Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení písemky	Datum a čas testu
✍		27. května 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

❶ Rozhodněte, zda je množinová soustava $\mathscr{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbf{R}\}$ aditivní a zda je okruhem.

❷ Nechť jsou nulová funkce a funkce $g(x) = \Theta(x)\Theta(6-x)$ $\mu-$ekvivalentní? Čemu se rovná

$$\int_1^5 \lfloor x \rfloor \, \mathrm{d}\mu(x)$$

a proč?

❸ Následující výrok přepište do jednoduchého (a minimalistického) tvaru.

$$\lim_{c \to 0} \frac{g(1,3,0) - g(1+4c, 3-4c, 2c)}{c} = 8.$$

❹ Ukažte, jak lze elegantně (za pomoci Fubiniovy věty) vyčíslit hodnotu Gaussova integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \, \mathrm{d}x.$$

❺ Vyslovte definici křivkové parametrizace a vysvětlete, kdy řekneme, že je křivka $C \subset \mathbf{R}^r$ jednoduchá.

❻ Slovně (bez použití matematických symbolů) vysvětlete, co je smyslem Greenovy věty, tj. o čem pojednává a jaká je její nejčastější aplikace.

❼ Nechť je dána funkce $g(x) = \Theta(x-1) \cdot x^2$ a vytvořující funkce

$$\varphi(x) = \frac{12x|x|}{4+3x^2}$$

míry. Jakou míru má nosič funkce $g(x)$?

❽ Definujte pojem směrové derivace. Poté vysvětlete, za jakých podmínek lze při výpočtu směrové derivace užít známý vzorec.

❾ O posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^2$ je známo, že:

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \|\vec{x}_n - (3,-1)\| < \delta.$$

Čemu se pro $f(\vec{x}) = (x_1 x_2)^2$ rovná

$$\lim_{n \to \infty} f(\vec{x}_n)\,?$$

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		2. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

❶ Vyslovte definici ostrého lokálního minima.

❷ Nalezněte alespoň jeden kritický generující bod pro implicitní funkci $z = z(x, y)$, která je zadána prostřednictvím rovnice

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

❸ Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3(y+2)^2 x^4}{(y+2)^4 + 5x^8} & \dots \ (x, y) \neq (0, -2), \\ \frac{4}{7} & \dots \ (x, y) = (0, -2), \end{cases}$$

je spojitá v bodě $(0, -2)$ vzhledem k jistým množinám

$$M_{\alpha\beta} = \big\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \ y = \alpha x^2 + \beta\big\}.$$

Najděte všechna taková $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

❹ Definujte pojem polookruhu a okruhu.

❺ Kdy řekneme, že je zobrazení $\vec{G}(x, y) \ : \ \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ prosté? Podle vaší definice rozhodněte, je zda vektorová funkce

$$\vec{G}(x, y) = (x^4 + y^2, xy)$$

prostá.

❻ Vyslovte znění Lebesgueovy věty a aplikujte ji při vyčíslení limity

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \frac{n^2 x^3}{(8 + n^2 x^2)(1 + x^4)} \, \mathrm{d}x.$$

Výraz vypočítejte!

❼ Kdy řekneme, že je plocha $S \subset \mathbf{R}^3$ hladká regulární?

❽ Vyslovte definici totálního diferenciálu.

❾ Rozhodněte (a řádně zdůvodněte), zda $x^{-2} \in \mathscr{L}(\langle 1, 2 \rangle)$. Předpokládejte klasickou míru.

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		8. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17,18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16,17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15,16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14,15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12,14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0,12) \mapsto \mathbf{F}$;

❶ Krátkým symbolem vyjádřete smysl výrazu

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{a}+\tau(0,0,4)) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{a})}{\tau}.$$

❷ Vyslovte definici monotonie a aditivity množinové funkce.

❸ Zapište definici křivkové parametrizace a sestavte ji pro křivku

$$C = \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \wedge z=\frac{c}{2}\right\}.$$

❹ Vyslovte větu o separabilitě Lebesgueova integrálu.

❺ Vyčíslete divergenci vektorové funkce

$$\vec{G}(x,y,z) = \left(x^3+y^2+z, 3x^2y+5y^2z+7z^2x, (xyz)^3\right).$$

❻ Vyslovte definici ostrého lokálního maxima.

❼ Hessova matice funkce $h(\vec{x}) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ má ve stacionárním bodě $\vec{a}$ tvar

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pro která $\beta \in \mathbf{R}$ je bod $\vec{a}$ bodem sedlovým?

❽ Vyslovte definici křivkového integrálu druhého druhu. Neopomeňte udat všechny předpoklady.

❾ Nechť je dána funkce

$$h(x) = \begin{cases} x^4; & x \in \mathbf{Q} \\ x^2; & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$$

Vypočítejte $\int_{-2}^{2} h(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$. Výpočet okomentujte, aby bylo zřejmé, o jaké úvahy se váš výpočet opírá.

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		14. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17,18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16,17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15,16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14,15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12,14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0,12) \mapsto \mathbf{F}$;

1. Hessova matice funkce $h(\vec{x}) \in C^\infty(\mathbf{R}^4)$ má ve stacionárním bodě $\vec{a}$ tvar

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & c & -3 \end{pmatrix}$$

Pro která $c \in \mathbf{R}$ je bod $\vec{a}$ bodem sedlovým?

2. Definujte základní systém funkcí $\mathcal{Z}_\mu$. Jednotlivé pojmy vysvětlete.

3. Vyslovte Fubiniovu větu pro Lebesgueův integrál z funkce $f(\vec{x},\vec{y}) : \mathbf{R}^{r+s} \mapsto \mathbf{R}$.

4. Definujte pojem totálního diferenciálu. Dbejte na zřetelné odlišení vektorů a skalárů.

5. Podle definice rozhodněte, zda je elipsa

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

hladkou regulární křivkou.

6. Prověřte předpoklady věty o derivaci integrálu s parametrem pro případ integrálu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-4x^2} \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

7. Vyslovte definici regularity zobrazení $\vec{g}(\vec{x}) = \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}^r$.

8. Vyslovte Heineovu větu pro limitu funkce více proměnných.

9. Zapište tvar Hessovy matice funkce $z = z(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0) = (1,2)$, v němž má tato funkce funkční hodnotu rovnou nule. Funkce $z = z(x,y)$ nechť je zadána implicitně rovnicí

$$y^2 + xz - z^3 = 4.$$

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		21. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17,18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16,17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15,16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14,15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12,14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0,12) \mapsto \mathbf{F}$;

❶ Nechť je zadána abstraktní Lebesgueova míra prostřednictvím vytvořující funkce

$$\varphi(x) = \Theta(x)\sqrt{36 + x^2}.$$

Jakou míru má nosič funkce $g(x) = \Theta(64 - x^2)$? Symbol $\Theta(x)$ reprezentuje Heavisideovu funkci.

❷ Vyslovte větu o spojitosti složené funkce $g(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$.

❸ Ukažte, jak je definována vnější míra vytvořená z míry $\mu_\sigma(X)$, která je zavedena na $\mathscr{S}_r$.

❹ Vyslovte precizní znění věty o postačující podmínkce pro lokální extrém funkce více proměnných.

❺ Prověřte předpoklady věty o derivaci integrálu s parametrem pro případ integrálu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-4x^2} \cos(\alpha x)\, \mathrm{d}x.$$

❻ Kdy řekneme, že je množinová funkce $\sigma-$aditivní?

❼ Z rovnice

$$x^2 - xyu^2 + zu^3 = 1$$

vypočítejte gradient funkce $u = u(x, y, z)$ v bodě $(1, 1, 1)$.

❽ Jakou plošnou míru má kruh o poloměru R centrovaný do počátku souřadné soustavy, je-li míra generována vytvořující funkcí $\varphi(x) = x^3$ (v obou dimenzích)?

❾ Definujte křivkový integrál druhého druhu.

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		27. června 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16, 17) \mapsto$ **B**; $\langle 15, 16) \mapsto$ **C**; $\langle 14, 15) \mapsto$ **D**; $\langle 12, 14) \mapsto$ **E**; $\langle 0, 12) \mapsto$ **F**;

❶ Nechť jsou dány dvě $\mu-$ekvivalentní funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{Z}_\mu$, $g(\vec{x}) \in \mathcal{Z}_\mu$, pro které platí, že

$$f(E) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}, \qquad g(E) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n, c_1, c_2, \ldots, c_m\}, \qquad n, m \in \mathbf{N}.$$

Podle definice 1. konstrukčního kroku Lebesgueova integrálu ukažte, že

$$\int_E f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_E g(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}).$$

❷ Zapište tvar totálního diferenciálu funkce $g(x, y, z) = x^2 + 3yz^3$ v bodě $\vec{a} = (3, 2, 1)$.

❸ Vyslovte definici ostrého lokálního maxima vzhledem k množině $A \subset \mathbf{E}^r$.

❹ Ukažte, že míra $F(X) : \mathscr{H}_1 \mapsto \mathbf{R}$ zadaná na $\mathscr{H}_1 = \{\emptyset, \langle \alpha, \beta) : -\infty < \alpha < \beta < +\infty\}$ vytvořující funkcí $\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)$ není na $\mathscr{H}_1$ $\sigma-$aditivní.

❺ Vyslovte definici hladké regulární plochy v $\mathbf{R}^3$. U všech použitých matematických symbolů vysvětlete význam.

❻ Ukažte, že zobrazení $(r, s) = (x^2 - y^2; xy)$ je regulární na $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0]\}$, ale není prosté.

❼ Pro funkci $z = z(x, y)$ zadanou na okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 4)$ implicitně rovnicí $G(x, y, z) = 0$ ukažte, jak vyčíslit $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 3)$.

❽ U některých množin množinové soustavy

$$\mathscr{A} = \Big\{\emptyset; \{\square\}; \{\ominus\}; \{\heartsuit, \triangle\}; \{\square, \heartsuit, \triangle\}; \{\ominus, \square, \heartsuit, \triangle)\Big\}$$

je určena míra. Jsou to: $\mu(\{\square\}) = 3$, $\mu(\{\ominus\}) = 1$, a $\mu(\{\ominus, \square, \heartsuit, \triangle\}) = 4$. Určete míru ostatních množin a rozhodněte, zda je takto zadaná míra úplná.

❾ Vyslovte znění věty o substituci pro Lebesgueův integrál.

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		12. července 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto \mathbf{A}$; $\langle 16, 17) \mapsto \mathbf{B}$; $\langle 15, 16) \mapsto \mathbf{C}$; $\langle 14, 15) \mapsto \mathbf{D}$; $\langle 12, 14) \mapsto \mathbf{E}$; $\langle 0, 12) \mapsto \mathbf{F}$;

❶ Vyslovte definici grafu funkce více proměnných.

❷ Vyslovte větu o existenci globálního extrému funkce.

❸ Definujte direktní součet křivek.

❹ Jaká regulární transformace převede rovnici

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} = 1$$

v kartézských souřadnicích do tvaru $\varrho = 1$?

❺ Jakým způsobem se zavádí míra na soustavě $\mathscr{S}_r$? A jak je soustava $\mathscr{S}_r$ zavedena? Má soustava $\mathscr{S}_r$ prezidenta?

❻ Je dána funkce $f(x, y) = x^2 - 3y^4 + 7$.

- Určete stacionární bod $\vec{a}$ funkce $f(x, y)$ a vyčíslete v něm Hessovu matici.
- Určete typ definitnosti této matice.
- Rozhodněte, zda lze na základě této znalosti (definitnosti) určit typ extému v $\vec{a}$.
- Má nebo nemá funkce $f(x, y)$ v $\vec{a}$ extrém?

❼ Vyslovte základní větu teorie Riemannova integrálu.

❽ U některých množin množinové soustavy

$$\mathscr{A} = \Big\{\emptyset; \{\Box\}; \{\ominus\}; \{\heartsuit, \triangle\}; \{\Box, \heartsuit, \triangle\}; \{\ominus, \Box, \heartsuit, \triangle)\Big\}$$

je určena míra. Jsou to: $\mu(\{\Box\}) = 3$, $\mu(\{\ominus\}) = 1$, a $\mu(\{\ominus, \Box, \heartsuit, \triangle\}) = 4$. Jaká je vnitřní a vnější míra množiny $A = \{\Box, \triangle\}$?

❾ Vyslovte Gaussovu-Ostrogradského větu.

Zkouškový test z předmětu 01ANB4/01MAB4		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení testu	Datum a čas testu
✍		22. srpna 2022, 9:30 – 10:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Všechny úlohy jsou dvoubodové.
Celkové hodnocení: $\langle 17, 18\rangle \mapsto$ **A**; $\langle 16, 17) \mapsto$ **B**; $\langle 15, 16) \mapsto$ **C**; $\langle 14, 15) \mapsto$ **D**; $\langle 12, 14) \mapsto$ **E**; $\langle 0, 12) \mapsto$ **F**;

❶ Definujte direktní součet křivek.

❷ U některých množin množinové soustavy

$$\mathscr{A} = \Big\{\emptyset; \{\Box\}; \{\ominus\}; \{\heartsuit, \triangle\}; \{\Box, \heartsuit, \triangle\}; \{\ominus, \Box, \heartsuit, \triangle\}\Big\}$$

je určena míra. Jsou to: $\mu(\{\Box\}) = 3$, $\mu(\{\ominus\}) = 1$, a $\mu(\{\ominus, \Box, \heartsuit, \triangle\}) = 4$. Jaká je vnitřní a vnější míra množiny $A = \{\Box, \triangle\}$?

❸ Vyslovte Greenovu větu.

❹ Nechť jsou dány dvě $\mu-$ekvivalentní funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{Z}_\mu$, $g(\vec{x}) \in \mathscr{Z}_\mu$, pro které platí, že

$$f(E) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}, \qquad g(E) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n, c_1, c_2, \ldots, c_m\}, \qquad n, m \in \mathbf{N}.$$

Podle definice 1. konstrukčního kroku Lebesgueova integrálu ukažte, že

$$\int_E f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_E g(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}).$$

❺ Na integrálu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \frac{\cos(ax) - 1}{x} \mathrm{d}x$$

prověřte detailně všechny předpoklady věty o derivaci integrálu s parametrem.

❻ Dokažte, že má-li funkce spojité derivace prvního řádu na okolí bodu $\vec{a}$, pak má v $\vec{a}$ totální diferenciál.

❼ Vyslovte definici Hessovy matice a vysvětlete, kdy je symetrická a kdy ne.

❽ Vyslovte a dokažte větu o funkci a souvislé množině. Součástí důkazu by měla být také definice souvislé množiny.

❾ Vyslovte definici ostrého lokálního maxima.