uvažovat surjektivní lineární isomorfismus prostorů $C(K)$, $C(S)$, který je v nějakém smyslu blízký isometrii.

Důležitého výsledku v tomto směru dosáhl A. Amir v článku [8].

Věta 4.1.1. *Mějme kompaktní prostory K, S a ϕ lineární isomorfismus $C(K)$ na $C(S)$ s vlastností $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$. Potom jsou K a S homeomorfní.*

Než přejdeme k důkazu vlastní věty, dokážeme tři pomocná lemmata. Mějme ϕ isomorfismus prostorů $C(K)$ a $C(S)$. Pro lepší přehlednost důkazu označme $\|\phi\| = \alpha$, $\|\phi^{-1}\| = \beta$ a předpokládejme $\alpha\beta < 2$. Dále označíme $C_+(K) = \{f \in C(K); f \geq 0, \|f\| = 1\}$. Tohoto značení budeme užívat v celém průběhu Amirova důkazu.

První z lemmat nám umožní modifikovat zadaný isomorfismus tak, aby získal některé „příjemné“ vlastnosti.

Lemma 4.1.2. *Existuje isomorfismus $\hat{\phi} : C(K) \to C(S)$ splňující podmínky:*

(a) $\|\hat{\phi}\| = \alpha$,

(b) $\|\hat{\phi}^{-1}\| = \beta$,

(c) $(\hat{\phi}1)(y) \geq \alpha(2 - \alpha\beta)$ *pro každé* $y \in S$,

(d) $(\hat{\phi}^{-1}1)(x) \geq \beta(2 - \alpha\beta)$ *pro všechny* $x \in K$,

(e) pro každou $f \in C_+(K)$ *existuje* $y \in S$ *takové, že* $(\hat{\phi}f)(y) \geq \frac{1}{\beta}$,

(f) pro každou $g \in C_+(S)$ *existuje* $x \in K$ *takové, že* $(\hat{\phi}^{-1}g)(x) \geq \frac{1}{\alpha}$.

Důkaz. **Příprava.** V úvodní části dokážeme, že pro všechna $y \in S$ platí

$$|(\phi 1)(y)| \geq \alpha(2 - \alpha\beta).$$

Zvolme libovolné $y_0 \in S$ a označme $t = (\phi 1)(y_0)$. Protože $\|\phi\| = \alpha$, nutně $|t| \leq \alpha$. Předpokládejme, že platí $|t| < \alpha$. Volme jakékoli ε takové, že $0 < \varepsilon < \alpha - |t|$ a k němu nalezněme okolí N bodu y_0 takové, že pro každé $y \in N$ platí $|(\phi 1)(y) - t| < \varepsilon$. To lze díky spojitosti $\phi 1$.

Z Urysohnova lemmatu najdeme funkci $g \in C_+(S)$ takovou, že $g(S \backslash N) = 0$. Definujme funkce

$$G_1(y) = (\phi 1)(y) + (\alpha - t - \varepsilon)g(y), \quad G_2(y) = (\phi 1)(y) - (\alpha + t - \varepsilon)g(y).$$

Pro $y \in N$ platí

$$G_1(y) \leq t + \varepsilon + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot 1 = \alpha,$$

protože $(\phi 1)(y) < t + \varepsilon$ a $\alpha - t - \varepsilon > 0$. Dále platí

$$-G_1(y) \leq \varepsilon - t - (\alpha - t - \varepsilon) \cdot 0 = \varepsilon - t < \alpha.$$

Při první nerovnosti jsme využili odhadu $-(\phi 1)(y) < \varepsilon - t$, při druhé $\varepsilon < \alpha - |t| \leq \alpha + t$.

Pro $y \in S \setminus N$ platí

$$|G_1(y)| = |(\phi 1)(y) + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot 0| \leq |\alpha + (\alpha - t - \varepsilon) \cdot 0| = \alpha.$$

Tedy $\|G_1\| \leq \alpha$.

Analogicky ukážeme, že také $\|G_2\| \leq \alpha$. Nechť $y \in N$, potom

$$G_2(y) \leq t + \varepsilon - (\alpha - t - \varepsilon) \cdot 0 < \alpha,$$

protože $\alpha + t - \varepsilon > 0$ a $\varepsilon + t < \alpha - |t| + t \leq \alpha$. Dále

$$-G_2(y) \leq \varepsilon - t + (\alpha + t - \varepsilon) \cdot 1 = \alpha.$$

Pro $y \in S \setminus N$ máme zřejmě $|G_2(x)| \leq \alpha$. Dohromady tedy dostáváme, že také $\|G_2\| \leq \alpha$.

Proto platí

$$\|\phi^{-1} G_i\| \leq \|\phi^{-1}\| \|G_i\| \leq \alpha\beta \text{ pro } i = 1, 2. \tag{4.1}$$

Protože

$$1 = \|g\| = \|\phi(\phi^{-1} g)\| \leq \|\phi\| \|\phi^{-1} g\| = \alpha \|\phi^{-1} g\|,$$

musí z definice normy a díky tomu, že spojitá funkce na kompaktní množině nabývá extrémů, existovat $x_0 \in K$, že $|(\phi^{-1} g)(x_0)| \geq 1/\alpha$.

Podle znaménka $(\phi^{-1} g)(x_0)$ rozlišíme dva případy: Pokud je $(\phi^{-1} g)(x_0) \geq 1/\alpha$, potom platí nerovnosti

$$\alpha\beta \geq (\phi^{-1} G_1)(x_0) = 1(x_0) + (\alpha - t - \varepsilon)(\phi^{-1} g)(x_0) \geq 1 + (1/\alpha)(\alpha - t - \varepsilon).$$

První nerovnost plyne z (4.1), poslední je dána vlastností x_0. Z toho po úpravě dostáváme nerovnost $t \geq \alpha(2 - \alpha\beta) - \varepsilon$.

Pokud je naopak $(\phi^{-1}g)(x_0) \leq -1/\alpha$, pak analogickým postupem jako v předchozím případě získáme nerovnost $\alpha\beta \geq (\phi^{-1}G_2)(x_0) \geq 1 + (1/\alpha)(\alpha + 1 - \varepsilon)$. Z ní úpravou odvodíme, že $t \leq -\alpha(2 - \alpha\beta) + \varepsilon$.

V obou případech tedy dostáváme $|t| \geq \alpha(2 - \alpha\beta) - \varepsilon$. Protože je ε libovolně malé, platí $|(\phi 1)(y_0)| \geq \alpha(2 - \alpha\beta)$ pro všechna y_0 splňující předpoklad $|(\phi 1)(y_0)| < \alpha$. Protože $\alpha\beta \geq 1$, platí nerovnost také pro y_0 splňující $|(\phi 1)(y_0)| = \alpha$. Je tedy splněna pro všechna $y \in S$.

Krok 1. Konstrukce zobrazení $\hat{\phi}$.

Označme množinu $A = \{y \in S : (\phi 1)(y) \geq \alpha(2 - \alpha\beta)\}$. Protože podle předchozího pro každé $y \in S$ platí $(\phi 1)(y) \geq \alpha(2 - \alpha\beta)$ a podle předpokladu $\alpha\beta < 2$, platí také $A = \{y \in S : (\phi 1)(y) > 0\}$. Ze spojitosti $\phi 1 \in C(S)$ snadno nahlédneme, že je A obojetná množina.

Z toho důvodu je charakteristická funkce χ_A spojitá, protože jako charakteristická funkce obojetné množiny je zdola i shora polospojitá. Definujme konečně zobrazení $\hat{\phi} : C(K) \to C(S)$ jako

$$\hat{\phi} f = (2\chi_A - 1)\phi f.$$

Krok 2. Ověříme, že $\hat{\phi}$ má požadované vlastnosti.

Je to isomorfismus $C(K)$ na $C(S)$, protože jde o součin nenulové spojité funkce a isomorfismu ϕ.

Podmínky (a), (b): Protože pro všechna $y \in S$ platí $|(2\chi_A - 1)(y)| = 1$, zřejmě $\|\hat{\phi}\| = \|\phi\| = \alpha$ a $\|\hat{\phi}^{-1}\| = \|\phi^{-1}\| = \beta$.

Podmínka (c): Pro $y \in A$ platí

$$(\hat{\phi} 1)(y) = (2\chi_A - 1)(y) \cdot (\phi 1)(y) = 1 \cdot (\phi 1)(y) = |\phi 1(y)| \geq \alpha(2 - \alpha\beta)$$

a pro $y \in S \setminus A$

$$(\hat{\phi} 1)(y) = (2\chi_A - 1)(y) \cdot (\phi 1)(y) = (-1) \cdot (\phi 1)(y) = |\phi 1(y)| \geq \alpha(2 - \alpha\beta).$$

Podmínka (e): Volme libovolné $f \in C_+(K)$. Pak $\|1 - 2f\| = 1$, a proto $\|\hat{\phi}(1 - 2f)\| \leq \alpha$. Z toho plyne $|\hat{\phi} 1 - 2\hat{\phi} f| = |\hat{\phi}(1 - 2f)| \leq \alpha$. Úpravou získáme

$$\hat{\phi} f \geq \frac{1}{2}(\hat{\phi} 1 - \alpha) \geq \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha\beta). \tag{4.2}$$

Protože platí $\alpha\beta \geq 1$, máme $\|\hat{\phi} f\| = \alpha \geq 1/\beta$. Musí tedy existovat $y_0 \in S$, pro které platí $|(\hat{\phi} f)(y_0)| \geq 1/\beta$. Pokud by $(\hat{\phi} f)(y_0) \leq -1/\beta$, dostali bychom spor s (4.2), protože díky $1 \leq \alpha\beta < 2$ platí $\frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha\beta) > -1/\beta$. Tím je bod (e) dokázán.

Podmínky (d), (f): Pokud bychom v Přípravě namísto ϕ pracovali s $\hat{\phi}^{-1}$, získali bychom symetrickým postupem místo nerovnosti $|\phi 1| \geq \alpha(2 - \alpha\beta)$ nerovnost $|\hat{\phi}^{-1}| \geq \beta(2 - \alpha\beta)$.

Množina definovaná jako

$$\begin{aligned} B &= \{x \in K : (\hat{\phi}^{-1} 1)(x) < 0\} = \{x \in K : (\hat{\phi}^{-1} 1)(x) \geq \beta(2 - \alpha\beta)\} = \\ &= K \setminus \{x \in K : (\hat{\phi}^{-1} 1)(x) \leq \beta(2 - \alpha\beta)\} \end{aligned}$$

je tedy obojetná v K a její charakteristická funkce χ_B je spojitá.

Definujme funkci $H \in C(K)$ jako

$$H(x) = (\hat{\phi}^{-1} 1)(x) + \beta(3 - \alpha\beta)\chi_B(x).$$

Dokážeme, že $\|H\| \leq \beta$. Pro $x \in B$ počítejme $|H(x)| \leq -\beta(2-\alpha\beta)+\beta(3-\alpha\beta)=\beta$. Pro $x \in K \setminus B$ máme $|H(x)| = |\hat{\phi}^{-1}1(x)| \leq \beta$. Proto $\|\hat{\phi}H\| \leq \|\hat{\phi}\|\|H\| \leq \alpha\beta$.

Předpokládejme, že $\hat{\phi}$ nesplňuje bod (d). Potom je $B \neq \emptyset$ a $\chi_B \in C_+(K)$. Díky platnosti podmínky (e) tedy můžeme najít takové $y_0 \in S$, že $\hat{\phi}\chi_B(y_0) \geq 1/\beta$. Z toho dostáváme

$$\alpha\beta \geq \hat{\phi}H(y_0) = 1 + \beta(3-\alpha\beta)(\hat{\phi}\chi_B)(y_0) \geq 4-\alpha\beta,$$

což není možné, protože $\alpha\beta < 2$. Tím je dokázán bod (d).

Analogickým postupem, jakým jsme pomocí bodu (c) dokázali (e) lze pomocí (d) dokázat bod (f).

□

Před tím, než uvedeme následující spíše technické lemma, zavedeme další označení. Mějme $K, S, \hat{\phi}$ jako v Lemmatu 4.1.2. Pro $f \in C_+(K)$ definujeme

$$Pf = \{y \in S : \hat{\phi}\Big(f - \frac{1}{2}\Big)(y) \geq -\frac{1}{12}\alpha(2-\alpha\beta)\}$$

a pro $g \in C_+(S)$

$$Qg = \{x \in K : \hat{\phi}^{-1}\Big(g - \frac{1}{2}\Big)(x) \geq -\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta)\}$$

Lemma 4.1.3. *Nechť $f_1, f_2 \in C_+(K)$ a $f_1 \leq f_2$, potom*

$$\{y \in S : (\hat{\phi}f_1)(y) \geq \frac{1}{\beta}\} \subset \operatorname{int} Pf_2.$$

Důkaz. Volme $y_0 \in S$ takové, že

$$(\hat{\phi}f_1)(y_0) \geq \frac{1}{\beta}. \tag{4.3}$$

Pokud $\hat{\phi}(1-f_2)(y_0) < (\hat{\phi})(\frac{1}{2})(y_0)$, potom úpravou nerovnosti získáme

$$\hat{\phi}(f_2 - \frac{1}{2})(y_0) = \hat{\phi}[\frac{1}{2} - (1-f_2)](y_0) > 0.$$

Uvažujme naopak, že $\hat{\phi}(1-f_2)(y_0) \geq (\hat{\phi})(\frac{1}{2})(y_0)$. Definujeme funkci $F \in C(K)$ jako $F = 1 - 2(f_2 - f_1)$. Protože $f_2 \geq f_1$, platí $\|F\| \leq 1$. Potom platí

$$\begin{aligned}\alpha &\geq \hat{\phi}F(y_0) = \hat{\phi}[f_1 - (f_2-f_1) + (1-f_2)](y_0)\\ &\geq (\hat{\phi}f_1)(y_0) + \hat{\phi}(f_2-f_1)(y_0) - \hat{\phi}(1-f_2)(y_0) \geq \frac{1}{\beta} - \hat{\phi}(f_2-f_1)(y_0) + (\hat{\phi}\frac{1}{2})(y_0),\end{aligned}$$

neboli po úpravě

$$-(\hat{\phi}\frac{1}{2})(y_0) + \hat{\phi}(f_2-f_1)(y_0) \geq -\alpha + \frac{1}{\beta}.$$

Tuto nerovnost využijeme při závěrečném výpočtu

$$\begin{aligned}\hat{\phi}\big(f_2 - \frac{1}{2}\big)(y_0) &= \hat{\phi}[-\frac{1}{2} + (f_2-f_1) + f_1](y_0) = -(\hat{\phi}\frac{1}{2})(y_0) + \hat{\phi}(f_2-f_1)(y_0) + (\hat{\phi}f_1)(y_0)\\ &\geq -\alpha + \frac{1}{\beta} + (\hat{\phi}f_1)(y_0) \geq -\alpha + \frac{2}{\beta} > 0.\end{aligned}$$

Využili jsme (4.3) a fakt, že $\alpha\beta < 2$.

V obou případech dostáváme $\hat{\phi}(f_2 - \frac{1}{2})(y_0) > 0$. Protože zřejmě platí

$$\{y \in S : \hat{\phi}\Big(f_2 - \frac{1}{2}\Big)(y) > 0\} \subset \operatorname{int} Pf_2, \tag{4.4}$$

dostáváme požadované tvrzení.

□

Lemma 4.1.4. *Nechť $g \in C_+(S)$ a $x_0 \in \operatorname{int} Qg$. Potom existuje $f \in C_+(K)$ taková, že*

(a) $f(K \setminus Qg) = \{0\}$,

(b) $f = 1$ na nějakém okolí x_0,

(c) $\{y \in S : g(y) = 1\} \subset \operatorname{int} Pf$,

(d) $Pf \subset \{y \in S : g(y) > 0\}$.

Důkaz. Protože je K normální prostor, můžeme najít otevřenou množinu $U \subset K$ takovou, že $x_0 \in U$ a $\overline{U} \subset \operatorname{int} Qg$. Nyní aplikujeme Urysohnovo lemma na uzavřené množiny $\overline{U}$ a $K \setminus \operatorname{int} Qg$ a nalezneme funkci $f_1 \in C_+(K)$ takovou, že $f_1(K \setminus \operatorname{int} Qg) = 0$ a $f_1 = 1$ na množině U.

Definujme funkci $f = \max\{f_1; (2/\beta)\hat{\phi}^{-1}(g - \frac{1}{2})\}$.

Ta splňuje (a), protože $f_1(K \setminus Qg) = 0$ a pro $x \in K \setminus Qg$ z definice množiny Qg platí $\hat{\phi}^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \leq -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta) < 0$.

Dále ukážeme, že f splňuje také (b). Protože je $g \in C_+(S)$, snadno si uvědomíme, že $\|g - \frac{1}{2}\| \leq \frac{1}{2}$. Proto platí odhad

$$\|\frac{2}{\beta}\hat{\phi}^{-1}(g - \frac{1}{2})\| \leq \frac{2}{\beta}\beta\|g - \frac{1}{2}\| \leq 1. \tag{4.5}$$

Takže na množině U platí $f = 1$ a podmínka (b) je splněna.

Protože $f_1 \geq 0$, také $f \geq 0$. Dále platí $\|f_1\| \leq 1$ a (4.5), a proto $\|f\| \leq 1$. Vidíme tedy, že $f \in C_+(K)$.

K důkazu bodu (c) budeme potřebovat sadu nerovností.

Z definice f plyne, že $f \geq (2/\beta)\hat{\phi}^{-1}(g - \frac{1}{2})$. Pro $x \in Qg$ tedy po úpravě dostáváme

$$0 \leq \frac{1}{2}\beta f(x) - \hat{\phi}^{-1}\big(g - \frac{1}{2}\big)(x) \leq \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta). \tag{4.6}$$

Nechť $x \in K \setminus Qg$. Potom podle (a) platí, že $f(x) = 0$. Protože $\|g - \frac{1}{2}\| \leq \frac{1}{2}$, můžeme odhadovat

$$0 \leq \frac{1}{2}\beta f(x) - \hat{\phi}^{-1}\big(g - \frac{1}{2}\big)(x) \leq \|\hat{\phi}^{-1}(g - \frac{1}{2})\| \leq \|\hat{\phi}^{-1}\|\|g - \frac{1}{2}\| \leq \frac{1}{2}\beta.$$

Pro všechna $x \in K$ tedy platí (4.6).

Po odečtení $\frac{1}{4}\beta$ od konců nerovnosti (4.6) dostaneme

$$-\frac{1}{4}\beta - \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta) \leq -\frac{1}{4}\beta \leq \frac{1}{2}\beta\big(f - \frac{1}{2}\big) - \hat{\phi}^{-1}\big(g - \frac{1}{2}\big) \leq \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta),$$

a tedy

$$\Big|\frac{1}{2}\beta\big(f-\frac{1}{2}\big)-\hat{\phi}^{-1}\big(g-\frac{1}{2}\big)\Big|\leq\frac{1}{4}\beta+\frac{1}{12}\beta(2-\alpha\beta).$$

Aplikací $\hat{\phi}$ na funkci v absolutní hodnotě získáme odhad

$$\Big|\frac{1}{2}\beta\hat{\phi}\big(f-\frac{1}{2}\big)-\big(g-\frac{1}{2}\big)\Big|\leq\frac{1}{4}\alpha\beta+\frac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta). \tag{4.7}$$

Vezměme nyní $y\in\{y\in S:g(y)=1\}$. Pak po dosazení do předchozí nerovnosti dostaneme

$$\frac{1}{2}\beta\hat{\phi}\big(f-\frac{1}{2}\big)(y)\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha\beta-\frac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta)=\big(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\alpha\beta\big)(2-\alpha\beta)>0.$$

Protože zřejmě platí

$$\{y\in S:\hat{\phi}\Big(f-\frac{1}{2}\Big)(y)>0\}\subset\operatorname{int}Pf,$$

dostáváme platnost (c).

Podmínku (d) dokážeme „obměnou“. Dokážeme tedy tvrzení, že pokud $y\notin\{y\in S:g(y)>0\}$ (tj. $g(y)=0$, protože $g\geq0$), potom $y\notin Pf$.

Mějme $y\in S$ takové, že $g(y)=0$. Dosazením do (4.7) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\beta\hat{\phi}\big(f-\frac{1}{2}\big)(y)\ &\leq\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\alpha\beta+\frac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta)\leq-\frac{1}{4}(2-\alpha\beta)+\frac{1}{12}\alpha\beta(2-\alpha\beta)\\ &\leq\ -\big(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\alpha\beta\big)(2-\alpha\beta)<-\beta\frac{1}{12}\alpha(2-\alpha\beta). \end{aligned}\tag{4.8}$$

V poslední nerovnosti jsme využili předpokladu, že $1>1/2\alpha\beta$, a tedy

$$-\big(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\alpha\beta\big)<-\big(\frac{1}{8}\alpha\beta-\frac{1}{12}\alpha\beta\big)=-\frac{1}{24}\alpha\beta.$$

Z nerovnosti (4.8) přímo plyne, že $y\notin Pf$, a tedy platnost (d). Tím je důkaz hotov.

□

Nyní máme vše připraveno k vlastnímu důkazu.

Důkaz Věty 4.1.1. **Krok 1.** Popíšeme postup, jakým požadovaný homeomorfismus zkonstruovat.

Vezměme libovolné $x\in K$ a definujme

$$\sigma(x)=\bigcap\{Pf\subset S:f\in C_+(K),f=1\text{ na nějakém okolí bodu }x\}.$$

Krok 2. Ukážeme, že $\sigma(x)$ je jednobodová množina a $\sigma:K\to S$ je tedy dobře definované zobrazení.

Dokážeme nejprve, že systém množin na pravé straně rovnosti má konečnou průnikovou vlastnost. Pro $i=1,\ldots,n$ mějme funkce $f_i\in C_+(K)$ takové, že $f_i=1$ na nějakém okolí bodu x (díky Urysohnově lemmatu). Označme jako $\min_{i=1,\ldots,n}f_i$ bodové minimum funkcí f_i, $i=1,\ldots,n$. Potom díky Lemmatu 4.1.3 platí inkluze

$$\{y:(\hat{\phi}\min\nolimits_{i=1,\ldots,n}f_i)(y)\geq1/\beta\}\subset\bigcap\{Pf_i:i=1,\ldots,n\}.$$

Protože pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $f_i(x) = 1$ a $f_i \in C_+(K)$ nutně $\min f_i \in C_+(K)$. Podle bodu (e) Lemmatu 4.1.2 je množina na levé straně inkluze neprázdná. Systém množin v definici zobrazení σ má konečnou průnikovou vlastnost. Protože jsou množiny Pf uzavřené a prostor K je kompaktní, plyne z Lemmatu 1.4.1, že je $\sigma(x)$ neprázdná.

Dále dokážeme, že $\sigma(x)$ je jednobodová množina. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že existují $y_1, y_2 \in \sigma(x)$ takové,že $y_1 \neq y_2$. Pomocí Urysohnova lemmatu nalezneme funkci $g \in C_+(S)$ takovou, že $g(y_1) = 1$, $g(y_2) = 0$. Pokud by platilo

$$\hat{\phi}^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) > -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta),$$

a tedy $x \in \operatorname{int} Qg$, potom bychom použitím Lemmatu 4.1.4 mohli najít funkci $f \in C_+(K)$, která je 1 na okolí bodu x. Protože navíc $g(y_2) = 0$, z bodu (d) Lemmatu 4.1.4 vyplývá, že $y_2 \notin Pf$. To je však spor s definicí zobrazení σ.

Předpokládejme naopak, že platí

$$\hat{\phi}^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) \leq -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta).$$

Úpravou získáme

$$\hat{\phi}^{-1}\big((1-g) - \frac{1}{2}\big)(x) = \hat{\phi}^{-1}\big(\frac{1}{2} - g\big)(x) \geq \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta) > 0$$

a podle Lemmatu 4.1.4 aplikovaného na funkci $1 - g$ můžeme nalézt funkci $f \in C_+(K)$, která je 1 v okolí bodu x a $y_1 \notin Pf$. To je opět spor s definicí zobrazení σ.

Vidíme tedy, že množina $\sigma(x)$ je právě jednoprvková.

Krok 3. Ukázali jsme, že $\sigma : K \to S$ je dobře definované zobrazení. Nyní o něm dokážeme, že je to bijekce.

Analogicky jako zobrazení σ můžeme zkonstruovat zobrazení $\rho : S \to K$. Nechť

$$\rho(y) = \bigcap \{Qg : g \in C_+(S), g = 1 \text{ na nějakém okolí bodu } y\}.$$

Tvrzení. Pokud funkce $g \in C_+(S)$ nabývá na nějakém okolí bodu $\sigma(x)$ hodnoty 1, potom $x \in \operatorname{int} Qg$.

Důkaz. Předpokládejme, že tomu tak není a $x \notin \operatorname{int} Qg$. Potom jistě

$$\hat{\phi}^{-1}(g - \frac{1}{2})(x) < -\frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta),$$

neboli po úpravě

$$\hat{\phi}^{-1}\big((1-g) - \frac{1}{2}\big)(x) = \hat{\phi}^{-1}(\frac{1}{2} - g)(x) > \frac{1}{12}\beta(2 - \alpha\beta) > 0.$$

Proto ihned vidíme, že $x \in \operatorname{int} Q(1 - g)$.

Najděme dále funkci $f \in C_+(K)$ z Lemmatu 4.1.4. Protože podle bodu (b) nabývá funkce f hodnoty 1 na nějakém okolí bodu x, platí $\sigma(x) \in Pf$. Podle bodu (d) proto $(1 - g)(\sigma(x)) > 0$. Protože g byla volena tak, aby nabývala na okolí bodu $\sigma(x)$ hodnoty 1, dostáváme spor. □

Z definice zobrazení ρ s předchozího Tvrzení tedy platí

$$\rho(\sigma(x)) = \bigcap\{Qg : g \in C_+(S), g = 1 \text{ na nějakém okolí bodu } \sigma(x)\} \ni x,$$

a proto je $x = \varrho\sigma(x)$ pro každé $x \in K$. Stejně tak bychom dokázali, že $y = \sigma\varrho(y)$ pro každé $y \in S$. Proto je σ bijekce prostorů K a S

Krok 4. Dokážeme spojitost zobrazení σ.

Mějme otevřenou množinu $N \subset S$. Dokážeme, že také $\sigma^{-1}(N)$ je otevřená množina.

Mějme bod $x_0 \in \sigma^{-1}(N)$, takže $\sigma(x_0) \in N$. Potom existují funkce $f_1, \dots, f_n \in C_+(K)$ a okolí bodu x_0 množiny $U_1, \dots, U_n$ takové, že pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $f_i = 1$ na okolí U_i bodu x_0 a $\bigcap Pf_i \subset N$.

Popíšeme konstrukci funkcí $f_1, \dots, f_n$ a množin $U_1, \dots, U_n$. Vezměme $y \in S \setminus N$. Potom díky normalitě prostoru S existuje funkce $g \in C_+(S)$ taková, že $g = 1$ na nějakém okolí bodu $\sigma(x_0)$ a $g(y) = 0$. Podle pomocného Tvrzení potom $x_0 \in \operatorname{int} Qg$.

Podle Lemmatu 4.1.4 můžeme nalézt funkci $f_y \in C_+(K)$, která je rovna 1 na okolí U_y bodu x_0 a protože $g(y) = 0$, podle bodu (d) tohoto lemmatu je $y \in S \setminus Pf_y$. Získali jsme tedy pokrytí množiny $S \setminus N$ otevřenými množinami $\{S \setminus Pf_y : y \in S\}$. Protože je $S \setminus N$ kompaktní množina, existuje konečné podpokrytí $\{S \setminus Pf_i : i = 1, \dots, n\}$ a k funkcím f_i příslušné otevřené množiny U_i z konstrukce.

Zřejmě $S \setminus N \subset \bigcup\{S \setminus Pf_i : i = 1, \dots, n\}$, a tedy $\bigcap\{Pf_i : i = 1, \dots, n\} \subset N$, což jsme chtěli dokázat.

Pokud $x \in U := \bigcap\{U_i : i = 1, \dots, n\}$, potom z definice zobrazení σ dostaneme, že $\sigma(x) \in \bigcap\{Pf_i : i = 1, \dots, n\} \subset N$. Tedy $\sigma(U) \subset N$. Tím je dokázáno, že vzor otevřené množiny při zobrazení σ je také otevřená množina, a σ je proto spojité zobrazení.

Krok 5. Zobrazení σ je tedy spojitá bijekce prostorů K a S, a podle Lemmatu 1.4.5 je homeomorfismem těchto prostorů. □

4.2 Cohenův příklad

Můžeme si položit otázku, zda je konstanta 2 optimální, či nikoliv. H. B. Cohen v [9] zkonstruoval nehomeomorfní kompaktní prostory X, Y a isomorfismus $\phi : C(X) \xrightarrow{na} C(Y)$ takový, že $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| = 2$ a tím ukázal, že konstanta 2 nelze vylepšit.

Příklad 4.2.1. *Existují nehomeomorfní kompaktní prostory X, Y a isomorfismus $\phi : C(X) \xrightarrow{na} C(Y)$ takový, že $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| = 2$.*

Důkaz. Než definujeme prostory X, Y a isomorfismus ϕ, zavedeme několik pomocných objektů: Označme $I = [0, 1]$ a uvažujme osm homeomorfních kopií I: $a[I]$, $\bar{a}[I]$, $b[I]$, $\bar{b}[I]$, $c[I]$, $\bar{c}[I]$, $d[I]$, $\bar{d}[I]$. Dále mějme čtyři libovolné kompaktní prostory A, B, C, D a v nich po řadě body P_A, P_B, P_C, P_D. Předpokládejme, že jsou prostory $a[I]$, $\bar{a}[I]$, $b[I]$, $\bar{b}[I]$, $c[I]$, $\bar{c}[I]$, $d[I]$, $\bar{d}[I]$ po dvou disjunktní.

Nyní již máme ke konstrukci příkladu připraveno vše potřebné. Definujme prostor X jako sjednocení $a[I], b[I], c[I], d[I], A, B, C, D$, v němž ztotožníme $a(0) = b(0), c(0) = d(0), a(1) = P_A, b(1) = P_B, c(1) = P_C, d(1) = P_D$.

Dále definujme prostor Y jako sjednocení $\bar{a}[I]$, $\bar{b}[I]$, $\bar{c}[I]$, $\bar{d}[I]$, A, B, C, D, ve kterém provedeme identifikace $\bar{a}(0) = \bar{c}(0)$, $\bar{b}(0) = \bar{d}(0)$, $\bar{a}(1) = P_A$, $\bar{b}(1) = P_B$, $\bar{c}(1) = P_C$ a $\bar{d}(1) = P_D$. Okolí bodů, které jsme ztotožnily, ve výsledném sjednoceném prostoru definujeme jako sjednocení okolí těchto bodů v prostorech původních.

Je zřejmé, že pro vhodnou volbu množin A, B, C a D budou prostory X a Y nehomeomorfní. Stačí například volit A, C jako kružnice a B, D jako jednobodové množiny. Naznačíme, proč tomu tak je. Předpokládejme, že existuje homeomorfismus $\varphi : Y \to X$. Tento předpoklad dovedeme ke sporu.

Množina Y má dvě komponenty souvislosti $Y_1 = \bar{d}[I] \cup \bar{b}[I]$, $Y_2 = C \cup \bar{a}[I] \cup \bar{c}[I] \cup A$.

Množina X má také dvě komponenty souvislosti $X_1 = C \cup c[I] \cup d[I]$ a $X_2 = A \cup a[I] \cup b[I]$.

Protože homeomorfismus zobrazuje souvislé množiny na souvislé množiny, zobrazí φ komponenty Y na komponenty X. Předpokládejme, že $\varphi(Y_1) = X_1$. V případě $\varphi(Y_1) = X_2$ by byl další postup obdobný.

Protože je kružnice C souvislá množina, musí nutně existovat $0 \le \alpha < \beta \le 1$ takové, že platí jedna z následujících tří možností:

(i) $C = \varphi(\bar{b}([\alpha, \beta]))$,

(ii) $C = \varphi(\bar{d}([\alpha, \beta]))$,

(iii) $C = \varphi(\bar{b}([0, \alpha]) \cup \bar{d}([0, \beta]))$.

Protože jsme ztotožnili bod $\bar{b}[0]$ s bodem $\bar{d}(0)$, je ve všech třech případech kružnice C homeomorfní uzavřenému intervalu. Lemma 1.4.13 nám však říká, že to není možné. Dostali jsme spor s předpokladem a prostory X, Y jsou tedy nehomeomorfní.

Zbývá definovat zobrazení $\psi : C(Y) \to C(X)$. Pro funkci $f \in C(Y)$ definujeme $\psi(f) \in C(X)$ následovně:

$$\begin{aligned}
\psi(f)(a(t)) &= (1+t)f(\bar{a}(t)) - (1-t)f(\bar{d}(t)), \\
\psi(f)(d(t)) &= (1-t)f(\bar{a}(t)) + (1+t)f(\bar{d}(t)), \\
\psi(f)(b(t)) &= -(1+t)f(\bar{b}(t)) + (1-t)f(\bar{c}(t)), \\
\psi(f)(c(t)) &= (1-t)f(\bar{b}(t)) + (1+t)f(\bar{c}(t)), \quad \text{pro } 0 \le t \le 1 \text{ a} \\
\psi(f)(z) &= 2f(z), \text{ pokud } z \in A \cup C \cup D, \\
&= -2f(z), \text{ pokud } z \in B.
\end{aligned}$$

V prvé řadě si uvědomíme, že je zobrazení dobře definováno:

Zde je nutno ověřit, že v bodech z různých prostorů, které jsme ztotožnili, bude výše uvedená definice dávat stejné hodnoty. Přímým výpočtem dostaneme:

$$\begin{aligned}
\psi(f)(a(0)) &= (1+0)f(\bar{a}(0)) - (1-0)f(\bar{d}(0)) = f(\bar{a}(0)) - f(\bar{d}(0)) \\
&= f(\bar{c}(0)) - f(\bar{b}(0)) = -(1+0)f(\bar{b}(0)) + (1-0)f(\bar{c}(0)) = \psi(f)(b(0)).
\end{aligned}$$

Stejně tak dostaneme $\psi(f)(c(0)) = \psi(f)(d(0))$. Rovnosti

$$\psi(f)(a(1)) = \psi(f)(P_A), \quad \psi(f)(b(1)) = \psi(f)(P_B),$$
$$\psi(f)(c(1)) = \psi(f)(P_C), \quad \psi(f)(d(1)) = \psi(f)(P_D)$$

se ověří obdobně: $\psi(f)a(1) = 2f(\bar{a}(1)) = 2f(P_A) = \psi(f)(z)$. Ostatní případy jsou analogické.

Funkce $\psi(f)$ je zřejmě spojitá na každém z prostorů $a[I]$, $b[I]$, $c[I]$, $d[I]$, A, B, C, D, proto je spojitá na celém Y.

Linearita zobrazení ψ je zřejmá. Pro $0 \leq t \leq 1$ platí odhad

$$|\psi(f)(a(t))| \leq 2|f(\bar{a}(t))| + 2|f(\bar{d}(t))| \leq 2\|f\|.$$

Stejný odhad můžeme provést na všech osmi prostorech $a[I], b[I], c[I], d[I], A, B, C, D$, a proto $\|\psi\| \leq 2$. Protože pro konstantní funkci $f = 1$, pro $z \in A \cup C \cup D$ dostáváme $\psi(f)(z) = 2f(z) = 2$. Proto $\|\psi\| = 2$.

Dále definujeme zobrazení $\phi : C(X) \to C(Y)$. Pro přehlednost si nejprve označíme funkci $D(t) = (1+t)^2 + (1-t)^2 = 2(1+t^2)$. Zobrazení ϕ definujeme následovně

$$\begin{aligned}
\phi(g)(\bar{a}(t)) &= \frac{1+t}{D(t)} g(a(t)) + \frac{1-t}{D(t)} g(d(t)),\\
\phi(g)(\bar{d}(t)) &= \frac{1-t}{D(t)} g(a(t)) + \frac{1+t}{D(t)} g(d(t)),\\
\phi(g)(\bar{b}(t)) &= -\frac{1+t}{D(t)} g(b(t)) + \frac{1-t}{D(t)} g(c(t)),\\
\phi(g)(\bar{c}(t)) &= \frac{1-t}{D(t)} g(b(t)) + \frac{1+t}{D(t)} g(c(t)), \quad \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \text{ a}\\
\phi(g)(v) &= \frac{1}{2} g(v) \text{ , pokud } v \in A \cup C \cup D,\\
&= -\frac{1}{2} g(v) \text{ , pokud } v \in B.
\end{aligned}$$

Analogicky jako v případě zobrazení ψ lze ukázat, že i ϕ je dobře definované a lineární. Všimněme si, že ϕ je prosté zobrazení, protože $\phi(g)_{|B} = -\frac{1}{2}g$.

Při výpočtu normy $\|\phi\|$ využijeme odhadu $\frac{2}{D(t)} = \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ pro $0 \leq t \leq 1$. Výpočet provedeme pouze na prostoru $\bar{a}[I]$, ostatní odhady by se provedly obdobně. Pro $0 \leq t \leq 1$ platí:

$$|\phi(g)(\bar{a}(t))| = \frac{1+t}{D(t)} |g(a(t))| + \frac{1-t}{D(t)} |g(d(t))| \leq \frac{2}{D(t)} \|g\| \leq \|g\|.$$

Pokud volíme konstantní $g = 1$, potom platí

$$\phi(g)(\bar{a}(0)) = \frac{1}{2} g(a(0)) + \frac{1}{2} g(d(0)) = 1,$$

takže $\|\phi\| = 1$.

Dále tvrdíme, že pro každé $f \in C(Y)$ platí $\phi \circ \psi(f) = f$. Z toho plyne, že ϕ je surjektivní zobrazení a protože je navíc prosté, je ϕ isomorfismus $C(X) \to C(Y)$ s $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| = 2$, přičemž X a Y jsou nehomeomorfní.

Ukážeme, že pro každé $f \in C(Y)$ je $\phi \circ \psi(f) = f$. Ověření je přímočaré, ale poněkud zdlouhavé. Mějme $0 \leq t \leq 1$. Počítejme

$$\begin{aligned}
&\phi(\psi(f))(\bar{a}(t)) = \frac{1+t}{D(t)} \psi(f)(a(t)) + \frac{1-t}{D(t)} \psi(f)(d(t))\\
&= \frac{1+t}{D(t)} ((1+t) f(\bar{a}(t)) - (1-t) f(\bar{d}(t))) + \frac{1-t}{D(t)} ((1-t) f(\bar{a}(t)) + (1+t) f(\bar{d}(t)))\\
&= \frac{(1+t)^2 + (1-t)^2}{D(t)} f(\bar{a}(t)) + \frac{-(1+t)(1-t) + (1-t)(1+t)}{D(t)} f(\bar{d}(t)) = f(\bar{a}(t))
\end{aligned}$$

dále

$$\begin{aligned}
\phi(\psi(f))(\bar{d}(t)) &= -\frac{1-t}{D(t)}\psi(f)(a(t)) + \frac{1+t}{D(t)}\psi(f)(d(t)) \\
&= -\frac{1-t}{D(t)}((1+t)f(\bar{a}(t)) - (1-t)f(\bar{d}(t))) + \frac{1+t}{D(t)}((1-t)f(\bar{a}(t)) + (1+t)f(\bar{d}(t))) \\
&= \frac{-(1-t)(1+t)+(1-t)(1+t)}{D(t)}f(\bar{a}(t)) + \frac{(1-t)^2+(1+t)^2}{D(t)}f(\bar{d}(t)) = f(\bar{d}(t))
\end{aligned}$$

dále

$$\begin{aligned}
\phi(\psi(f))(\bar{b}(t)) &= -\frac{1+t}{D(t)}\psi(f)(b(t)) + \frac{1-t}{D(t)}\psi(f)(c(t)) \\
&= -\frac{1+t}{D(t)}(-(1+t)f(\bar{b}(t)) + (1-t)f(\bar{c}(t))) + \frac{1-t}{D(t)}((1-t)f(\bar{b}(t)) + (1+t)f(\bar{c}(t))) \\
&= \frac{(1+t)^2+(1-t)^2}{D(t)}f(\bar{b}(t)) + \frac{-(1+t)(1-t)+(1-t)(1+t)}{D(t)}f(\bar{c}(t)) = f(\bar{b}(t))
\end{aligned}$$

dále pro $z \in A \cup C \cup D$ máme

$$\phi(\psi)(v) = \frac{1}{2}\psi(f)(v) = f(z)$$

a pro $z \in B$ je to

$$\phi(\psi)(v) = -\frac{1}{2}\psi(f)(v) = f(z).$$

□

4.3 Skoro isometrie mezi prostory afinních funkcí

Výsledky pojednané v této kapitole pochází z práce [10] Cho-Ho Chu a Henryho B. Cohena a zobecňují Větu 4.1.1 dokázanou A. Amirem.

Připomeňme, že $C(X)$ je isometricky isomorfní prostoru $A(K)$ pro Bauerův simplex $K = \operatorname{ext} \mathcal{M}^1(X)$.

Naopak pro každý prostor $A(K)$, kde K je Bauerův simplex, existuje kompaktní konvexní množina X ($X = \operatorname{ext} K$) taková, že $C(X)$ je isometricky isomorfní s $A(K)$. Amirovu větu proto můžeme přeformulovat následovně.

Věta 4.3.1. *Nechť K, S jsou Bauerovými simplexy a existuje isomorfismus*

$$\phi : A(K) \simeq C(\operatorname{ext} K) \to A(S) \simeq C(\operatorname{ext} S)$$

s vlastností $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$. Potom jsou $\operatorname{ext} K$ a $\operatorname{ext} S$ homeomorfní.

Zobecnění Chu a Cohena zeslabí podmínky na množiny K, S. V metrizovatelném případě se Bauerův simplex nahradí podmínkou, že je každý extremální bod K a S slabým peak bodem. Pokud předpoklad metrizovatelnosti vypustíme, požadují v článku [10] uzavřenost množin $\operatorname{ext} K$, $\operatorname{ext} S$.

Definice 4.3.2. Nechť K je kompaktní konvexní množina a $x \in \operatorname{ext} K$. Bod x nazveme slabým peak bodem, pokud pro každé dané ε, $0 < \varepsilon < 1$ a otevřenou množinu U, $x \in U$, existuje $h \in B_{A(K)}$ takové, že $h(x) > 1 - \varepsilon$ a $|h| < \varepsilon$ na $\operatorname{ext} K \setminus U$.

Následujících několik tvrzení si klade za cíl vyjasnit vztah mezi objekty s následujícími charakteristikami bodu $x \in \operatorname{ext} K$, kde K je kompaktní konvexní množina.

- Bod x je slabě exponovaný bod.
- Podmnožina $\{x\}$ je rozkladnou hranou K.
- $x \in \operatorname{ext} K$, kde K je simplex.

Věta 4.3.3 ([10], Proposition 1)**.** *Nechť je x slabě exponovaným bodem kompaktní konvexní množiny K. Potom je $\{x\}$ rozkladnou hranou K. Za předpokladu, že je* $\operatorname{ext} K$ *uzavřená v K, platí také opačná implikace.*

Důkaz. **Krok 1.** Předpokládejme, že je $x \in \operatorname{ext} K$ slabě exponovaným bodem. Horní obálka $\chi^*_{\{x\}}$ je konkávní a shora polospojitá (viz Definice 1.5.1). Pro $x \in \operatorname{ext} K$ je zřejmě $\{x\}$ uzavřenou hranou K. Proto podle Věty 1.5.12 platí, že $K = \operatorname{co}(\{x\} \cup F)$, kde $\{x\}' = F = (\chi^*_{\{x\}})^{-1}(0)$ a platí $\{x\} = (\chi^*_{\{x\}})^{-1}(1)$. Dále pro každý bod $z \in K$ existuje rozklad

$$z = \chi^*_{\{x\}}(z)x + (1 - \chi^*_{\{x\}}(z))y, \quad \text{kde } y \in F.$$

Abychom ukázali, že je $\{x\}$ rozkladnou hranou, musí být dle definice množina F konvexní a uvedená reprezentace jako konvexní kombinace bodu x a prvku F musí být jednoznačná.
Tvrzení: V první části důkazu ukážeme, že pro $0 < \varepsilon < 1$ a $y_1, y_2, y_3 \in F$ existuje $h \in A(K)$ taková, že $h(x) > 1 - \varepsilon$ a pro $j = 1, 2, 3$ platí $|h(y_j)| \leq \varepsilon$.

Díky Choquetově větě o reprezentaci (Věta 1.5.35) můžeme najít maximální míry μ_j reprezentující body y_j. Potom podle Věty 1.5.32 aplikované na míry $\varepsilon_{y_j} \prec \mu_j$ platí nerovnost

$$\mu_j(\{x\}) = \mu_j(\chi_{\{x\}}) \leq \chi^*_{\{x\}}(y_j) = 0.$$

Poslední rovnost platí díky tomu, že $y_j \in F = (\chi^*_{\{x\}})^{-1}(0)$. Můžeme proto pomocí Lemmatu 1.2.2 najít uzavřená okolí U_j bodu x taková, že $\mu_j(U_j) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Položme $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Protože je x z předpokladu slabě exponovaným bodem, existuje $h \in A(K)$ s vlastnostmi $\|h\| \leq 1$, $h(x) > 1 - \varepsilon$ a na $\operatorname{ext} K \setminus U$ je $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Protože je h spojitá, platí také $|h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ na $\overline{\operatorname{ext} K \setminus U} \supset \overline{\operatorname{ext} K} \setminus U$. Uvedená inkluze platí díky uzavřenosti množiny U.

Protože jsou μ_j maximální, jsou podle Lemmatu 1.5.34 neseny $\overline{\operatorname{ext} K}$. Proto

$$|h(y_j)| = \Big| \int_{\overline{\operatorname{ext} K}} h \, d\mu_j \Big| \leq \int_{\overline{\operatorname{ext} K} \cap U} |h| \, d\mu_j + \int_{\overline{\operatorname{ext} K} \setminus U} |h| \, d\mu_j \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Krok 2. Ukážeme, že F je konvexní. Nechť $y_1, y_2 \in F$ a $z = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Chceme ukázat, že $z \in F$, neboli $\chi^*_{\{x\}}(z) = 0$. Budeme postupovat sporem. Nechť tvrzení neplatí. Protože je $\chi^*_{\{x\}} \geq 0$, musí být $\chi^*_{\{x\}}(z) > 0$.

Podle Věty 1.5.12 existuje $y_3 \in F$ a rozklad

$$z = \chi^*_{\{x\}}(z)x + (1 - \chi^*_{\{x\}}(z))y_3.$$

Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}\chi^*_{\{x\}}(z)$. Potom můžeme díky Tvrzení nalézt funkci $h \in A(K)$ takovou, že $h(x) > 1 - \varepsilon$ a $|h(y_j)| \leq \varepsilon$ pro $j = 1, 2, 3$. Takže

$$|h(z)| = |\lambda h(y_1) + (1-\lambda)h(y_2)| \leq \lambda|h(y_1)| + (1-\lambda)|h(y_2)| \leq \varepsilon.$$

Ale platí také nerovnost

$$\begin{aligned} |h(z)| &= |\chi^*_{\{x\}}(z)h(x) + (1-\chi^*_{\{x\}}(z))h(y_3)| \geq \chi^*_{\{x\}}(z)|h(x)| - (1-\chi^*_{\{x\}}(z))|h(y_3)| \\ &> \chi^*_{\{x\}}(z)(1-\varepsilon) - (1-\chi^*_{\{x\}}(z))\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

která je v rozporu s nerovností předchozí. Takže platí $\chi^*_{\{x\}}(z) = 0$, tedy $z \in F$ a F je konvexní.

Krok 3. Dokážeme, že rozklad je jednoznačný.

Nechť $z = \beta x + (1-\beta)y'$, $y' \in F$ a $0 < \beta < 1$. Protože je horní obálka $\chi^*_{\{x\}}$ konkávní funkcí, platí

$$\chi^*_{\{x\}}(z) \geq \beta\chi^*_{\{x\}}(x) + (1-\beta)\chi^*_{\{x\}}(y') = \beta.$$

Předpokládejme, že $\chi^*_{\{x\}}(z) > \beta$. Potom úpravou rovnosti

$$\chi^*_{\{x\}}(z)x + (1-\chi^*_{\{x\}}(z))y = z = \beta x + (1-\beta)y'$$

dostaneme

$$y' = \frac{\chi^*_{\{x\}}(z) - \beta}{1-\beta}x + \frac{1-\chi^*_{\{x\}}(z)}{1-\beta}y. \tag{4.9}$$

Protože $y, y' \in F$, je $\chi^*_{\{x\}}(y) = \chi^*_{\{x\}}(y') = 0$. Přitom dalším využitím konkávnosti $\chi^*_{\{x\}}$ dostaneme

$$0 = \chi^*_{\{x\}}(y') \geq \frac{\chi^*_{\{x\}}(z) - \beta}{1-\beta}\chi^*_{\{x\}}(x) + \frac{1-\chi^*_{\{x\}}(z)}{1-\beta}\chi^*_{\{x\}}(y) = \frac{\chi^*_{\{x\}}(z) - \beta}{1-\beta} > 0,$$

což není možné. Platí tedy $\chi^*_{\{x\}}(z) = \beta$ a po dosazení do (4.9) je $y' = y$. Rozklad je proto jednoznačný.

Krok 4. Za předpokladu uzavřenosti množiny $\operatorname{ext} K$ dokážeme také opačnou implikaci.

Nechť je $\{x\}$ rozkladná hrana. Ukážeme, že potom je x slabě exponovaným bodem. Mějme $0 < \varepsilon < 1$ a otevřené okolí U bodu x.

Protože je $x \in \operatorname{ext} K$, platí podle Lemmatu 1.5.27 $x \notin \overline{\operatorname{co}}\,(K \setminus U)$. Položme $G = \overline{\operatorname{co}}\,(K \setminus U)$ a označme F komplementární hranu rozkladné hrany $\{x\}$.

Protože je $\{x\}$ rozkladná hrana, existuje podle Lemmatu 1.5.29 klesající net $\{a_\alpha\}$ funkcí z $A(K)$ konvergující bodově k $\chi^*_{\{x\}}$. Z Lemmatu 1.5.25 víme, že je funkce $\chi^*_{\{x\}}$ afinní, a proto podle Lemmatu 1.5.16 můžeme předpokládat, že $\chi_{\{x\}} < a_\alpha < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

Množina $G \cap \operatorname{ext} K$ je kompaktní podmnožinou F a protože $\chi^*_{\{x\}} = 0$ na F, platí $a_\alpha \searrow 0$ bodově na $G \cap \operatorname{ext} K$. Z Diniho věty pro nety můžeme najít funkci $a_{\alpha_0} \in A(K)$ takovou, že $|a_{\alpha_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$ na množině $G \cap \operatorname{ext} K \supset \operatorname{ext} K \setminus U$. Z konstrukce netu $\{a_\alpha\}$ platí také $\chi_{\{x\}} < a_{\alpha_0} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

Položíme $h = a_{\alpha_0} - \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $\|h\| \leq 1$. Protože $1 + \frac{\varepsilon}{2} > a_{\alpha_0}(x) > \chi^*_{\{x\}}(x) = 1$, platí

$$h(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon.$$

Nakonec díky $|a_{\alpha_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$ na $\operatorname{ext} K \setminus U$ máme

$$|h| = |a_{\alpha_0} - \frac{\varepsilon}{2}| \leq |a_{\alpha_0}| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{na } \operatorname{ext} K \setminus U.$$

□

Věta 4.3.4. *Nechť K je simplex. Potom pro každý $x \in \operatorname{ext} K$ je $\{x\}$ rozkladnou hranou.*

Důkaz. Tvrzení je snadným důsledkem Věty 1.5.18. □

Příklad 4.3.5 ([10], Example 3)**.** *Existuje simplex K takový, že pro každý bod $x \in K$ je $\{x\}$ rozkladnou hranou, ale x není slabě exponovaným bodem.*

Důkaz. Takovým simplexem je Poulsenův simplex K, který je popsán například v [[2], Kapitola 7]. Jde o kompaktní konvexní podmnožinu l^2 a podle [[2], Theorem 7.1] pro něj platí $\overline{\operatorname{ext} K} = K$.

Mějme libovolný $x \in \operatorname{ext} K$. Protože je K simplex, je podle Věty 1.5.18 množina $\{x\}$ jeho rozkladnou hranou. Ukážeme, že x není slabě exponovaným bodem. Volme $x' \in \operatorname{ext} K \setminus \{x\}$ a položme $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x'$. Protože je l^2 normovaný lineární prostor, můžeme najít uzavřené konvexní okolí U bodu x takové, že $y \notin U$. Potom také $x' \in \operatorname{ext} K \setminus U$. Pokud by totiž $x' \in U$, z konvexnosti U by platilo $y \in U$.

Předpokládejme, že x je slabě exponovaným bodem. Tento předpoklad dovedeme ke sporu. Z definice existuje $h \in B_{A(K)}$ taková, že $h(x) > 1 - \varepsilon$ a na $\operatorname{ext} K \setminus U$ je $|h| < \frac{1}{2}$. Takže

$$h(y) = \frac{1}{3}h(x) + \frac{2}{3}h(x') > \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{7}) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{21}.$$

Protože $\overline{\operatorname{ext} K} = K$, existuje net $\{x_\beta\}$, $x_\beta \in \operatorname{ext} K$ takový, že $y = \lim_\beta x_\beta$. Protože $y \notin U$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_\beta \in \operatorname{ext} K \setminus U$. Ze spojitosti $h \in A(K)$ máme, že

$$h(y) = \lim_\beta h(x_\beta) \leq \frac{1}{7}.$$

Protože $\frac{1}{7} < \frac{4}{21}$, dostáváme spor a x není slabě exponovaným bodem. □

Příklad 4.3.6 ([2], Example 2.1)**.** *Existuje kompaktní konvexní množina K, která není simplexem, ale množina jejích extremálních bodů* $\operatorname{ext} K$ *je uzavřená a pro každé $x \in \operatorname{ext} K$ je $\{x\}$ jeho rozkladnou hranou.*

Jedním ze zásadních momentů důkazu Chu a Cohena bude použití následujícího lemmatu.

Lemma 4.3.7. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní prostory a prostor K je metrizovatelný (perfektně normální). Dále máme isomorfismus $\phi : A(K) \to A(S)$ a shora polospojitou funkci $f \in A^b(K)$. Pokud pro všechna $y \in \operatorname{ext} S$ platí $|\phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y)| \leq c$, potom pro všechna $y \in S$ platí $|\phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y)| \leq c$.*

Důkaz. Podle Lemmatu 1.5.16 existuje dolů usměrněný systém $\mathcal{F}$ funkcí z $A(K)$ takový, že $f = \inf \mathcal{F}$.

Funkce f splňuje předpoklady Lemmatu 1.5.17, a proto existuje klesající posloupnost $\{a_n\}$, $a_n \in A(K)$, taková, že pro každé $x \in K$ platí $\lim_n a_n(x) = f(x)$.

Podle Lemmatu 1.5.22 pro každé $y \in S$ platí $\lim_n \phi^{**}\hat{a}_n(\varepsilon_y) = \phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y)$. Protože $a_n \in A(K)$, přímým výpočtem se z definice zobrazení „stříška“ z Poznámky 1.5.21 ověří, že pro každé $\nu \in A(K)^*$ platí $\hat{a}_n(\nu) = \nu(a_n)$. Můžeme totiž najít $a, b \geq 0$ a $x, y \in K$ takové, že $\nu = a\varepsilon_x - b\varepsilon_y$. Potom

$$\hat{a}(\nu) = aa_n(x) - ba_n(y) = a\varepsilon_x(a_n) - b\varepsilon_y(a_n) = \nu(a_n).$$

Proto platí identity

$$\phi^{**}\hat{a}_n(\varepsilon_y) = \hat{a}_n(\phi^*\varepsilon_y) = (\phi^*\varepsilon_y)(a_n) = \varepsilon_y(\phi a_n) = (\phi a_n)(y).$$

Platí tedy

$$\lim_n \phi(a_n)(y) = \phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y) \quad \text{pro všechna } y \in S.$$

K dokončení důkazu stačí použít Větu 1.5.26 na funkci $\phi^{**} \circ \hat{f} \circ \varepsilon$ a posloupnost $\{\phi(a_n)\}$.

□

Následuje hlavní věta této sekce a její důkaz.

Věta 4.3.8. *Nechť K a S jsou metrizovatelné kompaktní konvexní množiny, jejichž každý extremální bod je slabě exponovaným bodem. Pokud dále existuje isomorfismus $\phi : A(K) \to A(S)$ s vlastností $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$, jsou $\operatorname{ext} K$ a $\operatorname{ext} S$ homeomorfní.*

Poznámka 4.3.9. *Pro obecnou kompaktní konvexní množinu věta neplatí. V rovině uvažujme trojúhelník K a čtyřúhelník S, který vznikne „uříznutím“ jednoho z rohů K. Potom je zobrazení $\phi : A(K) \to A(S)$, které funkci $h \in A(K)$ přiřazuje $\phi(h) = h_{|S}$, isomorfismem a pokud „uřízneme“ dostatečně malý roh K, platí $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$. Množiny $\operatorname{ext} K$ a $\operatorname{ext} S$ však zjevně nejsou homeomorfní.*

Důkaz. **Příprava.** Mějme podle předpokladů isomorfismus $\phi : A(K) \to A(S)$ s vlastností $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$. Můžeme předpokládat, že existují konstanty $1 < c < c' < 2$ takové, že $\|\phi\| < 2$ a pro všechna nenulová $a \in A(K)$ platí $\|\phi(a)\| \geq c'\|a\|$.

Pokud by dané ϕ tuto podmínku nesplňovalo, mohli bychom najít konstanty c, c', $1 < c < c' < 2$ takové, že $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < \frac{2}{c'} < 2$ a pracovat s isomorfismem $\psi = c'\|\phi^{-1}\|\phi$. Pro něj totiž platí

$$\|\psi\| = c'\|\phi^{-1}\|\|\phi\| < 2$$

a protože $\|a\| = \|\phi^{-1}(\phi(a))\| \leq \|\phi^{-1}\|\|\phi(a)\|$, také

$$\|\psi(a)\| = c'\|\phi^{-1}\|\|\phi(a)\| \geq c'\|a\| > c\|a\|.$$

Krok 1. Konstrukce zobrazení $\rho : Y \subset \operatorname{ext} S \to \operatorname{ext} K$.

Vezměme si $y \in \operatorname{ext} S$. Podle Lemmatu 1.5.7 platí, že $\operatorname{co}(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K))$ je uzavřenou jednotkovou koulí v $A(K)^*$. Z toho plyne, že $\operatorname{lin} \varepsilon(K) = A(K)^*$. Podle předpokladu je každý bod $x \in \operatorname{ext} K$ slabě exponovaným bodem a podle Věty 4.3.3 je tedy každá množina $\{\varepsilon_x\} \subset \varepsilon(\operatorname{ext} K)$ rozkladnou hranou $\varepsilon(K) \subset A(K)^*$.

Pro dané $y \in \operatorname{ext} S$ platí $\phi^*(\varepsilon_y) \in \operatorname{lin} K$. Existují tedy $\alpha_i \in \mathbb{R}$ a $a_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$ takové, že $\phi^*(\varepsilon_y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_{a_i}$. Protože je $\{x\} \subset K$ rozkladnou hranou, existují $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\mu_i \in \{x\}'$ takové, že $a_i = \lambda_i x + (1 - \lambda_i)\mu_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Po dosazení dostáváme

$$\phi^*(\varepsilon_y) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i)\varepsilon_x + \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \lambda_i)\mu_i = \lambda \varepsilon_x + \mu,$$

kde jsme označili $\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \in \mathbb{R}$ a $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \lambda_i)\mu_i \in \operatorname{lin} \varepsilon(\{x\}')$.

Pro $x \in \operatorname{ext} K$ je horní obálka $\chi^*_{\{x\}}$ charakteristické funkce bodu x shora polospojitá a díky Větě 1.5.25 je navíc afinní na K.

Položme $h_x = \chi^*_{\{x\}} \in A^b(K)$. S přihlédnutím k identifikaci $A^b(K) \simeq A(K)^{**}$ z Poznámky 1.5.21 značme $\hat{h}_x \in A(K)^{**}$.

Dané $y \in \operatorname{ext} S$ tedy můžeme vyjádřit jako $\phi^*(\varepsilon_y) = \lambda\varepsilon_x + \mu$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\mu \in \operatorname{lin}\varepsilon(\{x\}')$. Podle Věty 1.5.12 je $\{x\} = h_x^{-1}(1)$ a $\{x\}' = h_x^{-1}(0)$. Proto z definice zobrazení „stříška" platí $\hat{h}_x(\varepsilon_x) = h_x(x) = 1$ a $\hat{h}_x(\mu) = 0$. Počítejme

$$(\phi^{**}\hat{h}_x)(\varepsilon_y) = \hat{h}_x(\phi^*\varepsilon_y) = \lambda\hat{h}_x(x) + \hat{h}_x(\mu) = \lambda. \tag{4.10}$$

Položme

$$Y = \{y \in \operatorname{ext} S : \exists x \in \operatorname{ext} K \text{ takové, že } |(\phi^{**}\hat{h}_x)(\varepsilon_y)| > c\}.$$

Nejprve ukážeme, že pro každé $y \in Y$ existuje nejvýše jedno $x \in \operatorname{ext} K$ s vlastností $|(\phi^{**}\hat{h}_x)(\varepsilon_y)| > c$. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že existují body $x, x' \in K$, $x \neq x'$ takové, že

$$\phi^*(\varepsilon_y) = \lambda\varepsilon_x + \mu = \lambda'\varepsilon_{x'} + \mu', \quad \text{kde } |\lambda|, |\lambda'| > c,\ \mu \in \operatorname{lin}\varepsilon(\{x\}') \text{ a } \mu' \in \operatorname{lin}\varepsilon(\{x'\}').$$

Protože $\|\varepsilon_y\| = 1$ pro $\varepsilon_y \in A(S)^*$ a $\|\phi^*\| = \|\phi\| < 2$, platí

$$2 > \|\phi^*\|\|\varepsilon_y\| \geq \|\phi^*(\varepsilon_y)\| = \|\lambda\varepsilon_x + \mu\| = |\lambda| + \|\mu\| > c + \|\mu\|, \tag{4.11}$$

přičemž druhá rovnost platí díky Větě 1.5.24, protože $\{x\}$ je uzavřená rozkladná hrana K.

Úpravou dostáváme $2 - c > \|\mu\|$. Stejnou úvahou bychom obdrželi nerovnost $2 - c > \|\mu'\|$. Z toho plyne

$$(2-c) + (2-c) > \|\mu\| + \|\mu'\| \geq \|\mu - \mu'\| = \|\lambda'\varepsilon_{x'} - \lambda\varepsilon_x\| = |\lambda'| + |\lambda| > 2c, \tag{4.12}$$

což je ovšem ve sporu s předpokladem $c > 1$. Poslední rovnost platí díky Větě 1.5.24, protože z definice komplementární hrany platí $x' \in \{x\}'$.

Definice zobrazení ρ. Proto můžeme definovat zobrazení $\rho : Y \to \operatorname{ext} K$ jako $\rho(y) = x$, kdykoliv $|(\phi^{**}\hat{h}_x)(\varepsilon_y)| > c$.

Krok 2. Konstrukce zobrazení $\tau : X \subset \operatorname{ext} K \to \operatorname{ext} S$.

Položme:

$$X = \{x \in \operatorname{ext} K : \exists y \in \operatorname{ext} S \text{ takové, že } |\big((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y\big)(\varepsilon_x)| > \frac{1}{2}\}.$$

Pro každé $y \in \operatorname{ext} S$ je množina $\{y\}$ podle předpokladu rozkladnou hranou, a proto díky analogické argumentaci, kterou jsme použili v předchozích odstavcích, existují $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\nu \in \operatorname{lin}\varepsilon(\{y\}')$ takové, že

$$(\phi^{-1})^*(\varepsilon_x) = \lambda\varepsilon_y + \nu.$$

Podle Věty 1.5.12 je $\{y\} = h_y^{-1}(1)$ a $\{y\}' = h_y^{-1}(0)$. Takže $\hat{h}_y(\varepsilon_y) = h_y(y) = 1$ a $\hat{h}_y(\nu) = 0$. Počítejme

$$((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_x) = \hat{h}_y((\phi^{-1})^*\varepsilon_x) = \lambda\hat{h}_y(\varepsilon_y) + \hat{h}_y(\nu) = \lambda.$$

Dokážeme, že pro každé $x \in X$ existuje nejvýše jedno $y \in \operatorname{ext} S$ takové, že platí $|\big((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y\big)(\varepsilon_x)| > \frac{1}{2}$.

Předpokládejme pro spor, že existují body $y, y' \in S$, $y \neq y'$ takové, že

$$\phi^*(\varepsilon_x) = \lambda\varepsilon_y + \nu = \lambda'\varepsilon_{y'} + \nu', \quad \text{kde } |\lambda|, |\lambda'| > \tfrac{1}{2},\ \mu \in \operatorname{lin} \varepsilon(\{y\}) \text{ a } \mu' \in \operatorname{lin} \varepsilon(\{y'\}').$$

Protože $\|\phi(a)\| > c\|a\|$ pro každé $a \in A(K)$, a ϕ je isomorfismus $A(K)$ na $A(S)$, platí také $\|\phi^{-1}(b)\| < \frac{1}{c}\|b\|$ pro každé $b \in A(S)$. Z toho dostáváme

$$\|(\phi^{-1})^*\| = \|\phi^{-1}\| \leq \frac{1}{c} \tag{4.13}$$

a můžeme provést odhad

$$\frac{1}{c} \leq \|(\phi^{-1})^*\|\|\varepsilon_x\| > \|(\phi^{-1})^*(\varepsilon_x)\| = \|\lambda\varepsilon_y + \nu\| = |\lambda| + \|\nu\| > \frac{1}{2} + \|\nu\|. \tag{4.14}$$

Druhá rovnost je splněna díky Větě 1.5.24.

Po úpravě tedy $\frac{1}{c} - \frac{1}{2} > \|\nu\|$. Stejně bychom obdrželi nerovnost $\frac{1}{c} - \frac{1}{2} > \|\nu'\|$. Z toho plyne

$$(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{c} - \frac{1}{2}) > \|\nu\| + \|\nu'\| \geq \|\nu - \nu'\| = \|\lambda'\varepsilon_{y'} - \lambda\varepsilon_y\| = |\lambda'| + |\lambda| > 1.$$

Poslední rovnost platí díky Větě 1.5.24, protože z definice komplementární hrany platí $x' \in \{x\}'$.

Získali jsme nerovnost $\frac{2}{c} - 1 > 1$, po úpravě $c < 1$, což je ve sporu s předpokladem.
Definice zobrazení τ. Proto můžeme definovat zobrazení $\tau : X \to \operatorname{ext} S$ jako $\tau(x) = y$, kdykoliv $|\big((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y\big)(\varepsilon_x)| > \frac{1}{2}$.

Ve dvou lemmatech dokážeme, že ρ je bijektivní zobrazení množiny $\operatorname{ext} S$ na $\operatorname{ext} K$ a τ je bijekce $\operatorname{ext} K$ a $\operatorname{ext} S$.
Lemma 1. Zobrazení $\rho : Y \to \operatorname{ext} K$ a $\tau : X \to \operatorname{ext} S$ jsou surjektivní.

Důkaz. Důkaz provedeme nejprve pro zobrazení ρ. Mějme $x \in \operatorname{ext} K$.

Ukážeme, že existuje $y \in \operatorname{ext} S$ s vlastností $|(\phi^{**}\hat{h}_x)(y)| > c$. Důkaz povedeme sporem, předpokládejme, že $|(\phi^{**}\hat{h}_x)(\varepsilon_y)| \leq c$ pro všechna $y \in \operatorname{ext} S$, neboli $|\lim_n \phi(a_n)(y)| \leq c$.

Funkce h_x je afinní shora polospojitá, a proto podle Lemmatu 1.5.16 existuje dolů usměrněný systém $\mathcal{F}$ funkcí z $A(K)$ takový, že $h_x = \inf \mathcal{F}$. Protože je S metrizovatelný prostor, jsou splněny podmínky Lemmatu 4.3.7 a platí $|(\phi^{**}\hat{h}_x)(\varepsilon_y)| \leq c$ pro všechna $y \in S$. Můžeme počítat

$$c \geq \sup_{y \in S} |(\phi^{**}\hat{h}_x)(\varepsilon_y)| = \|\phi^{**}\hat{h}_x\| > c\|\hat{h}_x\| = c, \tag{4.15}$$

což je spor, a proto je zobrazení ρ surjektivní.

Zbývá zdůvodnit předposlední nerovnost v (4.15). Pro každé $a \in A(K)$, $a \neq 0$ je $\|\phi(a)\| \geq c'\|a\| > c\|a\|$. Z toho plyne, že pro všechny funkce $b \in A(S)$ platí

$$\|b\| \geq c'\|\phi^{-1}(b)\| > c\|\phi^{-1}(b)\|,$$

a proto $1 \geq c'\|\phi^{-1}\| > c\|\phi^{-1}\|$. Díky platnosti vztahu $(\phi^{-1})^{**} = (\phi^{**})^{-1}$ dostáváme $\|(\phi^{**})^{-1}\| = \|(\phi^{-1})^{**}\| = \|\phi^{-1}\| \leq \frac{1}{c'} < \frac{1}{c}$ a

$$\|\hat{h}_x\| = \|(\phi^{**})^{-1}(\phi^{**}\hat{h}_x)\| \leq \|(\phi^{**})^{-1}\|\|\phi^{**}\hat{h}_x\| \leq \frac{1}{c}\|\phi^{**}\hat{h}_x\| < \frac{1}{c}\|\phi^{**}\hat{h}_x\|.$$

Odtud úpravou dostaneme požadovanou nerovnost.

Důkaz surjektivity zobrazení τ bude obdobný.

Mějme $y \in \operatorname{ext} S$. Dokážeme, že existuje $x \in \operatorname{ext} K$ takové, že $|((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_x)| > \frac{1}{2}$.

Pokud by pro všechna $x \in \operatorname{ext} K$ platilo $|((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_x)| \leq \frac{1}{2}$, dostali bychom z Lemmatu 4.3.7, že tato nerovnost platí pro všechna $x \in K$. Zde jsme využili metrizovatelnost prostoru K. Potom

$$\frac{1}{2} \geq \sup_{x \in K} |((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_x)| = \|(\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y\| > \frac{1}{2}\|\hat{h}_y\| = \frac{1}{2}.$$

Poslední nerovnost odvodíme podobným postupem jako v prvním případě. Využijeme toho, že $\|\phi^{**}\| = \|\phi\| < 2$

$$\|\hat{h}_y\| = \|\phi^{**}((\phi^{**})^{-1}\hat{h}_y)\| \leq \|\phi^{**}\|\|(\phi^{**})^{-1}\hat{h}_y\| < 2\|(\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y\|.$$

□

Lemma 2. Dokážame, že $X = \operatorname{ext} K$, $Y = \operatorname{ext} S$ a platí pro každé $x \in \operatorname{ext} K$, $y \in \operatorname{ext} S$ platí vztahy

$$\rho(\tau(x)) = x, \quad \tau(\rho(y)) = y$$

a zobrazení $\rho : \operatorname{ext} S \to \operatorname{ext} K$ a $\tau : \operatorname{ext} K \to \operatorname{ext} S$ jsou bijekce.

Důkaz. Mějme tedy $y \in Y$. Dokážeme, že platí

$$|((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_{\rho(y)})| > \frac{1}{2}. \tag{4.16}$$

Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že platí

$$|((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_{\rho(y)})| \leq \frac{1}{2}.$$

Označme

$$d = \sup_{x' \in \operatorname{ext} K} |(((\phi^{**})^{-1})\hat{h}_y)(\varepsilon_{x'})|.$$

Aplikujeme-li Lemma 4.3.7 na isomorfismus ϕ^{-1} a funkci h_y, dostáváme

$$d = \sup_{x' \in K} |((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_{x'})| = \|(\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y\|, \tag{4.17}$$

kde druhá rovnost platí díky tomu, že ztotožnění $A^b(K)$ a $A(K)^{**}$ z Poznámky 1.5.21 je isometrie.

Dokážeme, že musí být $d > \frac{1}{2}$. Předpokládejme, že tomu tak není a $d \leq \frac{1}{2}$. Protože $y \in Y \subset \operatorname{ext} S$ a podle předchozího lemmatu je zobrazení $\tau : X \to \operatorname{ext} S$ surjektivní, existuje $x \in X$ takové, že

$$\frac{1}{2} < |((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_x)| \leq d.$$

Obdrželi jsme spor, a proto $d > \frac{1}{2}$.

Protože je $c > 1$, platí také $d > \frac{d}{c}$. Z definice suprema proto můžeme najít $x' \in \operatorname{ext} K$ takové, že

$$|((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_{x'})| > \max\{\frac{d}{c}, \frac{1}{2}\}. \tag{4.18}$$

Podle předpokladu je $y \in Y$, a tedy $|((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\varepsilon_{\rho(y)})| \leq \frac{1}{2}$. Proto $\rho(y) \neq x'$. Protože je ρ zobrazením na $\operatorname{ext} K$, existuje $y' \in Y$, že $\rho(y') = x'$. Tudíž také $y \neq y'$.

Proto je podle definice komplementární hrany $y' \in \{y\}'$. Protože podle Lemmatu 1.5.12 je $h_y^{-1}(0) = \{y\}'$, platí $\hat{h}_y(\varepsilon_{y'}) = h_y(y') = 0$.

S využitím tohoto poznatku můžeme počítat

$$0 = \hat{h}_y(\varepsilon_{y'}) = ((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\phi^*(\varepsilon_{y'})) = ((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\lambda'\varepsilon_{x'}) + ((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\mu'), \tag{4.19}$$

kde $\phi^*(\varepsilon_{y'}) = \lambda'\varepsilon_{x'} + \mu'$, $\lambda' \in \mathbb{R}$, $\mu' \in \{x'\}'$ je rozklad pro pevně dané y', x', jaký se diskutoval na začátku důkazu.

Z (4.10) víme, že $\lambda' = (\phi^{**}\hat{h}_{x'})(\varepsilon_{y'})$. Protože $\rho(y') = x'$, z definice zobrazení ρ vidíme, že $|\lambda'| > c$. S přihlédnutím k (4.18) dostáváme

$$|((\phi^{**})^{-1})\hat{h}_y)(\lambda'\varepsilon_{x'})| = |\lambda'||((\phi^{**})^{-1})\hat{h}_y)(\varepsilon_{x'})| > |\lambda'|\frac{d}{c} > d. \tag{4.20}$$

Při následujícím odhadu využijeme (4.19), (4.17) a nerovnosti $\|\mu'\| < 2 - c < 1$, která vyplývá z (4.11).

$$|((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\lambda'\varepsilon_{x'})| = |((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y)(\mu')| \leq \|(\phi^{-1})^{**}\hat{h}_y\|\|\mu'\| < (2-c)d < d. \tag{4.21}$$

Nerovnosti (4.20) a (4.21) nám dávají spor, a proto platí (4.16).

Vezměme si $x \in \operatorname{ext} K$, potom podle Lemmatu 1 existuje $y \in Y$, že $\rho(y) = x$. Díky nerovnosti (4.16) přímo z definice zobrazení τ platí $x \in X$ a $\tau(x) = y$. Tím jsme dokázali, že $\operatorname{ext} K \subset X$, a tedy $\operatorname{ext} K = X$. Protože τ je podle Lemmatu 1 surjekcí na množinu $\operatorname{ext} S$ a $x \in \operatorname{ext} K$ bylo voleno libovolně, plyne z $\tau(x) = y$, že $\operatorname{ext} S = Y$. Proto je $\tau : \operatorname{ext} K \to \operatorname{ext} S$ a pro každé $x \in \operatorname{ext} K$ platí $\rho(\tau(x)) = x$.

Volme nyní $y \in \operatorname{ext} S$. Potom existuje $x \in \operatorname{ext} K$ takové, že $\tau(x) = y$. Podle identity dokázané v předchozím odstavci potom platí $\rho(\tau(x)) = x$. Po aplikování zobrazení ρ na obě strany rovnosti (to je možné, protože již víme, že $X = \operatorname{ext} K$) dostáváme

$$\tau(\rho(y)) = \tau(\rho(\tau(x))) = \tau(x) = y.$$

Dokázali jsme, že zobrazení ρ a τ jsou bijekcemi. □

Krok 3. Nakonec dokážeme, že zobrazení ρ je homeomorfismus.

Nejprve dokážeme, že je ρ spojitým zobrazením. Ukážeme, že vzor uzavřené množiny při zobrazení ρ je také uzavřený.

Mějme relativně uzavřenou podmnožinu $F \subset \operatorname{ext} K$. Existuje tedy uzavřená podmnožina $H \subset K$ taková, že $F = \operatorname{ext} K \cap H$.

Vezměme si $x \in \operatorname{ext} K \setminus F$ a y, že $\rho(y) = x$. Potom $y \notin \rho^{-1}(F)$ a díky normalitě prostoru K existuje uzavřené okolí V bodu x takové, že $V \cap H = \emptyset$. Všimněme si, že $F = \operatorname{ext} K \cap H \subset \operatorname{ext} K \cap (K \setminus V) = \operatorname{ext} K \setminus V$.

Protože $\rho(y) = x$, z definice zobrazení ϱ existuje $\mu \in \operatorname{lin} \varepsilon(\{x\}')$ a $|\lambda| > c$ takové, že $\phi^*(\varepsilon_y) = \lambda\varepsilon_x + \mu$. Prvek μ můžeme vyjádřit jako $\mu = \sum_{i=1}^n r_i\varepsilon_{k_i}$, kde $r_i \in \mathbb{R}$ a $k_i \in \{x\}'$. Položíme $r = \sum_{i=1}^n |r_i|$ a z Choquetovy věty o reprezentaci (Věta 1.5.35) nalezněme maximální míry μ_i na K reprezentující body k_i.

Protože je $\{x\}$ uzavřená množina, je charakteristická funkce $\chi_{\{x\}}$ shora polospojitá a podle Věty 1.5.32 platí

$$\mu_i(\{x\}) = \mu_i(\chi_{\{x\}}) \leq \chi_{\{x\}}^*(k_i) = 0.$$

Poslední rovnost platí díky Větě 1.5.12 a tomu, že $k_i \in \{x\}'$.

Vezmeme $1 > \varepsilon > 0$ takové, že $\varepsilon < \min(\frac{|\lambda|-c}{r+|\lambda|}, c-1)$. Pro $i = 1, \ldots, n$ můžeme díky Lemmatu 1.2.2 najít uzavřená okolí U_i bodu x taková, že $\mu_i(U_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Položme nyní $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap V$. Zřejmě $F \subset \operatorname{ext} K \setminus V \subset \operatorname{ext} K \setminus U$. Díky tomu, že je x slabě exponovaným bodem a U je okolí x, můžeme najít funkci $a_x \in A(K)$ takovou, že $\|a_x\| \leq 1$, $a_x(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ a $|a_x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ na $\operatorname{ext} K \setminus U$. Dokážeme, že $|a_x(k_i)| \leq \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Platí

$$\begin{aligned} |a_x(k_i)| &= |\mu_i(a_x)| \leq \int_{\overline{\operatorname{ext} K}} |a_x| \, \mathrm{d}\mu_i \leq \int_U |a_x| \, \mathrm{d}\mu_i + \int_{\overline{\operatorname{ext} K \setminus U}} |a_x| \, \mathrm{d}\mu_i \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\overline{\operatorname{ext} K \setminus U}} |a_x| \, \mathrm{d}\mu_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

V nerovnosti jsme po řadě využili fakta, že μ_i reprezentuje body k_i, maximální míry jsou neseny $\overline{\operatorname{ext} K}$, pro uzavřenou U platí $\overline{\operatorname{ext} K} \setminus U \subset \overline{\operatorname{ext} K \setminus U}$ a protože je a_x spojitá a $|a_x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ na $\operatorname{ext} K \setminus U$, také na množině $\overline{\operatorname{ext} K \setminus U}$ platí $|a_x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Proto $a_x(x) > 1 - \varepsilon$ a $|a_x| \leq \varepsilon$ na $F \cup \{k_1, \ldots, k_n\}$.

Označme množinu

$$M = \bigcap_{k \in \operatorname{ext} K \setminus F} \{s \in \operatorname{ext} S : |\phi(a_k)(s)| \leq c\}.$$

Dokážeme, že platí $\rho^{-1}(F) = M$.

Mějme $y \notin \rho^{-1}(F)$. Označme $x = \rho(y)$. Potom zřejmě $x \in \operatorname{ext} K \setminus F$ a můžeme podle předchozího návodu nalézt $\lambda, r_i, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $k_i \in K$, $\mu \in \{x\}'$ a $a_x \in A(K)$ s příslušnými vlastnostmi. Platí

$$|\phi(a_x)(y)| = |(\phi^*(\varepsilon_y))(a_x)| = |\lambda a_x(x) + \mu(a_x)| \geq |\lambda||a_x(x)| - |\mu(a_x)| \geq |\lambda|(1-\varepsilon) - r\varepsilon > c. \tag{4.22}$$

Při výpočtu jsme využili vztahu $|\mu(a_x)| = |\sum_{i=1}^n r_i a_x(k_i)| \leq \sum_{i=1}^n |r_i|\varepsilon = r\varepsilon$. Poslední nerovnost je platná z volby ε, proto totiž ε je $\varepsilon < \frac{|\lambda|-c}{r+|\lambda|}$. Takže $y \notin M$, a tedy $M \subset \rho^{-1}(F)$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Mějme $y' \in \rho^{-1}(F)$ a z definice ρ příslušný rozklad $\phi^*(\varepsilon_{y'}) = \lambda' \varepsilon_{x'} + \mu'$, kde $|\lambda'| > c$, $x' \in F$ a $\mu' \in \operatorname{lin} \varepsilon(\{x'\}')$. Potom pro každé $x \in \operatorname{ext} K \setminus F$ platí

$$|\phi(a_x)(y')| = |(\phi^*(\varepsilon_{y'}))(a_x)| = |\lambda' a_x(x') + \mu'(a_x)| \leq |\lambda'|\varepsilon + \|\mu'\| < 2\varepsilon + (2-c) < c.$$

Využili jsme nerovnosti $\|\mu'\| < 2 - c$, která je dokázana v (4.11) a nerovnosti $|\lambda'| < 2$, která plyne z (4.10), neboť

$$|\lambda'| = |(\phi^{**}\hat{h}_{x'})(\varepsilon_{y'})| \leq \|\phi^{**}\| = \|\phi\| < 2.$$

Poslední nerovnost plyne z volby ε. Díky ní totiž $\varepsilon < c - 1$. Tím jsme dokázali, že $y' \in M$, a tedy $\rho^{-1}(F) \subset M$.

Množina $\rho^{-1}(F) = M$ je uzavřená, protože je průnikem systému uzavřených množin. To jsme chtěli dokázat a zobrazení ρ je tedy spojité.

Abychom ukázali, že je ρ homeomorfismem, dokážeme, že také zobrazení $\tau = \rho^{-1}$ je spojité. Důkaz provedeme obdobně jako v prvním případě.

Mějme relativně uzavřenou podmnožinu $F \subset \operatorname{ext} S$. Potom existuje uzavřená množina $G \subset K$ taková, že $F = \operatorname{ext} K \cap G$. Ukážeme, že $\tau^{-1}(F)$ uzavřená v $\operatorname{ext} K$.

Nechť $y \in \operatorname{ext} S \setminus F$. Analogickým postupem jako při důkazu spojitosti ρ k tomuto bodu zkonstruujeme funkci $b_y \in A(S)$ s vhodnými vlastnostmi.

Nalezneme $x \in \operatorname{ext} K$, aby $\tau(x) = y$. Protože $x \notin \tau^{-1}(F)$, existuje uzavřené okolí V bodu $y$takové, že $V \cap G = \emptyset$. Platí také $F \subset \operatorname{ext} S \setminus V$.

Protože $\tau(y) = x$, existuje z definice zobrazení τ rozklad $(\phi^{-1})^*(\varepsilon_x) = \lambda\varepsilon_y + \nu$, kde $\nu \in \operatorname{lin} \varepsilon(\{y\}')$ a $|\lambda| > \frac{1}{2}$. Prvek ν můžeme vyjádřit jako $\nu = \sum_{i=1}^n r_i \varepsilon_{s_i}$, kde $r_i \in \mathbb{R}$ a $s_i \in \{y\}'$. Označíme $r = \sum_{i=1}^n |r_i|$. Díky Choquetově věty o reprezentaci (Věta 1.5.35) existují maximální míry ν_i na K, které reprezentují body s_i.

Protože je $\{y\}$ uzavřená množina, platí stejně jako v předchozím $\nu_i(\{y\}) = 0$.

Nalezněme $1 > \varepsilon > 0$ takové, aby $\varepsilon < \min(\frac{|\lambda|-1/2}{|\lambda|+r}, c-1)$. Pro $i = 1, \ldots, n$ můžeme s pomocí Lemmatu 1.2.2 najít uzavřená okolí U_i bodu y taková, že $\nu_i(U_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dále položíme $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap V$. Zřejmě $F \subset \operatorname{ext} S \setminus U$. Protože je y slabě exponovaným bodem a U je jeho okolí, existuje funkce $b_y \in A(S)$ taková, že $\|b_y\| \leq 1$, $b_y(y) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ a $|b_y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ na $\operatorname{ext} K \setminus U$. Stejně jako v (4.22) bychom dokázali, že $|b_y(s_i)| \leq \varepsilon$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Pro b_y tedy platí, že $b_y(y) > 1 - \varepsilon$ a $|b_y| \leq \varepsilon$ na $F \cup \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Položme

$$N = \bigcap_{s \in \operatorname{ext} S \setminus F} \{k \in \operatorname{ext} S : |\phi^{-1}(b_s)(k)| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Dokážeme, že $\tau^{-1}(F) = N$.

Nechť nejprve $x \notin \tau^{-1}(F)$. Označme $y = \tau(x)$. Potom $y \in \operatorname{ext} S \setminus F$, a můžeme podle předchozího návodu nalézt příslušné $\lambda, r_i, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $k_i \in K$, $\mu \in \{x\}'$ a $a_x \in A(K)$ s výše uvedenými vlastnostmi. Platí

$$|(\phi^{-1}b_y)(x)| = |((\phi^{-1})^*\varepsilon_x)(b_y)| = |\lambda b_y(y) + \nu(b_y)| \geq |\lambda||b_y(y)| - |\nu(b_y)| \geq |\lambda|(1-\varepsilon) - r\varepsilon > \frac{1}{2},$$

protože $|\nu(b_y)| = |\sum_{i=1}^n r_i b_y(s_i)| \leq \sum_{i=1}^n |r_i|\varepsilon = r\varepsilon$. Poslední nerovnost je dána volbou ε. Proto $x \notin N$ a $N \subset \tau^{-1}(F)$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Mějme $x' \in \tau^{-1}(F)$ a z definice τ rozklad $(\phi^{-1})^*(\varepsilon_{x'}) = \lambda'\varepsilon_{y'} + \nu'$, kde $|\lambda'| > \frac{1}{2}$, $y' \in F$ a $\nu' \in \operatorname{lin}(\{y'\}')$. Potom pro každé $y \in \operatorname{ext} S \setminus F$ platí

$$|\phi^{-1}(b_{y'})(x')| = |((\phi^{-1})^*(\varepsilon_{y'}))(b_{y'})| = |\lambda' b_y(y') + \nu'(b_y)| \leq |\lambda'|\varepsilon + \|\nu'\| < \frac{\varepsilon}{c} + (\frac{1}{c} - \frac{1}{2}) < \frac{1}{2}.$$

Využili jsme nerovnosti $\|\nu'\| < \frac{1}{c} - \frac{1}{2}$, která je odvozena v (4.14) a nerovnosti $|\lambda'| < \frac{1}{c}$, která plyne z (4.12), neboť

$$|\lambda'| = |((\phi^{-1})^{**}\hat{h}_{y'})(\varepsilon_{x'})| \leq |(\phi^{-1})^{**}\hat{h}_{y'}\| \leq \|(\phi^{-1})^{**}\| \leq \|\phi^{-1}\| < \frac{1}{c},$$

kde poslední nerovnost je dokázána v (4.13).

Tím jsme dokázali, že $x' \in N$, a tedy $\tau^{-1}(F) \subset N$. Množina $\tau^{-1}(F) = N$ je uzavřená, protože je průnikem systému uzavřených množin. Zobrazení τ je tedy spojité, a ρ je homeomorfismus.

$\square$

V článku [10] se objevuje také varianta Věty 4.3.8 pro nemetrizovatelné kompaktní prostory. Předpoklad metrizovatelnosti je nahrazen požadavkem uzavřenosti množin extremálních bodů.

Věta 4.3.10 ([10], Theorem 12). *Nechť K a S jsou kompaktní konvexní množiny, jejichž každý extremální bod je slabě exponovaným bodem. Nechť jsou dále* $\operatorname{ext} K$ *a* $\operatorname{ext} S$ *uzavřené. Pokud existuje isomorfismus $\phi : A(K) \to A(S)$ s $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$, potom jsou* $\operatorname{ext} K$ *a* $\operatorname{ext} S$ *homeomorfní.*

Poznámka 4.3.11. *Uvědomme si, že v důkazu Věty 4.3.8 se metrizovatelnost prostorů K, S objevila pouze jako předpoklad možnosti využití Lemmatu 4.3.7. První zobecnění plyne z toho, že Lemma 4.3.7 platí také pro perfektně normální prostory. Tudíž také ve větě Chu a Cohena je možné předpoklad měřitelnosti nahradit předpokladem perfektní normality.*

Není jisté, zda je tvrzení s předpokladem perfektní normality skutečným zobecněním Věty 4.3.7, protože zůstává otevřeným problémem, zda perfektně normální kompaktní konvexní prostory nejsou již metrizovatelné (viz článek [21] od B. MacGibbon).

Naše další zobecnění této věty bude spočívat v tom, že podmínku metrizovatelnosti nahradíme předpokladem, že $\operatorname{ext} K$, $\operatorname{ext} S$ *jsou Lindelöfovy prostory.*

Lemma 4.3.12. *Nechť je K kompaktní konvexní množina,* $\operatorname{ext} K$ *je Lindelöfovým prostorem a $f \in A_{bf}(K)$, $f \leq c$ na* $\operatorname{ext} K$*. Potom $f \leq c$ na K.*

Důkaz. Volme $x \in K$. Podle Choquetovy věty (Věta 1.5.35) najdeme maximální míru reprezentující bod x. Podle Věty 1.5.37 platí, že potom $\mu_*(K \setminus \operatorname{ext} K) = 0$. Podle definice vnitřní míry máme

$$0 = \mu_*(K \setminus \operatorname{ext} K) = \sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{B}(K), F \subset (K \setminus \operatorname{ext} K)\}.$$

Podle předpokladů platí, že $\operatorname{ext} K \subset \{y \in K : f(y) \leq c\}$, tedy

$$K \setminus \{y \in K : f(y) \leq c\} \subset K \setminus \operatorname{ext} K.$$

Protože je f univerzálně měřitelná, je množina na levé straně inkluze měřitelná a platí $\mu(K \setminus \{y \in K : f(y) \leq c\}) = 0$.

Podle předpokladu splňuje funkce f barycentrickou formuli, proto platí

$$f(x) = \mu(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu = \int_{K\setminus\{y\in K: f(y)\leq c\}} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{y\in K: f(y)\leq c\}} f \,\mathrm{d}\mu \leq c$$

□

Věta 4.3.13. *Nechť K je kompaktní konvexní množina a $f \in A^b(K)$ je shora polospojitá funkce. Potom $f \in A_{bf}(K)$.*

Důkaz. Funkce f je shora polospojitá, takže je univerzálně měřitelná. Zbývá ověřit, že splňuje barycentrickou formuli. Z Lemmatu 1.5.16 platí, že existuje dolů usměrněný systém $\mathcal{F}$ funkcí z $A(K)$ takový, že $f = \inf \mathcal{F}$. Volme $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(K)$. Potom z Věty 1.5.39 dostáváme

$$\mu(f) = \mu(\inf \mathcal{F}) = \inf\{\mu(h) : h \in \mathcal{F}\} = \inf\{h(x) : h \in \mathcal{F}\} = f(x),$$

což bylo dokázat. □

Lemma 4.3.14. *Nechť K je kompaktní konvexní množina, $f \in A_{bf}(K) \cap A^b(K)$ a $k > 0$. Potom je $\hat{f} \in A_{bf}(kB_{A(K)^*})$.*

Důkaz. Protože je podle předpokladu $f \in A_{bf}(K)$ a zobrazení $\varepsilon^{-1} \circ \frac{1}{k}$ je afinním homeomorfismem množiny $k\varepsilon(K)$ na K, platí díky Lemmatu 1.5.42

$$\hat{f}|_{k\varepsilon(K)} = k \cdot f \circ \varepsilon^{-1} \circ \frac{1}{k} \in A_{bf}(k\varepsilon(K)), \quad \hat{f}|_{-k\varepsilon(K)} = -k \cdot f \circ \varepsilon^{-1} \circ -\frac{1}{k} \in A_{bf}(-k\varepsilon(K)).$$

Podle Lemmatu 1.5.7 je $B_{A(K)^*} = \operatorname{co}(\varepsilon(K) \cup -\varepsilon(K))$, přičemž $\varepsilon(K)$, $-\varepsilon(K)$ jsou uzavřené konvexní množiny. Proto platí $kB_{A(K)^*} = \operatorname{co}(k\varepsilon(K) \cup -k\varepsilon(K))$, kde $k\varepsilon(K)$, $-k\varepsilon(K)$ jsou uzavřené konvexní množiny.

Potom podle Lemmatu 1.5.38 platí $\hat{f} \in A_{bf}(kB_{A(K)^*})$. □

Lemma 4.3.15. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny, $f \in A_{bf}(K)$ a $U : S \to K$ je afinní spojité zobrazení. Potom $f \circ U \in A_{bf}(S)$.*

Důkaz. Funkce f je univerzálně měřitelná na K, proto je také univerzálně měřitelná na kompaktní množině $K \cap U(S)$. Funkce $f \circ U$ je složením univerzálně měřitelné $f|_{U(S)}$ a afinního spojitého zobrazení $U : S \xrightarrow{na} U(S)$. Proto je podle Lemmatu 1.5.41 funkce $f \circ U$ univerzálně měřitelná na S.

Nyní ověříme platnost barycentrické formule. Mějme $\mu \in \mathcal{M}^1(S)$.

Protože je U spojité, je $U_\sharp\mu$ mírou na K. Z definice obrazu míry pro každou měřitelnou množinu F platí $U_\sharp\mu(F) = \mu(U^{-1}(F))$, proto můžeme snadno ověřit, že $U_\sharp\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Protože je U afinní spojité zobrazení, podle Lemmatu 1.5.40 platí $U(r(\mu)) = r(U_\sharp\mu)$.

Využijeme-li předpokladu $f \in A_{bf}(K)$, můžeme počítat

$$\mu(f \circ U) = U_\sharp\mu(f) = f(r(U_\sharp(\mu))) = (f \circ U)(r(\mu)).$$

Takže $f \circ U \in A_{bf}(S)$. □

Nyní máme připraveno všechno k tomu, abychom dokázali „lepší“ verzi Lemmatu 4.3.7.

Lemma 4.3.16. *Nechť K, S jsou kompaktní konvexní množiny a množina $\operatorname{ext} S$ je Lindelöfova. Dále máme isomorfismus $\phi : A(K) \to A(S)$ a funkci $f \in A^b(K)$, která je shora polospojitá. Pokud pro všechna $y \in \operatorname{ext} S$ platí $|\phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y)| \leq c$, potom pro všechna $y \in S$ platí $|\phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y)| \leq c$.*

Důkaz. Funkce f splňuje předpoklady Věty 4.3.13, a proto platí $f \in A_{bf}(K)$. Položme $k = \|\phi\|$. Protože $f \in A_{bf}(K) \cap A^b(K)$, je podle Lemmatu 4.3.14 také $\hat{f} \in A_{bf}(kB_{A^*(K)})$.

Nyní položme $U = \phi^* \circ \varepsilon$. Zobrazení U je afinní a spojité. Protože $\varepsilon : S \to B_{A(K)^*}$ a $\|U\| = k$, platí $U : S \to kB_{A(K)^*}$. Množina $kB_{A(K)^*}$ je kompaktní konvexní.

Podle Lemmatu 4.3.15 platí $\hat{f} \circ \phi^* \circ \varepsilon = \hat{f} \circ U \in A_{bf}(S)$.

Pro $y \in S$ tedy

$$(\phi^{**}\hat{f})\varepsilon_y = (\hat{f} \circ \phi^* \circ \varepsilon)(y).$$

Podle předpokladu víme, že pro $y \in \operatorname{ext} S$ platí

$$|\phi^{**}\hat{f}(\varepsilon_y)| = |(\hat{f} \circ \phi^* \circ \varepsilon)(y)| \leq c. \tag{4.23}$$

Použijeme-li Lemmatu 4.3.12 na funkci $\hat{f} \circ \phi^* \circ \varepsilon \in A_{bf}(S)$, dostaneme platnost nerovnosti (4.23) pro všechna $y \in S$. □

Výsledky našeho zobecňování shrneme do závěrečného tvrzení.

Věta 4.3.17. *Nechť K a S jsou kompaktní konvexní množiny, jejichž každý extremální bod je slabě exponovaným bodem a* $\operatorname{ext} K$, $\operatorname{ext} S$ *jsou Lindelöfovy topologické prostory. Nechť dále existuje isomorfismus $\phi : A(K) \to A(S)$ s vlastností $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$. Potom jsou* $\operatorname{ext} K$ *a* $\operatorname{ext} S$ *homeomorfní.*

Poznámka 4.3.18. *Tvrzení je zobecněním Věty 4.3.8. Metrizovatelný kompaktní prostor K je totiž perfektně normální Lindelöfův a podle Lemmatu 1.4.8 je proto dědičně Lindelöfův. Proto je* $\operatorname{ext} K$ *Lindölefova.*

Tvrzení také přímo zobecňuje také Větu 4.3.10, protože uzavřená množina extremálních bodů je v kompaktním prostoru kompaktní, a proto také Lindelöfova.

Jinou metodou v článku [10] dokázali Chu a Cohen další zajímavou obměnu Banach-Stoneovy věty. Předpoklad metrizovatelnosti kompaktních konvexních množin nebo uzavřenosti jejich množin extremálních bodů nahradili požadavkem simpliciality.

Věta 4.3.19. *Nechť K a S jsou simplexy, v nichž je každý extremální bod slabě exponovaným bodem. Dále mějme zobrazení $\phi : A(K) \to A(S)$, které je surjektivním isomorfismem s vlastností $\|\phi\|\|\phi^{-1}\| < 2$. Potom jsou* $\operatorname{ext} K$ *a* $\operatorname{ext} S$ *homeomorfní.*

Stojí za poznámku, že pro obecné simplexy tvrzení neplatí. Příklad vynašel H. U. Hess v [19].

Věta 4.3.20. *Pro každé $\alpha \in (0,1)$ exsistují simplexy K, S takové, že* $\operatorname{ext} K$ *a* $\operatorname{ext} S$ *nejsou homeomorfní a existuje lineární isomorfismus ϕ mezi $A(K)$ a $A(S)$ takový, že $\|\phi\| \cdot \|\phi^{-1}\| < 1 + \alpha$.*

Literatura

[1] Alfsen, E. M.: *Compact convex sets and boundary integrals*, Ergebnise der Mathematik **57**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1971).

[2] Asimow, L; Ellis, A. J.: *Convexity theory and its applications in functional analysis*, London Math. Soc. Monograph **16**, Academic Press, London, (1980).

[3] Dunford, Schwartz: *Linear Operators I.*, Interscience publishers, inc., New York (1958).

[4] Lazar, A. J.: *Affine products of simplexes*, Math. Scand., **22** (1968) 165–175.

[5] Rao, T.S.S.R.K.: *Isometries of $A_C(K)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **85** (1982) 544–546.

[6] Curnock, A.; Howroyd, J; Wong, Ngai-Ching: *Isometries of affine function spaces*, preprint.

[7] Ellis, A. J.; So, W. S.: *Isometries and the complex state spaces of uniform algebras*, Math. Z., **195** (1987) 119–125.

[8] Amir, A.: *On isomorphisms of continuous function spaces*, Israel J. Math., **3** (1965) 205–210.

[9] Cohen, H. B.: *A bound-two isomorphism between $C(X)$ Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **50** (1975) 215–217.

[10] Cohen, H.B.; Chu, C.-H.: *Isomorphisms of spaces of continuous affine functions*, Pac. J. Math. **155** (1992) 71–86.

[11] Engelking, R.: *General Topology*, Heldermann, Berlin, (1989).

[12] Rudin, W.: *Functional Analysis*, McGraw-Hill Science, (1991).

[13] Holmes, R. B.: *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1975).

[14] Lukeš, J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, Praha, (2003).

[15] Spurný, J.: *Baire classes of Banach spaces and strongly affine functions*, to appear in Transactions of American Mathematical Society.

[16] Spurný, J.: *Representation of abstract affine functions*, Real. Anal. Exchange **28(2)** (2002/2003) 337–354.

[17] Phelps, R. R.: *Lectures on Choquet's Theorem*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (2001).

[18] Kačena, M: *Topologické vlastnosti kompaktných konvexných množín*, diplomová práce, MFF UK, (2007).

[19] Hess, H. U.: *On theorem of Cambern*, Proc. Amer. Math. Soc., **71** (1978) 204–206.

[20] Lukeš, J.; Malý, J: *Measure and Integral*, Matfyzpress, (2005).

[21] MacGibbon, B.: *A criterion for the metrizability of a compact convex set in terms of the set of extreme points*, J. Funct. Anal., **11** (1972) 385–392.

[22] Engelking, R.; Sieklucki K.: *Topology A Geometric Approach*, Heldermann, Berlin, (1992).