

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

# UNIVERSITE MONTPELLIER II

– SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC –

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal

Formation Doctorale : Systèmes Automatiques et Microélectroniques

École Doctorale : Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

**Sébastien KRUT**

Le 13 novembre 2003

Titre :

---

Contribution à l'étude des robots parallèles  
légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements  
angulaires

---

### JURY

M. Torgny BROGARDH	Docteur Ingénieur, Dpt. R&D, ABB Robotics, Suède	<i>Examineur</i>
M. Reg DUNLOP	Professeur à l'Univ. de Christchurch, Nouvelle-Zélande	<i>Invité</i>
M. Alain FOURNIER	Professeur à l'Université Montpellier II	<i>Président du Jury</i>
M. Handfried KERLE	Professeur à l'Université de Braunschweig, Allemagne	<i>Examineur</i>
M. Jean-Pierre MERLET	Directeur de Recherche INRIA à Sophia-Antipolis	<i>Rapporteur</i>
M. François PIERROT	Directeur de Recherche CNRS au LIRMM, Montpellier	<i>Directeur de Thèse</i>
M. Philippe WENGER	Directeur de Recherche CNRS à l'IRCCyN, Nantes	<i>Rapporteur</i>



ACADÉMIE DE MONTPELLIER

# UNIVERSITE MONTPELLIER II

– SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC –

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal

Formation Doctorale : Systèmes Automatiques et Microélectroniques

École Doctorale : Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

**Sébastien KRUT**

Le 13 novembre 2003

Titre :

---

Contribution à l'étude des robots parallèles  
légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements  
angulaires

---

### JURY

M. Torgny BROGARDH	Docteur Ingénieur, Dpt. R&D, ABB Robotics, Suède	<i>Examineur</i>
M. Reg DUNLOP	Professeur à l'Univ. de Christchurch, Nouvelle-Zélande	<i>Invité</i>
M. Alain FOURNIER	Professeur à l'Université Montpellier II	<i>Président du Jury</i>
M. Handfried KERLE	Professeur à l'Université de Braunschweig, Allemagne	<i>Examineur</i>
M. Jean-Pierre MERLET	Directeur de Recherche INRIA à Sophia-Antipolis	<i>Rapporteur</i>
M. François PIERROT	Directeur de Recherche CNRS au LIRMM, Montpellier	<i>Directeur de Thèse</i>
M. Philippe WENGER	Directeur de Recherche CNRS à l'IRCCyN, Nantes	<i>Rapporteur</i>



*A ma famille, à mes amis...*



---

# Remerciements

---

Voici quelques lignes difficiles à écrire ; non pas parce que je n'ai envie de remercier personne (au contraire), mais parce que ces lignes marquent l'achèvement de trois années de thèse, mémorables pour moi. Aussi, c'est avec beaucoup d'émotion que je remercie l'ensemble des personnes suivantes, qui ont contribué à faire de mon quotidien des moments agréables<sup>1</sup>.

Je tiens à remercier Michel Habib, directeur du LIRMM, et Christian Landrault, directeur adjoint, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire pour préparer cette thèse.

Tous mes remerciements à Etienne Dombre, responsable du département de Robotique, qui avec intérêt et sympathie, a suivi mon travail au sein du groupe. Je n'oublie pas non plus qu'il a été mon directeur de thèse la première année.

Je transmets ma reconnaissance aux membres du jury de soutenance, qui ont accepté d'analyser ce travail, en portant un regard critique et pertinent, nécessaire à tout travail scientifique. Je remercie ainsi les rapporteurs, messieurs Jean-Pierre Merlet et Philippe Wenger, le président du jury M. Alain Fournier, ainsi que les examinateurs, messieurs Torgny Brogardh et Handfried Kerle, qui ont fait l'effort de venir respectivement, de Suède et d'Allemagne. Je remercie également M. Reg Dunlop, de Nouvelle Zélande, pour avoir accepté de participer au jury.

Un travail de thèse, qui doit mettre en évidence les apports originaux de son auteur, requiert entre autres une orientation lucide, critique et expérimentée du directeur de thèse. Comment remercier François Pierrot, qui a su conduire ce travail avec rigueur et dévouement, en toute situation ? Sur un plan plus personnel, nous avons eu un rapport d'amitié et de respect. Pour tout cela, un grand merci à toi François !

Aux membres du département, j'adresse mon respect et mes remerciements pour la confiance qu'ils m'ont accordés. Mes vœux sincères de réussite à Marie-José Aldon, David Andreu, Frédérique Comby, Didier Crestani, André Crosnier, Philippe Fraisse, David Guiraud, Bruno Jouvencel, Philippe Poignet, François Prunet, Olivier Strauss, René Zapata, mais aussi à Jean Triboulet et William Puech. J'ai une pensée spéciale pour Alain Liegeois qui nous a malheureusement quitté. Olivier Company m'a largement épaulé durant ces trois années, avec humilité et gentillesse. Je lui adresse toute ma reconnaissance.

Merci à ceux qui assurent le bon fonctionnement du laboratoire : je pense en particulier à Anne Bancel, Céline Berger (pour son dynamisme), Josette Durante, Isabelle Gouat, Marie Mejhan, Nicole Olivet (pour sa bonne humeur), Martine Périquier, Ghislaine Takessian (pour sa gentil-

---

<sup>1</sup> La section « remerciements » est paradoxale : i.) située au début du manuscrit, c'est pourtant par elle que je termine la rédaction, ii.) bien qu'il s'agisse de la partie écrite avec le moins d'attention, c'est dans la majorité des cas la seule qui sera réellement lue...

lesse), Nadine et Philippe Tilloy. Un grand merci à Thierry Gil qui a conçu avec Michel Benoît une carte entrées-sorties pour les robots particulièrement performante. Sans contestation, c'est à Michel que je dois la possibilité d'expérimenter sur des robots robustes. J'ai beaucoup apprécié la confiance qu'il m'a accordée.

Bien sûr je n'oublie pas mes compagnons de galère. Merci pour les nombreuses pauses café, parfois longues, pour les conseils avisés, pour les séances sportives et pour les soirées souvent mémorables. Par ordre d'ancienneté, je remercie Philippe Bacou, Geovany Araujo Borges (tu es exceptionnel), Christophe Caby, Christine Covès, Arnaud Lelevé et Philippe Rongier. Mais aussi Jérôme Albarique, Julien Aragones (je t'adore), Jean-Damien Carbou, Vincent Creuse, Gilles Duchemin et Frédéric Marquet. Mes camarades de promotion ensuite : Meziane Bennour, Philippe Lucidarme (Lov'mousq chief), Abraham Sánchez López et Benoît Telle (ex-rasta Lov'Mousq). Les plus jeunes : Cédric Agniel, Olivier Aucourt, Lounis Douadi, Sébastien Druon, Tomas Salgado Jimenez, Fabien Lydoire (Lov'Mousq mascotte), Pierre Maillet, Hassan El Makssoud, Micaël Michelin (Lov'Mousq hero), Amornrit Puttipsatkajorn, Christophe Rabaud, Stéphane Ronchi et Oscar Andrès Vivas (ne change rien). Et pour terminer les bleus : Vincent Nabat (tu m'as bien aidé), Mohammed Samer et Mickaël Sauvée. A vous tous : merci !

Je ne peux terminer ces remerciements sans mentionner mes proches, à qui je dédie ce travail et dont l'amour et le soutien m'ont été plus que bénéfiques. A mes parents d'abord, qui m'ont aidé tout au long de mon parcours. A mon frère Emmanuel, dont je suis particulièrement fier, à Elodie, sa compagne, et à Arthur le petit dernier. Je ne saurais oublier mes amis de Montpellier et ailleurs, à qui je n'ai pas l'habitude d'exprimer ma gratitude ; par ces quelques lignes je souhaite leur dire à quel point leur présence est essentielle à mon bonheur...



---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b> .....	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b> .....	<b>ix</b>
<b>Table des illustrations</b> .....	<b>xv</b>
<b>Liste des tableaux</b> .....	<b>xix</b>
<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
Contexte .....	1
Motivations .....	2
Contributions .....	2
La famille des robots I4.....	2
Une méthode d'analyse des singularités des robots H4/I4.....	2
Le dispositif mécanique Twice.....	2
Des indices de performance pour mécanismes à actionnement redondant.....	2
Le robot Eureka .....	2
<b>Notations</b> .....	<b>3</b>
<b>Chapitre 1 : État de l'Art des mécanismes parallèles 3T-1R et 3T-2R</b> .....	<b>5</b>
1.1 Définitions élémentaires.....	6
1.1.1 Les robots industriels.....	6
1.1.2 Les robots parallèles.....	7
1.1.2.1 Avantages.....	7
1.1.2.2 Inconvénients et pistes pour palier les désagréments .....	8
1.1.2.3 Deux générations de robots parallèles.....	9
1.2 Problématique.....	9
1.2.1 Applications pour les machines 3T-1R et 3T-2R.....	10
1.2.1.1 Application des machines 3T-1R.....	10
1.2.1.2 Applications des machines 3T-2R.....	10
1.2.2 Difficultés pour obtenir des machines à 4 ou 5 ddl.....	10
1.2.3 Difficultés pour obtenir de forts débattements angulaires.....	11
1.2.3.1 Configurations singulières.....	11
1.2.3.1.1 Les sous-mobilités.....	12
1.2.3.1.2 Les sur-mobilités .....	12
1.2.3.1.3 Les singularités internes .....	13
1.2.3.2 Difficultés lorsque la nacelle s'incline.....	13
1.3 Les mécanismes parallèles 3T-1R et 3T-2R actuels.....	14

1.3.1	Les mécanismes 3T-2R .....	14
1.3.1.1	Les mécanismes à 6 ddl .....	14
1.3.1.2	Les mécanismes 3T-2R exclusivement .....	16
1.3.1.2.1	Les mécanismes parallèles à chaîne passive.....	16
1.3.1.2.2	Les mécanismes pleinement parallèles.....	16
1.3.1.2.3	Juxtaposition de deux sous-mécanismes.....	17
1.3.1.2.3.1	Les mécanismes hybrides .....	17
1.3.1.2.3.1.1	Porteur parallèle – poignet série .....	18
1.3.1.2.3.1.2	Porteur série – poignet parallèle .....	18
1.3.1.2.3.1.3	Le robot hybride Dumbo .....	20
1.3.1.2.3.2	Les architectures main droite – main gauche .....	20
1.3.1.3	Les mécanismes parallèles à actionnement redondant.....	21
1.3.1.4	Les dispositifs mécaniques de transformation de mouvement.....	22
1.3.1.4.1	Oméga : un mécanisme à amplification mécanique des rotations .....	22
1.3.1.4.2	Orthoglide 5 axes : un mécanisme à actionnement déporté.....	23
1.3.2	Les mécanismes 3T-1R .....	24
1.3.2.1	Le robot Delta : un mécanisme à actionnement déporté .....	24
1.3.2.2	Les mécanismes hybrides .....	24
1.3.2.3	Le robot Kanuk .....	25
1.3.2.4	Les mécanismes à amplification mécanique des rotations .....	25
1.3.2.4.1	Le robot Hita-STT .....	25
1.3.2.4.2	Le robot H4 .....	26
1.3.2.5	Les robots de la famille I4 : des mécanismes à dispositif de transformation mécanique T/R.....	26
1.4	Les différentes approches pour obtenir de forts débattements angulaires .....	27
1.5	Plan de l'exposé .....	29
<b>Chapitre 2 : Grandes rotations par dispositif mécanique .....</b>		<b>31</b>
2.1	Introduction .....	32
2.2	La famille de robots H4/I4 .....	33
2.2.1	Présentation .....	33
2.2.1.1	Description des paires de barres .....	33
2.2.1.2	Description de la nacelle.....	34
2.2.2	Paramétrage géométrique systématique.....	35
2.2.3	Modélisation cinématique complète .....	36
2.2.3.1	Vitesse des extrémités inférieures des barres .....	37
2.2.3.2	Vitesse des extrémités supérieures des barres .....	38
2.2.3.3	Équiprojectivité.....	38
2.3	Méthode d'analyse cinématique simplifiée .....	39
2.3.1	Introduction .....	39
2.3.2	Aparté sur l'analyse géométrique globale .....	39
2.3.3	Principe .....	41
2.3.3.1	Écriture de l'égalité matricielle représentative de la cinématique complète du mécanisme .....	41

---

2.3.3.2	Écriture équivalente de l'égalité matricielle.....	41
2.3.3.3	Écriture du système linéaire cinématique.....	42
2.3.3.4	Découplage du système linéaire .....	43
2.3.3.5	Recherche des singularités internes.....	45
2.3.3.6	Détermination des vitesses du mécanisme .....	45
2.4	Étude du robot H4 .....	46
2.4.1	Présentation du robot .....	46
2.4.2	Étude des singularités internes .....	48
2.4.3	Extensions .....	50
2.5	Étude des robots de type I4 .....	51
2.5.1	Du H4 au I4 .....	52
2.5.2	Analyse cinématique.....	53
2.5.2.1	Principe d'obtention des modèles géométriques .....	55
2.5.2.1.1	Modèle géométrique inverse.....	55
2.5.2.1.2	Modèle géométrique direct.....	55
2.5.3	Étude du robot I4L.....	57
2.5.3.1	Présentation du robot .....	57
2.5.3.2	Modèles géométriques .....	59
2.5.3.2.1	Paramétrage géométrique.....	59
2.5.3.2.2	Modèle géométrique inverse.....	60
2.5.3.2.3	Modèle géométrique direct.....	60
2.5.3.3	Propriétés de la matrice jacobienne .....	61
2.5.3.4	Optimisation de la machine et volume de travail.....	61
2.5.3.5	Conclusion.....	63
2.5.4	Étude du robot I4R.....	63
2.5.4.1	Présentation du robot .....	63
2.5.4.2	Modèles géométriques .....	65
2.5.4.2.1	Paramétrage géométrique.....	65
2.5.4.2.2	Modèle géométrique inverse.....	65
2.5.4.2.3	Modèle géométrique direct.....	66
2.5.4.3	Optimisation de la machine et volume de travail.....	68
2.5.4.4	Extension : modélisation isostatique du robot I4R.....	69
2.6	Amplification des rotations selon deux axes : le dispositif Twice .....	70
2.6.1	Introduction .....	70
2.6.2	Le concept de Twice .....	71
2.6.3	Étude des singularités.....	73
2.6.3.1	Dénombrement des pièces / liaisons .....	73
2.6.3.2	Paramétrage géométrique .....	74
2.6.3.3	Modèle géométrique direct.....	74
2.6.3.4	Étude des singularités .....	76
2.6.3.5	Étude de cas .....	78
2.6.4	Dispositions constructives de Twice.....	80
2.6.5	Conclusion.....	81

2.7	Conclusion du chapitre.....	81
<b>Chapitre 3 : Grandes rotations par actionnement redondant.....</b>		<b>83</b>
3.1	Introduction.....	84
3.2	Évaluation des performances en vitesses des MPAR.....	86
3.2.1	Interprétation physique du conditionnement.....	86
3.2.1.1	La table traçante constitue-t-elle un mécanisme isotrope ?.....	86
3.2.1.2	Analyse d'un mécanisme parallèle simple non-redondant.....	88
3.2.1.3	Analyse d'un MPAR simple 3 actionneurs / 2 ddl.....	89
3.2.1.4	Analyse de la manipulabilité selon Park.....	91
3.2.1.4.1	Exposé de la méthode.....	91
3.2.1.4.2	Étude de cas.....	92
3.2.2	Le concept d'isotropie en vitesses pour les MPAR.....	93
3.2.2.1	Notes et hypothèses préliminaires.....	93
3.2.2.2	Analyse de la décomposition en valeurs singulières dans le cas d'un MPAR....	94
3.2.2.3	Étude de cas.....	98
3.2.2.4	Recherche de l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le polytope opérationnel.....	99
3.2.2.4.1	Raisonnement dans l'espace articulaire.....	99
3.2.2.4.1.1	Approche générale.....	99
3.2.2.4.1.2	Recherche des normales à l'ellipse et au polygone.....	100
3.2.2.4.1.3	Recherche de l'ellipse admissible de plus grande surface.....	103
3.2.2.4.2	Raisonnement dans l'espace opérationnel.....	104
3.2.2.5	Recherche des vitesses extrêmes du polygone opérationnel.....	106
3.2.2.5.1	Recherche de la vitesse maximale du polygone opérationnel.....	106
3.2.2.5.2	Recherche de la vitesse minimale du polygone opérationnel.....	107
3.2.2.6	Bilan.....	108
3.3	Extensions : évaluation des performances en efforts des robots parallèles à câbles....	108
3.3.1	Introduction.....	108
3.3.2	Modélisation des robots parallèles à câbles.....	109
3.3.3	Transformation des efforts de l'espace articulaire vers l'espace opérationnel.....	110
3.3.4	Mise en équations du problème.....	113
3.3.5	Étude de cas.....	116
3.3.6	Conclusion de l'analyse en efforts.....	118
3.4	Étude de cas : le robot Archi.....	118
3.4.1	Introduction.....	118
3.4.2	Modélisation du robot Archi.....	119
3.4.3	Tracé des domaines opérationnels.....	120
3.4.3.1	Espace des vitesses opérationnelles.....	121
3.4.3.2	Espace des efforts opérationnels.....	121
3.5	Conclusions et perspectives.....	122
<b>Chapitre 4 : Le robot Eureka ou l'obtention de grandes rotations par dispositif mécanique et actionnement redondant.....</b>		<b>125</b>
4.1	Introduction.....	126

4.2	Concept général.....	126
4.3	Modélisation géométrique.....	127
4.4	Étude des singularités .....	128
4.4.1	Conditions géométriques à satisfaire concernant les rotations.....	131
4.4.1.1	Condition géométrique pour obtenir la rotation souhaitée.....	132
4.4.1.2	Condition géométrique pour éliminer les rotations inappropriées .....	132
4.4.2	Condition géométrique pour obtenir un bon positionnement des parallélogrammes .. .....	132
4.5	Modèles géométriques et cinématiques.....	133
4.5.1	Relations géométriques .....	133
4.5.1.1	Modèle géométrique inverse .....	133
4.5.1.2	Modèle géométrique direct.....	134
4.5.2	Relation cinématique .....	135
4.6	Étude de cas .....	136
4.6.1	Considérations pratiques .....	136
4.6.2	Géométrie du robot .....	137
4.6.3	Éléments de comparaison des indices de manipulabilité.....	138
4.6.4	Volume de travail .....	139
4.7	Le prototype du robot Eureka .....	140
4.8	Conclusion .....	141
<b>Conclusion générale.....</b>		<b>143</b>
Apports .....		143
État de l'Art.....		143
La famille des robots I4.....		143
Le dispositif mécanique Twice.....		143
Une méthode d'analyse des singularités des robots H4/I4.....		143
Des indices de performance pour mécanismes à actionnement redonda.....		144
Le robot Eureka .....		144
Perspectives.....		144
La méthode d'analyse des singularités des robots H4/I4.....		144
Les indices de performance pour mécanismes à actionnement redondant.....		144
Recherches futures.....		144
<b>Références bibliographiques .....</b>		<b>147</b>
<b>Annexe A : Les graphes d'agencement .....</b>		<b>155</b>
A.1	Introduction.....	155
A.2	Symbolique.....	156
A.2.1	Les liaisons .....	156
A.2.2	Les pièces.....	156
A.2.3	Les éléments de couplage.....	157
A.3	Exemple.....	157
<b>Annexe B : Diverses architectures de robots I4.....</b>		<b>159</b>
B.1	Définitions.....	159
B.2	Les actionneurs (A).....	159

B.3	Les transmissions mécaniques (TM) .....	159
B.4	La nacelle articulée (NA).....	160
B.5	Le dispositif mécanique de la nacelle (DM).....	161
B.6	$I4 = 1 B + 4 A + 4 TM + 1 NA + 1 DM$ .....	161
B.7	Quelques exemples .....	162
<b>Annexe C : Le dispositif de commande des robots parallèles du LIRMM .....</b>		<b>165</b>
C.1	Architecture matérielle .....	165
C.2	Architecture logicielle .....	166
C.3	Asservissement .....	166
<b>Annexe D : Galerie de photos des robots parallèles du LIRMM .....</b>		<b>169</b>
D.1	Le robot Archi .....	169
D.2	Le robot H4 .....	170
D.3	Le robot I4L.....	171
D.4	Le robot I4R .....	173
D.5	Le robot Eureka .....	174
<b>Annexe E : Liste des publications réalisées dans le cadre de cette thèse .....</b>		<b>175</b>
E.1	Articles journaux .....	175
E.2	Actes de conférences .....	175
E.3	Séminaires et autres.....	176

---

# Table des illustrations

---

Figure 1.1. Le robot IRB 7600-150 (ABB) : photo et graphe d'agencement .....	6
Figure 1.2. Le robot Hexamove-System (OHE Hagenbuch AG) : photo et graphe d'agencement .....	7
Figure 1.3. Le robot FlexPicker (ABB), photo et graphe d'agencement.....	9
Figure 1.4. Mécanisme pleinement parallèle 3T-1R.....	10
Figure 1.5. Mécanisme pleinement parallèle 3T-2R.....	11
Figure 1.6. Mécanisme parallèle plan 2T : schéma et graphe d'agencement .....	12
Figure 1.7. Illustration d'une sous-mobilité à l'aide du mécanisme parallèle simple à 2 ddl .....	12
Figure 1.8. Illustration d'une sur-mobilité à l'aide du mécanisme parallèle simple à 2 ddl.....	12
Figure 1.9. Illustration d'une singularité interne à l'aide du mécanisme parallèle simple à 2 ddl ...	13
Figure 1.10. Mécanisme parallèle plan 2T-1R : schéma (illustration d'une sur-mobilité) et graphe d'agencement .....	13
Figure 1.11. La machine-outil HexaM (Toyota), schéma et graphe d'agencement.....	14
Figure 1.12. Photo de la machine-outil Dynamil (ISW), schéma et graphe d'agencement .....	15
Figure 1.13. La machine-outil Lambda kinematics, schéma et graphe d'agencement.....	15
Figure 1.14. Seyanka (Teckniker), photo et graphe d'agencement.....	16
Figure 1.15. Architecture de Zamanov, schéma et graphe d'agencement.....	16
Figure 1.16. P 800 (Metrom), photo et graphe d'agencement.....	17
Figure 1.17. Tricept 845 (Neos Robotics), photo et graphe d'agencement.....	18
Figure 1.18. Sprint Z3 (DS Technologies), image CAO du poignet et graphe d'agencement.....	18
Figure 1.19. Hermes (Fatronik), photo du poignet et graphe d'agencement .....	19
Figure 1.20. Ulysse ZAB (Fatronik), image CAO et graphe d'agencement.....	19
Figure 1.21. Dumbo (IFW), photo et graphe d'agencement.....	20
Figure 1.22. Robot 5 axes inspiré de Sprint Z3 (projet Mach21), image CAO et graphe d'agencement .....	20
Figure 1.23. Le robot Archi (LIRMM), photo et graphe d'agencement .....	21
Figure 1.24. Eclipse 2 (Université de Séoul), image CAO et graphe d'agencement.....	22
Figure 1.25. Omega (EPFL), image CAO et graphe d'agencement (supposé) .....	22
Figure 1.26. Orthoglide 5 axes, schéma et graphe d'agencement.....	23
Figure 1.27. L'Œil Agile de Gosselin (version à 3 ddl), schéma et graphe d'agencement .....	23
Figure 1.28. Le robot Manta (de Luc Rolland), schéma et graphe d'agencement .....	24
Figure 1.29. Le robot Kanuk (de Luc Rolland), schéma et graphe d'agencement.....	25
Figure 1.30. Hita-STT (EPFL), image CAO et graphe d'agencement de la partie « main-droite »	25
Figure 1.31. Le robot H4 (LIRMM), photo et graphe d'agencement .....	26

Figure 1.32. Le robot I4R (LIRMM), photo et graphe d'agencement .....	27
Figure 2.1. Modélisation de la famille H4/I4, localisation des différentes pièces et liaisons .....	33
Figure 2.2. Modélisation de la famille H4/I4, détails de la nacelle articulée .....	35
Figure 2.3. Graphe d'agencement de la famille des robots H4/I4 .....	36
Figure 2.4. Mise en plan de la nacelle modifiée du H4 équipée du dispositif à engrenages et du capteur redondant .....	46
Figure 2.5. Photo du robot H4.....	47
Figure 2.6. Graphe d'agencement du H4 équipé du dispositif à engrenages et du capteur redondant.....	47
Figure 2.7. Image CAO du robot H4 présentant une singularité interne .....	49
Figure 2.8. Présentation de trois robots de la famille I4 ; en haut : le robot I4L ; à gauche : le robot I4R ; à droite : une machine destinée à de l'usinage 5 axes .....	51
Figure 2.9. Principe de la nacelle du robot I4R (nacelle de type 2).....	53
Figure 2.10. Paramètres géométriques de la nacelle des robots I4.....	56
Figure 2.11. Photo du robot I4L.....	58
Figure 2.12. Détails de la nacelle du robot I4L.....	58
Figure 2.13. Graphe d'agencement du robot I4L.....	59
Figure 2.14. Image CAO de la nacelle du robot I4L : système pignon – 2 crémaillères.....	59
Figure 2.15. Schéma architectural du robot I4L .....	60
Figure 2.16. Estimation du volume de travail du robot I4L en tenant compte des butées articulaires ; à gauche : tel que $\text{cond}(\mathbf{J}_m \mathbf{W}) < 3$ ; à droite : tel que $\text{cond}(\mathbf{J}_m \mathbf{W}) < 8$ pour une tranche $y$ - $z$ de l'espace de travail.....	62
Figure 2.17. Photo du robot I4R.....	63
Figure 2.18. Graphe d'agencement du robot I4R.....	64
Figure 2.19. Photo de la nacelle du robot I4R : détail du dispositif à poulie-câble.....	64
Figure 2.20. Schémas architecturaux du robot I4R ; à gauche : vue de dessus ; à droite : vue de côté .....	65
Figure 2.21. Robot I4R ; intersection des deux ellipses pour le calcul du MGD (vue selon $\vec{e}_x$ )....	66
Figure 2.22. Estimation du volume de travail du robot I4R tel que $\text{cond}(\mathbf{J}_m \mathbf{W}) < 8$ .....	69
Figure 2.23. Nacelle du robot I4R (nacelle de type 2) : image CAO du guidage en translation, et schéma de la modélisation par pivot glissant .....	69
Figure 2.24. Image CAO d'un mécanisme parallèle 5 axes inspiré de l'architecture de Zamanov.....	71
Figure 2.25. Graphe d'agencement du mécanisme parallèle 5 axes .....	71
Figure 2.26. Mécanisme parallèle 5 axes avec le dispositif Twice .....	72
Figure 2.27. Mécanismes d'amplification des rotations ; à gauche : le dispositif Twice ; à droite : un mécanisme plan analogue.....	72
Figure 2.28. Graphe d'agencement de Twice .....	73
Figure 2.29. Modélisation géométrique de Twice .....	74
Figure 2.30. Modélisation géométrique de la moitié supérieure de Twice .....	75
Figure 2.31. Transformations entre les différents repères de Twice.....	76
Figure 2.32. Allure du déterminant du système .....	79
Figure 2.33. Illustration CAO d'un mouvement de Twice .....	79
Figure 2.34. Le dispositif Twice avec 4 liaisons glissières .....	80



Figure 2.35. Le dispositif Twice avec 3 liaisons glissières .....	80
Figure 2.36. Un mécanisme Delta avec le dispositif Twice.....	80
Figure 3.1. Schéma du robot Archi dans une position où il serait singulier sans la redondance d'actionnement .....	84
Figure 3.2. Le robot Eclipse (Sena Technologies), photo et graphe d'agencement .....	84
Figure 3.3. Table traçante : schéma et graphe d'agencement.....	86
Figure 3.4. Espace articulaire admissible de la table traçante .....	87
Figure 3.5. Espace opérationnel admissible de la table traçante.....	87
Figure 3.6. Mécanisme en V : schéma et graphe d'agencement .....	88
Figure 3.7. Espace opérationnel du mécanisme en V dans une position non centrée.....	88
Figure 3.8. MPAR particulier à 3 actionneurs / 2 ddl : schéma et graphe d'agencement.....	89
Figure 3.9. Espace opérationnel admissible, machine parallèle redondante .....	90
Figure 3.10. Numérotation des articulations du MPAR particulier à 3 actionneurs / 2 ddl .....	92
Figure 3.11. MPAR simple à 3 actionneurs / 2 ddl : schéma et graphe d'agencement.....	94
Figure 3.12. Représentation graphique de $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}^T \dot{\mathbf{x}}$ .....	95
Figure 3.13. Représentation graphique de $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{S} \dot{\mathbf{X}}$ .....	95
Figure 3.14. Représentation graphique de $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{U} \dot{\mathbf{Q}}$ .....	96
Figure 3.15. Intersection du cube articulaire unité, de la sphère articulaire unité avec le plan image de $\mathbf{J}_m$ .....	97
Figure 3.16. Polygone et cercle articulaire .....	97
Figure 3.17. Domaines de l'espace articulaire image et domaines opérationnels typiques d'un MPAR.....	98
Figure 3.18. Tracé de différents domaines des vitesses opérationnelles d'un MPAR (centré sur la nacelle) .....	98
Figure 3.19. Transformations du cercle articulaire.....	100
Figure 3.20. Colinéarité de la normale à l'ellipse avec la normale à la frontière.....	101
Figure 3.21. Expression de la normale à un ellipse .....	101
Figure 3.22. Obtention d'un point en dehors du polytope admissible.....	107
Figure 3.23. Robot à câbles Falcon.....	109
Figure 3.24. Géométrie d'un manipulateur parallèle à câbles typique .....	109
Figure 3.25. Espace des forces articulaires admissibles .....	110
Figure 3.26. Espace des forces opérationnelles admissibles .....	111
Figure 3.27. Domaine des efforts articulaires admissibles vu depuis un point colinéaire avec le noyau de $\mathbf{J}_m^T$ .....	112
Figure 3.28. Projection du domaine des efforts articulaires admissibles dans le plan image de $\mathbf{J}_m^T$ .....	112
Figure 3.29. Domaine des efforts opérationnels admissibles orienté selon les vecteurs de la base opérationnelle utiles à la DVS .....	113
Figure 3.30. Représentation de toutes les frontières potentielles du polytope recherché.....	115
Figure 3.31. Représentation de la plus grande force opérationnelle isotrope d'un mécanisme pa- rallèle plan à câbles à 3 actionneurs .....	117

Figure 3.32. Représentation de la plus grande force opérationnelle isotrope pour des mécanismes parallèles plans à câbles à 4, 5 et 6 actionneurs.....	118
Figure 3.33. Le robot Archi (LIRMM), photo et graphe d'agencement .....	119
Figure 3.34. Schéma architectural du robot Archi.....	119
Figure 3.35. Espaces des vitesses opérationnelles du robot Archi.....	121
Figure 3.36. Espaces des efforts opérationnels du robot Archi .....	121
Figure 4.1. Graphe d'agencement du robot Eureka.....	126
Figure 4.2. Modélisation géométrique du robot Eureka.....	127
Figure 4.3. Chaîne cinématique $\underline{P}(SS)_2$ .....	129
Figure 4.4. Schéma simplifié de la partie supérieure du robot Eureka .....	133
Figure 4.5. Architecture sans collisions internes n°1 du robot Eureka .....	136
Figure 4.6. Architecture sans collisions internes n°2 du robot Eureka .....	137
Figure 4.7. Schéma du robot Eureka dans une posture particulière .....	138
Figure 4.8. Estimation du volume de travail du robot Eureka .....	139
Figure 4.9. Image CAO du robot Eureka, vue d'ensemble.....	140
Figure 4.10. Image CAO du robot Eureka, détail de la nacelle ; à gauche : vue depuis l'avant ; à droite : vue depuis l'arrière.....	140
Figure 4.11. Image CAO du robot Eureka, détail de la nacelle modifiée pour que la rotation de la poulie ait lieu autour d'un axe vertical (dans cette position).....	141
Figure A.1. Le robot Georg V (IFW, Université de Hanovre), photo et graphe d'agencement ...	157
Figure B.1. Robot I4 : nacelle des machines A1 et A2.....	162
Figure B.2. Robot I4 : nacelle des machines B1 et B2 .....	162
Figure B.3. Robot I4 : nacelle de la machine D1 (mécanisme hyperstatique).....	162
Figure B.4. Robot I4 : nacelle de la machine E1 (mécanisme hyperstatique) .....	163
Figure C.1. Architecture matérielle pour la commande des robots .....	165
Figure C.2. Architecture logicielle de commande des robots parallèles .....	166
Figure C.3. Asservissement du robot I4L (consigne des variateurs proportionnelle à un effort) ..	167
Figure C.4. Asservissement du robot I4R (consigne des variateurs proportionnelle à une vitesse) .....	167
Figure D.1. Photo du robot Archi, détail de la nacelle.....	169
Figure D.2. Photo du robot H4, détail du bâti (pourvu des variateurs) .....	170
Figure D.3. Photo du robot H4, détail de la nacelle, du pignon à rattrapage de jeu et du codeur additionnel.....	170
Figure D.4. Photo du robot I4L, agencement du poste de travail équipé du banc Comau.....	171
Figure D.5. Photo du robot I4L, détail de la nacelle .....	172
Figure D.6. Photo du robot I4L, détail de la nacelle et du dispositif à pignon – 2 crémaillères ..	172
Figure D.7. Photo du robot I4L, détail des compensateurs de gravité.....	172
Figure D.8. Photo du robot I4L, détail des rotules INA .....	173
Figure D.9. Photo du robot I4R, agencement du poste de travail .....	173
Figure D.10. Photo du robot I4R, détail de la nacelle, du dispositif à poulie – câble.....	173
Figure D.11. Photo du robot I4R, détail des actionneurs rotatifs et des capteurs de fin de course .....	174
Figure D.12. Photos des rotules Hephaist du robot Eureka.....	174

---

# Liste des tableaux

---

Table 1.1. Classification des différentes approches pour obtenir de forts débattements angulaires .....	29
Table 2.1. Modélisation des parallélogrammes.....	40
Table 2.2. Géométrie de la nacelle du robot H4.....	46
Table 2.3. Autres possibilités de nacelles de type H4.....	50
Table 2.4. Principes des nacelles des robots H4 et I4.....	52
Table 2.5. Rapports de transmission des deux types de nacelles pour les robots I4.....	53
Table 3.1. Illustration des différents types de redondance à l'aide d'un robot parallèle plan.....	85
Table 3.2. Valeurs des différents indices d'isotropie pour un MPAR simple 3 actionneurs / 2 ddl .....	98
Table 4.1. Principes des nacelles du robot Eureka .....	128
Table 4.2. Valeurs des différents indices d'isotropie pour le robot Eureka .....	139
Table A.1. Inventaire des liaisons.....	156
Table A.2. Nature des liaisons .....	156
Table A.3. Types de pièces .....	157
Table A.4. Nature des éléments de couplage .....	157
Table B.1. Les différents types de transmission mécanique .....	160
Table B.2. Différentes possibilités d'architecture isostatiques de robots I4 .....	161
Table B.3. Différentes possibilités d'architecture hyperstatiques de robots I4.....	161
Table D.1. Évolution de la nacelle du robot H4 .....	171



---

# Introduction générale

---

Dans les pages qui suivent, nous allons apporter des éléments de réflexion pour concevoir et analyser des robots d'architecture parallèle à forts débattements angulaires. Nous nous concentrerons sur les robots dit « légers » – c'est-à-dire dont tous les actionneurs sont solidaires du bâti en vue de limiter les masses en mouvement – qui offrent des performances dynamiques supérieures aux autres robots. Bien que l'état de l'Art et les outils développés soient valables pour tous les types de robots parallèles, nous proposerons exclusivement des robots 3T-1R et 3T-2R (T pour Translation et R pour Rotation) qui offrent un intérêt majeur pour nombre d'applications industrielles.

## Contexte

Dans le paysage industriel moderne, on compte de plus en plus de mécanismes parallèles, qui s'illustrent notamment dans la manipulation d'objets et dont on espère voir l'avènement dans le domaine de l'usinage. A ce titre, cette thèse s'inscrit dans le cadre de deux projets de Recherche :

- Le Programme Interdisciplinaire de Recherche Robea MAX<sup>1</sup>, dont un des points clés consistait en la conception d'architectures de machines. Concernant cet aspect, l'accent devait être porté essentiellement sur l'apport de la redondance d'actionnement pour les mécanismes parallèles, et la recherche de solutions isotropes.
- Le Programme de Recherche Européen Mach21<sup>2</sup>, dont une des finalités était l'émergence de règles de conceptions pour robots industriels d'architecture parallèle.

C'est dans ce cadre là, qu'ont pu être développés plusieurs prototypes, visant à valider les concepts abordés au cours de ces différents projets. Ceux-ci ont été réalisés grâce à la collaboration des entreprises suivantes :

- Toyota Machine Works (Japon), la filiale machine-outil de la société Toyota, qui a réalisé sur plans certaines des pièces du prototype I4L.
- INA (Allemagne) qui a fourni des articulations rotules particulièrement rigides utilisant des roulements à billes.

---

<sup>1</sup> *Max* (Machines à Architecture CompleXe : de la conception à la performance et l'autonomie) est un projet du Programme Interdisciplinaire de Recherche du CNRS *Robea* (ROBotique et Entités Artificielles) regroupant cinq laboratoires : INRIA, IRCCyN, LaRAMA, LASMEA & LIRMM. Il a débuté en septembre 2001 et s'est achevé en septembre 2003.

<sup>2</sup> *Mach21* (Multipurpose and cross-sectorial modernisation of manufacturing processes through parallel kinematics) est un Programme de Recherche Européen regroupant 12 partenaires : Fatronik, WZL, INA, IWU, Karl Mayer, Limm, Anayak, Gamesa, ISW, Comau, Arjal, et Lernstat. Il a débuté en janvier 2000 et s'est achevé en janvier 2003.

- ABB Robotics (Suède) qui a fourni certains composants mécaniques en fibre de carbone pour le prototype I4R.

## Motivations

A ce jour, il existe peu de mécanismes parallèles capables de procurer de forts débattements angulaires. La raison de cette carence est la présence de singularités limitant la plage des inclinaisons. Cependant, puisque certaines applications requièrent une telle capacité, il nous est apparu essentiel d'apporter des éléments de réponse à ce problème.

## Contributions

### La famille des robots I4

Au delà de l'état de l'art dressé dans le chapitre 1 et qui met en évidence différentes approches pour parvenir à de forts débattements angulaires, nous proposons une nouvelle famille de robots (appelée I4) inspirée du robot H4 proposé par Company. Destinée à palier certaines limitations de ce dernier, ce concept de mécanismes 3T-1R a été validé par la réalisation de deux prototypes adaptés à la manipulation d'objets. De forts débattements angulaires sont atteints grâce au dispositif mécanique de transformation de mouvement T/R équipant la nacelle articulée.

### Une méthode d'analyse des singularités des robots H4/I4

L'existence des robots I4 d'architecture similaire au robot H4 laisse entrevoir l'ensemble des possibilités d'une famille plus vaste de robots. Aussi, pour mener une étude systématique des singularités de cette famille H4/I4 de robots, une méthode d'analyse cinématique a été élaborée. Elle vise à caractériser les singularités en un minimum de calculs.

### Le dispositif mécanique Twice

En vue d'étendre le concept d'amplification des rotations observable sur le robot H4 à 2 rotations, le dispositif mécanique Twice a été élaboré. Il constitue un mécanisme additionnel capable d'augmenter les débattements angulaires de certains robots déjà existants.

### Des indices de performance pour mécanismes à actionnement redondant

La deuxième voie d'investigation de cette thèse porte sur les mécanismes à actionnement redondant en vue de procurer de forts débattements angulaires. Des indices de performance ont été élaborés, avec pour souci de caractériser significativement les performances en vitesses et en efforts de l'organe terminal.

### Le robot Eureka

Enfin, un nouveau mécanisme 3T-2R est proposé qui concilie les approches « actionnement redondant » et « nacelle munie d'un dispositif de transformation de mouvement T/R ». L'organe terminal est capable de s'orienter selon un hémisphère complet. La méthode d'analyse des singularités introduite pour les robots H4/I4 est étendue à cette machine ; aussi nous permet-elle de vérifier l'absence de singularités de la structure.

---

# Notations

---

Dans cette thèse, les formules en exergue seront numérotées par ordre d'apparition et selon le numéro de chapitre. Par ailleurs, nous emploierons les notations suivantes :

- Les variables seront notées en italique, et les nombres en caractères droits : p. ex.  $i, j, 1, 2$ .
- Les vecteurs et points géométriques seront respectivement surlignés d'une flèche et écrits en caractères majuscules droits, p. ex.  $\vec{u}_i, A$ .
- $\mathfrak{R} = \langle O, \mathcal{B} \rangle$  désignera le repère d'origine  $O$  et de base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .
- On notera  $\mathbf{u}$  le vecteur colonne représentatif des coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $A$  le vecteur des coordonnées du point  $A$  dans le repère  $\mathfrak{R}$ .
- Les vecteurs colonnes et matrices seront désignés par des caractères gras italiques : p. ex.  $\mathbf{v}, \mathbf{J}_m$ .
- $\mathbf{M}^{-1}$  et  $\mathbf{M}^T$  représentent respectivement la matrice inverse et la matrice transposée de  $\mathbf{M}$ .
- $\mathbf{I}_n$  correspond à la matrice identité de dimensions  $n \times n$ .
- $\mathbf{diag}(\lambda_i)$  désigne la matrice diagonale  $n \times n$  de termes diagonaux  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$ .
- Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sera noté  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ , et leur produit vectoriel  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ .





---

# État de l'Art des mécanismes parallèles 3T-1R et 3T-2R

---

*Dans ce chapitre :*

De nombreux robots à architecture parallèle existent aujourd'hui, notamment dans les domaines de la manutention et de la machine-outil. Ceux-ci offrent des avantages incontestables en comparaison aux robots d'architecture classique. Cependant, à ce jour, il existe peu de robots parallèles capables de forts débattements angulaires. La raison principale est la présence de singularités. Ce chapitre recense les différentes approches pour atteindre de forts débattements angulaires.

*Sommaire :*

1.1	Définitions élémentaires.....	6
1.2	Problématique.....	9
1.3	Les mécanismes parallèles 3T-1R et 3T-2R actuels.....	14
1.4	Les différentes approches pour obtenir de forts débattements angulaires.....	27
1.5	Plan de l'exposé .....	29

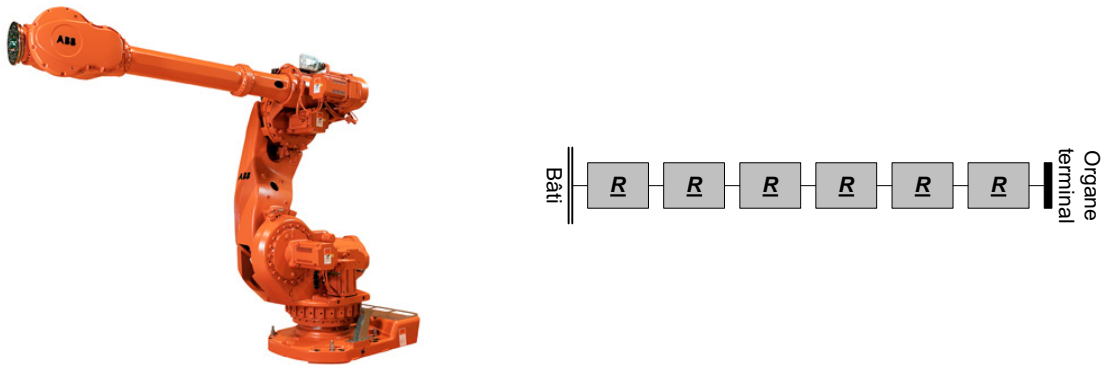
# 1.1 Définitions élémentaires

## 1.1.1 Les robots industriels

**T**rès vite, dans le monde industriel est apparu le besoin de robots capables de se substituer à l'homme, et présentant une grande flexibilité. On parle dès lors de robots industriels :

« Un robot industriel est un manipulateur automatique asservi en position, polyvalent, reprogrammable, capable de positionner et d'orienter des matériaux, des pièces, des outils ou des dispositifs spécialisés au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution de tâches variées<sup>1</sup> » [NF E 61-100].

« La plupart des robots industriels construits à ce jour est de type sériel, c'est-à-dire que leur structure mobile est une chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté<sup>2</sup>. Chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'endroit de l'articulation ou sur un des segments précédents » [Clavel 1994] (voir par exemple Figure 1.1).



**Figure 1.1.** Le robot IRB 7600-150 (ABB) : photo et graphe d'agencement<sup>3</sup>

« Ces robots ont pour avantage de disposer d'un grand volume de travail et d'être relativement simples sur le plan des calculs liés à leur commande. Leurs principaux défauts sont résumés ci-dessous :

- ❑ Inertie élevée due aux masses réparties sur toute la chaîne cinématique<sup>4</sup> (actionneurs, organes de transmission) ;
- ❑ Manque de rigidité par la mise en série d'éléments élastiques ;
- ❑ Fatigue et usure des liaisons de puissance assurant l'alimentation des actionneurs (câbles, tuyaux flexibles) ;
- ❑ Fatigue et usure des liaisons assurant la circulation des informations entre les capteurs et la commande ; sur le plan sécurité, ce point est essentiel puisqu'une erreur de transmission peut avoir des conséquences désastreuses sur les mouvements du robot. » [Clavel 1994].

<sup>1</sup> *Remarque* : Le terme robot industriel s'oppose à celui de *robot mobile* qui désigne une plate-forme automatisée capable de se mouvoir.

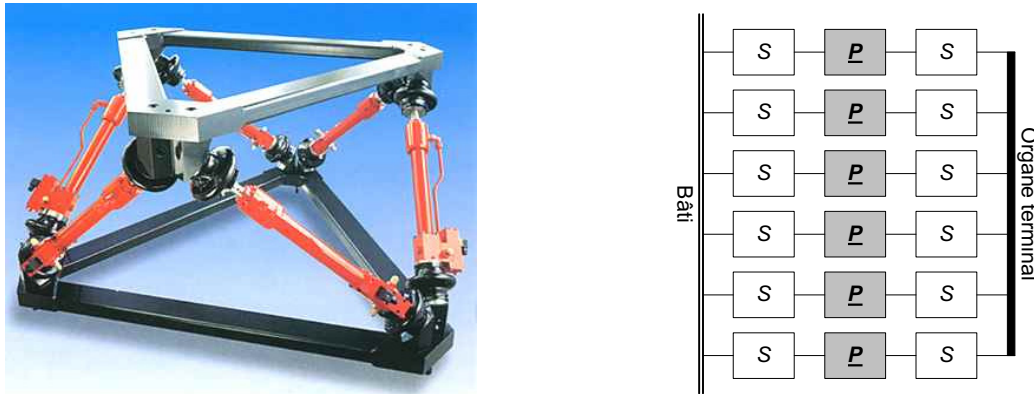
<sup>2</sup> *Degré de liberté* : nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour définir la configuration d'une chaîne cinématique ou d'un mécanisme [Iftom 2003].

<sup>3</sup> Voir Annexe A : Les graphes d'agencement

<sup>4</sup> *Chaîne cinématique* : assemblage d'éléments et de liaisons [Iftom 2003].

## 1.1.2 Les robots parallèles

*Définition* : « Un manipulateur parallèle est un mécanisme<sup>5</sup> en chaîne cinématique fermée, dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes » [Merlet 2001a] (voir par exemple la Figure 1.2).



**Figure 1.2.** Le robot Hexamove-System (OHE Hagenbuch AG) : photo et graphe d'agencement

Nous allons présenter les robots parallèles comme une solution aux limitations des robots sériels. Dans ce but, nous allons préciser les avantages des robots parallèles mais aussi présenter leurs limites et exposer quelques pistes pour s'affranchir des désagréments.

### 1.1.2.1 Avantages

« La mise en parallèle de plusieurs chaînes cinématiques entraînées chacune par un actionneur conduit généralement aux avantages suivants:

- ❑ Capacité de charge élevée,
- ❑ Possibilité de mouvements à haute dynamique (accélérations élevées),
- ❑ Rigidité mécanique élevée,
- ❑ Faible masse mobile,
- ❑ Fréquence propre élevée, donc peu d'erreur de répétabilité due à une oscillation incontrôlée de la structure mobile,
- ❑ Possibilité de positionner les actionneurs directement sur la base fixe ou très proche de celle-ci ; cette particularité a les conséquences positives suivantes :
  - grand choix de moteurs et de réducteurs par le fait que leur masse joue peu de rôle dans l'inertie du manipulateur,
  - simplification importante des problèmes de liaisons entre les moteurs, les capteurs et le contrôleur (câblage plus simple et plus fiable),
  - facilité de refroidissement des actionneurs, donc diminution des problèmes de précision dus aux dilatations et puissance potentielle élevée,

<sup>5</sup> *Mécanisme* : système de corps conçu pour convertir des mouvements de, des forces sur, un ou plusieurs corps en des mouvements contraints de, et des forces sur, d'autres corps [Iftom 2003].

- facilité d'isoler les moteurs de l'espace de travail pour des activités en atmosphère propre ou avec risque de déflagration ou encore pour les applications nécessitant des lavages à grande eau.
- Facilité d'intégration de capteurs,
- Construction mécanique modulaire, simplicité de fabrication et possibilité de série par la présence de plusieurs composants identiques sur un robot.
- Effet des tolérances de fabrication sur la précision limité. » [Clavel 1994]

Cette liste d'avantages « génériques » n'est pas forcément respectée par tous les prototypes de robots parallèles. En particulier, les premières machines-outils connaissaient des problèmes de précision et de rigidité.

### 1.1.2.2 Inconvénients et pistes pour palier les désagréments

Par rapport aux robots sériels, les inconvénients des robots parallèles peuvent être résumés de la façon suivante :

- Volume de travail limité en regard du volume total du mécanisme. Pour palier ce problème, une solution consiste à utiliser des actionneurs linéaires orientés selon une même direction. Si l'on augmente la course des moteurs, le volume de travail s'allonge en conséquence. Le rapport volume de travail sur volume total de la machine augmente alors. Une autre approche consiste à utiliser des actionneurs rotatifs. En les agencant de manière à ce qu'ils balayent la plus grande plage commune de l'espace, on obtient un volume de travail important.
- Modèles géométriques directs (MGD) parfois difficiles à déterminer. La méthode de résolution itérative de Newton et l'approche par intervalles [Merlet 2001b] (qui garantit l'existence de solutions) constituent des éléments de réponse à cette difficulté. L'ensemble des nouveaux robots parallèles présentés dans ce manuscrit a pour particularité de posséder des MGD algébriques.
- Fort couplage entre le mouvement des différentes chaînes cinématiques. En conséquence, une trajectoire simple demande souvent une action parfaitement coordonnée de l'ensemble des moteurs. Si au temps de Pollard [Pollard 1938], les moyens électroniques et informatiques ne permettaient pas de commander ce type de robot, de nos jours l'asservissement des robots parallèles est réalisé sans problème majeur du point de vue du temps de calcul. Il faut noter que certains problèmes demeurent malgré tout ; la génération de trajectoire pour les machines-outils d'architecture parallèle en est un.
- Couplage fortement variable entre les différentes chaînes cinématiques ; cette particularité complique souvent le réglage ; le surdimensionnement des actionneurs est une solution pour contourner cette difficulté.
- Présence de singularités qui conduisent à une perte de contrôle de la structure mobile, voire à une détérioration de la mécanique. C'est le point le plus critique lors de la conception d'une machine à architecture parallèle. Ce manuscrit propose des pistes pour limiter les problèmes de singularités.

### 1.1.2.3 Deux générations de robots parallèles

Il existe de nombreux historiques concernant les robots parallèles tels ceux de Bonev [Bonev 2003] ou Merlet [Merlet 1997a] qui précisent leurs véritables origines. Nous souhaitons seulement insister sur l'existence de deux générations essentielles de robot parallèle :

- La première génération incarnée par les plates-formes de Gough [Gough 1957] et Stewart [Stewart 1965]. On parle aujourd'hui de robots hexapodes [Merlet 1997] [Tönshoff 1998a] : 6 vérins relient le bâti à une plate-forme mobile (voir Figure 1.2), rendant possible l'exécution de mouvements complexes par la mise en parallèle des chaînes cinématiques.
- La deuxième génération incarnée par la structure Delta de Clavel [Clavel 1989] : les robots de cette famille sont capables de performances exceptionnelles (vitesses jusqu'à 10 m/s et accélération jusqu'à 20 G). On parle dès lors de robots parallèles légers avec pour principales caractéristiques :
  - des actionneurs fixes sur le bâti,
  - des composants mobiles légers (Voir Figure 1.3).

*Remarque* : Les robots parallèles du LIRMM, présentés dans ce manuscrit, auront cette particularité d'être de type parallèle léger.

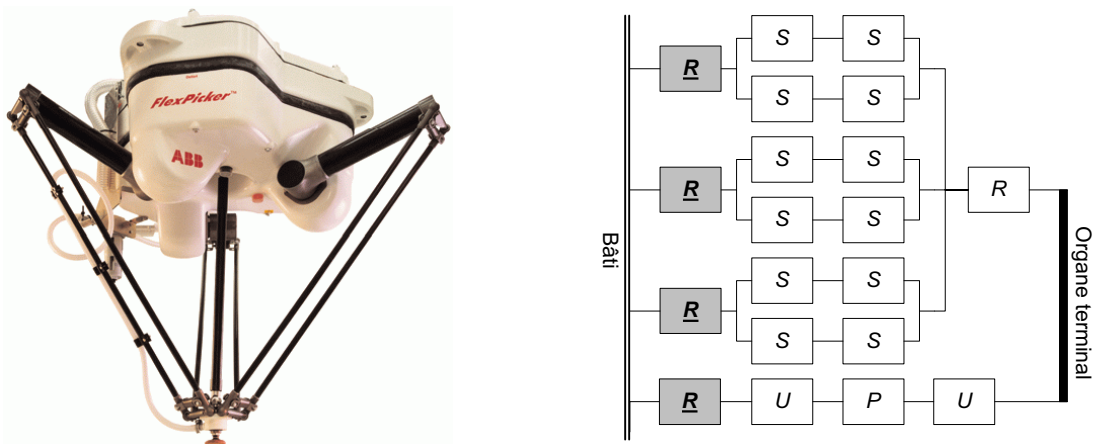


Figure 1.3. Le robot FlexPicker (ABB), photo et graphe d'agencement

## 1.2 Problématique

La problématique de nos travaux de recherche a consisté en la conception de mécanismes parallèles légers 3T-1R et 3T-2R à forts débattements angulaires. Les questions auxquelles nous allons essayer de répondre dans cette section sont :

- Pourquoi s'intéresse t'on aux mécanismes 3T-1R et 3T-2R, et en particulier à ceux à forts débattements angulaires ? Ou encore, quelles sont les applications pour ces catégories de robots ?
- Quelles sont les difficultés pour élaborer ce type de robots ?

## 1.2.1 Applications pour les machines 3T-1R et 3T-2R

### 1.2.1.1 Application des machines 3T-1R

L'application essentielle des machines 3T-1R consiste en la manutention de pièces avec orientation. En effet pour des opérations simples de prise-dépose de pièces, il est nécessaire de convoyer les pièces tout en les orientant convenablement au moment de les déposer. L'axe de rotation du préhenseur est donc souvent vertical. Le développement du robot Delta répond à la nécessité de disposer d'un robot apte à transférer des pièces de faible masse (5 à 20 G) à cadence élevée (jusqu'à 150 pièces par minute).

### 1.2.1.2 Applications des machines 3T-2R

On recense essentiellement les applications suivantes pour les machines 3T-2R :

- ❑ l'usinage 5 axes où on s'intéresse à la position d'un point (le centre-outil) et à la direction d'un axe (celui de la broche),
- ❑ les opérations de soudage, de découpage (par laser ou par projection de liquide à haute pression) et de peinture qui ne nécessitent pas la présence d'un 6<sup>ème</sup> axe.
- ❑ les bras maîtres pour système haptique où la dernière rotation peut être intégrée directement dans le manche.

## 1.2.2 Difficultés pour obtenir des machines à 4 ou 5 ddl

« Les manipulateurs parallèles dont le nombre de chaînes cinématiques est strictement égal au nombre de degrés de liberté de l'organe terminal sont appelés manipulateurs pleinement parallèles [Gosselin 1988] [Pierrot 1991a], étant entendu que les chaînes en question relient directement base et organe terminal, et qu'elles ne comportent qu'un seul actionneur. Une étude des mobilités permet de montrer qu'il n'existe pas de robot pleinement parallèle à quatre ou cinq degrés de liberté dont les chaînes cinématiques sont identiques, mais qu'il est toutefois possible de réaliser des robots à quatre ou cinq degrés de liberté non pleinement parallèles » [Merlet 2001a].

Toutefois des mécanismes pleinement parallèles à 4 et 5 ddl ont été proposés par Fang [Fang 2002] et Li [Li 2003] récemment. En respectant certaines conditions géométriques particulières, telles le parallélisme de certains des axes, ces structures parviennent à procurer à la nacelle des mouvements 3T-1R (voir Figure 1.4) ou 3T-2R (Figure 1.5).

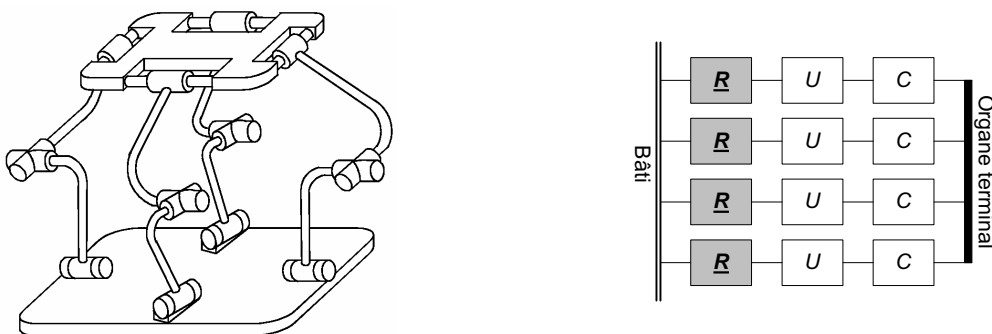


Figure 1.4. Mécanisme pleinement parallèle 3T-1R

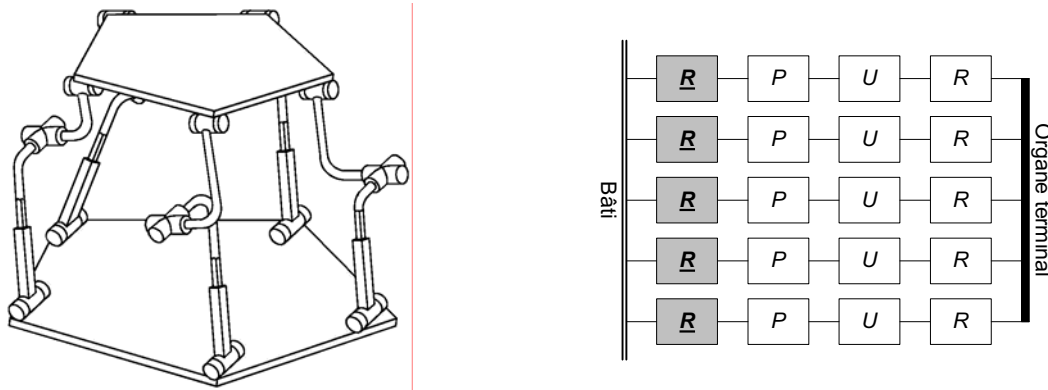


Figure 1.5. Mécanisme pleinement parallèle 3T-2R

A ce jour, ce genre de mécanismes n'a pas fait l'objet de réalisations pratiques poussées ; de plus les études cinématiques déjà réalisées restent souvent assez générales et ne cherchent pas à préciser sous quelles conditions ces machines seraient effectivement fonctionnelles.

Une difficulté supplémentaire réside dans le fait que l'influence des erreurs géométriques des pièces constitutives du mécanisme sur le positionnement de la nacelle a été peu abordée pour les mécanismes parallèles qui ne possèdent pas les 6 ddl opérationnels (donc à fortiori pour les mécanismes à 4 et 5 ddl).

### 1.2.3 Difficultés pour obtenir de forts débattements angulaires

Le problème des singularités (avec celui des collisions) est un problème récurrent lors de la conception de robots. Dans un premier temps nous commençons par rappeler ce qu'est une configuration singulière, et puis nous effectuons un classement en distinguant ce que nous appellerons les singularités internes. Ensuite nous expliquons comment les sur-mobilités sont omniprésentes dès lors que la nacelle vient à s'incliner, et que c'est en palliant ce problème essentiel que l'on parviendra à obtenir des mécanismes à forts débattements angulaires.

#### 1.2.3.1 Configurations singulières

Les configurations singulières sont des postures particulières de l'organe terminal, où le comportement des manipulateurs se dégrade, pouvant mener jusqu'à la rupture du mécanisme. Zlatanov, dans [Zlatanov 1998], propose une classification complète de toutes les singularités qu'il est possible de rencontrer. Dans un souci de simplicité, nous classerons l'ensemble des singularités en trois catégories uniquement :

- ❑ les sous-mobilités ou singularités séries,
- ❑ les sur-mobilités ou singularités parallèles,
- ❑ les autres types de singularités, appelées singularités « internes ».

Pour illustrer ces propos, envisageons le cas simple du mécanisme parallèle plan à 2 actionneurs pour 2 ddl illustré Figure 1.6. Un dispositif mécanique particulier constitué d'un parallélogramme plan permet à la nacelle de conserver son orientation au cours du mouvement.

La notion de singularité repose pour une bonne part sur l'équation de la cinématique qui établit une relation linéaire entre les vecteurs  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\dot{\mathbf{x}}$  (respectivement le vecteur des vitesses articulaires et celui des vitesses opérationnelles) :

$$\mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}}. \quad (1-1)$$

Ce qui justifie que l'on s'intéresse aux cas où les matrices  $\mathbf{J}_q$  et/ou  $\mathbf{J}_x$  sont dégénérées.

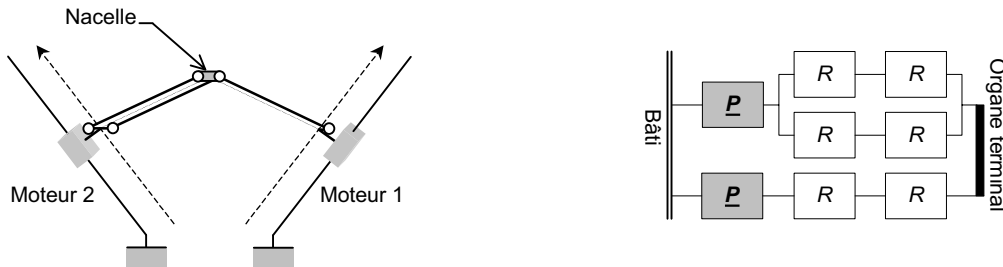


Figure 1.6. Mécanisme parallèle plan 2T : schéma et graphe d'agencement

### 1.2.3.1.1 Les sous-mobilités

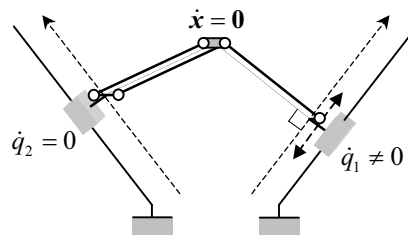


Figure 1.7. Illustration d'une sous-mobilité à l'aide du mécanisme parallèle simple à 2 ddl

Si  $\mathbf{J}_q$  est singulière, alors on peut avoir un  $\dot{\mathbf{q}}$  non nul ne créant pas de mouvement de la plate-forme : ceci correspond à une singularité dans la structure série d'une des chaînes et l'on parle alors de singularité série ou de sous-mobilité (voir Figure 1.7).

### 1.2.3.1.2 Les sur-mobilités

Si  $\mathbf{J}_x$  est singulière, alors on peut avoir un  $\dot{\mathbf{x}}$  non nul sans changement de position des moteurs : on parle alors de singularité parallèle ou de sur-mobilité (voir Figure 1.8).

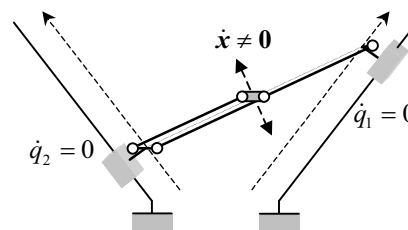


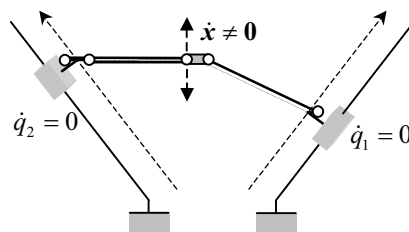
Figure 1.8. Illustration d'une sur-mobilité à l'aide du mécanisme parallèle simple à 2 ddl



*Remarque :* il se peut dans certaines situations que  $\mathbf{J}_q$  et  $\mathbf{J}_x$  soient singulières en même temps ; on est alors en présence à la fois de singularités série et parallèle.

### 1.2.3.1.3 Les singularités internes

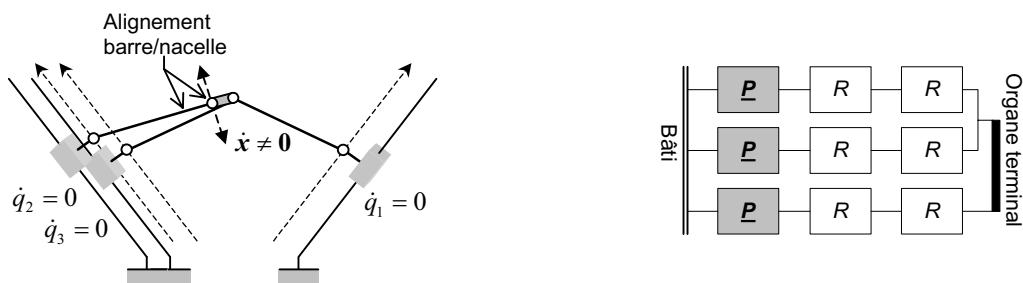
Pour certains mécanismes on peut également rencontrer d'autres types de singularités comme l'atteste la Figure 1.9. Dans cette situation particulière le parallélogramme est complètement aplati et ne garantit plus à la nacelle une orientation constante. L'analyse des matrices  $\mathbf{J}_q$  et  $\mathbf{J}_x$  ne suffit plus, et il est nécessaire de mener une étude plus complète des mobilités pour les mettre en évidence. De la même manière que l'on a distingué sous et sur-mobilité il est possible de faire une distinction similaire concernant les singularités internes : ainsi, le cas où l'angle de brisure d'une liaison cardan est de  $90^\circ$  correspond à une singularité dans la structure série de la chaîne cardan (sous-mobilité interne), tandis que le cas où un parallélogramme dégénère correspond à une sur-mobilité interne.



**Figure 1.9.** Illustration d'une singularité interne à l'aide du mécanisme parallèle simple à 2 ddl

### 1.2.3.2 Difficultés lorsque la nacelle s'incline

Si le concepteur souhaite obtenir un mécanisme parallèle capable de mouvements de rotation, il doit palier les problèmes de sur-mobilités. Celles-ci deviennent omniprésentes dès lors que la nacelle s'incline. En effet, elles s'expliquent la plupart du temps par l'alignement d'un des bras du robot avec la nacelle (voir Figure 1.10). Ce phénomène est moins délicat avec les mécanismes dont la nacelle se translate uniquement (orientation constante) puisque seuls les bras peuvent s'incliner. C'est la difficulté essentielle à laquelle on est confronté lors de la conception de mécanismes à forts débattements angulaires.



**Figure 1.10.** Mécanisme parallèle plan 2T-1R : schéma (illustration d'une sur-mobilité) et graphe d'agencement

## 1.3 Les mécanismes parallèles 3T-1R et 3T-2R actuels

Dans cette section nous allons dresser un panorama (non-exhaustif) des mécanismes parallèles 3T-1R et 3T-2R existant à l'heure actuelle. Nous tenterons dès lors d'établir une liste des approches qui ont permis aux concepteurs d'obtenir de forts débattements angulaires. Nous serons amenés à parler de mécanismes hybrides (qui ne répondent pas exactement à l'appellation de robots parallèles), mais nous avons estimé judicieux d'exposer également ce type de mécanismes.

### 1.3.1 Les mécanismes 3T-2R

La première catégorie de robots que nous allons exposer possède 6 ddl. Il ne s'agit donc pas de mécanismes 3T-2R (à 5 ddl) à proprement parler, cependant comme nous allons pouvoir le constater, un des degrés de liberté n'est pas toujours indispensable à l'accomplissement de la tâche et la finalité des robots est bien 3T-2R. On parle de redondance cinématique qui se traduit par le fait qu'il existe une infinité de postures du mécanisme pour une même position opérationnelle de l'organe terminal.

#### 1.3.1.1 Les mécanismes à 6 ddl

Certains fabricants, tels le constructeur de machines-outils CMW (Vosges, France), proposent des mécanismes réalisés d'après une plate-forme de Gough (6 ddl), destinés à l'usinage. La rotation autour de l'axe de la broche étant inutile, il s'agit de mécanismes à redondance d'actionnement. L'inclinaison pour ces robots reste faible ( $< 20^\circ$ ).

Le concept d'hexapode a été étendu avec le robot Hexa [Pierrot 1991b] [Pierrot 1991c] et la version machine-outil (Hexa-M) où seules les liaisons rotules et les glissières ont été interverties dans le graphe d'agencement (cf. Figure 1.11).

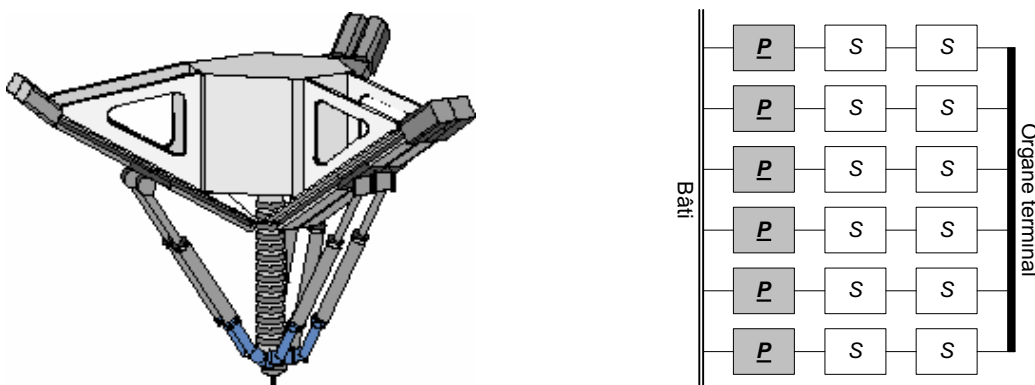
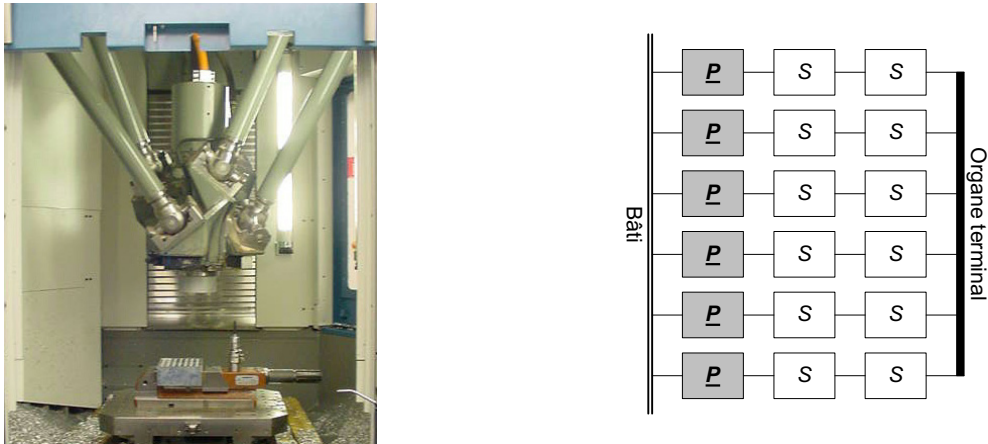


Figure 1.11. La machine-outil HexaM (Toyota), schéma et graphe d'agencement

Grâce à cette modification ce mécanisme entre dans la catégorie des robots parallèles légers puisque les vérins ont laissé la place à des moteurs linéaires fixés directement sur le bâti, réduisant les parties mobiles à leur plus simple expression. Cette machine a la particularité d'être en tout

point similaire avec un robot Delta lorsque la nacelle n'est pas inclinée et donc de disposer d'une expression analytique du modèle géométrique direct dans cette configuration.

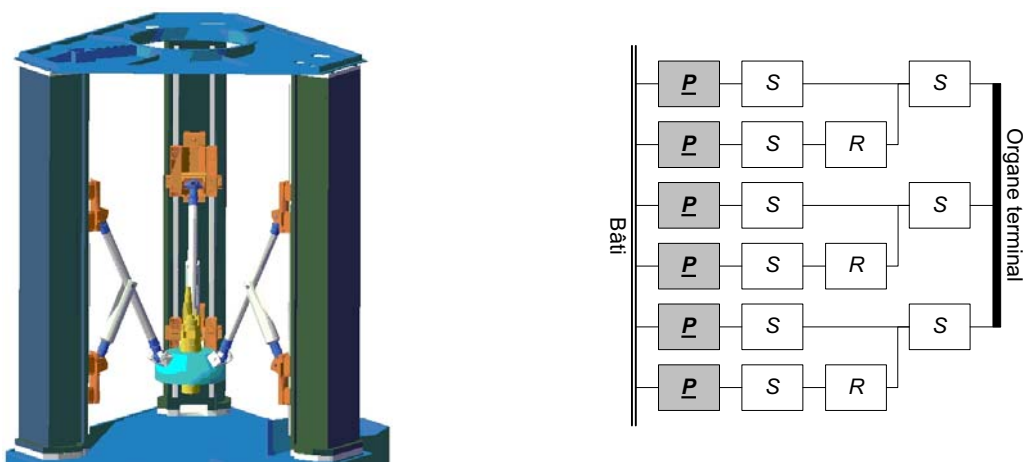
D'autres machines de ce type ont vu le jour avec la même topologie mais des agencements géométriques différents laissant espérer de plus forts débattements angulaires (ex : la machine-outil Paralix de l'IFW à Stuttgart, ou Dynamil de l'ISW à Aachen). L'inclinaison maximale de la nacelle reste cependant modérée.



**Figure 1.12.** Photo de la machine-outil Dynamil (ISW), schéma et graphe d'agencement

La machine Lambda kinematics, introduite dans le cadre du projet Mach21 est une légère variante de ce concept. La nuance est du même ordre que celle qui existe entre une plate-forme de Gough et une plate-forme de Stewart : plutôt que de relier tous les bras directement à la nacelle, ils sont appariés et l'un agit directement sur l'autre, limitant les risques de collision interne (voir Figure 1.13). Malgré cela l'inclinaison reste inférieure à  $30^\circ$ .

*Remarque :* Les robots exposés précédemment ont tous 6 ddl pour des applications n'en requérant que 5. Ils s'agit de mécanismes présentant une redondance cinématique, mais il semble que cette particularité n'a pas été exploitée totalement puisque ces robots ne sont pas capables de forts débattements angulaires.



**Figure 1.13.** La machine-outil Lambda kinematics, schéma et graphe d'agencement

### 1.3.1.2 Les mécanismes 3T-2R exclusivement

#### 1.3.1.2.1 Les mécanismes parallèles à chaîne passive

Le robot Seyanka [Herrero 2000] est un mécanisme 5 axes à patte passive (voir Figure 1.14). Cette chaîne cinématique supprime un des degrés de libertés de la nacelle. Ce robot n'est pas capable de débattements angulaires importants.

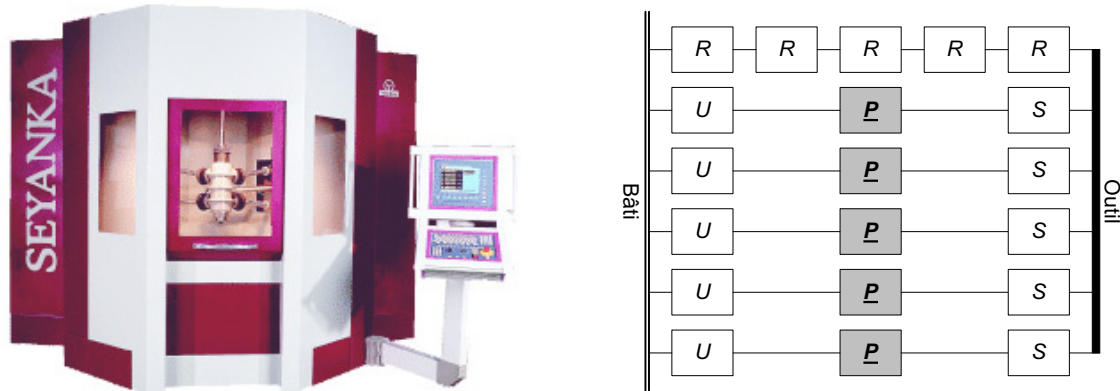


Figure 1.14. Seyanka (Teckniker), photo et graphe d'agencement

#### 1.3.1.2.2 Les mécanismes pleinement parallèles

Zamanov propose une structure pleinement parallèle avec un caractère symétrique (voir Figure 1.15, d'après [Merlet 2001a]). Cette architecture repose sur le couplage de deux manipulateurs parallèles plans  $A_1A_2ABA_3A_4$  et  $B_1B_2ABB_3B_4$  ayant la chaîne  $AB$  en commun. Une telle structure permet la commande des degrés de liberté de la plate-forme à l'exception de la rotation autour de la normale à la plate-forme. Ce dernier degré de liberté peut, par ailleurs, être commandé par l'intermédiaire d'un actionneur supplémentaire placé sur la plate-forme (voir mécanismes hybrides).

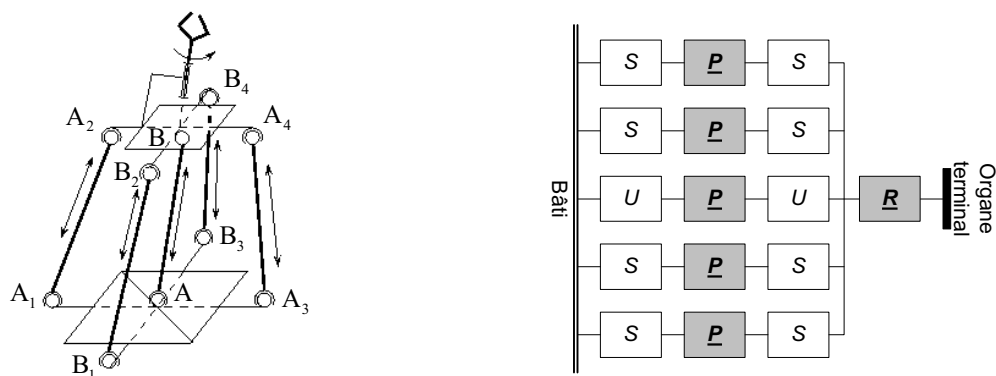
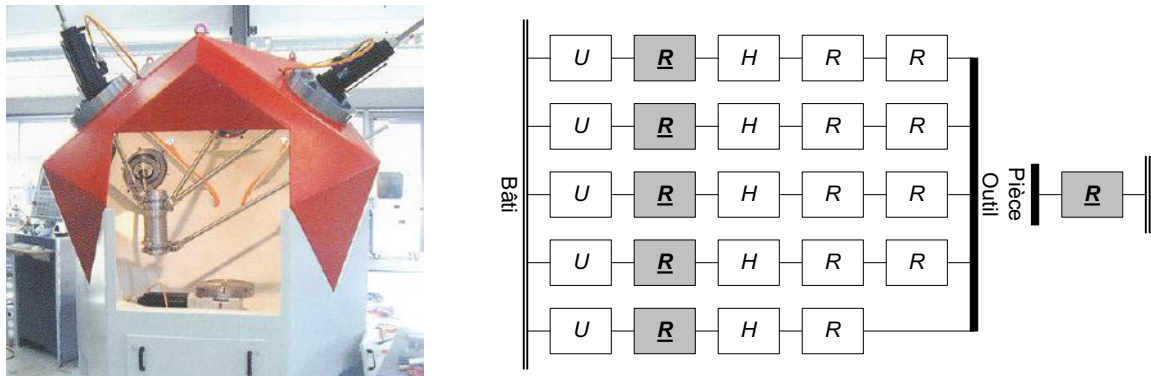


Figure 1.15. Architecture de Zamanov, schéma et graphe d'agencement

Schwaar propose aussi une structure pleinement parallèle : la machine-outil P 800 de Metrom repose essentiellement sur la technologie de ses moteurs traversés de part en part par une vis. Les vis sont fixés à la broche par l'intermédiaire de liaisons pivot. Conformément à ce qui a été an-

noncé par Gosselin [Gosselin 1988], les chaînes ne peuvent être parfaitement identiques (cf. Figure 1.16, graphe d'agencement). Cette machine est capable de forts débattements angulaires mais le domaine de travail est fortement irrégulier notamment à cause des collisions inter-barres. C'est pourquoi cette machine a été équipée d'un plateau tournant pour orienter la pièce à fabriquer. Ce mécanisme est donc cinématiquement redondant. Jusqu'à présent c'est le seul mécanisme qui exploite parfaitement la redondance cinématique pour parvenir à de forts débattements angulaires.



**Figure 1.16.** P 800 (Metrom), photo et graphe d'agencement

Les mécanismes de Zamanov et de Schwaar sont obtenus par la juxtaposition de deux mécanismes. Dans le premier cas les deux mécanismes sont situés l'un à la suite de l'autre, dans le second cas, les deux mécanismes sont à même le bâti. Nous allons nous intéresser dans la section suivante tout particulièrement aux mécanismes obtenus par juxtaposition de deux sous-ensembles mécaniques.

### 1.3.1.2.3 Juxtaposition de deux sous-mécanismes

Il semble que la plupart des fabricants de machines-outils aient fait le choix de réduire la difficulté en confiant à des sous-mécanismes spécialisés la possibilité d'obtenir de forts débattements angulaires. Ainsi plutôt que d'obtenir les 5 ddl directement, un sous mécanisme est chargé d'en fournir  $n$  ( $n < 5$ ) et un autre  $5 - n$ . Grâce à cette approche, les sous-mécanismes peuvent être plus facilement optimisés et ainsi offrir de meilleures performances. Il ne s'agit plus de mécanismes parallèles à proprement parler, et on distingue deux catégories de robots :

- ❑ les robots hybrides,
- ❑ les robots qui exploitent le paradigme main-droite main gauche.

#### 1.3.1.2.3.1 Les mécanismes hybrides

La définition exacte d'un mécanisme hybride est évasive. Dans cette classification nous considérerons comme hybride un mécanisme qui comporte plusieurs chaînes cinématiques reliant le bâti à l'organe terminal et dont une des chaînes au moins comporte plus d'un actionneur. Parmi les machines hybrides que l'on a cataloguées, on peut distinguer trois catégories :

- ❑ les mécanismes à porteur parallèle et poignet série,
- ❑ les mécanismes à porteur série et poignet parallèle,

- les autres mécanismes hybrides.

### 1.3.1.2.3.1.1 Porteur parallèle – poignet série

Le robot Tricept de Neos (voir Figure 1.17) est une machine hybride : un mécanisme porteur d'architecture parallèle porte un poignet série. Il est donc possible d'obtenir de forts débattements angulaires puisque le poignet est de conception totalement classique. Une particularité de ce robot est la présence d'une patte passive (non-actionnée) qui contraint la cinématique du robot. Ce robot a connu un réel succès commercial mais il semble que dans le domaine de la machine outil les performances obtenues soient en deçà de celles espérées.

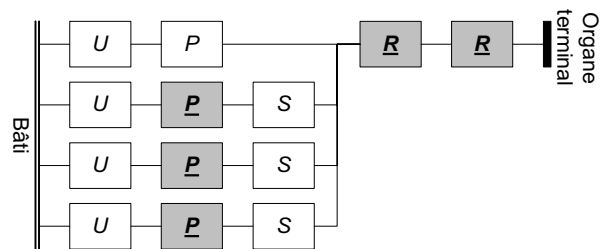


Figure 1.17. Tricept 845 (Neos Robotics), photo et graphe d'agencement

La machine Georg V de l'université de Hanovre diffère de ce robot par le simple fait que les vérins ont été remplacés par des moteurs linéaires directement fixés sur la bâti. Il s'agit de la même distinction que celle existant entre un hexapode et un robot de type hexa, faisant de Georg V un robot de type parallèle léger.

### 1.3.1.2.3.1.2 Porteur série – poignet parallèle

La machine-outil Sprint Z3 de DS Technologies possède un mécanisme porteur  $x$ - $y$  et un poignet d'architecture parallèle  $z$ - $A$ - $B$ . Destinée à l'industrie de l'aéronautique, cette machine comprend un portique d'architecture classique d'une course de 60 mètre, et une tête d'architecture parallèle (voir Figure 1.18).

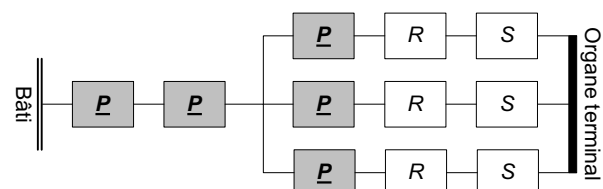
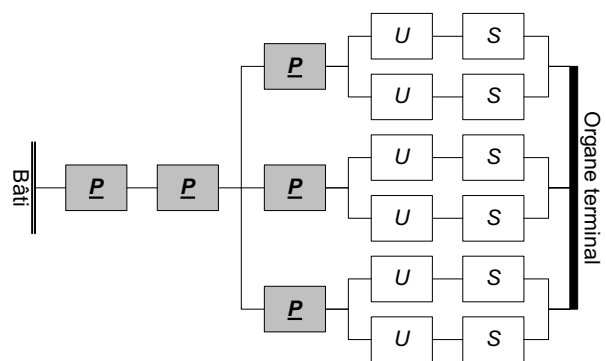


Figure 1.18. Sprint Z3 (DS Technologies), image CAO du poignet et graphe d'agencement

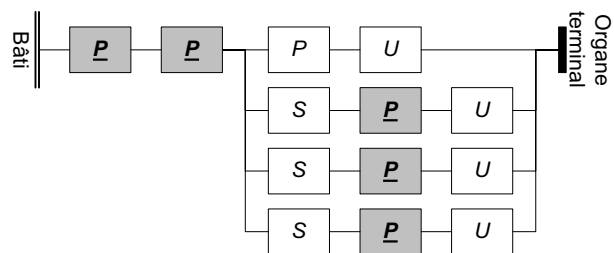
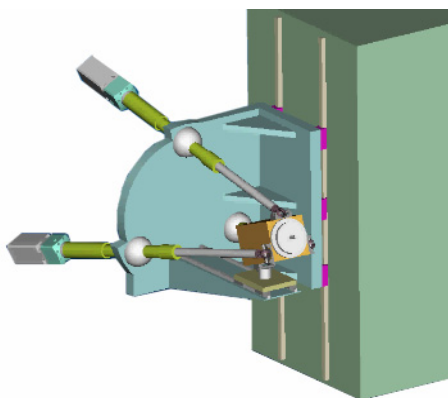
Il s'agit d'un idéal d'optimisation pour obtenir les degrés de libertés souhaités avec une architecture simple. Cette machine a connu un réel succès commercial, notamment par le fait que ses performances en vitesse ( $50\text{ m/min}$ ) sont bien supérieures à celles des machines d'architecture classique. Les possibilités d'orientation de la nacelle sont de  $40^\circ$ .

La machine Hermes de Fatronik est une évolution de Sprint Z3. Ce qui est remarquable est le fait que les concepteurs de Fatronik aient réussi à proposer une machine destinée aux mêmes applications que Sprint Z3, d'allure identique, capable des même performances tout en contournant le brevet déposé par DS Technologies. Encore plus surprenant est le graphe d'agencement du poignet qui est en tout point identique avec celui des robots Delta. Cependant, si la topologie est bien identique, l'agencement géométrique est totalement différent. Ainsi les parallélogrammes observables sur le robot Delta sont, sur cette structure, disposés de manière complètement « gauche ». C'est cette spécificité qui confère au mécanisme les mouvements attendus ( $z-A-B$ ).



**Figure 1.19.** Hermes (Fatronik), photo du poignet et graphe d'agencement

Fatronik propose un autre robot hybride capable de 3T-2R. Le porteur est d'architecture série (mobilités  $x-y$ ) et le poignet s'inspire du robot Tricept. Ce robot possède donc une patte passive. Le débattement angulaire est faible ( $< 30^\circ$ ).



**Figure 1.20.** Ulysse ZAB (Fatronik), image CAO et graphe d'agencement

### 1.3.1.2.3.1.3 Le robot hybride Dumbo

La machine-outil Dumbo de l'IFW à l'université de Hanovre est un mécanisme hybride 3T-2R (voir Figure 1.21). Le porteur constitue un mécanisme hybride à lui tout seul puisqu'une colonne d'axe  $z$  supporte un mécanisme parallèle constitué de deux vérins et d'une patte passive. Le poignet d'architecture série confère à la machine des débattements angulaires importants.

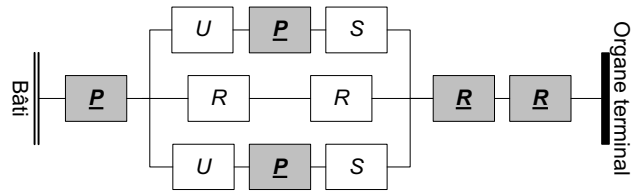


Figure 1.21. Dumbo (IFW), photo et graphe d'agencement

L'inconvénient des mécanismes hybrides résulte dans le fait qu'une sous-structure en porte une autre. On retombe donc dans les travers propres aux robots série, si bien que la dynamique en est pénalisée.

### 1.3.1.2.3.2 Les architectures main droite – main gauche

Une machine inventée dans le cadre du projet Mach21 exploite pleinement le paradigme main droite – main gauche en reprenant le poignet de Sprint Z3. Ainsi, la broche est déplacée à l'aide d'un mécanisme simple  $x$ - $y$  tandis que la pièce à usiner est fixée sur la nacelle parallèle (voir Figure 1.22).

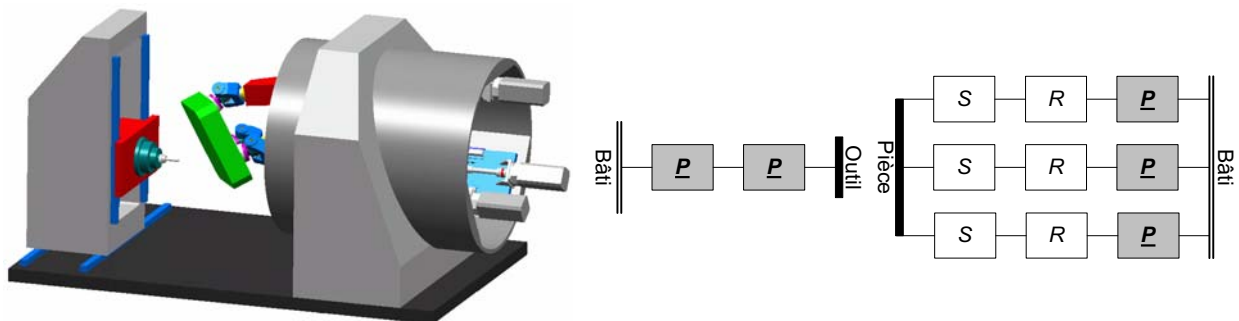


Figure 1.22. Robot 5 axes inspiré de Sprint Z3 (projet Mach21), image CAO et graphe d'agencement



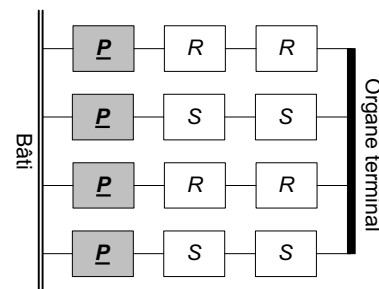
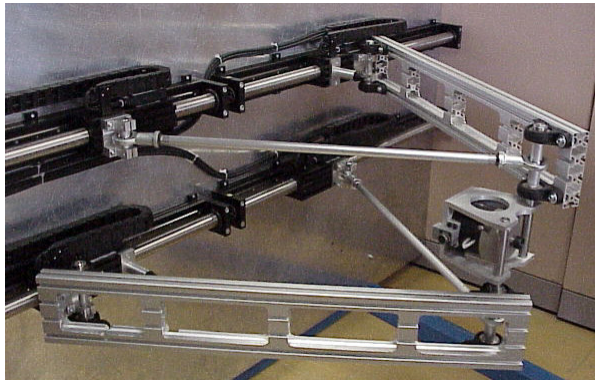
Au final, les degrés de liberté de la broche par rapport à la partie usinée sont bien au nombre de 5. Grâce à cette approche le dispositif qui provoque l'inclinaison est optimisé au mieux (débattements de  $\pm 40^\circ$ ). L'inconvénient de ce concept est qu'il ne peut convenir à des pièces trop lourdes puisque la dynamique est alors pénalisée.

Il est possible de décliner ce principe main droite – main gauche d'une infinité de manières, notamment tous les robots 3T-1R que nous présenterons pourront être associés à un plateau tournant de manière à obtenir 5 ddl au total.

Le mécanisme Archi développé au LIRMM exploite également ce concept, associé à un mécanisme 1T-1R il est capable de remplir les 5 ddl. Ce mécanisme a la particularité supplémentaire d'être à actionnement redondant. Ce point est développé dans la section suivante.

### 1.3.1.3 Les mécanismes parallèles à actionnement redondant

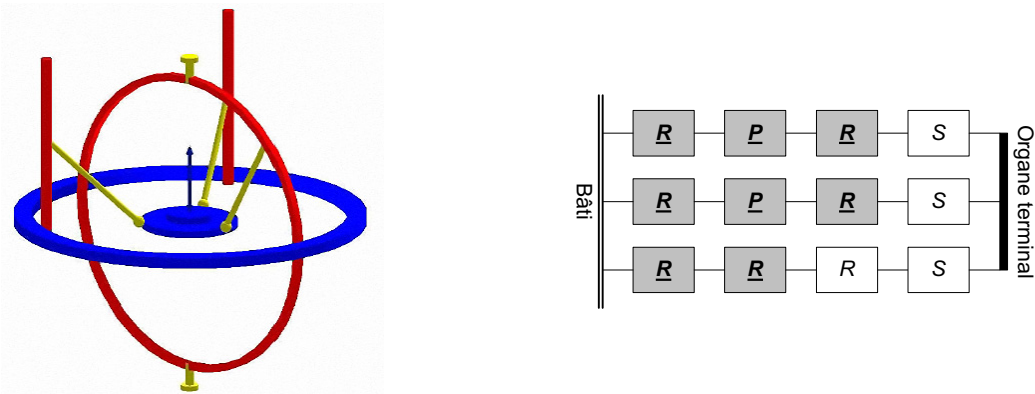
Le robot Archi [Marquet 2001a] [Marquet 2001b], fabriqué au cours de ma thèse au LIRMM, est à actionnement redondant, c'est à dire qu'il possède plus d'actionneurs que de degrés de liberté de l'organe terminal (voir Figure 1.23).



**Figure 1.23.** Le robot Archi (LIRMM), photo et graphe d'agencement

Ainsi à une force opérationnelle donnée correspond une infinité de forces possibles pour les moteurs. Mais à une position de la nacelle correspond une seule posture pour le mécanisme. Ce type de redondance s'oppose à la redondance cinématique, pour laquelle à une position de nacelle donnée correspond une infinité de posture pour le mécanisme. Ce robot possède quatre chaînes cinématiques motorisées pour 3 ddl. La nacelle dispose des mouvements du plan ( $T_x$ ,  $T_y$  et  $R_z$ ) et grâce à sa mécanique particulière, la rotation est d'amplitude infinie. Ce robot est décrit plus en détails en fin de chapitre 3.

La machine Eclipse de Sena Technologies [Ryu 1998] constitue également un Mécanisme Parallèle à Actionnement Redondant (MPAR). Plutôt que de disposer d'une chaîne cinématique supplémentaire, deux des chaînes ont été motorisées de manière redondante. Grâce à cette démarche, la nacelle peut prendre une orientation quelconque. Récemment la machine Eclipse 2 [Kim 2002] a vu le jour. Elle exploite ce même principe (voir Figure 1.24).



**Figure 1.24.** Eclipse 2 (Université de Séoul), image CAO et graphe d'agencement

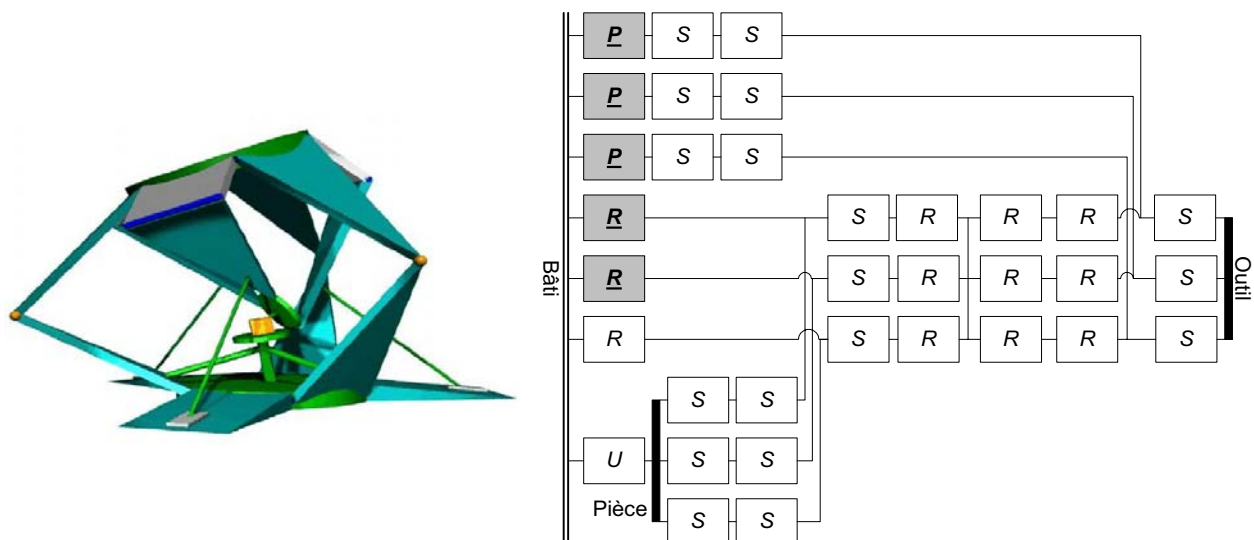
La nacelle de cette machine est capable de prendre n'importe quelle orientation dans l'espace tout en se déplaçant. Les débattements angulaires sont donc optimaux, grâce à l'utilisation judicieuse de la redondance d'actionnement.

Le robot Eureka présenté chapitre 4 est à actionnement redondant mais combine également une autre approche capable de procurer de forts débattements angulaires : la présence d'un dispositif mécanique de transformation de mouvement. Ce point est développé dans la section suivante.

### 1.3.1.4 Les dispositifs mécaniques de transformation de mouvement

#### 1.3.1.4.1 Oméga : un mécanisme à amplification mécanique des rotations

Le mécanisme à cinématique complexe Omega développé récemment à l'EPFL est capable de débattements angulaires importants (cf. Figure 1.14).



**Figure 1.25.** Omega (EPFL), image CAO et graphe d'agencement (supposé)

Broche et porte-pièce bougent tous deux par rapport au bâti, mais de manière parfaitement coordonnée pour que les inclinaisons s'ajoutent (cf. Figure 1.14). Ce couplage est réalisé par le biais de biellettes. Si l'on considère le mouvement de la broche relativement au porte pièce, on comprend que toute cette mécanique constitue un dispositif d'amplification des rotations libre de singularité.

Le mécanisme Twice introduit au chapitre 2 exploite également ce principe : un dispositif constitué de biellettes permet de doubler les angles d'inclinaison de l'organe terminal.

### 1.3.1.4.2 Orthoglide 5 axes : un mécanisme à actionnement déporté

Pour terminer ce panorama de robots 3T-2R, citons le cas du robot Orthoglide 5 axes [Wenger 2000] [Chablat 2003] (voir Figure 1.26) qui utilise la juxtaposition d'un porteur analogue au robot Delta, et d'un poignet Œil Agile [Gosselin 1996] à 2 ddl dont l'actionnement est déporté.

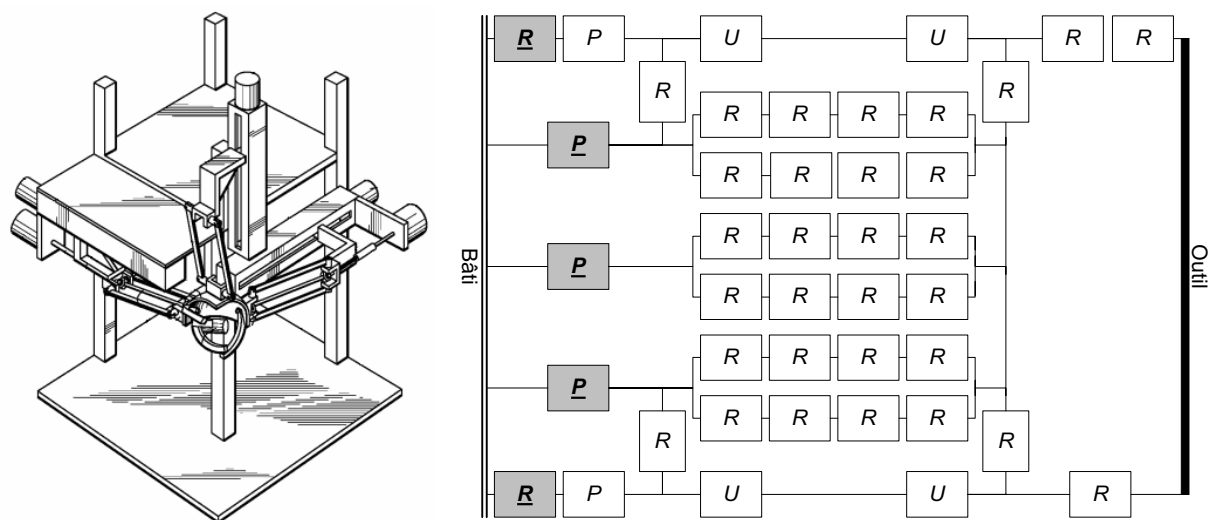


Figure 1.26. Orthoglide 5 axes, schéma et graphe d'agencement

Ce poignet est capable de très forts débattements angulaires, ce qui s'explique par son architecture sphérique. Les limitations de cette architecture résident dans les sollicitations des barres de nature complexe (torsion notamment) ce qui nuit à la rigidité. Il existe une version 3R (Figure 1.27) ainsi qu'une version 2R de l'Œil agile.

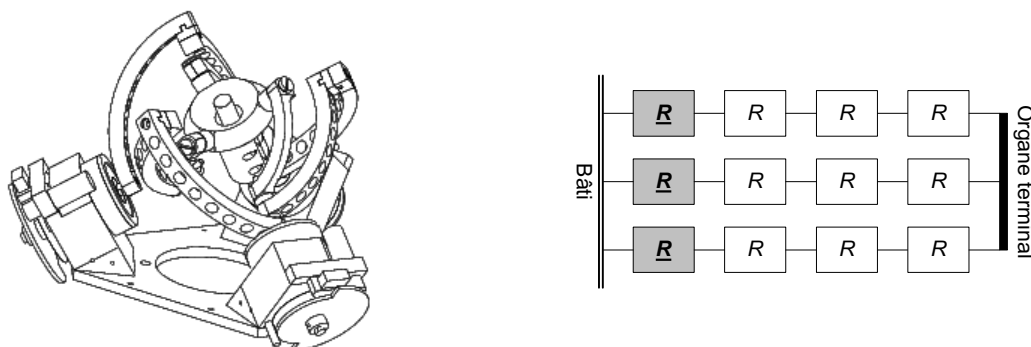


Figure 1.27. L'Œil Agile de Gosselin (version à 3 ddl), schéma et graphe d'agencement

Orthoglide 5 axes s'apparenterait en tous points à un mécanisme hybride à 3T-2R si la motorisation de l'Œil Agile avait lieu directement au niveau du poignet. Plutôt que d'être placés directement sur les articulations du poignet, ceux-ci sont fixés sur le bâti et leur mouvement de rotation est transmis jusqu'au poignet par deux arbres de transmission montés sur cardan. Ces barres sont agencées de manière judicieuse puisque placées au centre des parallélogrammes. Ce mécanisme est capable de débattements angulaires importants.

Nous retrouvons ce même concept d'actionnement déporté sur le robot Delta, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

## 1.3.2 Les mécanismes 3T-1R

### 1.3.2.1 Le robot Delta : un mécanisme à actionnement déporté

Le robot Delta (voir Figure 1.3) a inspiré de nombreux mécanismes 3T-1R. Ce robot d'architecture parallèle est capable de forts débattements grâce à sa chaîne cinématique **RUPUR**. En effet, grâce à cette chaîne il est possible de déporter l'actionnement de la plate-forme mobile jusqu'au bâti et ainsi de bénéficier de toute la latitude de mouvement du moteur rotatif (suivant cette même idée, il serait possible de remplacer cette barre munie de cardans par un flexible et de transmettre ainsi le mouvement de rotation jusqu'à la nacelle). Cette chaîne est source cependant d'un certain nombre de problèmes. Ainsi sa rigidité angulaire est toute relative. De plus la présence des cardans impose à la barre centrale de s'incliner faiblement sous peine de détériorer les liaisons. Mais surtout la liaison glissière centrale est particulièrement fragile puisqu'elle doit être de course considérable (ce qui nuit à la durée de vie du robot, d'après ABB Robotics). Enfin les mécanismes dont le volume de travail doit être allongé se trouvent pénalisés par cette chaîne cinématique, c'est pourquoi d'autres recherches ont été entreprises.

### 1.3.2.2 Les mécanismes hybrides

Le mécanisme Manta de Rolland [Rolland 1999] constitue une structure hybride puisqu'une des chaînes cinématique est munie en série d'un actionneur linéaire et d'un actionneur rotatif. Le moteur rotatif agit par le biais d'une chaîne cardan-cardan sur l'organe terminal qu'il est capable d'orienter parfaitement. Ce mécanisme reprend les parallélogrammes forts du robot Delta, pour contraindre l'organe terminal à s'orienter selon une direction seulement.

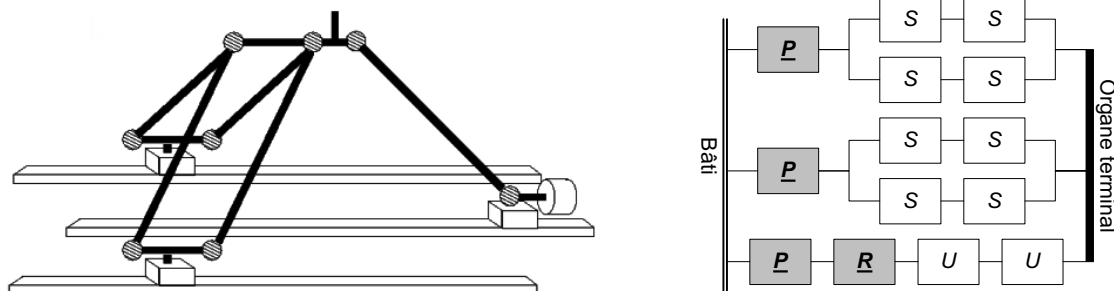


Figure 1.28. Le robot Manta (de Luc Rolland), schéma et graphe d'agencement

### 1.3.2.3 Le robot Kanuk

Il s'agit d'un mécanisme pleinement parallèle. En effet, si l'on fait abstraction de la boucle cinématique qui existe lorsque l'on regarde la description cinématique d'un parallélogramme, le nombre de chaînes est strictement égal au nombre de degrés de liberté de l'organe terminal et les chaînes en question relient directement base et organe terminal (voir Figure 1.29). Ce robot, en dehors de l'orientation des actionneurs, est en tout point identique au robot H4 asymétrique [Company 1999] [Pierrot 1999]. Les débattements angulaires restent limités.

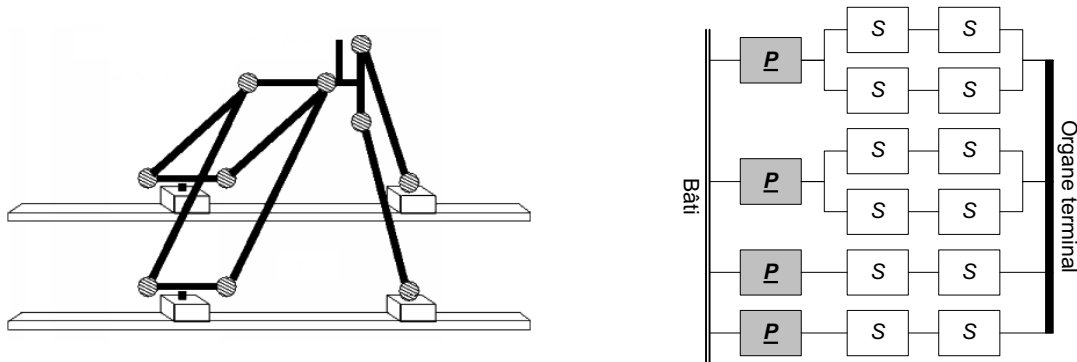


Figure 1.29. Le robot Kanuk (de Luc Rolland), schéma et graphe d'agencement

### 1.3.2.4 Les mécanismes à amplification mécanique des rotations

#### 1.3.2.4.1 Le robot Hita-STT

Le robot Hita-STT développé à l'EPFL est en réalité un mécanisme 5 axes destiné à l'usinage (voir Figure 1.30).

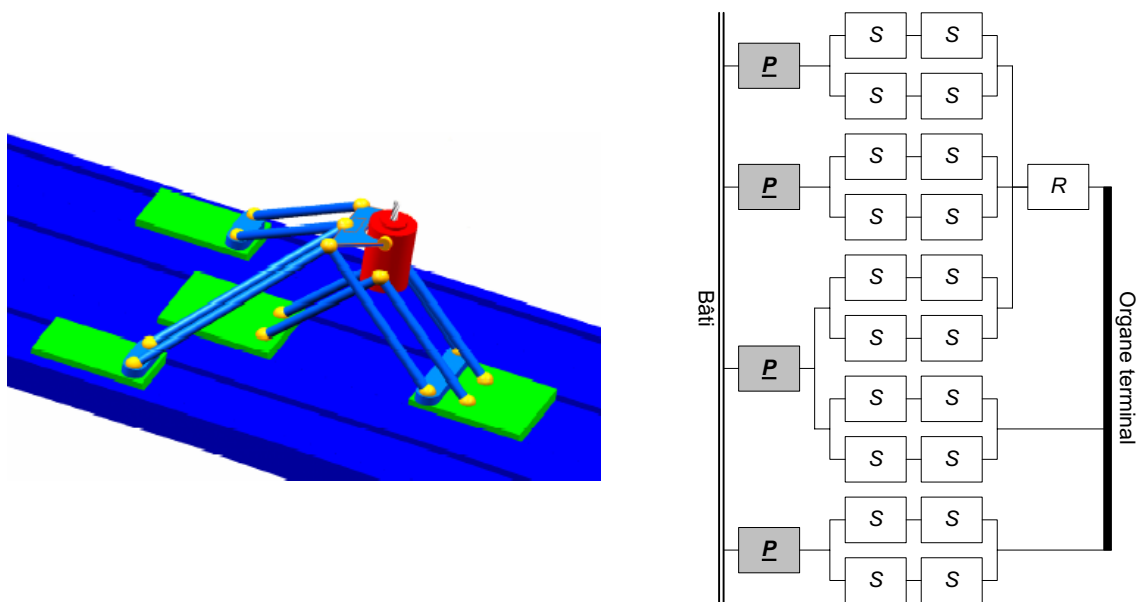


Figure 1.30. Hita-STT (EPFL), image CAO et graphe d'agencement de la partie « main-droite »

Le 5<sup>ème</sup> axe est obtenu par l'apport d'un plateau tournant ; ce robot exploite donc le paradigme main droite – main gauche. Nous nous focaliserons dans ce paragraphe uniquement sur la structure 3T-1R. Ce mécanisme est capable d'un degré de liberté autour d'un axe horizontal de forts débattements angulaires, grâce à un dispositif mécanique d'amplification des rotations qui s'inspire de celui des pelleteuses hydrauliques. En effet, sur une pelleteuse, plutôt que d'agir directement sur le godet, un vérin hydraulique actionne un jeu de biellettes dont le but est d'amplifier le mouvement de rotation.

#### 1.3.2.4.2 Le robot H4

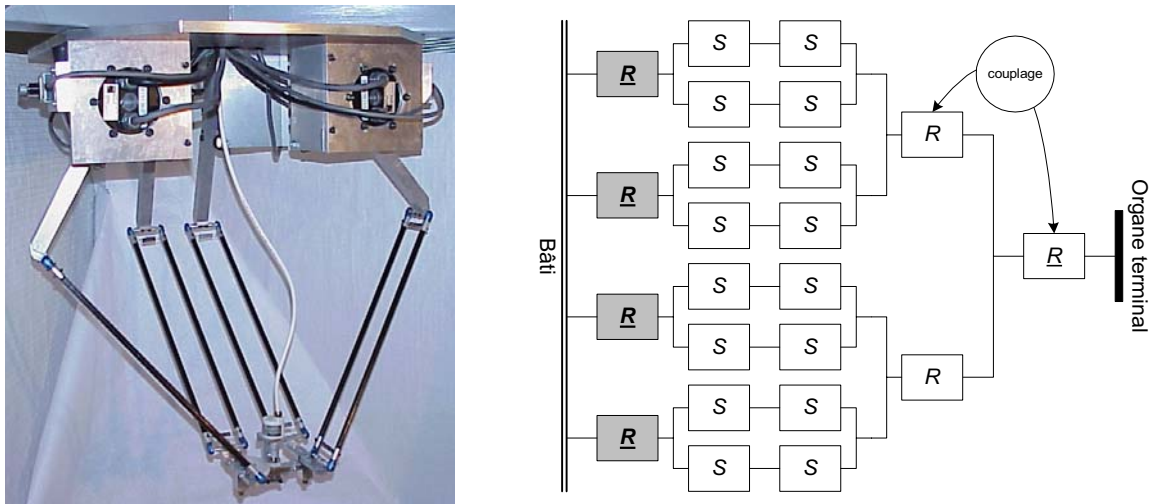


Figure 1.31. Le robot H4 (LIRMM), photo et graphe d'agencement

Suivant une idée analogue, le robot H4 (voir Figure 1.31) [Company 1999] développé au LIRMM utilise un mécanisme à engrenages pour amplifier la rotation qui a lieu au niveau de la nacelle articulée. Il s'agit d'un robot de type parallèle léger reprenant à son compte les parallélogrammes spatiaux du robot Delta. Ce robot, ainsi qu'une méthode permettant l'analyse des singularités, sera exposé plus en détail dans le chapitre 2.

#### 1.3.2.5 Les robots de la famille I4 : des mécanismes à dispositif de transformation mécanique T/R

La Figure 1.32 présente le robot I4R destiné à la palettisation. Ce robot de la famille I4, imaginée au cours de cette thèse (et explicitée dans le chapitre suivant), parvient à de forts débattements angulaires grâce à une approche différente : un dispositif mécanique particulier est capable de transformer un mouvement relatif de translation en un mouvement de rotation. Une structure à parallélogrammes permet à la nacelle d'être d'orientation constante au cours du mouvement et ainsi de limiter au maximum les problèmes de sur-mobilité. Les débattements angulaires ne dépendent que du rapport de transmission.

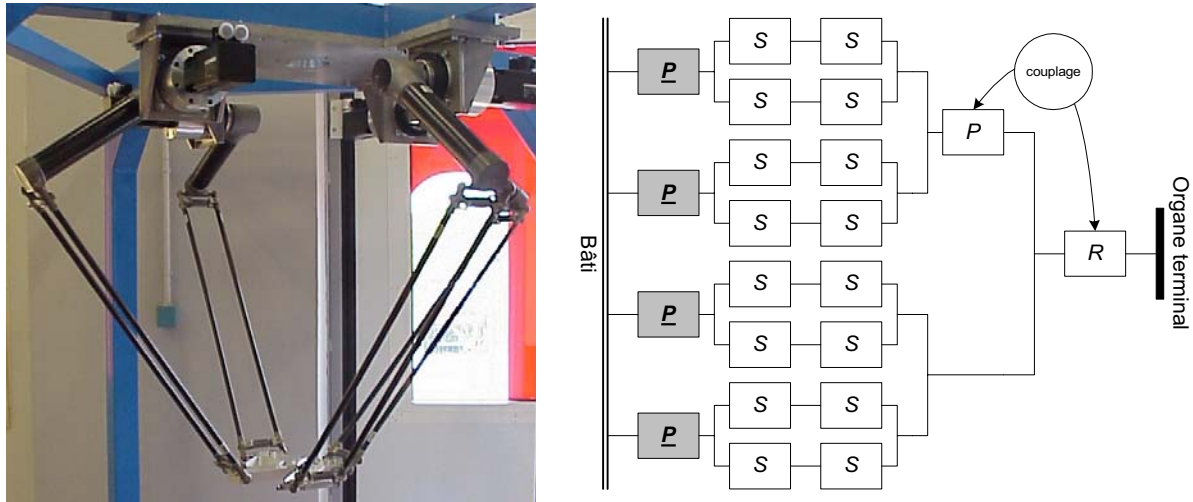


Figure 1.32. Le robot I4R (LIRMM), photo et graphe d'agencement

## 1.4 Les différentes approches pour obtenir de forts débattements angulaires

En résumé de cette étude bibliographique, effectuons la synthèse des différentes approches pour obtenir de forts débattements angulaires avec des mécanismes parallèles [Krut 2003c]. Obtenir de forts débattements angulaires consiste essentiellement à vaincre les singularités, notamment les sur-mobilité qui interviennent dès lors que la nacelle s'incline.

Une approche retenue par les constructeurs mais qui ne donne pas lieu à des robots parallèles à proprement parler consiste à obtenir la totalité des ddl souhaités par la juxtaposition de deux sous-ensembles mécaniques simples parfaitement optimisés pour leurs mouvements. On distingue :

- Les mécanismes hybrides : sont agencés en série l'un à la suite de l'autre, un premier mécanisme qui assure quelques degrés de mobilité suivi d'un autre chargé de procurer les degrés de liberté supplémentaires. Le robot Tricept utilise un poignet série. Dans le cas de Sprint Z3 les rotations sont obtenues à l'aide d'un mécanisme parallèle, mais puisque celui ne se focalise que sur 3 ddl, il peut être optimisé pour atteindre des débattements angulaires conséquents. Les limitations de ces robots concernent essentiellement la dynamique qui est pénalisée par l'architecture série de l'ensemble.
- Les mécanismes qui exploitent le paradigme main-droite – main gauche. Plutôt que de mettre en série les deux sous-ensembles mécaniques, l'un est chargé de l'outil tandis que l'autre doit agir directement sur la pièce à manufacturer. La machine du projet Mach21 dont l'architecture s'inspire de SprintZ3 exploite parfaitement ce principe. La limitation essentielle de ce principe réside dans le fait que si la pièce à manufacturer est trop lourde, la dynamique de l'ensemble s'en trouve pénalisée.

Voici les approches qui se sont dégagées pour obtenir des mécanismes à fort débattement angulaire :

- Les mécanismes à actionnement déporté. Cette approche consiste à transmettre le mouvement de rotation que l'on souhaite donner à l'organe terminal depuis le bâti jusqu'à la nacelle. Le robot Delta utilise une chaîne cinématique munie de cardans pour transmettre le mouvement de rotation.
- Les dispositifs mécaniques de transformation de mouvement. On distingue trois familles :
  - Les mécanismes d'amplification des rotations. Puisque certains mécanismes parallèles sont capables de rotations de faible amplitude, l'idée consiste à amplifier ce mouvement pour obtenir une rotation conséquente. Le robot Hita-STT utilise un dispositif constitué d'une biellette pour atteindre de fortes rotations. Le robot H4 utilise un système à engrenages. Lorsqu'il s'agit d'amplifier les mouvements de rotation autour de deux axes, ces dispositifs simples ne suffisent plus. Le concept Twice, présenté plus loin, est un dispositif mécanique qui permet de doubler les angles d'inclinaison suivant deux axes orthogonaux.
  - Les mécanismes de transformation de mouvement translation / rotation. Puisqu'il est bien plus facile d'engendrer un mouvement de translation sans singularité (moins de risque d'alignement de la nacelle avec un segment), il suffit de transformer ce mouvement en rotation pour obtenir un mouvement de forte amplitude. Le robot I4, décrit ci-après, utilise ce principe grâce à un dispositif pignon-crémaillère.
- Le surnombre d'actionneurs. On parle soit de redondance d'actionnement, soit de redondance cinématique :
  - La redondance cinématique consiste à avoir le choix entre plusieurs postures pour une même position de l'outil par rapport à la pièce à manufacturer, ainsi la machine Metrom, bien que la broche ait 5 ddl possède un plateau tournant capable d'orienter également la pièce. Cela permet de choisir une posture rigide sans collision des bras entre eux.
  - La redondance d'actionnement. Cette approche permet de passer outre certaines singularités qui auraient lieu sans actionneurs supplémentaires. Le robot Archi qui exploite parfaitement ce principe est capable d'une rotation d'amplitude infinie.

*Remarque 1 :* Certains robots peuvent évidemment combiner divers approches. Ainsi le robot Eureka présenté chapitre 4 est à actionnement redondant et possède une nacelle munie d'un dispositif de transformation de mouvement T/R.

*Remarque 2 :* Nous avons pu également noter l'existence de robots à chaîne cinématique passive tels Ulysse ZAB ou encore le robot Seyanka. Il semble que cette particularité n'est pas été exploitée pleinement pour obtenir de forts débattements angulaires.



Les différentes approches explicitées dans ce chapitre sont synthétisées dans la Table 1.1

**Table 1.1.** Classification des différentes approches pour obtenir de forts débattements angulaires

Solutions	
Juxtaposition de deux sous-ensembles mécaniques dédiés*	Mécanismes hybrides*
	Mécanismes à architecture main droite - main gauche*
Actionnement déporté	
Dispositifs mécaniques de transformation de mouvement	Mécanismes d'amplification des rotations
	Mécanismes de transformation de mouvement T/R
Actionneurs en surnombre	Redondance cinématique
	Redondance d'actionnement

\* Il ne s'agit plus de mécanismes parallèles à proprement parler

## 1.5 Plan de l'exposé

Pour obtenir de forts débattements angulaires, mes travaux se sont portés essentiellement sur l'utilisation des dispositifs mécaniques de transformation de mouvement et sur l'exploitation de la redondance d'actionnement.

Ainsi le chapitre 2 introduit une nouvelle famille de robots qui exploite le principe de transformation de mouvement T/R : la famille des robots I4. Il propose une méthode d'étude des singularités commune à un ensemble de robots constituant une famille plus vaste : celle des robots de type H4/I4. Enfin, le concept d'amplification des rotations observable sur le robot H4, est étendu à deux rotations grâce au dispositif mécanique Twice.

Le chapitre 3 se focalise sur la redondance d'actionnement. Il propose l'utilisation de nouveaux indices capables de quantifier les performances en vitesses et en efforts de ce type de mécanismes. Le robot à actionnement redondant Archi est présenté.

Enfin, le chapitre 4 fait, en quelque sorte, la synthèse des deux chapitres précédents : il propose une nouvelle architecture parallèle 3T-2R à actionnement redondant et dont la nacelle est munie du dispositif de transformation de mouvements T/R. La méthode d'analyse des singularités introduite pour les robots H4/I4 est généralisable à cette machine ; aussi nous permet-elle de vérifier l'absence de singularités de la structure.



---

# Grandes rotations par dispositif mécanique

---

*Résumé du chapitre*

Ce chapitre s'intéresse à une catégorie particulière de robots (dite famille des robots H4/I4), capable d'engendrer de forts débattements angulaires. Une présentation de cette famille de robots est réalisée, et un paramétrage géométrique systématique est proposé. Puis, une méthode d'analyse cinématique simplifiée, adaptée à ce type de robots, est exposée. Elle permet de mener à bien les études des 3 robots de cette catégorie réellement fabriqués au LIRMM. Pour finir, le dispositif Twice est présenté. Il constitue un mécanisme d'amplification des rotations capable de doubler les inclinaisons autour de deux axes orthogonaux successifs.

*Sommaire :*

2.1	Introduction .....	32
2.2	La famille de robots H4/I4 .....	33
2.3	Méthode d'analyse cinématique simplifiée .....	39
2.4	Étude du robot H4 .....	46
2.5	Étude des robots de type I4 .....	51
2.6	Amplification des rotations selon deux axes : le dispositif Twice .....	70
2.7	Conclusion du chapitre.....	81

## 2.1 Introduction

La grande majorité des robots parallèles actuels est constituée d'une plate-forme mobile rigide reliée au bâti par plusieurs chaînes cinématiques simples. En effet, les recherches se sont concentrées essentiellement sur des robots de type Hexapodes [Gough 1957] [Merlet 1998], de type Hexa [Pierrot 1991a] [Pierrot 1991b] et Delta [Clavel 1988]. Dans le but d'obtenir de forts débattements angulaires, un nouveau concept de robots, à nacelle articulée (constituée de plusieurs pièces en mouvement les unes par rapport aux autres) a été élaboré.

Les travaux présentés dans ce chapitre s'intéressent à une famille de robots 3T-1R constitués de parallélogrammes spatiaux (réalisés à l'aide de deux barres de longueur identique montées sur rotules), et d'une nacelle articulée : la famille H4/I4. Les degrés de liberté sont les mêmes que ceux des robots Scara ou du robot Delta. Dans sa version originale le concept Delta visait un mécanisme 3T léger. Pour obtenir la rotation supplémentaire, le robot a été équipé d'une chaîne cinématique supplémentaire *RUPUR*. Cette chaîne transmet le mouvement de rotation depuis un moteur fixe jusqu'au préhenseur. Ce dispositif confère au robot les mêmes mobilités (le groupe des déplacements de Schoenflies [Hervé 1978]) qu'un robot Scara série [Furuya 1983] (ou parallèle [Angeles 2000]), destiné à la manutention rapide. Il s'agit de 3T-1R, la rotation étant réalisée autour d'un axe de direction fixe. Les limitations majeures du robot Delta proviennent de cette chaîne supplémentaire : la liaison glissière, fragile puisque légère et offrant une course importante, est fortement sollicitée, ce qui nuit à la durée de vie du mécanisme. De plus, il n'est pas toujours possible d'ajouter ce type de chaîne, notamment si l'on envisage le robot avec des actionneurs linéaires agencés selon la configuration du Triaglide [Treib 1998].

Company a été le premier à imaginer une solution où la nacelle d'un robot 3T-1R n'était pas rigide. Son concept ainsi que les géométries envisageables sont présentés dans [Company 1999]. L'idée maîtresse était d'utiliser une nacelle articulée, tout en conservant les chaînes cinématiques légères  $(SS)_2$  propres au robot Delta. Sur ce premier prototype il fallait respecter un agencement bien particulier des parallélogrammes entre eux, pour ne pas aboutir à une situation singulière (perte de rigidité, et une impossibilité de contrôler l'effecteur pour toutes les postures du mécanisme au centre de l'espace de travail).

Au cours de la présente thèse, nous avons imaginé les robots I4. Ils diffèrent du robot H4 par leur nacelle et présentent moins de configurations architecturales singulières. De plus, l'écriture analytique du modèle géométrique direct est possible. Deux prototypes ont été conçus et fabriqués : le robot I4L à actionneurs linéaires et à nacelle en trois parties, et le robot I4R à actionneurs rotatifs et nacelle en deux parties seulement.

Ces deux robots, laissent entrevoir une famille complète de robots, pour peu que l'on imagine de nouvelles nacelles. Aussi, avons nous développé un paramétrage géométrique systématique, ainsi qu'une méthode d'analyse cinématique simplifiée capable de préciser sous quelles conditions géométriques les mécanismes ne présentent pas de singularités.

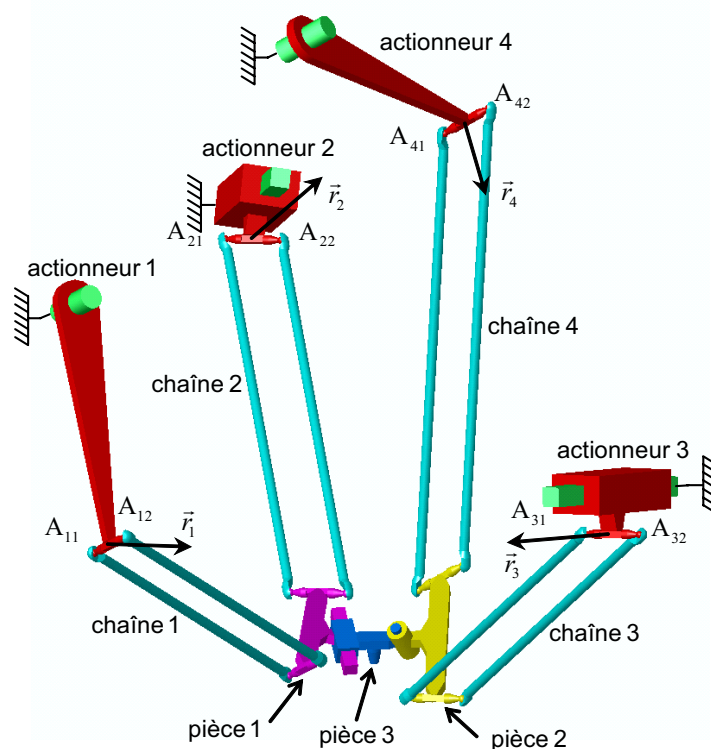
Le paragraphe suivant présente la famille des robots H4/I4 ; le paramétrage systématique est obtenu et l'écriture d'un système linéaire représentatif de la cinématique complète est établi. Puis la méthode d'analyse cinématique simplifiée est exposée. Suivent trois paragraphes consacrés entièrement aux robots de cette famille fabriqués au LIRMM. La manière d'obtenir les forts dé-

battements angulaires est ensuite discutée : le dispositif mécanique Twice permet d'étendre le concept à des robots 3T-2R.

## 2.2 La famille de robots H4/I4

### 2.2.1 Présentation

En dehors du nombre de moteurs (4 plutôt que 3), l'architecture des robots H4/I4 est similaire à celle du robot Delta original (voir Figure 2.1). Les 4 moteurs, solidaires du bâti, peuvent être soit linéaires, soit rotatifs. Pour caractériser cette famille de robots, nous nous intéressons aux 4 paires de barres qui relient la nacelle au bâti, ainsi qu'à la nacelle articulée.



**Figure 2.1.** Modélisation de la famille H4/I4, localisation des différentes pièces et liaisons

#### 2.2.1.1 Description des paires de barres

- Les barres de chaque paire sont de longueur identique.
- Chaque barre se termine par deux liaisons rotules (pour s'affranchir des mobilités internes, c'est-à-dire des rotations propres des barres autour de leur axe, il est possible de remplacer une des deux liaisons rotules par un cardan).
- Pour chaque paire de barres, la distance entre les centres de deux rotules est la même du côté de la nacelle que du côté du bâti.

- Dans le cas de moteurs rotatifs, l'axe passant par le centre de deux rotules adjacentes d'une paire de barres, doit être parallèle avec l'axe du moteur pour que l'orientation ne varie pas au cours du fonctionnement.
- On souhaite qu'au cours du fonctionnement du robot, les paires de barres se comportent comme des parallélogrammes spatiaux, c'est-à-dire que les deux barres d'une même paire restent parallèles.

*Remarque :* Nous pouvons apporter de légères modifications à la géométrie du robot, sans changer pour autant les possibilités de mouvement de l'organe terminal. Ainsi :

- Les parallélogrammes spatiaux  $(SS)_2$  peuvent être remplacés par des parallélogrammes plans constitués de liaisons pivots  $R(RR)_2R$  (Voir le projet Orthoglide [Wenger 2000]).
- De même, il est possible de remplacer chaque paire de barres par une barre simple dont chaque extrémité est pourvue d'une liaison cardan. Toutefois, on peut s'interroger sur les problèmes de rigidité d'un tel mécanisme, problèmes qui ont été constatés sur le mécanisme de Tsai [Tsai 1996] constitué de cardans.

Cependant, la méthode proposée pour étudier le fonctionnement des robots ne serait pas adaptée à l'étude des cas « parallélogrammes plans » et « liaisons cardans » sans modification.

### 2.2.1.2 Description de la nacelle

La formule de mobilité (formule de Grübler) nous renseigne sur la nacelle. En effet, si l'on envisage une nacelle rigide (constituée d'une seule pièce) pour un robot de type H4/I4, on dénombre  $p = 14$  pièces (8 barres simples, 4 actionneurs, 1 bâti, 1 nacelle), soit  $E_s = 78$  équations statiques ( $E_s = 6(p - 1)$ ), et  $I_s = 68$  inconnues statiques (16 liaisons rotules à 3 inconnues, et 4 liaisons à 5 inconnues concernant les actionneurs).

L'indice de mobilité vaut donc :

$$m = E_s - I_s = 10. \quad (2-1)$$

Puisque, dans ce décompte les barres peuvent tourner sur elles même ( $m_i = 8$ ) et que l'organe terminal du robot doit posséder 4 ddl ( $m_u = 4$ ) pour fonctionner comme convenu, la mobilité cinématique  $m_c$  vaut :

$$m_c = m_u + m_i = 12 \quad (2-2)$$

Le calcul du degré d'hyperstaticité  $h^\circ$  du mécanisme repose sur l'égalité :

$$m = m_c + m_s, \quad (2-3)$$

d'où le résultat :

$$h^\circ = -m_s = 2. \quad (2-4)$$

Il existe divers moyens pour palier ce problème d'hyperstaticité :

- Usiner et assembler les pièces correctement pour respecter les contraintes d'hyperstaticité du mécanisme.
- Relâcher des contraintes : par exemple en supprimant des barres (deux pour cette famille de robot). Chaque barre correspond à une contrainte de distance.
- Ajouter des liaisons (et des pièces en conséquence) au mécanisme. Pour la modélisation, nous considérerons la nacelle comme articulée par le biais de deux liaisons à 1 ddl chacune (voir Figure 2.2).

- Compter sur l'élasticité des pièces pour que le mécanisme puisse s'assembler convenablement.

Évidemment n'importe quelle combinaison de ces trois solutions est envisageable. Ce chapitre se consacre essentiellement au cas des nacelles articulées (ajout de liaisons à la nacelle). Trois robots particuliers seront étudiés par la suite :

- Le prototype du robot H4 à moteurs rotatifs réalisé au LIRMM : la nacelle est articulée à l'aide de deux liaisons pivots (le robot H4L destiné à la manutention de pièces lourdes [Pierrot 2002] est identique à l'exception des moteurs qui sont linéaires).
- Le prototype I4L [Krut 2003a], dont la nacelle est équipée de deux liaisons glissières, et qui est muni de pièces déformables.
- Le prototype I4R, dont la nacelle est munie d'une seule liaison glissière, et qui utilise des pièces déformables.

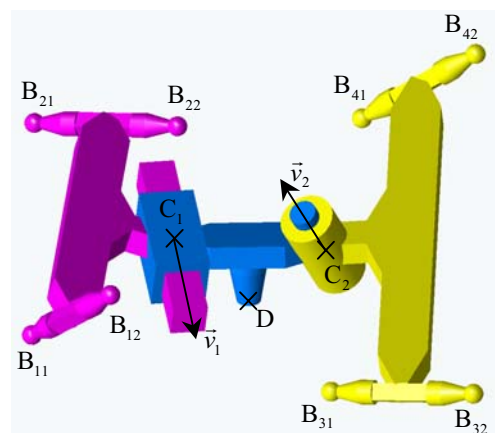


Figure 2.2. Modélisation de la famille H4/I4, détails de la nacelle articulée

## 2.2.2 Paramétrage géométrique systématique

Afin d'avoir une écriture identique à l'ensemble des géométries des robots, un paramétrage systématique a été établi, capable de traiter les liaisons de la nacelle, qu'elles soient de type pivots, pivots glissants ou glissières. Il permet également de s'intéresser aux nacelles en 2 ou 3 parties (ajout d'une liaison encastrement entre deux pièces).

Un robot de cette famille est composé de 4 chaînes cinématiques motorisées reliées à la nacelle : il s'agit de chaînes  $\underline{P}(SS)_2$  ou  $\underline{R}(SS)_2$  suivant que les actionneurs sont linéaires ou rotatifs. Nous nous intéresserons exclusivement au cas des parallélogrammes spatiaux (cf. Figure 2.1 et Figure 2.3).

Nous utiliserons systématiquement la notation suivante pour les différents indices :

- $i$  l'indice de la chaîne cinématique  $(SS)_2$  ( $1 \leq i \leq 4$ ),
- $j$  l'indice de barre dans chacune des chaînes ( $1 \leq j \leq 2$ ),
- $k$  l'indice des différentes parties de la nacelle ( $1 \leq k \leq 3$ ):
  - Les chaînes  $i = 1$  et  $i = 2$  sont reliées au corps  $k = 1$ ,
  - Les chaînes  $i = 3$  et  $i = 4$  sont reliées au corps  $k = 2$

Pour pouvoir être systématique, un troisième corps ( $k = 3$ ) est toujours utilisé. Il est supposé solidaire du corps 1 ou 2 si la nacelle ne possède que deux parties (liaison complète).

Différents points et vecteurs sont définis (Voir Figure 2.1 et Figure 2.2) :

- $A_{ij}$  est le centre de la liaison rotule  $ij$  du coté des moteurs.
- $A_i$  est le point géométrique situé au milieu des points  $A_{i1}$  et  $A_{i2}$ .
- $B_{ij}$  est le centre de la liaison rotule  $ij$  du coté de la nacelle.
- $B_i$  est le point géométrique situé au milieu des points  $B_{i1}$  et  $B_{i2}$ .
- $C_k$  est le centre de la liaison entre le corps  $k$  et 3 de la nacelle.
- $\mathbf{v}_k$  est le vecteur qui dirige l'axe de la liaison entre le corps  $k$  et 3.
- $D$  est le point de l'organe terminal (le corps 3) commandé. Il permet d'établir les coordonnées opérationnelles.
- $\mathbf{c}_k$  est le vecteur reliant  $D$  à  $C_k$ .
- $\varepsilon_k$  est le paramètre de la liaison  $k$  (la position relative du corps 3 par rapport au corps  $k$ ).
- $\mathbf{d}_{ij}$  est le vecteur reliant  $C_k$  à  $B_{ij}$ ,
- $\mathbf{d}_i$  est le vecteur reliant  $C_k$  à  $B_i$ .
- $\mathbf{r}_i$  est un vecteur tangent à la trajectoire du point  $A_{ij}$ . Si le moteur est linéaire, ce vecteur est unitaire, sinon sa norme est égale à la distance du point  $A_{ij}$  jusqu'à l'axe de rotation du moteur. Suivant les hypothèses qui ont été émises précédemment, cette distance est la même pour les points  $A_i$ ,  $A_{i1}$  et  $A_{i2}$  appartenant à une même paire de barres.
- $\mathbf{l}_i = \mathbf{l}_{i1} = \mathbf{l}_{i2}$  est le vecteur joignant les points  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ .
- $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{c}_k + \mathbf{d}_{ij}$ .
- $\mathbf{e}_i = \mathbf{c}_k + \mathbf{d}_i$
- $\mathbf{f}_i$  est le vecteur allant du point  $B_{i1}$  au point  $B_{i2}$  ( $\mathbf{f}_i = \mathbf{d}_{i2} - \mathbf{d}_{i1}$ ).

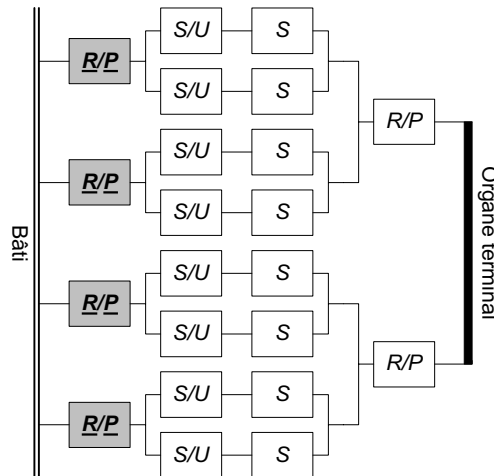


Figure 2.3. Graphe d'agencement de la famille des robots H4/I4

### 2.2.3 Modélisation cinématique complète

Le but est de trouver un système linéaire représentatif de la cinématique complète du mécanisme. Nous entendons par « complète », capable de mettre en évidence la totalité des singularités



qui peuvent survenir pour ce type de mécanisme. En effet, la matrice jacobienne n'est pas révélatrice de la mobilité complète : elle se contente de relier les vitesses des moteurs aux vitesses opérationnelles. Nous verrons dans le paragraphe consacré à l'exposé de la méthode d'analyse cinématique simplifiée, qu'écrire l'équiprojectivité des vitesses des extrémités des barres sur les barres remplit ce rôle pour ce type de machine. La première étape consiste à écrire les vitesses des extrémités des barres.

### 2.2.3.1 Vitesse des extrémités inférieures des barres

La vitesse des points  $B_{ij}$  est paramétrée en fonction de la vitesse du point commandé  $D$  (toutes les vitesses seront exprimées relativement à un référentiel lié au bâti). Si l'on désigne par  $\mathbf{s}$  le vecteur colonne des vitesses linéaires du point  $D$  et par  $\boldsymbol{\omega}$  le vecteur des vitesses angulaires de l'effecteur exprimé au point  $D$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le vecteur  $\mathbf{s}_D$  décrit complètement la vitesse du point  $D$  :

$$\mathbf{s}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}. \quad (2-5)$$

La vitesse du point  $C_k$  considéré comme lié au corps 3, peut s'écrire :

$$\mathbf{s}_{C_k \in 3} = \mathbf{s}_D + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2-6)$$

Si on considère le point  $C_k$  comme solidaire du corps  $k$  ( $k \in \{1, 2\}$ ), la vitesse s'écrit :

$$\mathbf{s}_{C_k \in k} = \mathbf{s}_{C_k \in 3} + \mathbf{s}_k \quad (2-7)$$

avec :

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} \delta_k \dot{\epsilon}_k \mathbf{v}_k \\ \delta'_k \dot{\epsilon}_k \mathbf{v}_k \end{bmatrix}. \quad (2-8)$$

$\delta_k$  et  $\delta'_k$  dépendent du type de la liaison  $k$  :

- pour une liaison complète :  $\delta_k = \delta'_k = 0$ ,
- pour une liaison glissière :  $\delta_k = 1$ ,  $\delta'_k = 0$ ,
- pour une liaison pivot  $\delta_k = 0$ ,  $\delta'_k = 1$ ,
- Pour le cas d'une liaison pivot glissant, nous la décomposerons en une liaison glissière et une liaison pivot.

La vitesse du point  $B_{ij}$  appartenant au corps  $k$  ( $k \in \{1, 2\}$ ) vaut :

$$\mathbf{s}_{B_{ij} \in k} = \mathbf{s}_{C_k \in k} + \begin{bmatrix} (\delta'_k \dot{\epsilon}_k \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Puisque les points  $B_{ij}$  (liaisons rotules) font la connexion entre les corps  $k$ ,  $k \in \{1, 2\}$  et les barres, les vitesses linéaires des points  $B_{ij}$  appartenant aux corps  $k$  sont égales aux vitesses linéaires des points  $B_{ij}$  appartenant aux barres.

### 2.2.3.2 Vitesse des extrémités supérieures des barres

Conformément aux hypothèses qui ont été faites, les vitesses des points  $A_{i1}$  et  $A_{i2}$  sont égales :

$$\mathbf{v}_{A_{i1}} = \mathbf{v}_{A_{i2}} \quad (2-10)$$

En effet, ces deux points appartiennent à un même corps, le moteur  $i$ . De plus :

- dans le cas de moteurs linéaires, il n'y a que des mouvements de translation,
- dans le cas des moteurs rotatifs, la distance jusqu'à l'axe de rotation du moteur est la même pour les deux points.

$$\mathbf{v}_{A_i} = \dot{q}_i \mathbf{r}_i \quad (2-11)$$

### 2.2.3.3 Équiprojectivité

Il s'agit maintenant d'écrire l'équiprojectivité des vitesses pour les extrémités de chacune des 8 barres. Le système linéaire suivant est obtenu :

$$\mathbf{J}_{act} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{tp} \dot{\mathbf{x}}_1 \quad (2-12)$$

avec :

$$\mathbf{J}_{act} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{l}_{11} & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{l}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{l}_{21} & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{l}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{l}_{31} & \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{l}_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{r}_4 \cdot \mathbf{l}_{41} & \mathbf{r}_4 \cdot \mathbf{l}_{42} \end{bmatrix}^T \quad (2-13)$$

la matrice qui décrit la projection des vitesses des moteurs sur les barres ( $\dim(\mathbf{J}_{act}) = 8 \times 4$ ),

$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_i]$  le vecteur représentatif des vitesses articulaires,

$$\mathbf{J}_{tp} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{11}^T & [\mathbf{e}_{11} \times \mathbf{l}_{11}]^T & (\delta_1 \mathbf{v}_1 + \delta'_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_{11}) \cdot \mathbf{l}_{11} & 0 \\ \mathbf{l}_{12}^T & [\mathbf{e}_{12} \times \mathbf{l}_{12}]^T & (\delta_1 \mathbf{v}_1 + \delta'_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_{12}) \cdot \mathbf{l}_{12} & 0 \\ \mathbf{l}_{21}^T & [\mathbf{e}_{21} \times \mathbf{l}_{21}]^T & (\delta_1 \mathbf{v}_1 + \delta'_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_{21}) \cdot \mathbf{l}_{21} & 0 \\ \mathbf{l}_{22}^T & [\mathbf{e}_{22} \times \mathbf{l}_{22}]^T & (\delta_1 \mathbf{v}_1 + \delta'_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_{22}) \cdot \mathbf{l}_{22} & 0 \\ \mathbf{l}_{31}^T & [\mathbf{e}_{31} \times \mathbf{l}_{31}]^T & 0 & (\delta_2 \mathbf{v}_2 + \delta'_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_{31}) \cdot \mathbf{l}_{31} \\ \mathbf{l}_{32}^T & [\mathbf{e}_{32} \times \mathbf{l}_{32}]^T & 0 & (\delta_2 \mathbf{v}_2 + \delta'_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_{32}) \cdot \mathbf{l}_{32} \\ \mathbf{l}_{41}^T & [\mathbf{e}_{41} \times \mathbf{l}_{41}]^T & 0 & (\delta_2 \mathbf{v}_2 + \delta'_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_{41}) \cdot \mathbf{l}_{41} \\ \mathbf{l}_{42}^T & [\mathbf{e}_{42} \times \mathbf{l}_{42}]^T & 0 & (\delta_2 \mathbf{v}_2 + \delta'_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_{42}) \cdot \mathbf{l}_{42} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

la matrice qui traduit l'équiprojectivité des vitesses des points  $B_{ij}$  sur les barres ( $\dim(\mathbf{J}_{tp}) = 8 \times 8$ ).

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_D^T & \dot{\varepsilon}_1 & \dot{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}^T \quad (2-15)$$

est le vecteur descriptif de la cinématique complète de la nacelle articulée ( $\dot{\mathbf{x}}_1$  est donc différent du vecteur  $\dot{\mathbf{x}}$  associé aux vitesses opérationnelles) ; la nacelle est paramétrée en fonction des vitesses du point opérationnel  $D$  et des vitesses des liaisons entre les différentes pièces.

## 2.3 Méthode d'analyse cinématique simplifiée

### 2.3.1 Introduction

Souvent, l'analyse de la matrice jacobienne suffit pour déterminer toutes les singularités ; c'est le cas pour les robots hexapodes parce que cette matrice contient toutes les informations relatives à la cinématique complète. Pour le robot Delta, ce n'est déjà plus le cas. En effet, le paramètre « largeur des parallélogrammes » n'intervient pas dans l'écriture de la jacobienne, alors qu'il joue un rôle essentiel pour conférer au robot sa rigidité par rapport à des couples extérieurs. De plus, rien ne précise dans l'écriture des modèles cinématiques et géométriques, que la nacelle est d'orientation constante au cours du fonctionnement. En résumé, pour mener une étude exhaustive des mobilités d'un robot, il faut conduire :

- une analyse géométrique. Elle se solde par l'écriture du modèle géométrique direct (MGD) et du modèle géométrique inverse (MGI).
- une analyse géométrique plus globale avec comme finalité de prouver qu'au cours du mouvement (pour le robot Delta), la situation où :
  - les parallélogrammes restent plans,
  - la nacelle est d'orientation constante,
 est bien compatible avec la géométrie du mécanisme.
- une analyse cinématique. Basée sur les matrices jacobienes  $\mathbf{J}_x$ ,  $\mathbf{J}_q$ ,  $\mathbf{J}$  ( $\mathbf{J} = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_q$ ) et  $\mathbf{J}_m$  ( $\mathbf{J}_m = \mathbf{J}^{-1}$ ), elle consiste à vérifier qu'en tous points de l'espace le mécanisme ne présente pas de sous-mobilités ( $\det(\mathbf{J}_q) = 0$ ) ou de sur-mobilités ( $\det(\mathbf{J}_x) = 0$ ). Pour être menée à bien, elle requiert une analyse géométrique préalable.
- une analyse cinématique plus globale capable de mettre en évidence les singularités dites « internes ». La méthode d'analyse cinématique que nous proposons se situe dans cette catégorie.

Les singularités des robots de la famille H4/I4 se manifestent lors de mauvais agencements des parallélogrammes spatiaux. En effet, puisque réalisés à l'aide de barres simples montées sur rotules, ils peuvent se vriller (les parallélogrammes ne restent pas plans). Ce ne sont que les effets combinés de l'ensemble des parallélogrammes qui confèrent au mécanisme sa rigidité. La méthode d'analyse cinématique usuelle basée sur la matrice jacobienne ne renseigne pas sur ce type de singularités (sous-mobilités et sur-mobilités uniquement). De plus, une analyse cinématique ou statique complète est particulièrement lourde à mener. En effet, on dénombre  $E_c = 42$  équations cinématiques ( $\nu = 7$  cycles cinématiques) et  $E_s = 90$  équations statiques ( $p = 16$  pièces et  $n = 22$  liaisons). La méthode proposée se base sur une approche cinématique mais ne repose que sur 8 équations linéaires. Illustrée à l'aide des robots de la famille H4/I4, elle peut être facilement étendue à d'autres robots.

### 2.3.2 Aparté sur l'analyse géométrique globale

Voici la distinction que nous faisons entre l'analyse géométrique globale et l'analyse cinématique globale : l'analyse géométrique globale a pour seule vocation de vérifier que, la situation où les parallélogrammes sont plans et la nacelle est d'orientation constante, est effectivement réalisa-

ble par le mécanisme (possibilité d'assembler le mécanisme) en chacun des points de l'espace de travail. Elle ne renseigne pas sur les singularités (notamment le cas où les parallélogrammes peuvent se vriller) mais constitue une étape préliminaire à l'analyse cinématique globale puisqu'elle précise l'orientation des vecteurs nécessaires à l'étude.

Les travaux d'Hervé [Hervé 1995] [Hervé 1999] [Lee 2002] constituent un premier élément de réponse pour mener à bien cette analyse géométrique globale. Ils reposent sur la théorie des groupes. Ainsi, on note  $\{T\}$  le sous-groupe des translations spatiales (3T) et  $\{X(\mathbf{u})\}$  le sous-groupe des déplacements de Schoenflies (3T-1R) encore appelés déplacements de type Scara ( $\mathbf{u}$  désigne le vecteur unitaire qui dirige la rotation). Si une chaîne cinématique fermée est réalisée à l'aide de deux chaînes qui produisent des déplacements 3T-1R avec  $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$  alors :

$$\{X(\mathbf{u})\} \cap \{X(\mathbf{v})\} = \{T\}, \quad (2-16)$$

c'est-à-dire que le mécanisme résultant ne sera capable que de trois translations.

Dans notre cas, la difficulté vient du fait qu'une chaîne de type  $\underline{P}(SS)_2$  ou bien  $\underline{R}(SS)_2$  est de type 3T-2R, et les déplacements 3T-2R ne constituent pas un groupe. En effet, il existe des cas où la juxtaposition ( $\cup$ ) de deux chaînes 3T-2R engendre une chaîne 3T-3R (la loi  $\cup$  n'est pas une loi interne).

Cependant pour mener l'analyse géométrique globale, on peut se contenter de vérifier, si lorsque les parallélogrammes restent plans, le mécanisme est capable de prendre toutes les positions de l'espace de travail. Pour cela, il suffit de remplacer les chaînes  $\underline{P}(SS)_2$  par des chaînes  $\underline{PR}(RR)_2R$  qui appartiennent au sous-groupe de Schoenflies  $\{X(\mathbf{f}_i)\}$  (voir Table 2.1). Une fois cette étude réalisée, il est indispensable de mener l'analyse cinématique globale en considérant les parallélogrammes spatiaux, pour vérifier qu'en chaque point de l'espace, les parallélogrammes n'ont pas tendance à se vriller, c'est-à-dire à être la source de singularités.

*Remarque :* Il est important de noter qu'une architecture qui serait fonctionnelle avec des chaînes  $\underline{PR}(RR)_2R$  et pas avec des chaînes  $\underline{P}(SS)_2$ , aurait ses parallélogrammes qui travailleraient en torsion.

Si  $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$ , alors d'après (2-16), les mouvements possibles du segments  $B_1B_2$  appartiennent au sous-groupe  $\{T\}$ . La même remarque est valable pour le segment  $B_3B_4$ .

Ainsi, on a montré que la configuration du mécanisme où l'orientation des parties latérales de la nacelle est constante et les parallélogrammes spatiaux ne sont pas gauches, constitue bien une posture réalisable par le mécanisme.

**Table 2.1.** Modélisation des parallélogrammes

Chaîne cinématique	$\underline{P}(SS)_2^*$	$\underline{PR}(RR)_2R$
Schéma architectural		

\* Modélisation réaliste des parallélogrammes.

### 2.3.3 Principe

La méthode consiste à trouver la plus petite égalité matricielle représentative de la cinématique complète du mécanisme, puis à l'analyser. Nous entendons par « complète », une égalité matricielle qui tienne compte des mobilités internes.

#### 2.3.3.1 Écriture de l'égalité matricielle représentative de la cinématique complète du mécanisme

A l'exception des rotations propres des barres simples autour de leur axe, il s'agit d'écrire une égalité matricielle qui tienne compte de toutes les mobilités du mécanisme. Pour la famille de robots H4/I4 cette égalité est obtenue en écrivant l'équiprojectivité des vitesses des extrémités des barres sur les barres. En effet, pour ce type de mécanisme, les vitesses des extrémités supérieures  $A_i$  des barres sont parfaitement paramétrées en fonction des vitesses des moteurs. De la même manière, les vitesses des extrémités inférieures  $B_i$  des barres sont fonction des vitesses opérationnelles et des vitesses relatives des différentes liaisons de la nacelle articulée. Les seules contraintes géométriques qui agissent entre les points  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont dues à l'invariance des longueurs de barres. Mathématiquement cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ij} \right\| &= l_{ij} = cste, \\ i \in \{1, 2, 3, 4\}, j &\in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (2-17)$$

En dérivant l'expression (2-17) élevée au carré, on aboutit à :

$$\mathbf{v}_{A_{ij}} \cdot \mathbf{J}_{ij} = \mathbf{v}_{B_{ij}} \cdot \mathbf{J}_{ij} \quad (2-18)$$

Il s'agit bien de l'écriture de l'équiprojectivité des vitesses des deux extrémités de la barre  $ij$  sur la barre  $ij$ .

*Remarque* : Si une barre était munie de deux cardans, il faudrait ajouter une contrainte géométrique supplémentaire précisant que les vitesses angulaires des extrémités sont fonctions de la vitesse de rotation de la barre autour de son axe (en d'autres termes que la barre peut transmettre des efforts de torsion).

L'égalité matricielle obtenue (2-12) est donc représentative de la cinématique complète du mécanisme. Obtenir cette égalité matricielle en écrivant l'équiprojectivité des vitesses des extrémités des barres sur les barres peut être facilement étendu à l'ensemble des robots où les seules contraintes géométriques entre la nacelle et le bâti sont dues à des longueurs de barres constantes. Nous verrons dans le chapitre consacré au robot Eureka, comment obtenir une telle égalité.

#### 2.3.3.2 Écriture équivalente de l'égalité matricielle

En composant le système matriciel (2-12) de part et d'autre du signe égal par la matrice inversible  $\mathbf{M}$  suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2-19)$$

$$\det(\mathbf{M}) = 1, \quad (2-20)$$

et en tenant compte du fait que les barres  $i1$  et  $i2$  sont parallèles (données obtenues grâce à une analyse géométrique globale), on obtient l'égalité matricielle équivalente :

$$\mathbf{J}_{act2} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{ip2} \dot{\mathbf{x}}_1 \quad (2-21)$$

avec :

$$\mathbf{J}_{act2} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_q \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2-22)$$

$$\mathbf{J}_q = \mathbf{diag}(r_i \cdot \mathbf{l}_i), \quad (2-23)$$

$$\mathbf{J}_{ip2} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & (\delta_1 \mathbf{v}_1 + \delta'_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{l}_1 & 0 \\ \mathbf{l}_2^T & [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & (\delta_1 \mathbf{v}_1 + \delta'_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{l}_2 & 0 \\ \mathbf{l}_3^T & [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & 0 & (\delta_2 \mathbf{v}_2 + \delta'_1 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_4^T & [\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & 0 & (\delta_2 \mathbf{v}_2 + \delta'_1 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_4) \cdot \mathbf{l}_4 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & (\delta'_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{f}_1) \cdot \mathbf{l}_1 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & (\delta'_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{l}_2 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & 0 & (\delta'_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{f}_3) \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & 0 & (\delta'_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{f}_4) \cdot \mathbf{l}_4 \end{bmatrix}, \quad (2-24)$$

$$\mathbf{J}_{act2} = \mathbf{M} \mathbf{J}_{act} \quad \text{et} \quad (2-25)$$

$$\mathbf{J}_{ip2} = \mathbf{M} \mathbf{J}_{ip}. \quad (2-26)$$

Voici une interprétation de cette transformation matricielle :

- En moyennant 2 à 2 les lignes de cette égalité matricielle, apparaissent les points géométriques  $A_i$  et  $B_i$  (à travers les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{d}_i$ ) couramment utilisés pour l'écriture des matrices jacobiniennes usuelles.
- Il découle de la soustraction 2 à 2 des lignes de l'égalité matricielle, les vecteurs  $\mathbf{f}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , qui définissent l'orientation des parallélogrammes ( $\mathbf{f}_i$  est le vecteur allant du point  $B_{i1}$  au point  $B_{i2}$ ).

### 2.3.3.3 Écriture du système linéaire cinématique

Par la suite, il conviendra de voir cette égalité matricielle comme un système linéaire dont les inconnues seront les variables du vecteur  $\dot{\mathbf{x}}_1$ . Cela revient à dire que l'étude menée ne

s'intéressera pas aux sous-mobilités du mécanisme (analyse de la matrice  $\mathbf{J}_q$ ). Le système linéaire obtenu possède 8 équations pour 8 inconnues :

$$\mathbf{J}_{p2} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{L}_i \dot{q}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

Si le rang de  $\mathbf{J}_{p2}$  ne vaut pas 8, alors il existe une infinité de solutions du système matriciel ; cela témoigne de vitesses incontrôlées dans le mécanisme. Pour que le mécanisme fonctionne correctement, il faut qu'à chaque instant toutes les vitesses soient parfaitement déterminées (unicité de la solution), c'est-à-dire que le système soit de Cramer ( $\det(\mathbf{J}_{p2}) \neq 0$ ). La recherche des conditions de fonctionnement du mécanisme passe donc par l'analyse du déterminant de  $\mathbf{J}_{p2}$ .

### 2.3.3.4 Découplage du système linéaire

Pour ne pas étudier le déterminant de la totalité du système linéaire, nous allons nous efforcer d'obtenir un système matriciel triangulaire par bloc, du type :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_x & \mathbf{J}_{xint} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{int} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{L}_i \dot{q}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2-28)$$

ou encore :

$$\mathbf{J}_{p3} \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{L}_i \dot{q}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

en notant :

$$\mathbf{J}_{p3} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x & \mathbf{J}_{xint} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{int} \end{bmatrix} \text{ et} \quad (2-30)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \quad (2-31)$$

$\mathbf{J}_x$  est la matrice jacobienne opérationnelle usuelle et  $\dot{\mathbf{x}}$  le vecteur des vitesses opérationnelles. Ce système est obtenu grâce à un changement de variable (décrit ci-après) en partant du système matriciel (2-27).

*Remarque 1* : En pratique, il n'est pas nécessaire d'isoler  $\mathbf{J}_x$  exactement ; une matrice semblable conduirait aux mêmes résultats.

*Remarque 2* : L'utilisation de la notation  $\dot{\mathbf{x}}$  pour désigner le vecteur des vitesses opérationnelles est contestable. En effet, il ne correspond pas forcément à la dérivée par rapport au temps du vecteur des coordonnées opérationnelles, notamment lorsqu'il désigne des vitesses de rotation. Cependant, pour tous les robots étudiés dans ce manuscrit, cette notation est justifiée.

Voici comment procéder pour aboutir au système (2-28) :

#### Étape n°1

Dans un premier temps, il s'agit de réordonner la matrice  $\mathbf{J}_{p2}$  (et, par conséquent, le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}_1$ ) pour que les 4 premières colonnes concernent désormais les 4 vitesses opérationnelles du mécanisme (regroupées dans  $\dot{\mathbf{x}}$ ). En pratique, cela ne concerne que la 4<sup>ème</sup> colonne, puisque les 3 premières sont associées aux variables opérationnelles  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$  parfaitement ordonnées. Dans certains cas (présence d'engrenages ou de pignons-crémaillères), la 4<sup>ème</sup> variable opérationnelle ne

figure pas explicitement dans le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}_1$  ; il conviendra de multiplier en conséquence par le facteur de transmission  $\hat{k}$ . Notons  $\mathbf{J}'_{p2}$ , le système réordonné :

$$\mathbf{J}_{p2} \dot{\mathbf{x}}_1 = \underbrace{\mathbf{J}_{p2} \mathbf{R}^{-1}}_{\mathbf{J}'_{p2}} \underbrace{\mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}_1}_{\dot{\mathbf{x}}'_1} = \mathbf{J}'_{p2} \dot{\mathbf{x}}'_1. \quad (2-32)$$

avec  $\mathbf{R}$  la matrice de réordonnement :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ par exemple.} \quad (2-33)$$

### Étape n°2

Il s'agit de combiner les colonnes entre elles pour faire apparaître le bloc  $4 \times 4$  de zéros. En pratique, cette opération ne concerne que la colonne associée à la 4<sup>ème</sup> variable opérationnelle, puisqu'un bloc  $4 \times 3$  de zéros est déjà présent en ce qui concerne les variables  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ . Si on note  $\mathbf{C}_i$  les colonnes de  $\mathbf{J}'_{p2}$  :

$$\mathbf{J}'_{p2} \dot{\mathbf{x}}'_1 = \mathbf{C}_1 \dot{x} + \mathbf{C}_2 \dot{y} + \mathbf{C}_3 \dot{z} + \mathbf{C}_4 \dot{x}_4 + \dots + \mathbf{C}_8 \dot{x}_8, \quad (2-34)$$

on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}'_{p2} \dot{\mathbf{x}}'_1 &= \dot{x} \mathbf{C}_1 \\ &+ \dot{y} \mathbf{C}_2 \\ &+ \dot{z} \mathbf{C}_3 \\ &+ \dot{x}_4 (\mathbf{C}_4 + k_5 \mathbf{C}_5 + k_6 \mathbf{C}_6 + k_7 \mathbf{C}_7 + k_8 \mathbf{C}_8) \\ &+ (\dot{x}_5 - k_5 \dot{x}_4) \mathbf{C}_5 \\ &+ \dots \\ &+ (\dot{x}_8 - k_8 \dot{x}_4) \mathbf{C}_8 \end{aligned} \quad (2-35)$$

où  $k_5$ ,  $k_6$ ,  $k_7$  et  $k_8$  sont 4 variables scalaires (indépendantes du temps) qui permettent d'annuler les 4 dernières composantes de la colonne associée à la 4<sup>ème</sup> variable opérationnelle  $\dot{x}_4$ . (Nous illustrerons cette approche grâce aux robots décrits prochainement).

*Remarque* : Si les colonnes n°1 à 3 ne sont pas combinées, c'est parce les composantes de ces vecteurs susceptibles d'annuler  $\mathbf{C}_4$  valent zéro.

Ainsi :

$$\mathbf{J}_{p3} = [\mathbf{C}_1 \quad \dots \quad \mathbf{C}_3 \mid (\mathbf{C}_4 + k_5 \mathbf{C}_5 + k_6 \mathbf{C}_6 + k_7 \mathbf{C}_7 + k_8 \mathbf{C}_8) \mid \mathbf{C}_5 \quad \dots \quad \mathbf{C}_8] \text{ et :} \quad (2-36)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \underbrace{[\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \mid \dot{x}_4]}_{\dot{\mathbf{x}}} \underbrace{[(\dot{x}_5 - k_5 \dot{x}_4) \quad \dots \quad (\dot{x}_8 - k_8 \dot{x}_4)]^T}_{\dot{\mathbf{a}}}. \quad (2-37)$$

Matriciellement, cette transformation peut s'écrire :

$$\mathbf{J}'_{p2} \dot{\mathbf{x}}'_1 = \underbrace{\mathbf{J}'_{p2} \mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{J}_{p3}} \underbrace{\mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}'_1}_{\dot{\mathbf{x}}_2} = \mathbf{J}_{p3} \dot{\mathbf{x}}_2 \quad (2-38)$$



avec  $\mathbf{P}$  la matrice de changement de variables :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2-39)$$

Puisque  $\det(\mathbf{P}) = 1 \neq 0$ , on vérifie que le changement de variables est valide, c'est à dire qu'il établit bien une bijection entre les deux jeux de variables donnés par  $\dot{\mathbf{x}}_1'$  et  $\dot{\mathbf{x}}_2$ .

On note  $\mathbf{T}$  la matrice globale de transformation :

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{R} \text{ et :} \quad (2-40)$$

$$\mathbf{J}_{p2} \dot{\mathbf{x}}_1 = \underbrace{\mathbf{J}_{p2} \mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{J}_{p3}} \underbrace{\mathbf{T} \dot{\mathbf{x}}_1}_{\dot{\mathbf{x}}_2} = \mathbf{J}_{p3} \dot{\mathbf{x}}_2. \quad (2-41)$$

### 2.3.3.5 Recherche des singularités internes

Le système (2-28) étant triangulaire, le déterminant de  $\mathbf{J}_{p3}$  vaut :

$$\det(\mathbf{J}_{p3}) = \det(\mathbf{J}_x) \times \det(\mathbf{J}_{int}) \quad (2-42)$$

Puisque l'étude de  $\mathbf{J}_x$  dégage les singularités de type sur-mobilités, et que le système matriciel est représentatif de la totalité des mobilités du mécanisme, c'est l'étude de  $\mathbf{J}_{int}$  qui précise les singularités internes (dues aux parallélogrammes). L'absence de singularités internes se traduit par :

$$\det(\mathbf{J}_{int}) \neq 0. \quad (2-43)$$

### 2.3.3.6 Détermination des vitesses du mécanisme

Pour résoudre le système (2-28), on peut procéder comme par la méthode du pivot de Gauss, mais par morceaux, c'est-à-dire résoudre dans un premier temps :

$$\mathbf{J}_{int} \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}. \quad (2-44)$$

Si le mécanisme ne présente pas de singularités internes, alors la résolution du système (2-44) implique que :

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}, \quad (2-45)$$

soit :

$$\dot{x}_5 = k_5 \dot{x}_4, \quad (2-46)$$

$$\dot{x}_6 = k_6 \dot{x}_4, \quad (2-47)$$

$$\dot{x}_7 = k_7 \dot{x}_4, \quad (2-48)$$

$$\dot{x}_8 = k_8 \dot{x}_4. \quad (2-49)$$

*Remarque :* Ces égalités témoignent du couplage qui existe entre les vitesses internes. Souvent  $k_i$  vaudra zéro, et par conséquence  $\dot{x}_i = 0$ .

Dans un deuxième temps, puisque  $\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$ , la résolution de (2-28) mène à l'égalité matricielle usuelle :

$$\boldsymbol{J}_x \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}_q \dot{\boldsymbol{q}} \quad (2-50)$$

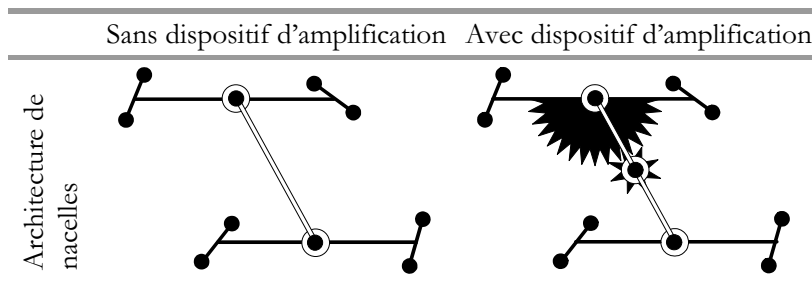
qui exprime les relations entre vitesses articulaires et vitesses opérationnelles.

## 2.4 Étude du robot H4

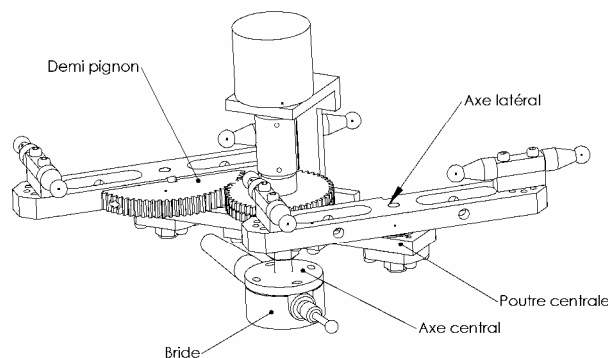
### 2.4.1 Présentation du robot

Apparu en 1999, le robot H4 [Company 1999] [Pierrot 1999] [Pierrot 2001] fut le premier de la famille des robots H4/I4. Remarquable par sa simplicité, la nacelle articulée est constituée de trois parties reliées entre elles par deux liaisons pivots ( $\delta_1 = \delta_2 = \boldsymbol{0}$ ). Sur la version originelle, le préhenseur était directement fixé sur la partie centrale (pièce n°3). La rotation  $\omega_z$  de cette pièce autour de l'axe  $\vec{e}_z$  constituait directement la vitesse angulaire opérationnelle. Pour obtenir de plus forts débattements angulaires, un dispositif à engrenages à rattrapage de jeu a été adjoint (voir Table 2.2).

**Table 2.2.** Géométrie de la nacelle du robot H4



D'autres modifications sont apparues telles l'ajout d'un capteur angulaire supplémentaire pour tester la commande de mécanismes présentant une redondance de capteurs [Marquet 2002b] [Marquet 2002c] (voir Figure 2.4).



**Figure 2.4.** Mise en plan de la nacelle modifiée du H4 équipée du dispositif à engrenages et du capteur redondant

La Figure 2.5 présente le robot dans sa forme actuelle (pour de plus amples détails, on pourra se reporter à l'annexe D). Une étude de rigidité du mécanisme [Corradini 2003] a montré certai-

nes limites de la disposition retenue, conduisant à s'interroger sur des architectures complètement symétriques (les 4 parallélogrammes vus de dessus sont agencés à  $90^\circ$  les uns par rapport aux autres).



Figure 2.5. Photo du robot H4

Sur le graphe d'agencement (Figure 2.6), on constate l'apparition d'une liaison pivot et d'une pièce (n°4) supplémentaires par rapport au graphe d'agencement de la Figure 2.3. Le couplage entre les deux liaisons pivots est dû aux engrenages.

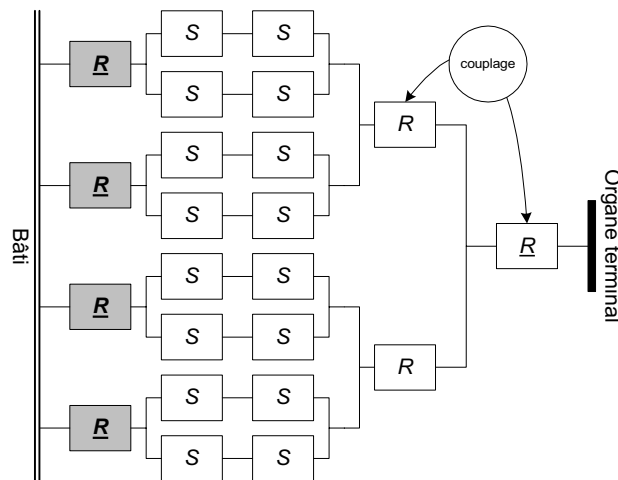


Figure 2.6. Graphe d'agencement du H4 équipé du dispositif à engrenages et du capteur redondant

On note  $\omega_c$  la vitesse angulaire opérationnelle. Concrètement, il s'agit de  $\omega_{4/1}$  (la pièce n°1 est d'orientation constante par rapport au bâti) et non plus de  $\omega_z$  :

$$\omega_c = \omega_{4/1} \quad (2-51)$$

Pour trouver la relation qui existe entre ces deux variables, il suffit d'écrire la relation de roulement sans glissement des deux pignons :

$$R_1 \omega_{1/3} = R_4 \omega_{4/3}, \quad (2-52)$$

où  $R_1$  et  $R_4$  sont les rayons des deux pignons (pièce n°3 et n°4 respectivement).

En tenant compte du fait que :

$$\omega_z = \omega_{3/1}, \quad (2-53)$$

et en écrivant la composition des vitesses, on aboutit à :

$$\omega_c = \left(1 + \frac{R_1}{R_4}\right) \omega_z \quad (2-54)$$

Dans le cas qui nous concerne les pignons ont respectivement  $Z_1 = 72$  dents et  $Z_4 = 48$  dents, pour un module  $m = 1$  ( $2R_i = mZ_i$ ), ce qui conduit à un facteur de transmission  $k = \frac{5}{2}$  :

$$\omega_c = \frac{5}{2} \omega_z \quad (2-55)$$

## 2.4.2 Étude des singularités internes

Nous allons mettre en œuvre la méthode proposée pour l'analyse des singularités internes. Pour ce robot, la matrice  $\mathbf{J}_{p2}$  s'écrit :

$$\mathbf{J}_{p2} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{l}_1 & 0 \\ \mathbf{l}_2^T & [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{l}_2 & 0 \\ \mathbf{l}_3^T & [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & 0 & (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_4^T & [\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & 0 & (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_4) \cdot \mathbf{l}_4 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{f}_1) \cdot \mathbf{l}_1 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{l}_2 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & 0 & (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{f}_3) \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & 0 & (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{f}_4) \cdot \mathbf{l}_4 \end{bmatrix}. \quad (2-56)$$

Puisque la 4<sup>ème</sup> variable opérationnelle est  $\omega_c$  (directement proportionnelle à  $\omega_z$ ), il s'agit maintenant de permuter les colonnes n°4 et n°6 de la matrice  $\mathbf{J}_{p2}$  et de tenir compte du facteur de transmission :

$$\mathbf{J}_{p2} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & \frac{2}{5}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{l}_1 & 0 \\ \mathbf{l}_2^T & \frac{2}{5}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{l}_2 & 0 \\ \mathbf{l}_3^T & \frac{2}{5}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_4^T & \frac{2}{5}(\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{d}_4) \cdot \mathbf{l}_4 \\ \mathbf{0} & \frac{2}{5}(\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{f}_1) \cdot \mathbf{l}_1 & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{2}{5}(\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{l}_2 & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{2}{5}(\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{f}_3) \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{0} & \frac{2}{5}(\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{f}_4) \cdot \mathbf{l}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_c \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} \quad (2-57)$$

En précisant que les deux liaisons pivots de la nacelle sont bien verticales si le mécanisme fonctionne convenablement, c'est-à-dire que :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_z, \quad (2-58)$$

il suffit de retrancher les colonnes n°7 et n°8 à  $\mathbf{C}_4$  pour aboutir au système diagonal par morceaux :

$$\mathbf{J}_{\text{tp}2} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & \frac{2}{5}(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_z & 0 \\ \mathbf{l}_2^T & \frac{2}{5}(\mathbf{c}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_z & 0 \\ \mathbf{l}_3^T & \frac{2}{5}(\mathbf{c}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{l}_4^T & \frac{2}{5}(\mathbf{c}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_z & (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{d}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{0} & 0 & (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_z & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_z & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{0} & 0 & (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_c \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z + \dot{\epsilon}_1 \\ \omega_z + \dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

L'étude de  $\mathbf{J}_{\text{int}}$  la matrice  $4 \times 4$  inférieure droite nous renseigne sur les singularités internes :

$$\mathbf{J}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{e}_z & 0 \\ (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_y & (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{e}_z & 0 \\ (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{e}_z \\ (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_x & (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_y & 0 & (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

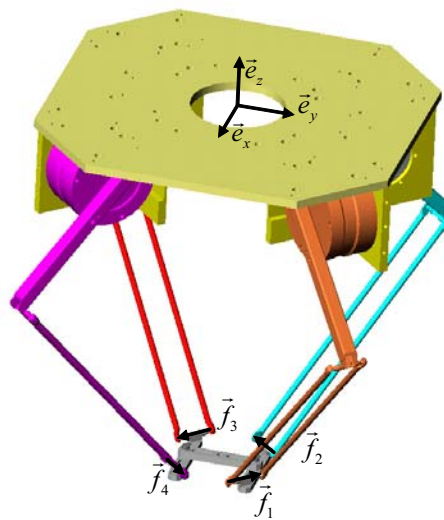
L'étape suivante consiste à calculer le déterminant de  $\mathbf{J}_{\text{int}}$ . En le développant par rapport à la dernière colonne et en identifiant les vecteurs  $\mathbf{f}_i \times \mathbf{l}_i$ , on aboutit à :

$$\det(\mathbf{J}_{\text{int}}) = (((\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \times (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4)) \times ((\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \times (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2))) \cdot \mathbf{e}_z \quad (2-61)$$

Aussi, la condition à respecter pour que le mécanisme ne présente pas de singularités internes s'écrit :

$$(((\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \times (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2)) \times ((\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \times (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4))) \cdot \mathbf{e}_z \neq 0 \quad (2-62)$$

Cette condition géométrique est la même que celle obtenue grâce aux deux méthodes présentées dans [Company 1999] et [Pierrot 2003]. Concrètement elle témoigne de l'impossibilité d'orienter les parallélogrammes à  $90^\circ$  les uns par rapport aux autres, tel qu'on l'aurait envisagé au départ (Voir Figure 2.7).



**Figure 2.7.** Image CAO du robot H4 présentant une singularité interne

En effet, dans cette configuration, les vecteurs caractéristiques de la géométrie vérifient les conditions :

$$l_1 \cdot e_x = l_2 \cdot e_x = l_3 \cdot e_x = l_4 \cdot e_x, \quad (2-63)$$

$$l_1 \cdot e_y = -l_2 \cdot e_y = l_3 \cdot e_y = -l_4 \cdot e_y, \quad (2-64)$$

$$l_1 \cdot e_z = l_2 \cdot e_z = l_3 \cdot e_z = -l_4 \cdot e_z, \quad (2-65)$$

$$f_1 \cdot e_x = f_2 \cdot e_x = f_3 \cdot e_x = f_4 \cdot e_x = f_1 \cdot e_y = -f_2 \cdot e_y = -f_3 \cdot e_y = f_4 \cdot e_y \text{ et} \quad (2-66)$$

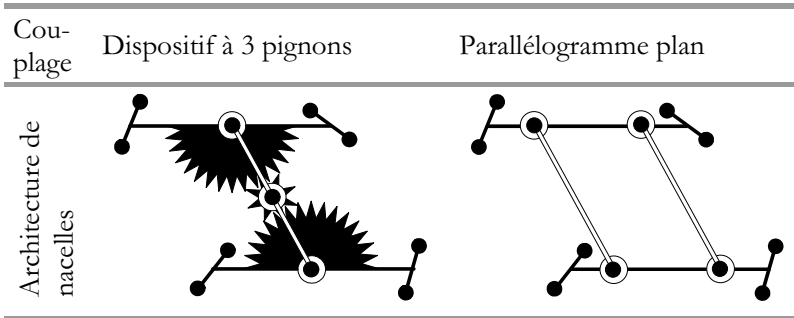
$$f_1 \cdot e_z = f_2 \cdot e_z = f_3 \cdot e_z = f_4 \cdot e_z = 0. \quad (2-67)$$

Ce qui implique que la condition (2-62) n'est pas observée.

### 2.4.3 Extensions

Une évolution envisageable pour le robot est de coupler les parties extrêmes de la nacelle de manière à garantir le mouvement de translation circulaire de ces deux parties latérales. Sur le robot H4 originel, c'est l'ensemble du mécanisme qui impose ce comportement à la nacelle. Grâce au couplage, on rigidifie la nacelle (rendant par la même occasion le mécanisme hyperstatique). La Table 2.3 expose deux manières d'atteindre ce résultat. A gauche le couplage est obtenu par le biais de 3 pignons et à droite grâce à un dispositif à parallélogramme plan. Ces nacelles ont le mérite d'être simples et particulièrement faciles à fabriquer.

**Table 2.3.** Autres possibilités de nacelles de type H4



Mathématiquement ce couplage revient à préciser que :

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 \quad (2-68)$$

et la matrice utile à l'analyse cinématique dégénère en une matrice de dimension  $8 \times 7$  ; le système matriciel vaut alors :

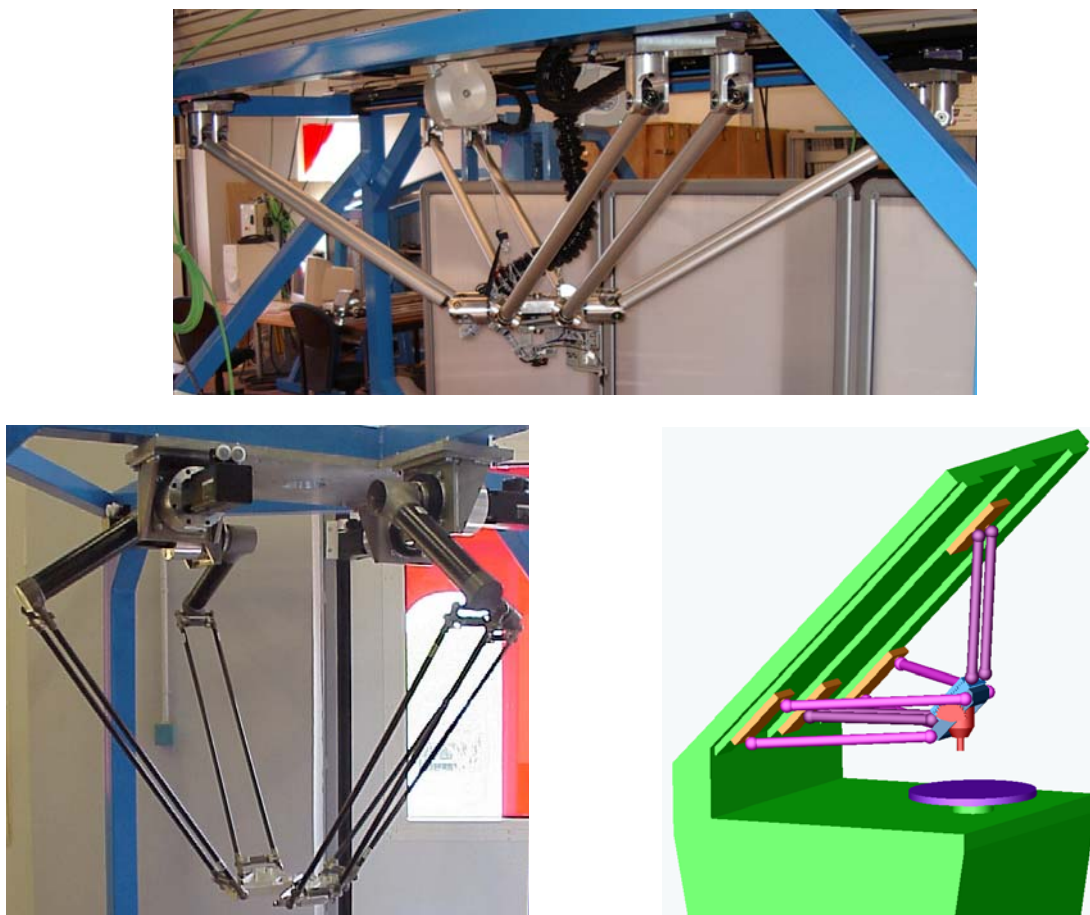
$$\begin{bmatrix} l_1^T & (v_1 \times d_1) \cdot l_1 & [e_1 \times l_1]^T \\ l_2^T & (v_1 \times d_2) \cdot l_2 & [e_2 \times l_2]^T \\ l_3^T & (v_2 \times d_3) \cdot l_3 & [e_3 \times l_3]^T \\ l_4^T & (v_2 \times d_4) \cdot l_4 & [e_4 \times l_4]^T \\ \mathbf{0} & 0 & [f_1 \times l_1]^T \\ \mathbf{0} & 0 & [f_2 \times l_2]^T \\ \mathbf{0} & 0 & [f_3 \times l_3]^T \\ \mathbf{0} & 0 & [f_4 \times l_4]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\epsilon}_1 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \cdot l_i \dot{q}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2-69)$$

Nous verrons dans le chapitre consacré au robot I4L comment exploiter ce calcul ; concrètement il signifie que le mécanisme est hyperstatique, mais traduit aussi la possibilité d'orienter les parallélogrammes à  $90^\circ$  les uns des autres telle sur la Figure 2.7.

Une étude d'un robot H4 à actionneurs linéaires pour la manutention de pièces lourdes a été conduite [Company 2002] [Pierrot 2002] ; le chapitre consacré au robot I4L, qui possède lui-même des actionneurs linéaires, présentera l'architecture générale d'un tel mécanisme.

## 2.5 Étude des robots de type I4

Ce chapitre s'intéresse à la famille de robots I4, sous catégorie de la famille plus générale des robots H4/I4. Imaginés en vue de palier les limitations du robot H4, la différence majeure se situe au niveau de la nacelle, mais l'esprit (à savoir l'utilisation de quatre parallélogrammes légers) est conservé (voir Figure 2.8).



**Figure 2.8.** Présentation de trois robots de la famille I4 ; en haut : le robot I4L ; à gauche : le robot I4R ; à droite : une machine destinée à de l'usinage 5 axes

Ces robots possèdent les 4 ddl utiles à la palettisation : trois translations et une rotation autour d'un axe fixe. Tout d'abord nous rappellerons les avantages du robot H4 ; nous parlerons aussi de ses limitations. Nous introduirons alors une nacelle destinée à palier ces limitations. A

l'aide de la méthode d'analyse cinématique simplifiée, nous déterminerons les conditions à respecter pour le bon fonctionnement des robots. Enfin, nous mettrons l'accent sur les deux robots fabriqués au LIRMM : le robot I4L à moteurs linéaires et nacelle en trois parties (+ organe terminal) et le robot I4R à actionneurs rotatifs et nacelle en deux parties seulement (+ organe terminal).

On trouvera en annexe B une description systématique des mécanismes I4. La Figure 2.8 expose trois robots appartenant à cette famille : l'image CAO en bas à droite représente une machine d'usinage 5 axes capable d'atteindre les 5 faces d'un cube (le 5<sup>ème</sup> axe étant procuré par un plateau tournant). A l'inverse des robots I4L et I4R, la rotation de l'effecteur a lieu autour d'un axe horizontal.

### 2.5.1 Du H4 au I4

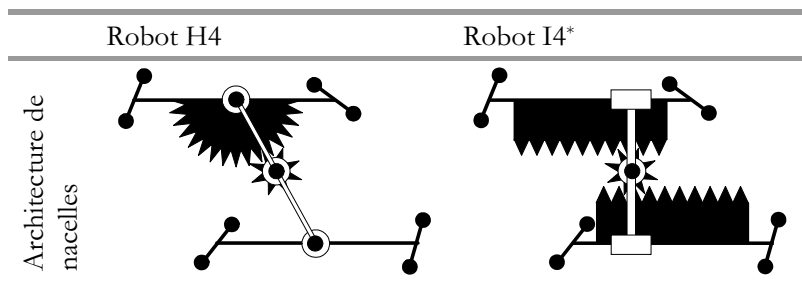
L'étude qui a permis d'aboutir aux robots I4 visait à palier les limitations du robot H4, tout en conservant les caractéristiques qui ont fait la force du robot H4 (architecture légère de type Delta, nacelle articulée, etc.). Soulignons les limitations du robot H4 suivantes :

- Lorsque l'orientation de l'organe terminal change, la matrice jacobienne varie fortement, ce qui se traduit par une forte modification de la rigidité de la machine. De plus, des collisions entre les barres peuvent survenir.
- Nous avons montré dans le chapitre consacré au robot H4, que l'orientation des parallélogrammes spatiaux doit être choisie judicieusement pour éviter les singularités internes. Ainsi, la configuration qui consiste à les placer à  $90^\circ$  les uns par rapport aux autres n'est pas envisageable, alors qu'il aurait pu paraître « naturel » de choisir une géométrie parfaitement symétrique par rapport à un axe vertical.
- Le modèle géométrique direct du robot n'a pas été établi de manière analytique.

Dans ce chapitre nous présentons une nouvelle nacelle qui remédie à toutes ces limitations. L'idée de base est plutôt simple : remplacer les deux liaisons pivots verticales par des liaisons glissières horizontales, et le dispositif à engrenages, par un mécanisme pignon-crémaillère. En réalité, cette modification est plus délicate qu'elle ne paraît au premier abord :

- Modifié ainsi, le mécanisme est hyperstatique. Nous verrons comment vaincre cette difficulté.
- Il est nécessaire d'utiliser deux systèmes pignon-crémaillère au lieu d'un seul. Ce besoin se fait sentir par l'apparition d'un degré de liberté supplémentaire, qu'il faut pouvoir contrôler.

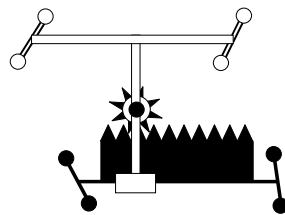
**Table 2.4.** Principes des nacelles des robots H4 et I4



\* Par la suite cette nacelle (dite nacelle de type 3) sera assimilée à celle du robot I4L.



D'ores et déjà il est possible d'affirmer qu'avec ce type d'architecture, le risque de collisions internes (une des parties latérales de la nacelle articulée rencontre l'autre) est réduit de manière drastique. En effet, pour cette architecture, la distance entre les parties latérales de la nacelle (mesurée orthogonalement à la direction des glissières) ne varie pas. Ce risque est également réduit avec la nacelle présentée Figure 2.9. Variante de la nacelle précédente, elle se distingue par le nombre des articulations : elle possède une seule liaison glissière plutôt que deux. Cette nacelle est constituée d'une pièce de moins, mais perd l'architecture symétrique, bien utile pour équilibrer les forces dans toutes les barres. Nous désignerons par type 3 et type 2 respectivement, les deux nacelles (voir l'annexe B).



**Figure 2.9.** Principe de la nacelle du robot I4R (nacelle de type 2)

Afin de traiter ces deux types de nacelles de manière unifiée pour écrire les modèles géométriques, le paramétrage suivant a été adopté :

- $k_1$ , le rapport de transmission entre la partie de nacelle latérale n°1 et l'axe en rotation :

$$\dot{e}_1 = k_1 \omega_c \quad (2-70)$$

- $k_2$ , le rapport de transmission entre la partie de nacelle latérale n°2 et l'axe en rotation :

$$\dot{e}_2 = k_2 \omega_c \quad (2-71)$$

On note  $\omega_c$  la vitesse de rotation de l'organe terminal. Ainsi, pour distinguer les deux types de nacelle, il suffira de donner les valeurs adéquates aux rapports de transmission.

**Table 2.5.** Rapports de transmission des deux types de nacelles pour les robots I4

Type de nacelle	Type 2	Type 3
Architecture		
Rapports de transmission	$k_2 = 0$	$k_2 = -k_1$

## 2.5.2 Analyse cinématique

La matrice nécessaire à la mise en œuvre de la méthode d'analyse cinématique simplifiée s'écrit :

$$\mathbf{J}_{\mathcal{P}2} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{l}_1 & 0 \\ \mathbf{l}_2^T & [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{l}_2 & 0 \\ \mathbf{l}_3^T & [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & 0 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_4^T & [\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & 0 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{l}_4 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-72)$$

En raison de la présence excessive de zéros (en permutant des colonnes il est facile d'isoler un bloc  $4 \times 5$  de zéros), le déterminant de cette matrice est nul. Cela signifie que le système matriciel (2-27) présente une infinité de solutions, en d'autres termes qu'il existe des vitesses incontrôlées. Pour remédier à ce problème il est nécessaire de prévoir un couplage entre différentes vitesses internes. En introduisant la variable opérationnelle  $\omega_c$  qui est directement proportionnelle aux vitesses  $\dot{\varepsilon}_1$  et  $\dot{\varepsilon}_2$  (voir (2-70) et (2-71)), on réalise ce couplage. En tenant compte de ces relations supplémentaires, et en réordonnant le système on aboutit au système équivalent :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & k_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{l}_1 & [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1]^T \\ \mathbf{l}_2^T & k_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{l}_2 & [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2]^T \\ \mathbf{l}_3^T & k_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{l}_3 & [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3]^T \\ \mathbf{l}_4^T & k_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{l}_4 & [\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4]^T \\ \mathbf{0} & 0 & [\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1]^T \\ \mathbf{0} & 0 & [\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2]^T \\ \mathbf{0} & 0 & [\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3]^T \\ \mathbf{0} & 0 & [\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \omega_c \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{l}_i \dot{q}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2-73)$$

Cette matrice n'est plus carrée (dimension  $8 \times 7$ ). La matrice  $4 \times 4$  supérieure gauche est la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_x$  usuelle :

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & k_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2^T & k_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_3^T & k_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_4^T & k_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{l}_4 \end{bmatrix}. \quad (2-74)$$

L'étude de  $\mathbf{J}_{int}$  la matrice  $4 \times 3$  inférieure droite nous renseigne sur les singularités internes :

$$\mathbf{J}_{int} = \begin{bmatrix} [\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1]^T \\ [\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2]^T \\ [\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3]^T \\ [\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4]^T \end{bmatrix}, \quad (2-75)$$

$$\mathbf{J}_{int} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}. \quad (2-76)$$

Le fait que le système (2-76) soit sur-déterminé (plus d'équations que d'inconnues) traduit l'hyperstaticité du mécanisme. Pour rendre le mécanisme isostatique, il suffit de relâcher une contrainte cinématique. Ainsi écrire que  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$  par exemple, signifie que le parallélogramme n°3 a dégénéré en une barre unique. Il est également possible de conserver la structure à 4 parallélogrammes si les tolérances d'usinage et de montage sont suffisamment précises, ou bien si une des 8 barres est munie d'un dispositif à ressorts pour la rendre compliant (voir Annexe B pour un inventaire des possibilités de robots I4).

Ainsi, pour que le mécanisme ne présente pas de singularités internes, il faut s'assurer que  $\mathbf{J}_{int}$  soit de rang plein ( $\text{rang}(\mathbf{J}_{int}) = 3$ ). Étant donné le rôle symétrique des 4 paires de barres, nous développons arbitrairement un des quatre déterminants  $3 \times 3$  de cette matrice  $D_{ijk}$  (en remarquant qu'il s'agit du produit mixte des trois vecteurs colonnes) :

$$D_{ijk} = \left( (\mathbf{f}_i \times \mathbf{l}_i) \times (\mathbf{f}_j \times \mathbf{l}_j) \right) \cdot (\mathbf{f}_k \times \mathbf{l}_k), \quad (2-77)$$

$$(i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\} \quad (2-78)$$

Soit :

$$D_{ijk} = \left( (\mathbf{l}_i \times \mathbf{l}_j) \cdot \mathbf{f}_i \right) \left( (\mathbf{f}_j \times \mathbf{f}_k) \cdot \mathbf{l}_k \right) - \left( (\mathbf{f}_i \times \mathbf{f}_j) \cdot \mathbf{l}_i \right) \left( (\mathbf{l}_j \times \mathbf{l}_k) \cdot \mathbf{f}_k \right) \quad (2-79)$$

En adoptant la solution constructive de la Figure 2.7 cette condition est respectée. Rappelons que pour le robot H4 cet agencement des parallélogrammes conduisait à une configuration singulière.

## 2.5.2.1 Principe d'obtention des modèles géométriques

### 2.5.2.1.1 Modèle géométrique inverse

Comme à l'accoutumé, pour les robots parallèles, le modèle géométrique inverse est facile à calculer. Il est obtenu en développant les égalités vectorielles suivantes par rapport aux variables articulaires :

$$\| \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \|^2 = l_i^2, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (2-80)$$

La résolution peut être effectuée aussi bien pour des moteurs linéaires (voir section consacrée au robot I4L) que pour des moteurs rotatifs (voir section consacrée au robot I4R).

### 2.5.2.1.2 Modèle géométrique direct

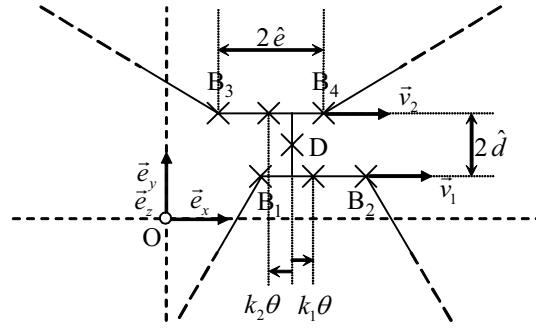
Une des particularités géométriques des robots I4 qui n'a pas été exploitée jusque là, est que sa nacelle est conçue de telle façon que les deux liaisons glissières soient parallèles. Ainsi :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad (2-81)$$

Cette caractéristique rend aisée l'écriture du modèle géométrique direct. Pour illustrer ce fait nous ferons l'hypothèse suivante :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_x \quad (2-82)$$

à savoir, que les glissières sont orientées suivant la direction associée à la variable opérationnelle  $x$ . La Figure 2.10 fixe le paramétrage géométrique, utile pour expliciter les modèles.



**Figure 2.10.** Paramètres géométriques de la nacelle des robots I4

Le vecteur des variables opérationnelles est défini<sup>1</sup> comme :

$$\mathbf{x} = [x \quad y \quad z \quad \theta]^T \quad (2-83)$$

Soient  $\mathbf{e}_i$ ,  $i \in \{1,2,3,4\}$ , les vecteurs associés à la géométrie du mécanisme définis ainsi :

$$\mathbf{e}_1 = [-\hat{e} \quad -\hat{d} \quad 0]^T, \quad (2-84)$$

$$\mathbf{e}_2 = [\hat{e} \quad -\hat{d} \quad 0]^T, \quad (2-85)$$

$$\mathbf{e}_3 = [-\hat{e} \quad \hat{d} \quad 0]^T, \quad (2-86)$$

$$\mathbf{e}_4 = [\hat{e} \quad \hat{d} \quad 0]^T. \quad (2-87)$$

Les points géométriques  $D$  et  $B_i$ ,  $i \in \{1,2,3,4\}$  sont explicités dans le repère  $\langle O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rangle$  à l'aide de leurs vecteurs colonnes représentatifs :

$$\mathbf{D} = [x \quad y \quad z]^T, \quad (2-88)$$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{D} + \mathbf{e}_i, \quad i \in \{1,2,3,4\} \quad (2-89)$$

Calculer le MGD des robots I4, consiste dans un premier temps à développer les équations (2-80) par rapport aux variables opérationnelles, pour aboutir au système à quatre équations pour quatre inconnues suivant :

$$(x + k_j \theta)^2 + 2a_i(x + k_j \theta) + y^2 + 2b_i y + z^2 + 2c_i z + d_i = 0, \quad (2-90)$$

$$(i, j) \in \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,2)\},$$

où  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $d_i$  ont pour valeurs :

$$a_i = (\mathbf{e}_i - \mathbf{A}_i) \cdot \mathbf{e}_x, \quad (2-91)$$

$$b_i = (\mathbf{e}_i - \mathbf{A}_i) \cdot \mathbf{e}_y, \quad (2-92)$$

$$c_i = (\mathbf{e}_i - \mathbf{A}_i) \cdot \mathbf{e}_z, \quad (2-93)$$

$$d_i = (\mathbf{e}_i - \mathbf{A}_i)^2 - l_i^2, \quad (2-94)$$

(ces termes dépendent des coordonnées articulaires par le biais des vecteurs  $\mathbf{A}_i$ ).

L'opération suivante consiste à obtenir un système à deux équations et deux inconnues ( $y$  et  $z$ ) et le résoudre indépendamment du reste des variables. Il suffira, une fois ce système résolu, de reporter les résultats dans les équations restantes pour obtenir les valeurs pour  $x$  et  $\theta$ .

<sup>1</sup> Remarque : Dans ce cas la notation  $\dot{\mathbf{x}}$  est justifiée, c'est-à-dire  $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$  (avec  $\omega_c = \dot{\theta}$ ).

En soustrayant les deux premières équations du système (2-90) entre elles ainsi que les deux dernières, on obtient :

$$\begin{cases} (x + k_1\theta) = \frac{(b_2 - b_1)}{(a_1 - a_2)} y + \frac{(c_2 - c_1)}{(a_1 - a_2)} z + \frac{(d_2 - d_1)}{(a_1 - a_2)} \end{cases} \quad (2-95)$$

$$\begin{cases} (x + k_2\theta) = \frac{(b_4 - b_3)}{(a_3 - a_4)} y + \frac{(c_4 - c_3)}{(a_3 - a_4)} z + \frac{(d_4 - d_3)}{(a_3 - a_4)} \end{cases} \quad (2-96)$$

A l'aide de ces résultats, par substitution de  $(x + k_1\theta)$  et  $(x + k_2\theta)$  dans la première et troisième équation du système (2-90), on aboutit au système de deux quadriques en  $y$  et  $z$  :

$$\hat{\alpha}_i y^2 + \hat{\beta}_i z^2 + \hat{\chi}_i yz + \hat{\delta}_i y + \hat{\varepsilon}_i z + \hat{\phi}_i = 0, \quad i \in \{1, 2\} \quad (2-97)$$

où  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i$ ,  $\hat{\chi}_i$ ,  $\hat{\delta}_i$ ,  $\hat{\varepsilon}_i$  et  $\hat{\phi}_i$  dépendent des coordonnées articulaires :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{(b_k - b_j)^2}{(a_j - a_k)^2} + 1, \quad (2-98)$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{(c_k - c_j)^2}{(a_j - a_k)^2} + 1, \quad (2-99)$$

$$\hat{\chi}_i = \frac{(b_k - b_j)(c_k - c_j)}{(a_j - a_k)^2}, \quad (2-100)$$

$$\hat{\delta}_i = 2 \frac{(d_k - d_j)(b_k - b_j)}{(a_j - a_k)^2} + 2a_j \frac{(b_k - b_j)}{(a_j - a_k)} + 2b_j, \quad (2-101)$$

$$\hat{\varepsilon}_i = 2 \frac{(d_k - d_j)(c_k - c_j)}{(a_j - a_k)^2} + 2a_j \frac{(c_k - c_j)}{(a_j - a_k)} + 2c_j, \quad (2-102)$$

$$\hat{\phi}_i = 2 \frac{(d_k - d_j)^2}{(a_j - a_k)^2} + 2a_j \frac{(d_k - d_j)}{(a_j - a_k)} + d_j, \quad (2-103)$$

avec  $(i, j, k) \in \{(1, 1, 2), (2, 3, 4)\}$ .

Géométriquement, résoudre le système (2-97) revient à rechercher l'intersection de deux ellipses dans le plan. En fonction du robot, cette résolution est plus ou moins complexe :

- Ainsi, dans le cas du robot I4L, les ellipses sont en réalité des cercles. De nombreuses simplifications ont lieu, et il est possible d'établir le MGD du robot avec des considérations purement géométriques (utilisation du théorème de Pythagore exclusivement).
- Pour le robot I4R, la résolution du système (2-97) passe par la détermination d'un polynôme d'ordre 4 en  $z$ . Cet aspect sera détaillé dans la section consacrée au robot I4R.

## 2.5.3 Étude du robot I4L

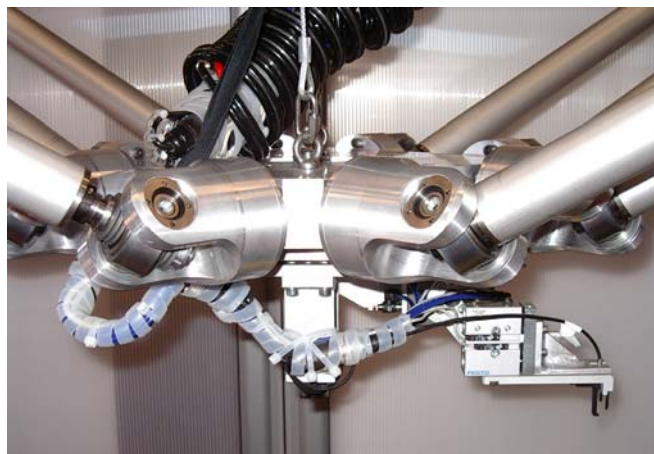
### 2.5.3.1 Présentation du robot

Le robot I4L (L pour linéaire) a pour particularité essentielle de présenter une direction privilégiée suivant laquelle le volume de travail du robot ne dépend que de la course des moteurs (voir Figure 2.11 ; pour de plus amples détails, on pourra se reporter à l'annexe D). De ce fait, il est destiné à la manutention d'objets le long des chaînes d'assemblage. Les actionneurs sont des moteurs linéaires électromagnétiques.



**Figure 2.11.** Photo du robot I4L

La machine fabriquée au LIRMM constitue un démonstrateur : les éléments rotules sont de nouvelles articulations passives développées par la compagnie INA, constituées de trois liaisons pivots montées en série (voir Figure 2.12). Le préhenseur pneumatique fourni par la société Comau a permis de simuler une tâche de prise-dépose de coussinets sur une culasse de moteur. Le temps de cycle pour 1 coussinet était de 6 secondes, ce qui s'explique par les performances dynamiques élevées de la machine (accélération maximum de 4 G, vitesse maximum de 4 m/s). Pour résoudre le problème d'hyperstaticité du mécanisme, un dispositif à rondelles élastiques a été implanté sur une des 8 barres (cf. Figure 2.12, barre de gauche).



**Figure 2.12.** Détails de la nacelle du robot I4L

La nacelle de ce robot est constituée de 3 pièces (+ l'organe terminal) pour conférer au mécanisme un comportement parfaitement symétrique (voir Figure 2.13).

Le couplage a lieu par le biais du système pignon – 2 crémaillères (voir Figure 2.14). C'est pourquoi les rapports de transmission dépendent directement des caractéristiques du pignon :

$$k_1 = R \text{ et} \quad (2-104)$$

$$k_2 = -R, \quad (2-105)$$

où  $R$  est le rayon du pignon. Il s'agit d'un paramètre essentiel pour le comportement de la machine puisqu'il fixe la sensibilité angulaire de la machine relativement à la sensibilité en translation. Sur notre prototype, nous avons choisi :

$$R = 0,016 \text{ m.} \quad (2-106)$$

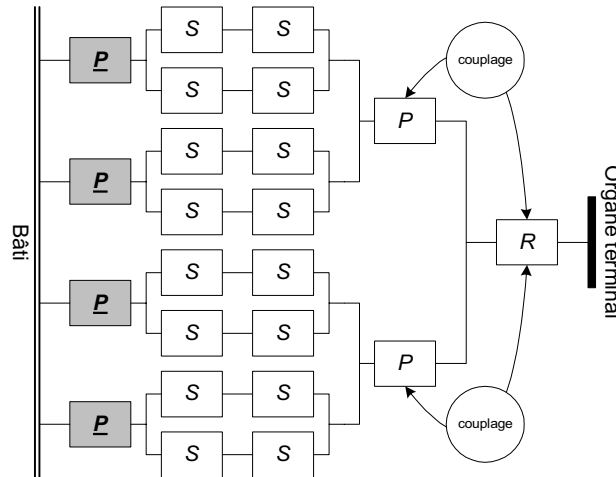


Figure 2.13. Graphe d'agencement du robot I4L

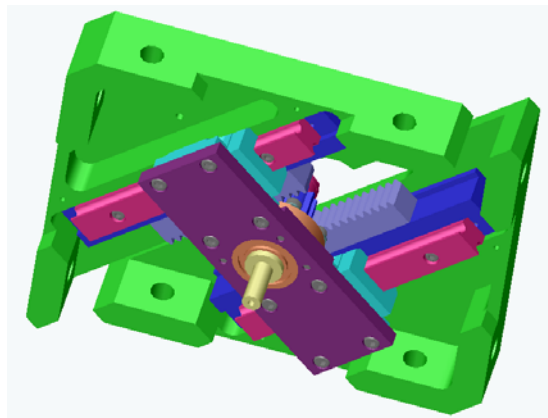


Figure 2.14. Image CAO de la nacelle du robot I4L : système pignon – 2 crémaillères

## 2.5.3.2 Modèles géométriques

### 2.5.3.2.1 Paramétrage géométrique

Les quatre moteurs linéaires sont tous orientés suivant la même direction, pour procurer au mécanisme un volume de travail important suivant cette direction privilégiée. Il s'agit de la direction  $\vec{e}_x$  qui constitue la direction des liaisons glissières de la nacelle, pour exploiter au mieux les courses des moteurs :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_x, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2-107)$$

La Figure 2.15 fixe les grandeurs géométriques utiles pour les calculs.

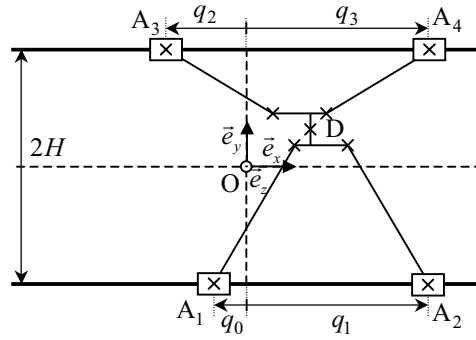


Figure 2.15. Schéma architectural du robot I4L

Les points  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  sont exprimés à l'aide de leur vecteur colonne dans le repère  $\langle O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rangle$ , ainsi :

$$A_1 = [q_0 \quad -H \quad 0]^T, \quad (2-108)$$

$$A_2 = [q_1 \quad -H \quad 0]^T, \quad (2-109)$$

$$A_3 = [q_2 \quad H \quad 0]^T, \quad (2-110)$$

$$A_4 = [q_3 \quad H \quad 0]^T. \quad (2-111)$$

### 2.5.3.2.2 Modèle géométrique inverse

En faisant l'hypothèse d'un modèle rigide, et en procédant de manière usuelle, on aboutit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = (x + R\theta) - \left( \hat{e} + \sqrt{L^2 - z^2 - (y + (H - \hat{d}))^2} \right) \end{array} \right. \quad (2-112)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_2 = (x + R\theta) + \left( \hat{e} + \sqrt{L^2 - z^2 - (y + (H - \hat{d}))^2} \right) \end{array} \right. \quad (2-113)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 = (x - R\theta) - \left( \hat{e} + \sqrt{L^2 - z^2 - (y - (H - \hat{d}))^2} \right) \end{array} \right. \quad (2-114)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_4 = (x - R\theta) + \left( \hat{e} + \sqrt{L^2 - z^2 - (y - (H - \hat{d}))^2} \right) \end{array} \right. \quad (2-115)$$

### 2.5.3.2.3 Modèle géométrique direct

L'obtention du modèle géométrique direct s'inspire de la méthode explicitée dans la section précédente, mais de nombreuses simplifications ont lieu :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(q_1 + q_2) + (q_3 + q_4)}{4} \end{array} \right. \quad (2-116)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{(q_4 - q_3 - 2\hat{e})^2 - (q_2 - q_1 - 2\hat{e})^2}{16(H - \hat{d})} \end{array} \right. \quad (2-117)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = -\sqrt{L^2 - (H - \hat{d})^2 - y^2 - 1/8((q_4 - q_3 - 2\hat{e})^2 + (q_2 - q_1 - 2\hat{e})^2)} \end{array} \right. \quad (2-118)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{(q_1 + q_2) - (q_3 + q_4)}{4R} \end{array} \right. \quad (2-119)$$



En effet, pour cette configuration architecturale particulière, il est possible d'établir les relations grâce à des considérations purement géométriques (seule l'utilisation du théorème de Pythagore est requise).

### 2.5.3.3 Propriétés de la matrice jacobienne

Pour cette géométrie particulière, on peut observer des relations entre les vecteurs qui dirigent les barres :

$$l_1 \cdot e_x = -l_2 \cdot e_x, \quad (2-120)$$

$$l_1 \cdot e_y = l_2 \cdot e_y, \quad (2-121)$$

$$l_1 \cdot e_z = l_2 \cdot e_z, \quad (2-122)$$

$$l_3 \cdot e_x = -l_4 \cdot e_x, \quad (2-123)$$

$$l_3 \cdot e_y = l_4 \cdot e_y, \quad (2-124)$$

$$l_3 \cdot e_z = l_4 \cdot e_z. \quad (2-125)$$

D'où l'expression particulière de la matrice jacobienne :

$$J_m = \begin{bmatrix} 1 & l_1 \cdot e_y / l_1 \cdot e_x & l_1 \cdot e_z / l_1 \cdot e_x & R \\ 1 & -l_1 \cdot e_y / l_1 \cdot e_x & -l_1 \cdot e_z / l_1 \cdot e_x & R \\ 1 & l_3 \cdot e_y / l_3 \cdot e_x & l_3 \cdot e_z / l_3 \cdot e_x & -R \\ 1 & -l_3 \cdot e_y / l_3 \cdot e_x & -l_3 \cdot e_z / l_3 \cdot e_x & -R \end{bmatrix} \quad (2-126)$$

Cette matrice témoigne de propriétés intéressantes, directement liées aux performances de la machine. Une d'elles est que cette matrice ne dépend ni de  $x$ , ni de  $\theta$ . En effet, un mouvement relatif à la variable opérationnelle  $x$  ou bien  $\theta$  se traduit uniquement par des translations suivant  $\vec{e}_x$  des différentes parties de la nacelle. Par conséquent, les vecteurs  $l_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , sont indépendants de ces variables. Et comme la matrice  $J_m$  ne dépend que des vecteurs  $l_i$  (cf. (2-126)), elle est indépendante de  $x$  et de  $\theta$ . C'est pourquoi les performances de la machine (cinématiques / statiques) sont indépendantes de la position suivant  $\vec{e}_x$  et de l'orientation de l'organe terminal.

### 2.5.3.4 Optimisation de la machine et volume de travail

Pour optimiser la machine, nous nous sommes focalisés sur l'isotropie des vitesses / efforts opérationnels. Pour donner un sens physique à l'indice d'isotropie usuel – le conditionnement de la matrice jacobienne – nous avons cherché à rendre la matrice  $J_m$  adimensionnelle. L'utilisation de la matrice poids  $W$  a permis de réaliser cette opération :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix}, \quad (2-127)$$

$$J_{mw} = J_m W \quad (2-128)$$

Grâce à cette transformation, calculer le conditionnement de  $J_{mw}$ , revient à comparer les vitesses linéaires de l'organe terminal ( $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ), et la vitesse relative de décalage de l'une des extrémités de la nacelle par rapport à la partie centrale ( $\dot{e}_1$  ou  $\dot{e}_2$ ).

Puisque  $J_{mw}$  est indépendante des paramètres  $x$  et  $\theta$ , obtenir l'architecture optimale du robot a été réalisée ainsi : nous avons cherché les paramètres  $\hat{d}$ ,  $H$  et  $L$  (pour des considérations pratiques, nous avons choisi  $\hat{e}$  égal à  $\hat{d}$ ) qui minimisent la fonction :

$$\max(\text{cond}(J_m W)) \quad (2-129)$$

à l'intérieur du volume de travail défini suivant deux directions uniquement :

$$y \in [-0,2 \text{ m}, 0,2 \text{ m}], \quad (2-130)$$

$$z \in [z_0 - 0,1 \text{ m}, z_0 + 0,1 \text{ m}], \quad (2-131)$$

$z_0$  désigne l'altitude moyenne du volume de travail (sa valeur est calculée lors de l'optimisation).

**cond** désigne le conditionnement et correspond au rapport des valeurs singulières extrêmes.

Ainsi nous avons déterminé les valeurs des paramètres suivantes :

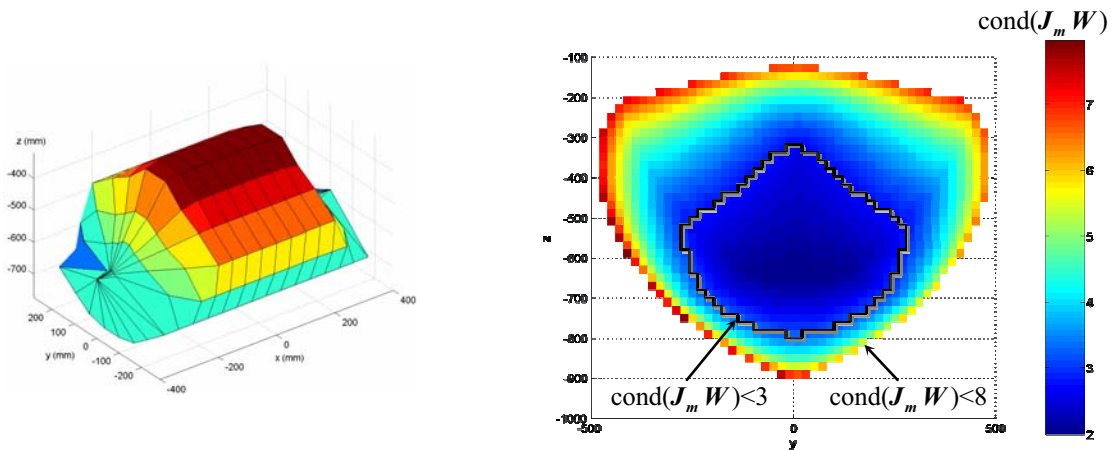
$$\hat{d} = \hat{e} = 0,15 \text{ m}, \quad (2-132)$$

$$H = 0,5 \text{ m}, \quad (2-133)$$

$$L = 1 \text{ m} \text{ et}, \quad (2-134)$$

$$z_0 = -0,63 \text{ m}. \quad (2-135)$$

Bien évidemment, le volume accessible est bien plus grand que le volume de travail considéré pour l'optimisation (dans un rapport de 3). La Figure 2.16, à gauche représente le volume de travail du robot pour un conditionnement inférieur à trois, en tenant compte des butées physiques des moteurs (soulignons que suivant  $x$ , le volume de travail n'est limité que par la course des moteurs). Le conditionnement étant indépendant des paramètres  $x$  et  $\theta$  pour ce robot, la Figure 2.16 à droite illustre les valeurs du conditionnement pour une tranche de l'espace de travail suivant les directions  $y$  et  $z$ .



**Figure 2.16.** Estimation du volume de travail du robot I4L en tenant compte des butées articulaires ; à gauche : tel que  $\text{cond}(J_m W) < 3$  ; à droite : tel que  $\text{cond}(J_m W) < 8$  pour une tranche  $y$ - $z$  de l'espace de travail

L'estimation du volume de travail a été menée par une méthode « non robuste » de maillage du domaine. Il serait intéressant d'utiliser une approche par intervalles [Merlet 2001b] pour confirmer cette estimation.

### 2.5.3.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons présenté un nouveau robot parallèle – le robot I4L – s'inspirant de l'architecture du robot H4, utile pour la palettisation à grande vitesse le long d'une chaîne d'assemblage. La nacelle, d'architecture nouvelle, a permis de repousser les limitations du robot H4. Une étude complète de singularités a été menée mettant en avant les conditions géométriques à respecter pour assurer le bon fonctionnement du mécanisme. L'architecture du prototype a été détaillée et les modèles géométriques et cinématiques ont été explicités. Un des points essentiels est la particularité de la matrice jacobienne qui se traduit par un bon comportement du robot.

## 2.5.4 Étude du robot I4R

### 2.5.4.1 Présentation du robot

Le robot I4R doit son nom à ses actionneurs rotatifs (R) et présente nombre de points communs avec le robot Delta ; en particulier il reprend les parallélogrammes spatiaux (voir Figure 2.17 ; pour de plus amples détails, on pourra se reporter à l'annexe D).



Figure 2.17. Photo du robot I4R

Il offre un volume de travail similaire, à savoir un cylindre de rayon 1 mètre et de hauteur 20 centimètres, mais pallie les problèmes qui surviennent lors de la rotation de l'organe terminal. Destiné aux tâches de prise-dépose, les performances espérées pour ce robot sont : accélération de 10 G et vitesse de 10 m/s. Les bras en carbone (fournis par la société ABB) et la nacelle en

aluminium conduisent à des masses en mouvement particulièrement limitées. Les moto-réducteurs disposent de réducteurs à jeu réduit ( $< 1'$ ). L'intérêt de ce robot est de s'affranchir des problèmes liés à la chaîne **RUPUR** nécessaire pour obtenir le mouvement de rotation sur le robot Delta (la liaison glissière est bien trop sollicitée ce qui nuit à la durée de vie du robot). La nacelle est en deux parties seulement (+ organe terminal) (cf. Figure 2.18) et un dispositif poulie-câble permet d'obtenir la rotation sans aucun jeu (voir Figure 2.19). Les rapports de transmission sont alors :

$$k_1 = R \text{ et} \quad (2-136)$$

$$k_2 = 0. \quad (2-137)$$

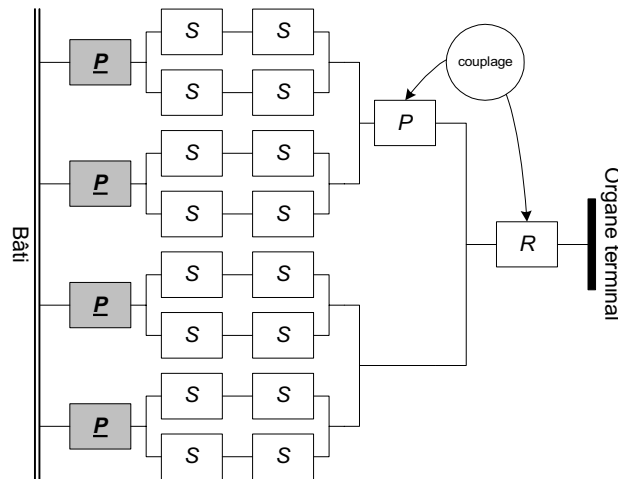


Figure 2.18. Graphe d'agencement du robot I4R

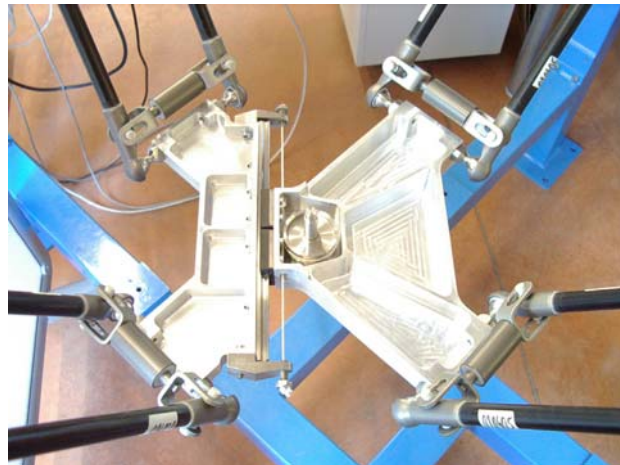
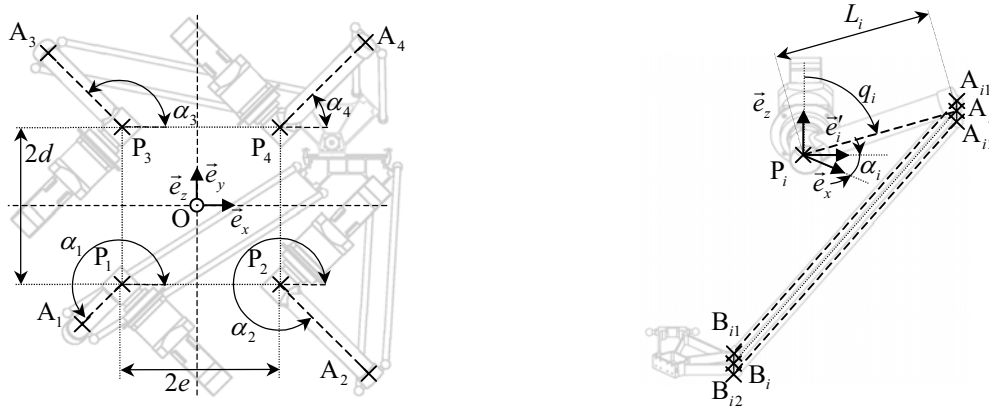


Figure 2.19. Photo de la nacelle du robot I4R : détail du dispositif à poulie-câble

## 2.5.4.2 Modèles géométriques

### 2.5.4.2.1 Paramétrage géométrique



**Figure 2.20.** Schémas architecturaux du robot I4R ; à gauche : vue de dessus ; à droite : vue de côté

Les bras manœuvrés par les moteurs rotatifs sont de longueur  $L_i$  et vérifient :

$$\|P_i A_i\| = L_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (2-138)$$

$d$  et  $e$  précisent la localisation des points  $P_i$  :

$$P_1 = [-e \quad -d \quad 0]^T, \quad (2-139)$$

$$P_2 = [e \quad -d \quad 0]^T, \quad (2-140)$$

$$P_3 = [-e \quad d \quad 0]^T, \quad (2-141)$$

$$P_4 = [e \quad d \quad 0]^T. \quad (2-142)$$

Les paramètres  $\alpha_i$  désignent l'orientation des bras des moteurs dans un plan horizontal. Ils permettent d'explicitier l'expression des vecteurs  $e'_i$  :

$$e'_i = [\cos(\alpha_i) \quad \sin(\alpha_i) \quad 0]^T, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (2-143)$$

### 2.5.4.2.2 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse s'obtient de la même manière que pour un robot Delta. Les paramètres opérationnels étant fixés, chacun des points  $B_i$  est parfaitement déterminé (relations (2-89)) et la (2-80) s'exprime ainsi :

$$M_i \cos(q_i) + N_i \sin(q_i) = G_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2-144)$$

avec :

$$M_i = 2L_i (\mathbf{B}_i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{e}_z), \quad (2-145)$$

$$N_i = 2L_i (\mathbf{B}_i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{e}'_i) \quad \text{et} \quad (2-146)$$

$$G_i = l_i^2 + \|\mathbf{B}_i \mathbf{P}_i\|^2 - L_i^2. \quad (2-147)$$

Le changement de variable :

$$t_i = \tan(q_i / 2) \quad (2-148)$$

permet d'obtenir une équation du second degré. Après résolution, seule la racine correspondant à une posture réaliste pour le mécanisme est conservée, et les coordonnées articulaires s'écrivent :

$$q_i = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-b_i + \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}{2a_i} \right), \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2-149)$$

avec  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  les coefficients du polynôme :

$$a_i = G_i + M_i, \quad (2-150)$$

$$b_i = -2N_i \text{ et} \quad (2-151)$$

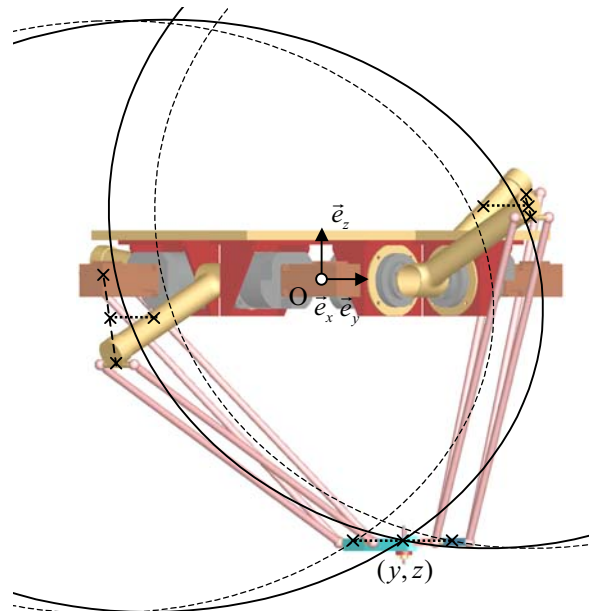
$$c_i = G_i - M_i. \quad (2-152)$$

### 2.5.4.2.3 Modèle géométrique direct

De manière générale, il est préférable de posséder une expression algébrique du modèle géométrique du robot. En effet, contrairement à la méthode itérative de Newton, il est possible de garantir le temps maximal d'exécution des calculs, et d'éviter le problème des minimums locaux. Le robot I4R possède un modèle géométrique direct algébrique.

Il existe un découplage entre les variables opérationnelles du robot : en projetant les relations vectorielles suivant  $\vec{e}_x$ , il est possible de déterminer les paramètres  $y$  et  $z$  indépendamment des paramètres  $x$  et  $\theta$  (cf. système (2-97)).

Concrètement, chercher  $y$  et  $z$  revient à déterminer l'intersection de deux ellipses dans le plan, comme l'illustre la Figure 2.21 (chaque quadrique du système (2-97) correspond à une ellipse). Les solutions de ce problème sont connues et consistent à déterminer les racines d'un polynôme de degré 4 en  $z$  [Eberly 2000].



**Figure 2.21.** Robot I4R ; intersection des deux ellipses pour le calcul du MGD (vue selon  $\vec{e}_x$ )

Pour ce robot, les vecteurs  $A_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , qui interviennent pour le calcul du système (2-97) valent :

$$A_i = P_i + L_i, \quad (2-153)$$

avec :

$$L_i = [L_i \sin(q_i) \cos(\alpha_i) \quad L_i \sin(q_i) \sin(\alpha_i) \quad L_i \cos(q_i)]^T. \quad (2-154)$$

Le système (2-97) étant parfaitement explicité en fonction des variables articulaires, sa résolution consiste à déterminer les racines du polynôme d'ordre 4 en  $z$  :

$$P(z) = u_4 z^4 + u_3 z^3 + u_2 z^2 + u_1 z + u_0 \quad (2-155)$$

obtenu à l'aide du changement de variable suivant :

$$u_0 = v_2 v_{10} - v_4^2 \quad (2-156)$$

$$u_1 = v_0 v_{10} + v_2 (v_7 + v_9) - 2v_3 v_4 \quad (2-157)$$

$$u_2 = v_0 (v_7 + v_9) + v_2 (v_6 - v_8) - v_3^2 - 2v_1 v_4 \quad (2-158)$$

$$u_3 = v_0 (v_6 - v_8) + 2v_2 v_5 - 2v_1 v_3 \quad (2-159)$$

$$u_4 = v_0 v_5 - v_1^2 \quad (2-160)$$

avec :

$$v_0 = \hat{\alpha}_1 \hat{\chi}_2 - \hat{\alpha}_2 \hat{\chi}_1, \quad (2-161)$$

$$v_1 = \hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_2 - \hat{\alpha}_2 \hat{\beta}_1, \quad (2-162)$$

$$v_2 = \hat{\alpha}_1 \hat{\delta}_2 - \hat{\alpha}_2 \hat{\delta}_1, \quad (2-163)$$

$$v_3 = \hat{\alpha}_1 \hat{\epsilon}_2 - \hat{\alpha}_2 \hat{\epsilon}_1, \quad (2-164)$$

$$v_4 = \hat{\alpha}_1 \hat{\phi}_2 - \hat{\alpha}_2 \hat{\phi}_1, \quad (2-165)$$

$$v_5 = \hat{\chi}_1 \hat{\beta}_2 - \hat{\chi}_2 \hat{\beta}_1, \quad (2-166)$$

$$v_6 = \hat{\chi}_1 \hat{\epsilon}_2 - \hat{\chi}_2 \hat{\epsilon}_1, \quad (2-167)$$

$$v_7 = \hat{\chi}_1 \hat{\phi}_2 - \hat{\chi}_2 \hat{\phi}_1, \quad (2-168)$$

$$v_8 = \hat{\beta}_1 \hat{\delta}_2 - \hat{\beta}_2 \hat{\delta}_1, \quad (2-169)$$

$$v_9 = \hat{\delta}_1 \hat{\epsilon}_2 - \hat{\delta}_2 \hat{\epsilon}_1, \quad (2-170)$$

$$v_{10} = \hat{\delta}_1 \hat{\phi}_2 - \hat{\delta}_2 \hat{\phi}_1. \quad (2-171)$$

( $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i$ ,  $\hat{\chi}_i$ ,  $\hat{\delta}_i$ ,  $\hat{\epsilon}_i$  et  $\hat{\phi}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , sont définis dans les équations (2-98) à (2-103).)

La méthode proposée par Cardan et Ferrari [Candido 1941] permet de résoudre dans  $\mathfrak{R}$  ce polynôme analytiquement : elle consiste à se ramener dans un premier temps à la résolution d'un polynôme de degré trois. Cette méthode a présenté des instabilités numériques, et une formulation numériquement plus robuste a été adoptée [Durand 1960][Démidovitch 1979][Mineur 1966] : elle consiste à calculer les racines aussi bien complexes que réelles du polynôme.

Concrètement, les ellipses observées Figure 2.21 ne possèdent que deux points d'intersection. Aussi, le polynôme obtenu pour le robot ne renferme que deux solutions réelles (chacune associée à un point d'intersection). C'est pourquoi, choisir parmi les quatre résultats, la solution en  $z$  du MGD consiste à retenir la plus petite racine réelle du polynôme (correspondant au point d'intersection le plus bas sur la Figure 2.21).

Une fois la solution en  $z$  déterminée, il suffit réinjecter cette valeur dans le système (2-97) pour déterminer  $y$ . Plutôt que de privilégier une des deux équations du système, il est judicieux

de pondérer chacune des équations puis de les soustraire de manière à éliminer le terme  $y^2$ . Ainsi :

$$y = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)z^2 + (\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1)z + (\alpha_1\phi_2 - \alpha_2\phi_1)}{(\alpha_2\chi_1 - \alpha_1\chi_2)z + (\alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2)} \quad (2-172)$$

Enfin, pour déterminer  $x$  et  $\theta$  il suffit d'inverser le système linéaire constitué des deux équations (2-95) et (2-96) :

$$x = \frac{k_2K_1 - k_1K_2}{k_2 - k_1}, \quad (2-173)$$

$$\theta = \frac{K_2 - K_1}{k_2 - k_1}, \quad (2-174)$$

avec :

$$K_1 = \frac{(b_2 - b_1)}{(a_1 - a_2)}y + \frac{(c_2 - c_1)}{(a_1 - a_2)}z + \frac{(d_2 - d_1)}{(a_1 - a_2)} \text{ et}, \quad (2-175)$$

$$K_2 = \frac{(b_4 - b_3)}{(a_3 - a_4)}y + \frac{(c_4 - c_3)}{(a_3 - a_4)}z + \frac{(d_4 - d_3)}{(a_3 - a_4)}. \quad (2-176)$$

### 2.5.4.3 Optimisation de la machine et volume de travail

Les valeurs des paramètres géométriques adoptées pour la machine sont :

$$\alpha_1 = 225^\circ, \quad (2-177)$$

$$\alpha_2 = 315^\circ, \quad (2-178)$$

$$\alpha_3 = 135^\circ, \quad (2-179)$$

$$\alpha_4 = 45^\circ, \quad (2-180)$$

$$\hat{d} = \hat{e}, \quad (2-181)$$

$$d = e, \quad (2-182)$$

ce qui confère au mécanisme un caractère symétrique.

Les longueurs mesurées sur les bras et parallélogrammes fournis par la société ABB sont :

$$l_i = 800 \text{ mm et} \quad (2-183)$$

$$L_i = 351 \text{ mm}, i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (2-184)$$

$\hat{d}$  et  $\hat{e}$  ont été choisis le plus petit possible pour obtenir une nacelle compacte et les paramètres  $d$  et  $e$  ont été optimisés de manière à minimiser la fonction :

$$\max(\text{cond}(\mathbf{J}_m \mathbf{W})) \quad (2-185)$$

à l'intérieur du volume de travail cylindrique tel que :

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0,5 \text{ m}, \quad (2-186)$$

$$z \in [z_0 - 0,1 \text{ m}, z_0 + 0,1 \text{ m}] \text{ et} \quad (2-187)$$

$$\theta \in [-180^\circ, +180^\circ], \quad (2-188)$$

$\mathbf{W}$  désigne la matrice poids définie par (2-127) et  $z_0$  l'altitude moyenne du volume de travail (sa valeur est calculée lors de l'optimisation). Les résultats sont :

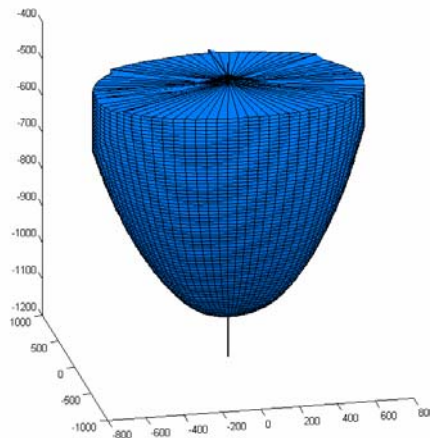
$$\hat{d} = \hat{e} = 0,142 \text{ m}, \quad (2-189)$$

$$d = e = 0,3 \text{ m et}, \quad (2-190)$$

$$z_0 = -0,53 \text{ m}. \quad (2-191)$$



La Figure 2.22 illustre une estimation du volume de travail du robot I4R tel que le conditionnement de la matrice jacobienne pondérée soit inférieur à 8.



**Figure 2.22.** Estimation du volume de travail du robot I4R tel que  $\text{cond}(\mathbf{J}_m \mathbf{W}) < 8$

Le volume de travail obtenu pour un conditionnement inférieur à 8 est donné Figure 2.22.

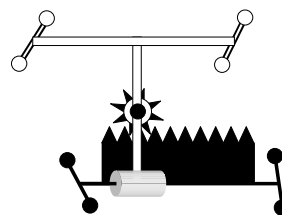
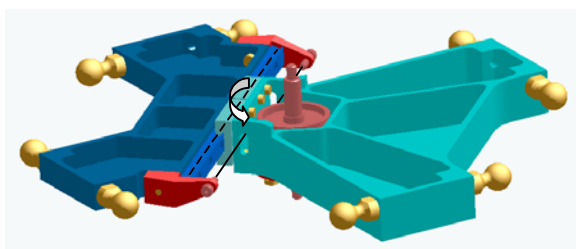
Le paramètre  $R$  adopté comme rayon de la poulie a été choisi de manière à obtenir une révolution complète de l'organe terminal pour une course de la liaison glissière de 120 mm, compatible avec les dimensions de la nacelle. Ainsi :

$$R = 0,021 \text{ m} . \quad (2-192)$$

#### 2.5.4.4 Extension : modélisation isostatique du robot I4R

L'analyse du robot I4R telle qu'elle a été menée précédemment a montré que le robot est hyperstatique d'ordre 1. Pour résoudre cette difficulté, nous avons précisé que les tolérances d'usinage et d'assemblage étaient suffisamment fines pour que le robot fonctionne convenablement. En réalité une analyse plus fine peut être conduite en tenant compte de la possibilité de rotation du guidage en translation de la nacelle autour de son axe de déplacement. Cela revient à modéliser le guidage par une liaison pivot glissant (voir Figure 2.23). On désigne par  $\dot{\epsilon}_1$  la vitesse linéaire et  $\dot{\epsilon}_2$  la vitesse angulaire.

*Remarque :* Le dispositif de transmission mécanique T/R doit pouvoir tenir compte de cette mobilité supplémentaire. Dans la pratique  $\dot{\epsilon}_2 = 0$  et un dispositif à poulie-câble convient parfaitement.



**Figure 2.23.** Nacelle du robot I4R (nacelle de type 2) : image CAO du guidage en translation, et schéma de la modélisation par pivot glissant

Ainsi :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad (2-193)$$

La matrice nécessaire à la mise en œuvre de la méthode d'analyse cinématique simplifiée s'écrit alors :

$$\mathbf{J}_{p2} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T & [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{l}_1 & 0 \\ \mathbf{l}_2^T & [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{l}_2 & 0 \\ \mathbf{l}_3^T & [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & 0 & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_4^T & [\mathbf{e}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & 0 & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{d}_4) \cdot \mathbf{l}_4 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & 0 & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{f}_3) \cdot \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{0} & [\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & 0 & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{f}_4) \cdot \mathbf{l}_4 \end{bmatrix}. \quad (2-194)$$

Il suffit d'insérer la colonne n°7 de  $\mathbf{J}_{p2}$  derrière la colonne n°3 pour isoler un bloc  $4 \times 4$  de zéros en bas à gauche. La matrice utile pour l'étude des singularités internes vaut alors :

$$\mathbf{J}_{int} = \begin{bmatrix} [\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1]^T & 0 \\ [\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2]^T & 0 \\ [\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3]^T & (\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{v}_1 \\ [\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4]^T & (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}. \quad (2-195)$$

En précisant que l'axe de la liaison pivot glissant est colinéaire avec l'axe  $x$  :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x, \quad (2-196)$$

on constate que le calcul du déterminant de cette matrice est similaire à celui de l'équation (2-60) mené pour le robot H4 en remplaçant  $\mathbf{e}_z$  par  $\mathbf{e}_x$ . Ainsi, on aboutit à la relation :

$$\left( ((\mathbf{f}_1 \times \mathbf{l}_1) \times (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{l}_2)) \times ((\mathbf{f}_3 \times \mathbf{l}_3) \times (\mathbf{f}_4 \times \mathbf{l}_4)) \right) \cdot \mathbf{e}_x \neq 0 \quad (2-197)$$

Lorsque cette condition est vérifiée les vitesses  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , et  $\dot{\epsilon}_2$  sont nulles et la nacelle reste d'orientation constante au cours du mouvement. Par le calcul on vérifie (pour un jeu donné de paramètres) que cette condition est respectée pour tous les points du volume de travail<sup>2</sup>.

## 2.6 Amplification des rotations selon deux axes : le dispositif Twice

### 2.6.1 Introduction

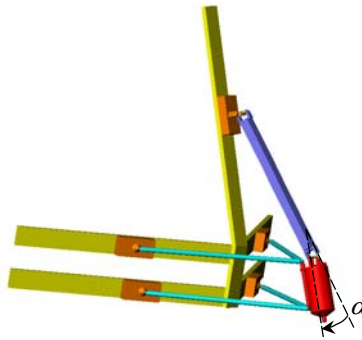
L'étude de la famille des robots de type H4/I4 a permis d'illustrer les dispositifs de transformations de mouvements, tels train d'engrenages, pignon-crémaillère ou poulie-courroie. Ces dispositifs, parfaitement adaptés lorsqu'ils ne concernent qu'un mouvement de rotation, montrent

<sup>2</sup> Remarque : Il serait judicieux d'utiliser une approche par intervalles [Merlet 2001b] pour s'assurer de ce point

leur faiblesse dès qu'il s'agit de générer deux mouvements de rotation. Nous nous sommes donc attachés à rechercher un moyen d'amplifier les rotations selon 2 axes. Le dispositif décrit ici, Twice (Tilting device with Wide Capacity) [Krut 2002a] est capable de doubler les mouvements angulaires autour de deux axes orthogonaux successifs. Présenté comme un dispositif optionnel venant se greffer sur un robot parallèle classique, ce dispositif procure de forts débattements angulaires. Une analyse complète des vitesses internes du dispositif est menée : elle prouve l'absence de singularités à l'intérieur du volume de travail du dispositif. Pour finir, des architectures mécaniques réalistes du dispositif Twice sont proposées.

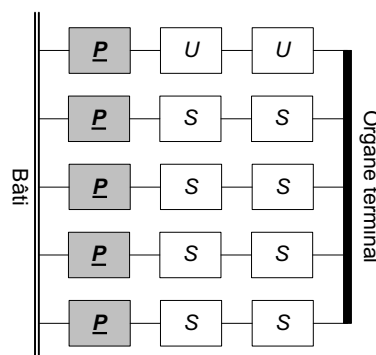
## 2.6.2 Le concept de Twice

Pour parler du concept de Twice, considérons le mécanisme parallèle à 5 ddl donné Figure 2.24. Ce mécanisme s'inspire de l'architecture proposée par Zamanov [Zamanov 1992]. Il est composé de 4 chaînes  $\underline{PSS}$  et d'une chaîne cinématique  $\underline{PUU}$ , conférant à la nacelle 5 degrés de libertés (voir Figure 2.25).

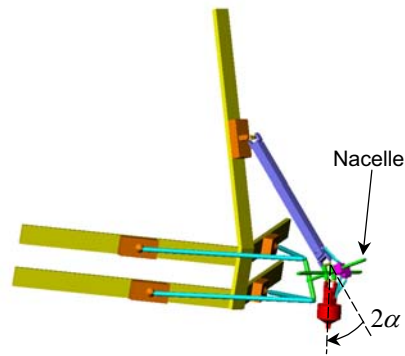


**Figure 2.24.** Image CAO d'un mécanisme parallèle 5 axes inspiré de l'architecture de Zamanov

Pour éviter les singularités, c'est-à-dire, pour avoir une bonne transmission des vitesses et des efforts, l'inclinaison de la nacelle doit rester faible (typiquement  $\alpha < 45^\circ$ ). Sur la plupart des robots parallèles, l'outil (la broche, le préhenseur...) est fixé directement à la nacelle. Ce qui est proposé dans cette section est d'ajouter un dispositif mécanique entre la nacelle et l'outil capable de doubler l'inclinaison de l'outil (Figure 2.26).

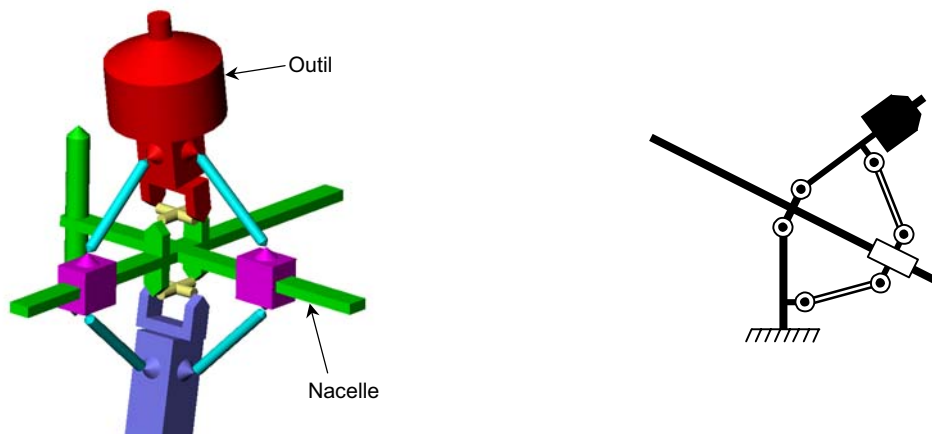


**Figure 2.25.** Graphe d'agencement du mécanisme parallèle 5 axes



**Figure 2.26.** Mécanisme parallèle 5 axes avec le dispositif Twice

Dans ce but, le dispositif Twice est introduit (Figure 2.27) : la nacelle est désormais articulée, constituée d'un dispositif mécanique particulier inséré entre les bras motorisés et l'organe terminal. Vue depuis la partie centrale, ce dispositif présente une symétrie miroir : c'est la raison principale pour laquelle lorsque la nacelle est inclinée d'un certain angle, l'organe terminal vient s'orienter du double par rapport à une référence fixe.



**Figure 2.27.** Mécanismes d'amplification des rotations ; à gauche : le dispositif Twice ; à droite : un mécanisme plan analogue

La Figure 2.28 représente le graphe d'agencement de Twice. La liaison cardan de gauche est reliée au robot parallèle tandis que celle de droite est connectée à l'outil. Pour l'étude, nous ferons l'hypothèse que la liaison cardan de gauche est motorisée. Bien évidemment, lorsque Twice est monté sur un robot parallèle, ce sont les mouvements d'inclinaison du robot qui agissent comme « motorisation » de la liaison cardan.

Pour peu que certaines conditions géométriques soient vérifiées, nous verrons que l'outil vient s'incliner autour de la liaison cardan de droite avec la même amplitude que la liaison de gauche. Chacune des contributions s'ajoutant, le dispositif Twice confère au mécanisme des inclinaisons doubles de celles originelles (d'où le nom « Twice »).

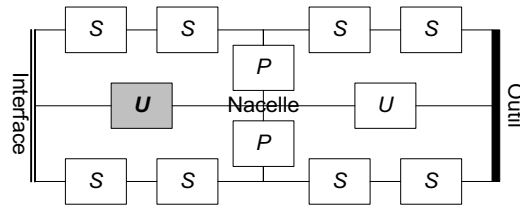


Figure 2.28. Graphe d'agencement de Twice

En faisant l'hypothèse que le robot parallèle porteur ne présente pas de singularités (c'est-à-dire que les mouvements d'entrée du dispositif Twice peuvent être produits), l'analyse suivante va se borner à dégager les singularités internes du dispositif.

### 2.6.3 Étude des singularités

Dans cette section, l'absence de singularité du dispositif à l'intérieur du volume de travail sera prouvée.

#### 2.6.3.1 Dénombrement des pièces / liaisons

En se référant à la Figure 2.28, on recense :

- $n = 12$  liaisons, et
- $p = 9$  pièces.

En vertu du principe de dualité forces-vitesses, il est équivalent de rechercher les singularités du mécanisme en étudiant les forces ou bien les vitesses qui interviennent dans le mécanisme :

- Analyse cinématique
  - $\nu = n - p + 1 = 4$  chaînes cinématiques indépendantes,
  - $E_c = 6\nu = 24$  équations cinématiques,
  - $I_c = 2 \times 1 + 8 \times 3 + 2 \times 2 = 30$  vitesses inconnues.
- Analyse statique
  - $E_s = 6(p - 1) = 48$  équations en efforts,
  - $I_s = 2 \times 5 + 8 \times 3 + 2 \times 4 = 42$  forces inconnues.

Le dénombrement précédent précise qu'une analyse cinématique (concernant les vitesses internes) fait intervenir moins d'équations et d'inconnues qu'une analyse statique. Aussi avons-nous privilégié cette étude.

L'indice de mobilité  $m$  vaut :

$$m = I_c - E_c = 6 \quad (2-198)$$

En remarquant que les quatre barres montées sur rotules peuvent tourner autour de leur axe ( $m_i = 4$ ), et en faisant l'hypothèse que le dispositif est isostatique ( $m_s = 0$ ), l'indice de mobilité cinématique utile  $m_u$  vaut :

$$m_u = m - m_i - m_s = 6 - 4 - 0 = 2, \quad (2-199)$$

ce qui signifie que si le dispositif n'est pas singulier, il présente deux degrés de liberté. Pour poursuivre, il est nécessaire d'établir le modèle géométrique direct du dispositif.

### 2.6.3.2 Paramétrage géométrique

Les paramètres géométriques de Twice sont :

- $\|SI^h\| = \|SI^l\| = a$ , la demi-distance entre les centres des deux liaisons cardan,
- $\|I^lH^l\| = \|I^hH^h\| = b$ ,
- $\|OH^l\| = c^l$ , où O représente l'origine du repère d'étude,
- $\|H^hM\| = c^h$ , où M désigne le point extrémité de la pièce terminale,
- $\|P_1A_1^l\| = \|P_1A_1^h\| = \|P_2A_2^l\| = \|P_2A_2^h\| = e$ ,
- $\|H^lB_1^l\| = \|H^lB_2^l\| = \|H^hB_1^h\| = \|H^hB_2^h\| = f$ ,
- $\|A_1^lB_1^l\| = \|A_2^lB_2^l\| = \|A_1^hB_1^h\| = \|A_2^hB_2^h\| = l$ , la longueur des barres.

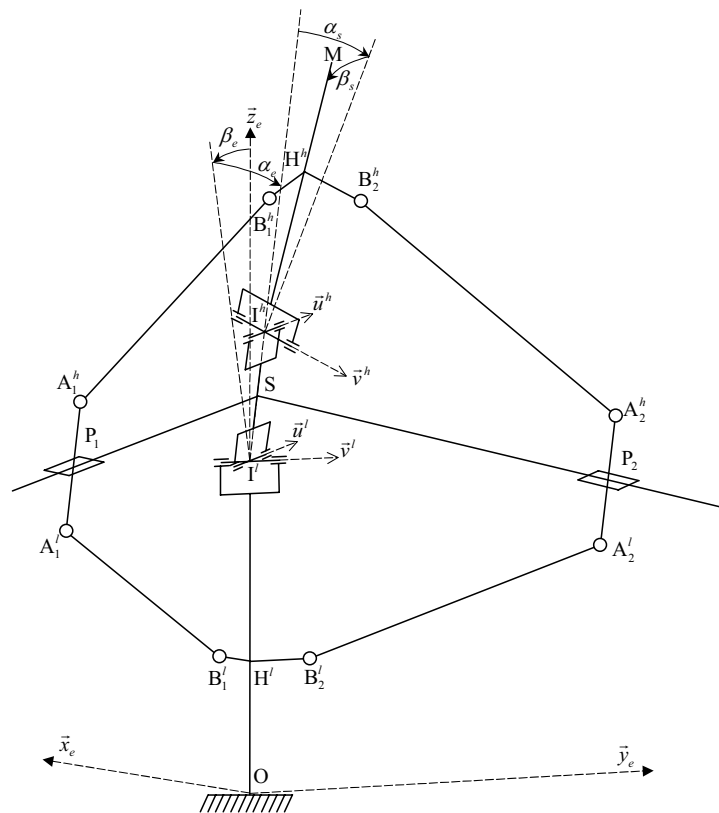
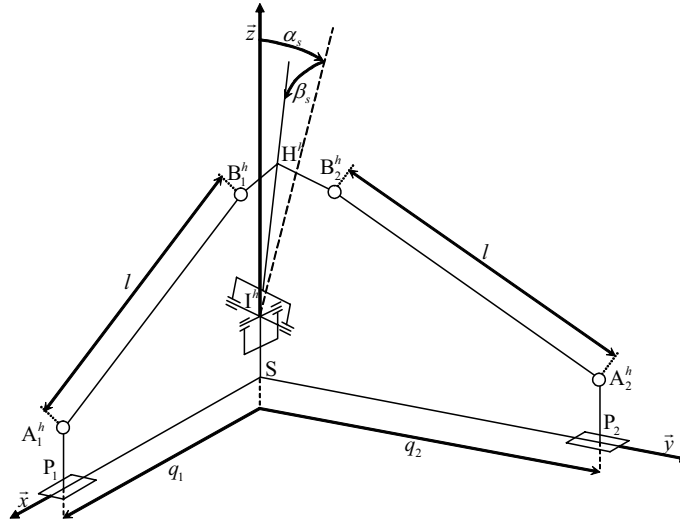


Figure 2.29. Modélisation géométrique de Twice

### 2.6.3.3 Modèle géométrique direct

Relevons le fait que ce dispositif présente une symétrie miroir par rapport à la pièce centrale. Aussi nous focaliserons-nous sur la partie supérieure du dispositif Twice présentée Figure 2.30 :



**Figure 2.30.** Modélisation géométrique de la moitié supérieure de Twice

Dans cette section nous établissons la relation entre les angles associés à l'outil  $(\alpha_s, \beta_s)$ , et la position des liaisons glissières  $(q_1, q_2)$ . Pour cela, il suffit d'exprimer l'invariance des longueurs de barres :

$$\|A_i^h B_i^h\|^2 = l^2, \quad i \in \{1, 2\} \quad (2-200)$$

avec :

$$A_i^h B_i^h = P_i S + A_i^h P_i + S I^h + I^h B_i^h, \quad (2-201)$$

$$I^h B_1^h = \text{Rot}_{\alpha_s} \text{Rot}_{\beta_s} [f \quad 0 \quad b]^T, \quad (2-202)$$

$$I^h B_2^h = \text{Rot}_{\alpha_s} \text{Rot}_{\beta_s} [0 \quad f \quad b]^T, \quad (2-203)$$

$$\text{Rot}_{\alpha_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_s) & \sin(\alpha_s) \\ 0 & -\sin(\alpha_s) & \cos(\alpha_s) \end{bmatrix}, \quad (2-204)$$

$$\text{Rot}_{\beta_s} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_s) & 0 & \sin(\beta_s) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_s) & 0 & \cos(\beta_s) \end{bmatrix}. \quad (2-205)$$

Notons :

$$q_i = \|P_i S\|, \quad (2-206)$$

$$U_1 = -q_1 \mathbf{x}, \quad (2-207)$$

$$U_2 = -q_2 \mathbf{y} \text{ et} \quad (2-208)$$

$$V_i = [0 \quad 0 \quad a - e]^T + I^h B_i^h. \quad (2-209)$$

Alors (2-200) peut s'écrire :

$$\|A_i^h B_i^h\|^2 = \|U_i\|^2 + 2U_i \cdot V_i + \|V_i\|^2. \quad (2-210)$$

Ce qui conduit aux deux polynômes de degré deux :

$$q_1^2 + 2q_1(-\mathbf{x} \cdot V_1) + \|V_1\|^2 - l^2 = 0, \quad (2-211)$$

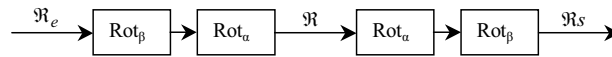
$$q_2^2 + 2q_2(-\mathbf{y} \cdot \mathbf{V}_2) + \|\mathbf{V}_2\|^2 - l^2 = 0. \quad (2-212)$$

Seules les plus grandes racines des polynômes correspondent à des solutions réalistes pour le mécanisme, si bien qu'il existe une relation unique entre les angles d'inclinaison de l'outil par rapport à la partie centrale, et la position des liaisons glissières. Vu l'architecture symétrique du dispositif, cette même relation existe aussi pour la partie inférieure : elle relie les angles d'orientation de la partie centrale par rapport à la base  $(\alpha_e, \beta_e)$  avec la position des mêmes liaisons glissières que précédemment. Cela implique que :

$$\alpha_s = \alpha_e = \alpha, \quad (2-213)$$

$$\beta_s = \beta_e = \beta. \quad (2-214)$$

En résumé, si  $\mathfrak{R}_e$  désigne le repère attaché à la base de Twice,  $\mathfrak{R}$  celui attaché à la partie centrale et  $\mathfrak{R}_s$  celui attaché à l'outil, la Figure 2.31 exprime les changements qui existent entre les différents repères :



**Figure 2.31.** Transformations entre les différents repères de Twice

En conséquence, l'orientation de l'outil par rapport à la base est égale à deux fois l'orientation de la partie centrale.

### 2.6.3.4 Étude des singularités

Pour mener à bien l'étude des singularités de ce mécanisme, on ne peut se contenter de l'analyse des matrices jacobiennes usuelles. La méthode proposée vise à exprimer toutes les vitesses les unes par rapport aux autres. En effet, si la matrice qui décrit les fermetures cinématiques de boucles (et qui est associée aux deux vitesses de commande) est inversible, cela signifie que toutes les vitesses internes sont parfaitement déterminées, *i.e.* que le mécanisme ne présente pas de singularité.

L'écriture des relations de fermeture des quatre chaînes cinématiques permet de caractériser les vitesses internes. Considérons par exemple la chaîne cinématique constituée des parties en haut à droite du mécanisme (Figure 2.30). La fermeture de chaîne s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{0h/0p}^{1h} + \mathbf{V}_{2h/0h}^{1h} + \mathbf{V}_{2p/2h}^{1h} + \mathbf{V}_{0p/2p}^{1h} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2-215)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}_{0h/0p} + \boldsymbol{\Omega}_{2h/0h} + \boldsymbol{\Omega}_{2p/2h} + \boldsymbol{\Omega}_{0p/2p} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2-216)$$

où l'indice  $0h$  désigne l'outil,  $2h$  renseigne sur la barre supérieure droite,  $2p$  désigne le charriot de la liaison glissière et  $0p$  la partie centrale. Par exemple, le vecteur  $\mathbf{V}_{0h/0p}^{1h}$  définit la vitesse du point  $I^h$  appartenant à la pièce  $0h$  relativement à la pièce  $0p$ .

Les vitesses de chaque liaison<sup>3</sup> sont :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{0p/2p}^{P_2} = -V_{P_2} \cdot \mathbf{e}_y \\ \boldsymbol{\Omega}_{0p/2p} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2-217)$$

<sup>3</sup> Nous désignerons par  $v^x$ ,  $v^y$  et  $v^z$ , respectivement les composantes selon  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  du vecteur  $\mathbf{v}$ .



$$\begin{cases} \mathbf{V}_{0h/0p}^{I^h} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Omega}_{0h/0p} = \dot{\alpha}_s \mathbf{u}^h + \dot{\beta}_s \mathbf{v}^h \end{cases} \quad (2-218)$$

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{2h/0h}^{B_2^h} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Omega}_{2h/0h} = \omega_{2h/0h}^x \mathbf{e}_x + \omega_{2h/0h}^y \mathbf{e}_y + \omega_{2h/0h}^z \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (2-219)$$

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{2p/2h}^{A_2^h} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Omega}_{2p/2h} = \omega_{2p/2h}^x \mathbf{e}_x + \omega_{2p/2h}^y \mathbf{e}_y + \omega_{2p/2h}^z \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (2-220)$$

où  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  sont les vecteurs de base du repère  $\mathcal{R} = \langle O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rangle$ . Désormais, tous les vecteurs seront exprimés à l'aide de leurs coordonnées dans  $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$\mathbf{u}^h = [-1 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (2-221)$$

$$\mathbf{v}^h = \mathbf{Rot}_a [0 \quad 1 \quad 0]^T, \quad (2-222)$$

avec:

$$\mathbf{Rot}_a = \mathbf{Rot}_{\alpha_s}. \quad (2-223)$$

L'équation (2-215) conduit à :

$$\mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^h \times \boldsymbol{\Omega}_{2h/0h} + \mathbf{I}^h \mathbf{A}_2^h \times \boldsymbol{\Omega}_{2p/2h} + \mathbf{V}_{0p/2p}^{P_2} = \mathbf{0} \quad (2-224)$$

avec :

$$\mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^h = \mathbf{Rot}_{\alpha} \mathbf{Rot}_{\beta} [0 \quad f \quad b]^T, \quad (2-225)$$

$$\mathbf{I}^h \mathbf{A}_2^h = \mathbf{Rot}_{\alpha} \mathbf{Rot}_{\beta} [0 \quad q_2 \quad e-a]^T \text{ et} \quad (2-226)$$

$$\mathbf{B}_2^h \mathbf{A}_2^h = \mathbf{I}^h \mathbf{A}_2^h - \mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^h \text{ et,} \quad (2-227)$$

$$\mathbf{Rot}_{\beta} = \mathbf{Rot}_{\beta_s}. \quad (2-228)$$

Pour pouvoir résoudre ce système, la vitesse de rotation de chaque barre autour de son axe propre doit être fixée. Nous la fixons arbitrairement à zéro à l'aide de la relation :

$$\boldsymbol{\Omega}_{2h/0h} \cdot \mathbf{B}_2^h \mathbf{A}_2^h = 0 \quad (2-229)$$

Finalement, la fermeture de chaîne s'écrit :

$$\mathbf{M}_{2h} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_s & \dot{\beta}_s & V_{P_2} & \omega_{2h/0h}^x & \omega_{2h/0h}^y & \omega_{2h/0h}^z & \omega_{2p/2h}^x & \omega_{2p/2h}^y & \omega_{2p/2h}^z \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}, \quad (2-230)$$

où  $\mathbf{M}_{2h}$  désigne la matrice  $7 \times 9$  suivante :

$$\mathbf{M}_{2h} = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} \mathbf{u}^{hx} & \mathbf{v}^{hx} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{u}^{hy} & \mathbf{v}^{hy} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{u}^{hz} & \mathbf{v}^{hz} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2^h \mathbf{A}_2^{hx} & \mathbf{B}_2^h \mathbf{A}_2^{hy} & \mathbf{B}_2^h \mathbf{A}_2^{hz} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^{hz} & \mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^{hy} & 0 & -\mathbf{I}^h \mathbf{A}_2^{hz} & \mathbf{I}^h \mathbf{A}_2^{hy} \\ \hline 0 & 0 & -1 & \mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^{hz} & 0 & -\mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^{hx} & \mathbf{I}_2^h \mathbf{A}_2^{hz} & 0 & -\mathbf{I}^h \mathbf{A}_2^{hx} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^{hx} & \mathbf{I}^h \mathbf{B}_2^{hx} & 0 & -\mathbf{I}_2^h \mathbf{A}_2^{hy} & \mathbf{I}_2^h \mathbf{A}_2^{hx} & 0 \end{array} \quad (2-231)$$

Les 3 premières lignes correspondent à l'équation (2-216), la ligne 4 à l'équation (2-229), et les dernières lignes à l'équation (2-224).

Le même calcul peut être réalisé pour les trois autres boucles, conduisant à trois autres matrices  $7 \times 9$  notées  $\mathbf{M}_{1h}$ ,  $\mathbf{M}_{2l}$  et  $\mathbf{M}_{1l}$ . Le système global exprimant les relations entre toutes les vitesses du mécanisme s'écrit :



$$b = 0,03 \text{ m}, \quad (2-237)$$

$$e = 0,01 \text{ m}, \quad (2-238)$$

$$f = 0,010 \text{ m et} \quad (2-239)$$

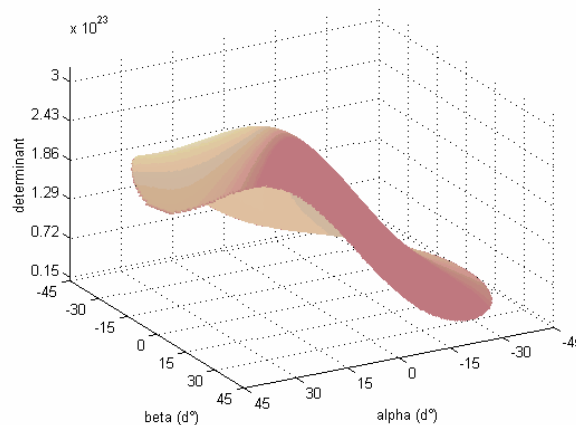
$$l = 0,050 \text{ m}. \quad (2-240)$$

La Figure 2.32 représente les valeurs du déterminant de  $\mathbf{M}_T$  pour une inclinaison de la nacelle inférieure à  $45^\circ$ . Concrètement, cela signifie que l'outil est capable de balayer un parfait hémisphère. Mathématiquement cette condition se traduit par :

$$\cos(\alpha) \times \cos(\beta) \geq \cos(45^\circ) \quad (2-241)$$

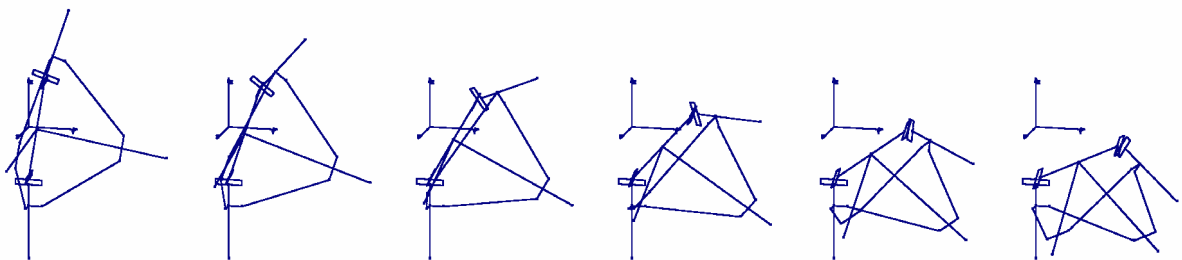
Le tracé de la courbe est réalisé d'après la méthode classique en considérant des valeurs discrètes pour  $\alpha$  et  $\beta$  suivant une grille d'échantillonnage. Cette méthode ne garantit donc pas l'exactitude des résultats contrairement à une approche par intervalles.

Sur cette courbe, la valeur maximale du déterminant est de  $3,110^{23}$ , la plus petite valeur est de  $1,5 \cdot 10^{22}$ . Cela correspond à une variation relative de 20,4. A l'intérieur du domaine admissible pour  $\alpha$  et  $\beta$ , le déterminant reste toujours positif, ce qui signifie que le système qui permet de calculer les vitesses est toujours soluble, en d'autres termes, que le mécanisme ne présente pas de singularités à l'intérieur de son volume de travail.



**Figure 2.32.** Allure du déterminant du système

La Figure 2.33 représente ce mécanisme pour  $\alpha$  allant de  $0$  à  $30^\circ$  et  $\beta$  allant de  $0$  à  $60^\circ$ . (Rappel :  $\alpha = \alpha_e = \alpha_s$  et  $\beta = \beta_e = \beta_s$ ) Comme on peut le constater, une inclinaison supérieure à  $45^\circ$  est même envisageable.



**Figure 2.33.** Illustration CAO d'un mouvement de Twice

## 2.6.4 Dispositions constructives de Twice

Le mécanisme originel de Twice peut être amélioré en ajoutant des barres supplémentaires. Il devient alors hyperstatique, mais présente un caractère symétrique. La Figure 2.34 illustre une version de Twice avec quatre liaisons glissières et la Figure 2.35, une version avec trois liaisons glissières.

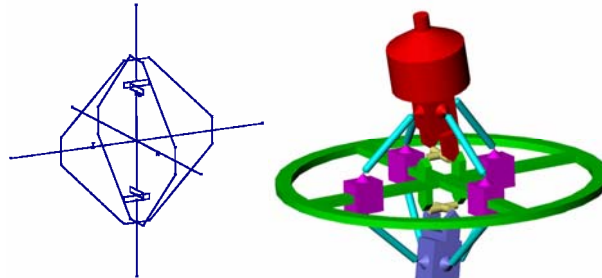


Figure 2.34. Le dispositif Twice avec 4 liaisons glissières

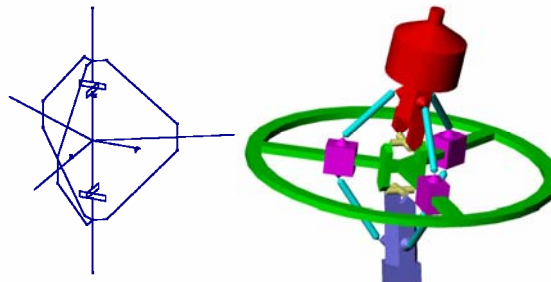


Figure 2.35. Le dispositif Twice avec 3 liaisons glissières

Le dispositif Twice peut être monté sur des robots parallèles, notamment sur un robot de type Delta. La Figure 2.36 présente la combinaison robot Delta – dispositif Twice : 3 chaînes cinématiques motorisées de type  $\underline{RSS}$  sont connectées à la partie centrale de Twice tandis que la première liaison cardan est directement fixée sur la nacelle du robot Delta.

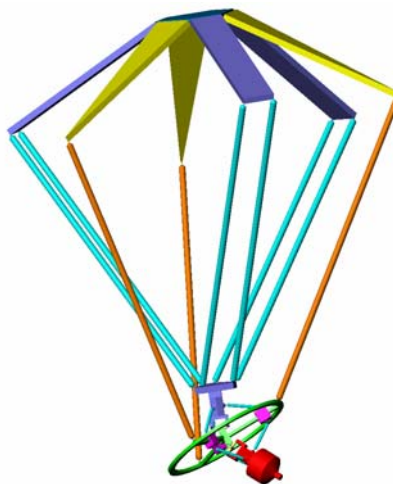


Figure 2.36. Un mécanisme Delta avec le dispositif Twice

Sur l'architecture présentée on peut noter la redondance d'actionnement (6 moteurs / 5 ddl) qui permet d'éliminer les singularités qui apparaissent lorsque l'on souhaite incliner la partie centrale de Twice (la redondance d'actionnement est exposée dans le chapitre 3).

### 2.6.5 Conclusion

Nous avons proposé un dispositif d'amplification mécanique capable de doubler les mouvements angulaires autour de deux axes orthogonaux successifs, dans le but de procurer de plus forts débattements angulaires. Après une description cinématique du dispositif, la validité du mécanisme a été établie en vérifiant qu'il était possible de calculer la totalité des vitesses internes en fonctions des vitesses de commande. Des architectures mécaniques réalistes ont été proposées dans le but d'assurer une meilleure transmission des efforts. Toutefois, on peut noter que Twice est un dispositif plutôt complexe sur le plan mécanique, et d'autres options restent à étudier.

## 2.7 Conclusion du chapitre

De l'étude du robot H4 et de l'invention de nouveaux robots d'architecture similaire, a émergé la nécessité d'un outil d'analyse commun des singularités. La méthode proposée parvient à mettre en avant les singularités en un minimum de calcul. Elle a permis d'analyser les robots H4, I4L et I4R fabriqués au LIRMM. Si elle parvient à dégager les conditions que doit respecter la structure pour ne pas présenter de singularités, elle est censée également guider le concepteur dans son choix d'architecture. La famille des robots de type H4/I4 est vaste et il serait intéressant de mener une étude complète de chacun des robots.

Ces robots constituent la vitrine de dispositifs mécaniques adaptés pour obtenir une rotation à fort débattement. Mais engrenages et pignons-crémaillères montrent leur limite dès qu'il s'agit d'amplifier deux mouvements de rotation autour de deux axes orthogonaux successifs. Le dispositif Twice pallie ce problème, au prix d'une complexité certaine.

Une voie alternative à l'utilisation de dispositifs de transformation ou d'amplification de mouvement installés au niveau de la nacelle, est d'enrichir la structure même du mécanisme par des chaînes cinématiques redondantes. En particulier, la redondance d'actionnement est une manière de vaincre les singularités et ainsi d'obtenir de forts débattements angulaires. Le chapitre suivant traitera de ce sujet et propose des outils pour caractériser ces mécanismes.



---

# Grandes rotations par actionnement redondant

---

*Dans ce chapitre :*

Pour obtenir de forts débattements angulaires, une solution consiste à envisager des Mécanismes Parallèles à Actionnement Redondant (MPAR), dans le but de déplacer le lieu des singularités. L'optimisation de ces machines requiert des indices de qualité, aptes à quantifier les performances. Ce chapitre revisite le concept d'isotropie en vitesses, et en forces, pour les MPAR. Les limites de l'indice usuel – le conditionnement de la matrice jacobienne – sont exposées. Pour caractériser plus précisément les performances, nous proposons d'utiliser le plus grand ellipsoïde inscrit dans le polytope opérationnel, ou le polytope opérationnel lui-même. En effet, le polytope est la représentation exacte du domaine opérationnel admissible en vitesses, alors que l'ellipsoïde est l'objet mathématique couramment employé par la communauté des roboticiens. Des indices de performance en vitesses – et en forces – sont proposés, et la manière de les calculer efficacement est développée. Ces indices sont illustrés à l'aide du robot Archi.

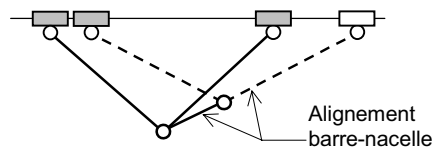
*Sommaire :*

3.1	Introduction.....	84
3.2	Évaluation des performances en vitesses des MPAR .....	86
3.3	Extensions : évaluation des performances en efforts des robots parallèles à câbles....	108
3.4	Étude de cas : le robot Archi.....	118
3.5	Conclusions et perspectives.....	122

### 3.1 Introduction

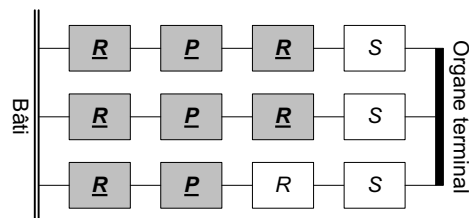
Pour obtenir de forts débattements angulaires avec un mécanisme parallèle, le concepteur doit palier les problèmes de sur-mobilités. Elles se traduisent par des pertes de rigidité du mécanisme, et s'expliquent souvent par l'alignement d'un des bras du robot avec la nacelle (voir Figure 3.1). Ce phénomène est bien moins fréquent avec les mécanismes dont la nacelle se translate uniquement, puisque seuls les bras peuvent s'incliner. Pour vaincre ces singularités, une solution consiste à ajouter une chaîne cinématique motorisée supplémentaire au mécanisme. On parle alors de redondance d'actionnement. C'est cette chaîne qui doit assurer la rigidité du mécanisme, lorsqu'une autre chaîne en est incapable.

Le robot Archi [Marquet 2001a] [Marquet 2001b] exploite parfaitement ce principe : il possède quatre chaînes cinématiques motorisées pour 3 ddl (Figure 3.1). La nacelle dispose des mouvements du plan ( $T_x$ ,  $T_y$  et  $R_z$ ) et grâce à sa mécanique particulière, la rotation est d'amplitude infinie. En fin de chapitre, ce robot sera exposé plus en détails, et on trouvera dans la thèse de Marquet [Marquet 2002c] une description détaillée des méthodes de commande permettant de tirer parti de cette redondance.



**Figure 3.1.** Schéma du robot Archi dans une position où il serait singulier sans la redondance d'actionnement

La machine Eclipse de Sena Technologies [Ryu 1998] constitue également un Mécanisme Parallèle à Actionnement Redondant (MPAR). Plutôt que de disposer d'une chaîne cinématique supplémentaire, deux des chaînes ont été motorisées de manière redondante. Grâce à cette approche, la nacelle peut prendre une orientation quelconque dans l'espace. D'autres mécanismes tels [Kock 1998] [Hayward 1992], ont aussi vu le jour.



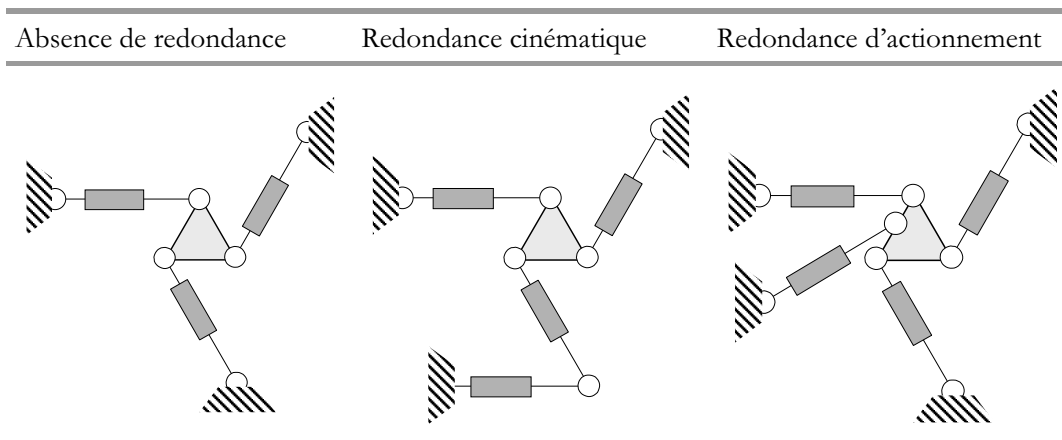
**Figure 3.2.** Le robot Eclipse (Sena Technologies), photo et graphe d'agencement

La définition des MPAR stipule qu'à une force opérationnelle donnée correspond une infinité de forces possibles pour les moteurs. Ce type de redondance s'oppose à la redondance cinématique



que, pour laquelle à une vitesse opérationnelle donnée correspond une infinité de vitesses envisageables pour les moteurs.

**Table 3.1.** Illustration des différents types de redondance à l'aide d'un robot parallèle plan



Lors de la conception d'une machine, il convient de lancer un processus d'optimisation de la géométrie qui a pour finalité de déterminer le mécanisme de meilleures performances. Pour cela le chercheur a recours à des indices de qualité qui quantifient certaines aptitudes du mécanisme (un panorama des indices est dressé dans [Leguay-Durand 1998]). En fonction de l'application de la machine, il privilégiera un indice et retiendra la machine qui fournit le meilleur score, c'est à dire qui présente les meilleures performances. En réalité, et à cause de l'évolution antagoniste de différentes aptitudes essentielles au bon fonctionnement du mécanisme, l'optimisation est plus délicate et se termine souvent par un compromis entre les diverses aptitudes [Krut 2002b].

Le concept de manipulabilité, décrit comme la capacité à se mouvoir dans toutes les directions, a été la base de nombreuses recherches concernant les indices de performances, depuis les travaux de Salisbury et de Craig [Salisbury 1982]. Les fondements mathématiques du concept d'isotropie en vitesse ont d'abord été introduits pour les robots de type série [Yoshikawa 1985a], [Yoshikawa 1985b]. Approfondis avec [Gosselin 1990] [Angeles 1992] [Klein 1991], il apparaît qu'une analyse plus poussée est nécessaire pour des mécanismes plus complexes. Le cas des manipulateurs à chaînes cinématiques fermées a été étudié il y a longtemps [Gosselin 1988] et bien plus récemment [Zanganeh 1997] mais n'a jamais été traité de manière aussi poussée que pour les robots série. Les robots à deux-bras, – ou les systèmes de plusieurs robots – ont été étudiés [Chiacchio 1991] [Bicchi 1995] grâce à diverses approches visant à contrôler correctement les possibilités du système global ; cette technique repose sur la forme quadratique construite à l'aide des matrices jacobiennes de chaque bras simple. Le cas des mécanismes à actionnement redondant a été étudié en partie dans [Pierrot 1997] puisqu'il y est question d'établir le polytope des vitesses opérationnelles en tenant compte des éventuels efforts internes. Par ailleurs, une approche générale pour évaluer la manipulabilité de chaînes cinématiques fermées a été proposée [Park 1996] ; basée sur la géométrie de Rieman et l'utilisation des coordonnées libres, cette approche traite tout type de mécanismes à chaînes cinématiques fermées, aussi bien à redondance d'actionnement qu'à redondance cinématique.

Parmi tous les indices de qualité, le conditionnement de la matrice jacobienne est un indice souvent employé. Rapport des valeurs singulières extrêmes de la matrice jacobienne, il est censé caractériser l'isotropie en vitesses du mécanisme. De plus, à cause de la dualité effort-vitesse, il est

supposé témoigner de l'isotropie en efforts également. Si par isotropie en vitesses, on entend capacité de l'organe terminal à pouvoir atteindre les mêmes vitesses suivant toutes les directions, nous verrons que le conditionnement perd de sa signification pour les MPAR. Nous nous intéresserons alors au plus grand ellipsoïde inscrit dans le polytope opérationnel, ainsi qu'au polytope lui-même, afin de caractériser de manière plus significative les performances de ce genre de robots. Nous devons distinguer les aptitudes en vitesses des aptitudes en forces, parce que la dualité efforts-vitesses n'est plus systématique. Nous insisterons sur plusieurs indices en particuliers que nous illustrerons à l'aide du robot Archi du LIRMM.

## 3.2 Évaluation des performances en vitesses des MPAR

### 3.2.1 Interprétation physique du conditionnement

*Rappel* : Un mécanisme est caractérisé cinématiquement par la connaissance de sa matrice jacobienne directe  $\mathbf{J}$ , ou inverse  $\mathbf{J}_m$ , qui relie les vitesses  $\dot{\mathbf{q}}$  des moteurs (vitesses dites articulaires) aux vitesses de l'organe terminal du mécanisme  $\dot{\mathbf{x}}$  (vitesses dites opérationnelles) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3-2)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{x}}. \quad (3-4)$$

Dans le cas d'un mécanisme non-redondant  $\mathbf{J}_m = \mathbf{J}^{-1}$  et il est équivalent d'étudier l'une ou l'autre de ces matrices. Nous privilégierons l'étude de  $\mathbf{J}_m$ .

#### 3.2.1.1 La table traçante constitue-t-elle un mécanisme isotrope ?

Afin d'illustrer les propos qui vont suivre, envisageons le cas simple de la table traçante  $x$ - $y$ . Il s'agit d'une machine qui porte perpendiculairement en série deux liaisons glissières motorisées de performances identiques (cf. Figure 3.3). L'organe terminal (appelé la nacelle) de ce mécanisme plan est capable de décrire deux mouvements de translation perpendiculaires.

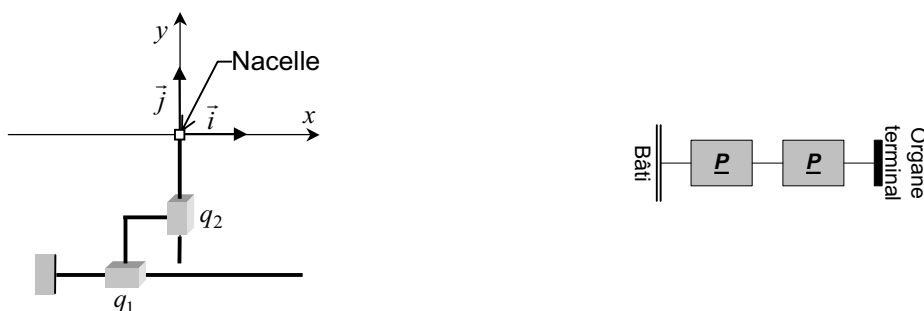
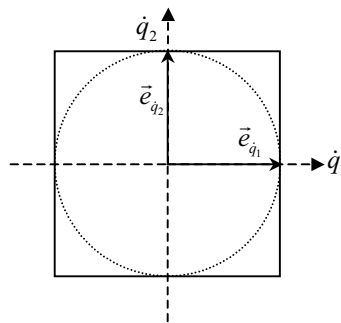


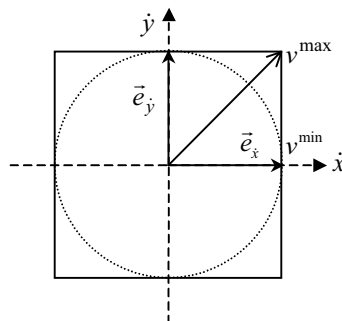
Figure 3.3. Table traçante : schéma et graphe d'agencement

La matrice jacobienne inverse  $\mathbf{J}_m$  de ce mécanisme est la matrice identité  $\mathbf{I}_2$ . Du point de vue des roboticiens, cette machine est souvent dite « isotrope », ce qui pourrait faire croire que les performances en vitesses sont identiques dans toutes les directions de l'espace opérationnel. In-

dubitablement, ce n'est pas le cas, comme en témoignent les espaces réellement admissibles par les vitesses (Figure 3.4 et Figure 3.5)



**Figure 3.4.** Espace articulaire admissible de la table traçante



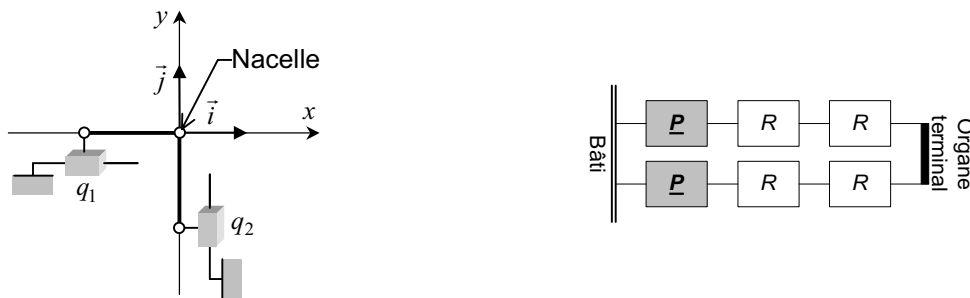
**Figure 3.5.** Espace opérationnel admissible de la table traçante

En effet, l'espace admissible par les moteurs est un carré défini par  $|\dot{q}_i| \leq \dot{q}^{\max}$ . Ce carré reste un carré une fois transposé dans l'espace opérationnel à l'aide de la matrice  $\mathbf{J}_m^{-1}$ . Aussi la plus grande vitesse que l'on peut atteindre est obtenue suivant une diagonale du carré et vaut  $\sqrt{2} \dot{q}^{\max}$ . On constate que cette vitesse est obtenue pour des directions bien particulières et qu'en dehors de ces directions il n'est pas possible d'atteindre de telles performances. Par contre on peut garantir d'atteindre au moins  $\dot{q}^{\max}$  quelle que soit la direction de l'espace opérationnel. Graphiquement ce constat se traduit par le cercle de rayon  $\dot{q}^{\max}$  inscrit dans le carré. Ce cercle opérationnel est l'image par l'application linéaire de matrice  $\mathbf{J}_m^{-1}$  du cercle articulaire de rayon  $\dot{q}^{\max}$ .

La table traçante  $x$ - $y$ , bien que ne présentant pas des vitesses de même amplitude suivant toutes les directions, est pourtant considérée par les roboticiens comme parfaitement isotrope. Cela s'explique par le fait que l'espace articulaire une fois rapporté à l'espace opérationnel par l'application linéaire caractérisée par la jacobienne, n'est aucunement déformé. Donc c'est la transmission des vitesses qui est isotrope, pas la machine. Le concept de manipulabilité se borne à retranscrire la déformation due à cette application entre espace articulaire et espace opérationnel ; il s'avère que cette déformation témoigne parfois de l'anisotropie des vitesses opérationnelles du mécanisme lui-même.

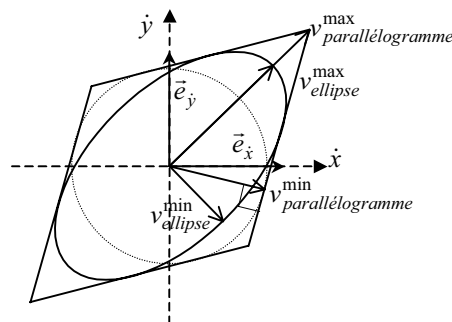
### 3.2.1.2 Analyse d'un mécanisme parallèle simple non-redondant

Envisageons désormais le mécanisme parallèle simple en forme de V constitué de deux tirants rigides articulés entre eux à l'une de leurs extrémités et actionnés à l'autre par deux moteurs linaires de performances identiques (cf. Figure 3.6). Ce mécanisme plan dispose de deux degrés de liberté puisqu'il est capable de générer (hors configurations singulières) deux mouvements de translation à l'extrémité du V.



**Figure 3.6.** Mécanisme en V : schéma et graphe d'agencement

La matrice jacobienne inverse  $\mathbf{J}_m$  de ce mécanisme dans cette position donnée est la même que pour la table traçante, aussi les espaces articulaires et opérationnels sont ceux représentés Figure 3.4 et Figure 3.5. Lorsque le mécanisme n'est plus dans sa posture centrée, la matrice jacobienne inverse diffère de l'identité et, si le domaine admissible par les vitesses articulaires reste inchangé, le domaine admissible par les vitesses opérationnelles dégénère en parallélogramme (voir Figure 3.7).



**Figure 3.7.** Espace opérationnel du mécanisme en V dans une position non centrée

L'image du cercle articulaire est une ellipse inscrite dans le parallélogramme. Il s'agit de l'ellipse de plus grande surface inscrite dans ce parallélogramme. Cette ellipse est entièrement caractérisée à l'aide de la Décomposition en Valeurs Singulières (DVS) de  $\mathbf{J}_m$ , qui fournit les longueurs des demi-axes de l'ellipse ainsi que son orientation. Les roboticiens ont pour habitude d'utiliser le conditionnement de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_m$  (ou  $\mathbf{J}$ ) comme indice d'isotropie. Il s'agit du rapport de la plus grande valeur singulière sur la plus petite ce qui correspond au rapport de la plus grande vitesse de l'ellipse  $v_{ellipse}^{max}$  sur la plus petite  $v_{ellipse}^{min}$ . On vérifie que ce rapport vaut bien 1 dans le cas où l'ellipse est un cercle. Aussi, le conditionnement est-il une mesure de

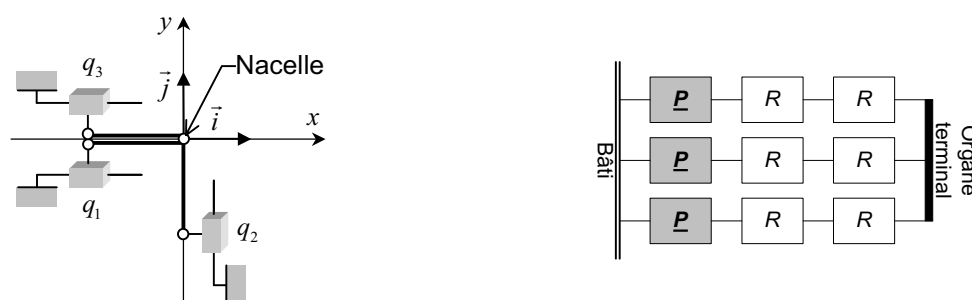
l'aplatissement de l'ellipse opérationnelle. Plus l'aplatissement est faible (valeur proche de 1), plus l'ellipse tend vers le cercle considéré par les roboticiens comme un idéal du point de vue de l'isotropie des vitesses.

La vitesse  $v_{\text{parallélogramme}}^{\min}$ , que le mécanisme peut atteindre quelle que soit la direction dans l'espace opérationnel est une indication essentielle pour l'utilisateur. Graphiquement elle correspond au rayon du plus grand cercle inscrit dans le parallélogramme opérationnel. De la même manière que pour le conditionnement, il est possible de construire un indice caractéristique de l'isotropie à l'aide du rapport entre  $v_{\text{parallélogramme}}^{\max}$  et  $v_{\text{parallélogramme}}^{\min}$ . Aussi attacherons-nous une importance particulière à déterminer ces vitesses extrêmes.

Par la suite, aussi bien l'ellipse que le parallélogramme seront analysés (on parle d'ellipsoïde et de polytope pour des dimensions supérieures à 2). Cependant, comme nous allons le voir, l'utilisation directe du conditionnement de la matrice jacobienne inverse pour caractériser les MPAR n'est plus possible.

### 3.2.1.3 Analyse d'un MPAR simple 3 actionneurs / 2 ddl

Envisageons maintenant le cas du mécanisme plan redondant constitué de trois liaisons glissières motorisées (moteurs de performances identiques) agissant sur une nacelle ponctuelle à l'aide de tirants agencés de la manière spécifique observable sur le schéma suivant (Figure 3.8). Ce MPAR simple va nous servir à illustrer les limitations des indices de performance classique.



**Figure 3.8.** MPAR particulier à 3 actionneurs / 2 ddl : schéma et graphe d'agencement

Ce mécanisme se distingue de celui présenté Figure 3.6 par l'ajout d'une chaîne cinématique supplémentaire n°3 parfaitement parallèle à la chaîne n°1. La relation suivante est respectée :

$$q_3 = q_1. \quad (3-5)$$

Ce mécanisme produit donc en terme de vitesses les mêmes effets que le mécanisme parallèle non-redondant précédent. Aussi, dans cette configuration donnée ce mécanisme peut être considéré comme tout aussi isotrope du point de vue des vitesses que celui de la Figure 3.6 ou de la Figure 3.3. L'espace admissible par les vitesses de l'effecteur constitue le même que précédemment : il s'agit du carré (Figure 3.5).

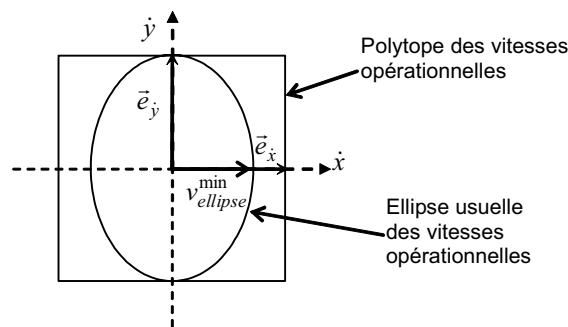
Pour ce mécanisme et pour cette posture particulière, la matrice jacobienne  $J_m$ , qui aux vitesses de la nacelle  $\dot{x}$  associe les vitesses  $\dot{q}$  des actionneurs, vaut :

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3-6)$$

et le conditionnement a pour valeur :

$$\text{cond}(\mathbf{J}_m) = \sqrt{2}. \quad (3-7)$$

On constate donc que le rapport des valeurs singulières ne représente plus le rapport du plus grand coté de l'ellipse maximale inscrite dans le parallélogramme opérationnel sur le plus petit puisque ce rapport serait censé valoir 1. En effet l'ellipse opérationnelle obtenue à l'aide de la DVS a pour demi-axes  $\dot{q}_{\max}$  et  $\dot{q}_{\max} / \sqrt{2}$  conformément à la Figure 3.9.



**Figure 3.9.** Espace opérationnel admissible, machine parallèle redondante

En d'autres mots, l'indice d'isotropie usuel précise que dans cette posture, ce MPAR n'est pas isotrope en vitesses, alors que le bon sens nous fait dire que ce mécanisme l'est autant que la table traçante. Si le conditionnement témoigne grossièrement de l'anisotropie en efforts (en réalité la machine est capable d'un effort 2 fois plus élevé suivant  $x$  que selon  $y$ ), il n'est en aucun cas représentatif de l'isotropie en vitesses.

Même dans l'approche proposée par Park [Park 1996], la matrice dont les vecteurs et valeurs singulières témoignent de la manipulabilité est :

$$\mathbf{M} = \text{diag}(1/2 \quad 1) \quad (3-8)$$

Elle n'est pas du tout révélatrice d'un comportement isotrope en vitesses (Voir [Krut 2003b] et section suivante pour avoir le détail de la méthode de Park appliquée à ce mécanisme).

Cette situation semble plutôt contradictoire : alors que la machine décrite Figure 3.8 est capable de vitesses similaires suivant  $x$  et  $y$ , les indices de manipulabilité usuels témoignent d'un comportement anisotrope. Ce phénomène survient lorsque la matrice  $\mathbf{J}_m$  n'est plus carrée. C'est le cas lorsque la matrice caractérise un mécanisme à redondance d'actionnement. L'espace opérationnel est alors de dimension inférieure à l'espace articulaire. Cette contradiction est en partie due à l'absence de dualité efforts-vitesses. En effet, si les forces des moteurs peuvent être choisies arbitrairement pour peu qu'elles respectent les performances des moteurs, les vitesses articulaires quant-à elles doivent respecter un certain couplage entre elles, imposé par le mécanisme.

La méthode de Park, qui constitue une analyse unifiée de l'ensemble des mécanismes, présente une subtilité : un manipulateur est dit dans une posture isotrope si la transformation de l'espace articulaire vers l'espace opérationnel constitue une isométrie [Park 1996], [Angeles 1992].

### 3.2.1.4 Analyse de la manipulabilité selon Park

#### 3.2.1.4.1 Exposé de la méthode

Voici les lignes essentielles de la méthode proposée par Park [Park 1996] pour l'analyse de mécanismes à chaînes cinématiques fermées. Pour mener à bien les calculs, il convient de dégager :

- un jeu de  $m$  actionneurs dont les positions  $q_1, \dots, q_m$  fixent la posture du mécanisme ;
- l'ensemble total  $k$  des liaisons du mécanisme (motorisées ou non)  $q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_k$ .

On appelle  $p$  le nombre de contraintes dues aux fermetures des boucles rencontrées dans les différentes chaînes cinématiques :

$$6p = k - m \text{ dans le plan,} \quad (3-9)$$

$$3p = k - m \text{ dans l'espace.} \quad (3-10)$$

Les axes principaux de l'ellipsoïde de manipulabilité sont caractérisés grâce aux vecteurs et valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{M}$  définie ainsi :

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{H}, \quad (3-11)$$

ou :

- $\mathbf{F}$  est la matrice reliant le jeu des vitesses des  $m$  actionneurs au vecteur  $\mathbf{v}$  caractéristique de la vitesse de la nacelle :

$$\mathbf{v} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dots & \dot{q}_m \end{bmatrix}^T. \quad (3-12)$$

- $\mathbf{H}$  constitue la « métrique » de l'espace opérationnel (lorsque l'espace opérationnel concerne des positions uniquement, alors  $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ ),
- $\mathbf{G}$  est la « métrique » de l'espace articulaire :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \end{bmatrix}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

- $\mathbf{E}$  réalise la « métrique » de  $\mathfrak{R}^k$  :

$$\mathbf{E} = \mathbf{diag}(\varepsilon_1 \quad \dots \quad \varepsilon_k) \quad (3-14)$$

( $\varepsilon_i = 0$  pour une liaison passive et  $\varepsilon_i$  est proportionnel à la vitesse maximale du  $i^{\text{ème}}$  actionneur pour une liaison motorisée).

Déterminer  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{A}$  est réalisé en considérant le modèle cinématique de chacune des  $p$  chaînes cinématiques. Celles-ci sont considérées comme ouvertes et reliant la base à la nacelle supposée fixe. Les matrices jacobiennes associées à ce calcul s'expriment ainsi :

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} + \mathbf{P}_i \begin{bmatrix} \dot{q}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{q}_k \end{bmatrix}, \quad i = \{1, \dots, p\}. \quad (3-15)$$

Les  $p$  systèmes obtenus peuvent être regroupés sous la forme d'une seule équation matricielle :

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{q}_k \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \dot{q}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{q}_k \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

### 3.2.1.4.2 Étude de cas

Pour le cas du mécanisme exposé Figure 3.8, les points essentiels du calcul sont les suivants (voir Figure 3.10 pour la numérotation des liaisons) :

- $F = I$  et  $H = I$  ; d'où l'expression de  $M$ , la matrice caractéristique de la manipulabilité :

$$M = G^{-1}. \quad (3-17)$$

- En faisant l'hypothèse que chacun des actionneurs a une vitesse maximum de 1, on obtient :

$$E = \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0). \quad (3-18)$$

- L'écriture du système (3-16) dans ce cas précis s'écrit :

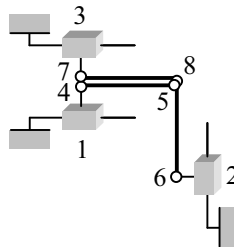
$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & l & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

- D'où les expressions pour  $G$  et  $M$  :

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et,} \quad (3-20)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-21)$$

( $M$  est la matrice dont les vecteurs et valeurs singulières témoignent de la manipulabilité.)



**Figure 3.10.** Numérotation des articulations du MPAR particulier à 3 actionneurs / 2 ddl

Donc, conformément au point de vue de Park, cette machine ne sera pas qualifiée d'isotrope, puisque la transformation des vitesses n'est pas une isométrie. Ce chapitre propose une analyse différente, qui se focalise sur les possibilités réelles de la machine dans l'espace opérationnel, plutôt que sur la qualité de la transformation des vitesses entre espace articulaire et espace opérationnel.

Pour être en accord avec l'interprétation du conditionnement que l'on a pu dégager dans le cas des machines non redondantes, nous proposons de rechercher l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le parallélogramme opérationnel, plutôt que l'ellipse obtenue directement à l'aide de la matrice jacobienne. Le chapitre suivant revisite le concept d'isotropie en vitesses pour les MPAR. Nous verrons quelle est la signification de cette ellipse. Nous envisagerons également de



recourir au polytope opérationnel pour élaborer des indices de qualité, parce qu'il décrit de manière exacte les possibilités en vitesses des mécanismes.

## 3.2.2 Le concept d'isotropie en vitesses pour les MPAR

### 3.2.2.1 Notes et hypothèses préliminaires

#### Note

Pour des soucis de simplicité, les termes « ellipse, polygone, cercle, carré, cube » désigneront les éléments géométriques représentatifs des domaines de l'espace. Il ne faut pas perdre de vue que ces termes doivent être généralisés lorsque l'on envisagera des espaces vectoriels de dimension supérieure à 2 ou 3 (ellipsoïde, polytope, etc).

#### Hypothèse 1

Pour une machine à redondance d'actionnement, la matrice jacobienne inverse  $\mathbf{J}_m$  associe aux vitesses opérationnelles, les vitesses des actionneurs ( $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{x}}$ ) qui sont parfaitement synchronisées les unes avec les autres :  $m > n$ , avec  $\dim(\dot{\mathbf{q}}) = m$  et  $\dim(\dot{\mathbf{x}}) = n$ .

La matrice jacobienne directe  $\mathbf{J}$ , quant-à elle, fait correspondre aux vitesses des moteurs, des vitesses pour la nacelle. Cependant, elle ne précise pas la synchronisation que doivent respecter les vitesses des moteurs entre elles pour être compatibles avec le mécanisme.

Aussi, privilégierons-nous l'étude de  $\mathbf{J}_m$  qui est plus adaptée pour caractériser un mécanisme à actionnement redondant.

#### Hypothèse 2

L'emploi des matrices poids  $\mathbf{W}_{\dot{\mathbf{x}}}$  et  $\mathbf{W}_{\dot{\mathbf{q}}}$  permet de rendre les vecteurs vitesses adimensionnels :

$$\mathbf{W}_{\dot{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 1/\dot{x}_1^{\max} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\dot{x}_n^{\max} \end{bmatrix}, \quad (3-22)$$

$$\mathbf{W}_{\dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 1/\dot{q}_1^{\max} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\dot{q}_n^{\max} \end{bmatrix}, \quad (3-23)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{W}_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{d'où } |\tilde{x}_i| \leq 1) \quad \text{et} \quad (3-24)$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_{\dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{d'où } |\tilde{q}_i| \leq 1). \quad (3-25)$$

Les vecteurs  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\tilde{\mathbf{q}}$  ne témoignent plus des vitesses directement, mais du niveau (de l'intensité) des vitesses. De cette manière, nous pouvons palier certains problèmes mathématiques liés aux machines complexes :

- problème d'homogénéité (coexistence de vitesses linéaires et angulaires),
- problème de moteurs aux performances différentes ( $\dot{q}_i^{\max} \neq \dot{q}_j^{\max}$ ),
- problème de performances souhaitées différentes suivant différents axes ( $\dot{x}_i^{\max} \neq \dot{x}_j^{\max}$ ). On peut envisager de privilégier une direction selon laquelle le mouvement serait plus rapide.

Étudier le comportement d'une machine présentant une des particularités énoncées précédemment reviendra à s'intéresser à la matrice jacobienne pondérée  $\tilde{\mathbf{J}}_m$  :

$$\tilde{\mathbf{J}}_m = \mathbf{W}_\dot{\mathbf{q}} \mathbf{J}_m \mathbf{W}_\dot{\mathbf{x}}^{-1}, \quad (3-26)$$

qui vérifie :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{J}}_m \tilde{\mathbf{x}}. \quad (3-27)$$

Dans la suite de cet exposé, nous ferons sciemment l'amalgame entre matrice jacobienne et matrice jacobienne pondérée (directe ou inverse). Les explications qui suivront s'adresseront donc à des machines dont l'espace opérationnel ne pose pas de problèmes d'homogénéité, qui dispose de moteurs de performances identiques, et où l'on souhaite une parfaite isotropie en vitesse pour l'organe terminal. Pour une machine qui ne respecte pas ces hypothèses, l'utilisation des matrices poids s'imposera. Dans [Park 1996] une manière plus efficace permet également de résoudre ce type de problème (elle repose sur la notion de « métrique » de l'espace opérationnel).

### 3.2.2.2 Analyse de la décomposition en valeurs singulières dans le cas d'un MPAR

Pour illustrer les propos qui vont suivre, nous allons considérer le mécanisme redondant plan de la Figure 3.11 à trois actionneurs pour deux degrés de liberté, qui est de géométrie moins triviale que le mécanisme redondant évoqué Figure 3.8.

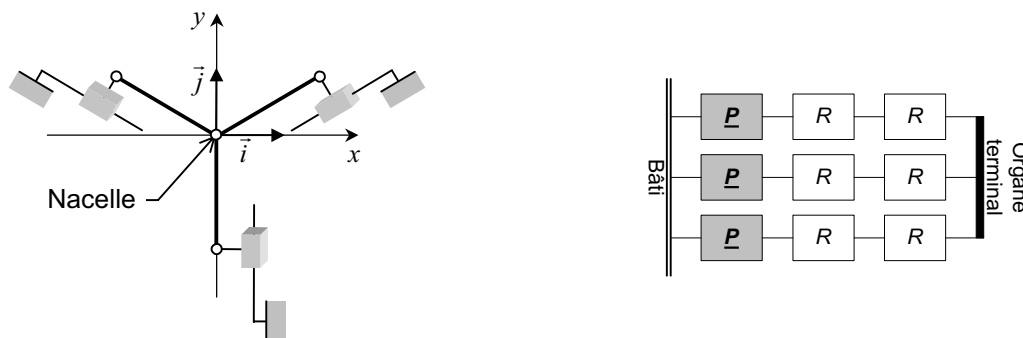


Figure 3.11. MPAR simple à 3 actionneurs / 2 ddl : schéma et graphe d'agencement

Ce choix permet une représentation graphique aisée des espaces articulaires et opérationnels qui sont de dimensions faibles. Les relations, par contre, seront établies pour des degrés quelconques. La seule contrainte concernant ces espaces est :

$$m > n, \text{ avec } \dim(\dot{\mathbf{q}}) = m \text{ et } \dim(\dot{\mathbf{x}}) = n. \quad (3-28)$$

Lorsqu'on effectue la décomposition en valeurs singulières de la matrice jacobienne inverse, dans le cas d'un mécanisme parallèle à actionnement redondant on obtient l'égalité suivante [Klema 1980] :

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T, \quad (3-29)$$

où :

- $\mathbf{V}^T$  est une matrice de passage (de changement de base) de dimension  $n \times n$ . Elle est donc orthogonale. A la base canonique de l'espace opérationnel, elle associe une base plus adaptée de l'espace opérationnel qui permet l'obtention de la matrice particulière  $\mathbf{S}$ .

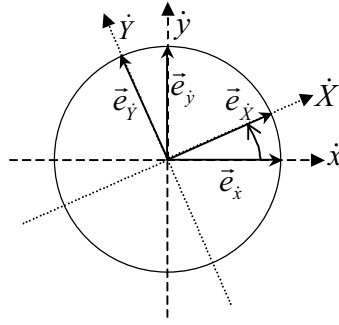


Figure 3.12. Représentation graphique de  $\dot{X} = V^T \dot{x}$

- $S$  est une matrice rectangulaire qui regroupe dans sa partie carrée supérieure les valeurs singulières de  $J_m$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  placées suivant la diagonale. Le reste de la matrice est constitué de zéros :

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \overbrace{\hspace{2cm}}^n \\ \hline \begin{array}{cc} \sigma_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \sigma_n \\ \hline & 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array} \end{array} \quad (3-30)$$

Cette matrice caractérise l'application linéaire qui, à un vecteur représentatif des vitesses de l'espace opérationnel fait correspondre un vecteur vitesse dans l'espace articulaire, représentatif des vitesses des moteurs. La représentation graphique (Figure 3.13) donnée à  $S$  est erronée puisque d'un espace de dimension  $n$ , on aboutit à un espace de dimension  $m$  ( $m > n$ ). Le graphe témoigne seulement des variations de longueur que subissent les vecteurs si on représente dans un même plan l'espace opérationnel et la restriction de l'espace articulaire à l'image de  $J_m$ . Ainsi le cercle unité de l'espace opérationnel est transformé en ellipse articulaire du plan image de  $J_m$ , et ses demi-axes ont pour longueurs les valeurs singulières  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ .

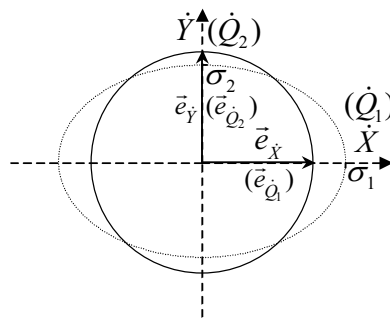


Figure 3.13. Représentation graphique de  $\dot{Q} = S \dot{X}$

- $U$  est aussi une matrice de passage. De dimension  $m \times m$ , elle agit dans l'espace articulaire. Les  $n$  premiers vecteurs colonnes  $U_1, \dots, U_n$  ( $n < m$ ) représentent les combinaisons des vitesses articulaires qui peuvent être engendrées par les mouvements de la nacelle ; en quelque sorte il s'agit des mouvements des actionneurs compatibles avec le mécanisme. Mathématiquement, ils constituent l'espace image de la matrice jacobienne inverse  $J_m$ . Les  $m - n$  colonnes qui suivent, témoignent des combinaisons des vitesses des actionneurs qui ne pourront

jamais être engendrées par un mouvement de l'organe terminal. Ils définissent le complément orthogonal de l'espace image de  $\mathbf{J}_m$ , ou bien encore le noyau de  $\mathbf{J}_m$  :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & \dots & U_n \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

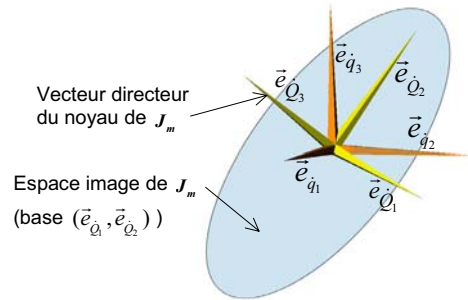


Figure 3.14. Représentation graphique de  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{U} \dot{\mathbf{Q}}$

La démarche consiste maintenant à s'aider de la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{J}_m$  effectuée précédemment, pour observer les transformations que subit un vecteur de l'espace articulaire lorsqu'il engendre un vecteur de vitesses opérationnelles.

De nouvelles difficultés apparaissent : choisir un vecteur quelconque de l'espace articulaire n'est pas réaliste puisque seuls les vecteurs du sous espace image de  $\mathbf{J}_m$  sont admissibles par le mécanisme. Nous observerons les transformations des vecteurs articulaires admissibles (c'est-à-dire compatibles avec le mécanisme) uniquement. Ce type de vecteur a pour base :

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}_m(\mathbf{J}_m)} = (\vec{e}_{\dot{Q}_1}, \dots, \vec{e}_{\dot{Q}_n}). \quad (3-32)$$

On note  $\tilde{\mathbf{Q}}$ ,  $\dim(\tilde{\mathbf{Q}}) = n$ , la matrice colonne qui lui est associée dans cette base. Introduisons également la matrice  $\mathbf{S}_1$  qui agit de l'espace opérationnel vers la restriction de l'espace articulaire à l'image de  $\mathbf{J}_m$  :

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

La relation suivante associe à un vecteur des vitesses articulaires compatibles avec la machine un vecteur des vitesses opérationnelles :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V} \mathbf{S}_1^{-1} \tilde{\mathbf{Q}} \quad (3-34)$$

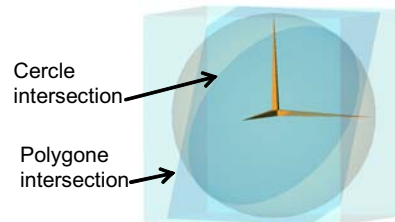
La restriction de la sphère unité (de rayon 1) de l'espace articulaire au plan image de  $\mathbf{J}_m$  est le cercle unité (cf. Figure 3.15). Ce cercle se voit déformé en une ellipse de demi-axes  $1/\sigma_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  lorsqu'il est rapporté à l'espace opérationnel. Le conditionnement de  $\mathbf{J}_m$  re-

présente l'aplatissement de l'ellipse opérationnelle, construite comme l'image du cercle articulaire, restriction de la boule unité au plan image de  $\mathbf{J}_m$ .

De la même manière que nous avons parlé du carré articulaire admissible pour une machine à 2 actionneurs, soulignons que l'espace articulaire admissible tout entier n'est pas sphérique mais bien cubique puisqu'il est défini par les inégalités :

$$-1 \leq \dot{q}_i \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, m\}. \quad (3-35)$$

Observons la restriction du cube unité (de demi-côté 1) à l'espace admissible par les vitesses des moteurs (cf. Figure 3.3).



**Figure 3.15.** Intersection du cube articulaire unité, de la sphère articulaire unité avec le plan image de  $\mathbf{J}_m$

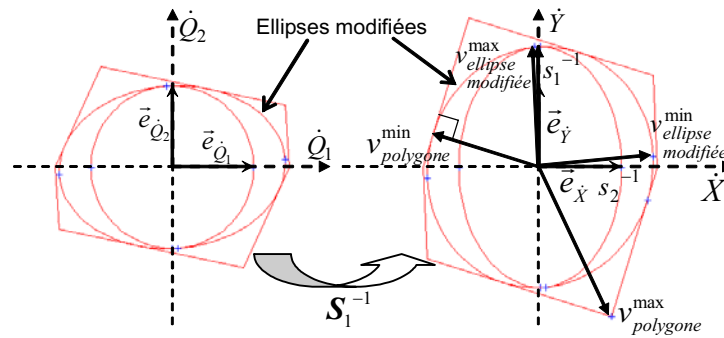
Il s'agit d'un parallélogramme. Cela signifie que pour qu'une combinaison des vitesses des moteurs existe, l'extrémité du vecteur qui la représente doit forcément être située à l'intérieur de ce polygone (et l'origine au centre du repère). La Figure 3.16 permet de comparer ce parallélogramme avec le cercle intersection de la sphère unité et du plan image de  $\mathbf{J}_m$ .



**Figure 3.16.** Polygone et cercle articulaire

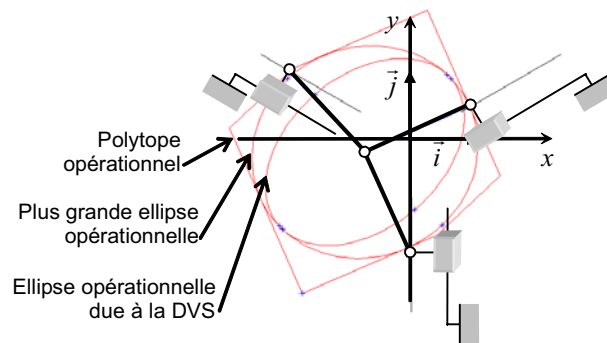
On constate que le cercle pourrait décrire un domaine plus important tout en restant admissible puisqu'il n'est pas tangent avec le polygone. Cela implique que les inverses des valeurs singulières ne sont pas révélateurs des vitesses maximales que peut atteindre la nacelle puisque les actionneurs seraient capables de vitesses plus élevées. Si pour un mécanisme non-redondant, cercle articulaire et ellipse opérationnelle étaient les ellipses de plus grandes surfaces inscrites respectivement dans le carré articulaire et le polytope, pour une machine redondante, ce n'est plus le cas.

Nous allons nous attacher à déterminer l'ellipse articulaire modifiée, de plus grande surface inscrite dans le parallélogramme articulaire. Puis nous montrerons que cette ellipse a pour image l'ellipse opérationnelle modifiée de plus grande surface inscrite dans le polygone opérationnel. Le rapport des demi-axes de cette ellipse nous permettra d'établir un indice d'isotropie réellement significatif. Nous nous intéresserons également au polytope opérationnel qui est la représentation exacte du lieu des vitesses opérationnelles réalisables. Le rapport des valeurs extrêmes  $v_{polygone}^{\max}$  et  $v_{polygone}^{\min}$  mesurées sur le polytope lui-même constitue un indice d'isotropie supplémentaire.



**Figure 3.17.** Domaines de l'espace articulaire image et domaines opérationnels typiques d'un MPAR

### 3.2.2.3 Étude de cas



**Figure 3.18.** Tracé de différents domaines des vitesses opérationnelles d'un MPAR (centré sur la nacelle)

La situation envisagée est décrite entièrement sur la Figure 3.18 :  $120^\circ$  entre chaque actionneur, longueur des bras = 100, position de la nacelle (-40, -10).

Les résultats obtenus sont précisés dans la Table 3.2. A la vue de la représentation des différents domaines, il apparaît nettement que la plus grande ellipse opérationnelle témoigne bien plus fidèlement de l'isotropie en vitesses que l'ellipse opérationnelle due à la DVS (dérivée de la restriction de la boule unité au plan image de  $\mathbf{J}_m$ ).

**Table 3.2.** Valeurs des différents indices d'isotropie pour un MPAR simple 3 actionneurs / 2 ddl

Indice d'isotropie	Valeur [sans unité]
$\text{cond}(\mathbf{J}_m)$	1,49
$\text{pcond}(\mathbf{J}_m)^*$	1,08
rapport des grandeurs extrêmes du polytope opérationnel	1,48

\* On note  $\text{pcond}$  le rapport des grandeurs extrêmes de la plus grande ellipse opérationnelle comprise dans le polytope opérationnel.

On trouvera d'autres résultats permettant la comparaison des différents critères en fin de chapitre avec le robot Archi, et dans le chapitre suivant avec le robot Eureka.

*Résumé* : Les objectifs de la section 3.2.2 étaient essentiellement :

- de montrer les limites de l'indice d'isotropie usuel basé sur le conditionnement de la matrice jacobienne lorsqu'il est censé qualifier le comportement en vitesses des MPAR,
- de proposer un indice d'isotropie construit à partir de l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le polytope opérationnel, et un indice construit à partir du polytope lui-même.

Les sections suivantes exposent comment construire l'ellipse de plus grande surface ainsi que le polytope opérationnel.

### 3.2.2.4 Recherche de l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le polytope opérationnel

La recherche de cette ellipse peut être faite :

- en raisonnant dans l'espace articulaire ; c'est-à-dire en cherchant l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le polytope articulaire puis en la transposant à l'espace opérationnel (section 3.2.2.4.1).
- en raisonnant directement dans l'espace opérationnel (section 3.2.2.4.2).

Nous verrons que les ellipses obtenues par ces deux méthodes sont identiques.

#### 3.2.2.4.1 Raisonnement dans l'espace articulaire

Déterminons l'application qui déforme le cercle articulaire du sous espace image de  $\mathbf{J}_m$  en ellipse de plus grande surface inscrite dans le polytope articulaire. Cette ellipse, une fois transposée à l'espace opérationnel par l'application linéaire de matrice  $\mathbf{S}_I^{-1}$  fournira l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le polytope opérationnel (ce point sera détaillé dans la section suivante). Dans un premier temps nous écrirons les conditions que doit vérifier l'ellipse articulaire pour être située à l'intérieur du polytope, puis nous formulerons cette recherche de l'ellipse de plus grande surface sous la forme d'un problème d'optimisation.

##### 3.2.2.4.1.1 Approche générale

Soit  $M$ , un point du plan image de  $\mathbf{J}_m$  qui parcourt le cercle. Le vecteur  $\overline{OM}$  (où  $O$  est l'origine du repère) est une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{e}_{\dot{Q}_1}, \dots, \vec{e}_{\dot{Q}_n}$  qui constituent une base du sous-espace image de  $\mathbf{J}_m$ . Aussi peut-on construire  $\mathbf{M}$ , la matrice colonne représentative de ce vecteur dans la base de l'image  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_m(\mathbf{J}_m)}$ .

La relation vectorielle  $\|\overline{OM}\| = 1$ , d'appartenance au cercle unité se traduit en terme de matrices par :

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = 1 \quad (3-36)$$

A ce point  $M$  du cercle, on associe deux points  $\tilde{M}$  et  $M'$  (cf. Figure 3.19) :

- $\tilde{M}$  appartient à l'ellipse orientée suivant les vecteurs directeurs de  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_m(\mathbf{J}_m)}$ ,
- $M'$  appartient à l'ellipse convenablement orientée pour être de plus grande surface possible.

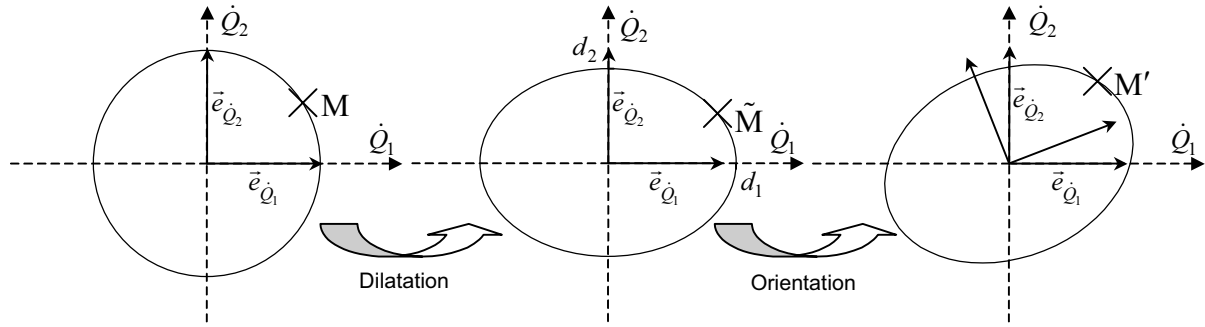


Figure 3.19. Transformations du cercle articulaire

$\tilde{\mathbf{M}}$  la matrice colonne représentative du point  $\tilde{\mathbf{M}}$  dans la base  $\mathcal{B}_{3m(\mathbf{J}_m)}$  vérifie :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{D} \mathbf{M} \quad (3-37)$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale dont les valeurs  $d_1, \dots, d_n$  sont les longueurs des demi-axes de l'ellipse.

$\mathbf{M}'$ , la matrice associée au point  $M'$  vérifie :

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{M}} \quad (3-38)$$

avec  $\mathbf{R}$  la matrice de rotation qui oriente l'ellipse convenablement. Par construction, cette matrice est orthogonale (matrice de changement de bases orthonormées).

Pour vérifier que l'ellipse est incluse dans le polygone, il suffit de s'assurer :

- que l'ellipse est située à l'intérieur du cube unité,
- et qu'elle appartient bien au plan image de  $\mathbf{J}_m$  (vrai par construction).

En décrivant le cube comme un ensemble de domaines admissibles de l'espace articulaire délimités par des plans, la relation d'appartenance au cube se traduit par :

$$\vec{e}_{q_i} \cdot \overline{\mathbf{O}\mathbf{M}'} \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (3-39)$$

Cette relation vectorielle signifie que la distance du point  $\mathbf{M}'$  à l'origine  $\mathbf{O}$ , mesurée suivant la direction  $\vec{e}_{q_i}$  doit être inférieure à 1. Bien que devant être vérifiée pour toutes les faces du cube articulaire, pour des raisons de symétrie de l'ellipse et du cube par rapport à l'origine  $\mathbf{O}$ , il nous est possible de retenir  $m$  faces uniquement. Matriciellement cette relation s'écrit :

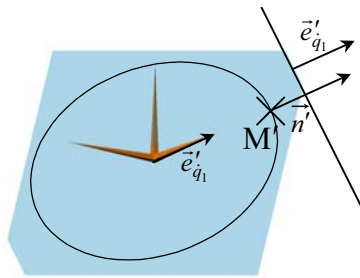
$$\mathbf{E}_i^T \mathbf{M}' \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (3-40)$$

où  $\mathbf{E}_i$  est la matrice colonne associée au vecteur directeur de la face  $i$  du cube, exprimée dans la base  $\mathcal{B}_{3m(\mathbf{J}_m)}$ . Les faces considérées sont dirigées par les vecteurs directeurs  $\vec{e}_{q_i}$  de la base canonique de l'espace articulaire.

### 3.2.2.4.1.2 Recherche des normales à l'ellipse et au polygone

Pour vérifier l'appartenance de l'ellipse au domaine admissible délimité par la face  $i$ , il est judicieux de rechercher parmi tous les points de l'ellipse, le point  $\mathbf{M}'$  le plus proche de la face. Il suffira alors de vérifier que ce point appartient bien au domaine admissible  $i$  pour que tous les autres points de l'ellipse appartiennent également à ce domaine. Soit  $\vec{e}'_{q_i}$  la projection dans le plan image de  $\mathbf{J}_m$  du vecteur  $\vec{e}_{q_i}$ . Une propriété vérifiée par le point  $\mathbf{M}'$  est le fait que la normale  $\vec{n}'$  à l'ellipse en ce point doit être colinéaire avec le vecteur  $\vec{e}'_{q_i}$ .





**Figure 3.20.** Colinéarité de la normale à l'ellipse avec la normale à la frontière

La relation matricielle :

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \mid N' = k E_i \quad (3-41)$$

traduit cette exigence de colinéarité.  $N'$  est la matrice colonne associée au vecteur  $\bar{n}'$  dans la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}m(J_m)}$  et  $E_i$  est bien la matrice colonne représentative de la projection du vecteur  $\bar{e}_{q_i}$  dans le sous espace de  $J_m$  puisqu'elle est constituée des coordonnées du vecteur  $\bar{e}_{q_i}$  dans la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}m(J_m)}$ .

Explicitons  $\bar{n}'$ . Pour cela, plaçons-nous dans le sous espace image de  $J_m$  et envisageons l'ellipse avant qu'elle ne soit orientée. Si  $f$  est la fonction qui au point  $\tilde{M}$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  exprimées dans le repère  $\mathfrak{R} = \langle O, \mathcal{B}_{\mathcal{S}m(J_m)} \rangle$  associe la valeur :

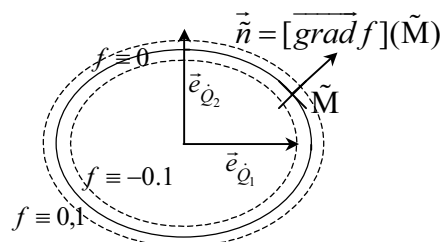
$$f(\tilde{M}) = \frac{x_1^2}{d_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{d_n^2} - 1, \quad (3-42)$$

alors l'ellipse articulaire (non orientée) de demi-axes  $d_1, \dots, d_n$  est définie dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}m(J_m)}$  comme l'ensemble des points  $\tilde{M}$  qui vérifient :

$$f(\tilde{M}) = 0. \quad (3-43)$$

Puisque la fonction  $f$  est différentiable pour tous les points de son domaine de définition, alors tous les points sont réguliers et  $[\overline{\text{grad} f}](\tilde{M})$  est un vecteur normal à l'ellipse au point  $\tilde{M}$  :

$$\tilde{n} = [\overline{\text{grad} f}](\tilde{M}) = \frac{2x_1}{d_1^2} \bar{e}_{q_1} + \dots + \frac{2x_n}{d_n^2} \bar{e}_{q_n}. \quad (3-44)$$



**Figure 3.21.** Expression de la normale à un ellipse

Matriciellement dans la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}m(J_m)}$ , le gradient se traduit par la relation :

$$\tilde{N} = D^{-2} \tilde{M} \quad (3-45)$$

En effet, puisque la matrice  $D$  est diagonale, on vérifie que :

$$\mathbf{D}^{-2} = \begin{bmatrix} 1/d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_n^2 \end{bmatrix}. \quad (3-46)$$

Déterminer  $\vec{n}'$  revient à orienter convenablement  $\vec{\tilde{n}}$  à l'aide de la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  :

$$\mathbf{N}' = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{N}}. \quad (3-47)$$

Pour faire un bilan, voici le système d'équations matricielles à vérifier :

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^T \mathbf{M} = 1 \end{array} \right. \quad (3-36)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{D} \mathbf{M} \quad (3-37)$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{M}} \quad (3-38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_i^T \mathbf{M}' \leq 1 \end{array} \right. \quad (3-40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{R}^* \mid \mathbf{N}' = k \mathbf{E}_i \end{array} \right. \quad (3-41)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{D}^{-2} \tilde{\mathbf{M}} \quad (3-45)$$

$$\mathbf{N}' = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{N}} \quad (3-47)$$

(3-37) et (3-38) impliquent que :

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R} \mathbf{D} \mathbf{M}. \quad (3-48)$$

(3-45) et (3-47) deviennent :

$$\mathbf{N}' = \mathbf{R} \mathbf{D}^{-2} \tilde{\mathbf{M}}, \quad (3-49)$$

expression qui se simplifie connaissant (3-37) en :

$$\mathbf{N}' = \mathbf{R} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}. \quad (3-50)$$

En inversant cette relation, on obtient :

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \mathbf{R}^T \mathbf{N}'. \quad (3-51)$$

L'expression (3-48) injectée dans (3-40) s'écrit :

$$\mathbf{E}_i^T \mathbf{R} \mathbf{D} \mathbf{M} \leq 1. \quad (3-52)$$

(3-41) dans (3-51) devient :

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \mid \mathbf{M} = k \mathbf{D} \mathbf{R}^T \mathbf{E}_i, \quad (3-53)$$

ce qui reporté dans (3-36), sachant que  $\mathbf{D}$  est diagonale, s'écrit :

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \mid k^2 \mathbf{E}_i^T \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{E}_i = 1. \quad (3-54)$$

De même en reportant (3-53) dans (3-40), on obtient :

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \mid k \mathbf{E}_i^T \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{E}_i \leq 1. \quad (3-55)$$

En s'assurant que  $0 \leq k \mathbf{E}_i^T \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{E}_i$ , on peut élever (3-55) au carré :

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \mid k^2 \mathbf{E}_i^T \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{E}_i \mathbf{E}_i^T \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{E}_i \leq 1. \quad (3-56)$$

Connaissant (3-54) cette relation se simplifie en l'inégalité :

$$\mathbf{E}_i^T \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{E}_i \leq 1. \quad (3-57)$$

Appelons  $\Sigma$  la matrice qui vérifie l'égalité suivante :

$$\Sigma = \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^T. \quad (3-58)$$

On vérifie en calculant la transposée de  $\Sigma$  qu'il s'agit d'une matrice symétrique. L'inégalité (3-57) peut être reformulé ainsi :

$$\mathbf{E}_i^T \Sigma \mathbf{E}_i \leq 1, \quad (3-59)$$

cette expression devant être vérifié pour tout  $i$  élément de  $\{1, \dots, m\}$ .

Explicitons l'expression des vecteurs  $\mathbf{E}_i$  à l'aide de la matrice  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{\dot{q}_1} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_1} & \dots & \vec{e}_{\dot{q}_1} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_n} & \dots & \vec{e}_{\dot{q}_1} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_m} \\ & & & & \\ & & & & \\ \vec{e}_{\dot{q}_m} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_1} & \dots & \vec{e}_{\dot{q}_m} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_n} & \dots & \vec{e}_{\dot{q}_m} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_m} \end{bmatrix}, \quad (3-60)$$

donc  $\mathbf{U}$  est la juxtaposition de deux matrices  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$ , dont la première est associée à l'espace image de  $\mathbf{J}_m$  :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \mid \mathbf{U}_2] \text{ avec} \quad (3-61)$$

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \vec{e}_{\dot{q}_1} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_1} & \dots & \vec{e}_{\dot{q}_1} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_n} \\ & & \\ & & \\ \vec{e}_{\dot{q}_m} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_1} & \dots & \vec{e}_{\dot{q}_m} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_n} \end{bmatrix} \text{ et} \quad (3-62)$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \vec{e}_{\dot{q}_1} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_{n+1}} & \dots & \vec{e}_{\dot{q}_1} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_m} \\ & & \\ & & \\ \vec{e}_{\dot{q}_m} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_{n+1}} & \dots & \vec{e}_{\dot{q}_m} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_m} \end{bmatrix} \quad (3-63)$$

Et puisque :

$$\mathbf{E}_i = [\vec{e}_{\dot{q}_i} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_1} \quad \dots \quad \vec{e}_{\dot{q}_i} \cdot \vec{e}_{\dot{Q}_n}]^T \quad (3-64)$$

(projection  $\vec{e}'_{\dot{q}_i}$  du vecteur  $\vec{e}_{\dot{q}_i}$  dans l'espace image de  $\mathbf{J}_m$  exprimée dans la base  $\mathcal{B}_{3m(\mathbf{J}_m)}$ ) on constate que :

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{E}_m^T \end{bmatrix} \quad (3-65)$$

ou encore, en appelant  $\mathbf{U}_1(i)$  la ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{U}_1$  :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{U}_1(i) \quad (3-66)$$

Aussi lorsqu'on envisage toutes les valeurs pour  $i$  et en utilisant la relation (3-66), l'expression (3-59) peut être reformulée ainsi :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \mathbf{U}_1(i) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_1(i)^T \leq 1 \quad (3-67)$$

Ce système matriciel exprime les conditions que doit vérifier l'ellipse articulaire pour être située à l'intérieur du polytope articulaire, qui représente le domaine de l'espace admissible par les vitesses des moteurs.

### 3.2.2.4.1.3 Recherche de l'ellipse admissible de plus grande surface

Parmi toutes les ellipses admissibles, il reste à trouver celle qui est de surface maximale. Nous allons reformuler cette recherche sous la forme d'un problème d'optimisation. La surface de l'ellipse vaut :

$$A = k \times \prod_{i=1}^n d_i, \quad (3-68)$$

avec  $k = \pi$  en dimension 2 ( $A = \pi \times d_1 \times d_2$ ),  $k = \frac{4}{3}\pi$  en dimension 3 ( $A = \frac{4}{3}\pi \times d_1 \times d_2 \times d_3$ ), etc.

Maximiser  $A$  revient donc à maximiser le produit des longueurs des demi-axes de l'ellipse  $\prod_{i=1}^n d_i$ . Il est équivalent de maximiser ce produit élevé au carré, ou encore d'en minimiser l'opposé pour aboutir à un problème de minimisation (minimisation de  $-\prod_{i=1}^n d_i^2$ ).

Si l'on calcule le déterminant de la matrice  $\Sigma$ , on constate que :

$$\det(\Sigma) = \det(\mathbf{R}) \times \det(\mathbf{D}^2) \times \det(\mathbf{R}^{-1}) = \det(\mathbf{D}^2). \quad (3-69)$$

Or puisque  $\mathbf{D}$  est diagonale, il en découle que :

$$\det(\Sigma) = \prod_{i=1}^n d_i^2 \quad (3-70)$$

En conclusion, déterminer l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le polygone admissible, revient à trouver la matrice symétrique  $\Sigma$  qui vérifie :

$$-\det(\Sigma) \text{ minimum,} \quad (3-71)$$

*sous les contraintes*

$$\mathbf{U}_1(i) \Sigma \mathbf{U}_1(i)^T \leq 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Une fois  $\Sigma$  déterminée il suffit d'effectuer sa décomposition en valeurs propres pour obtenir les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{R}$  introduites au début. En effet puisque  $\Sigma$  est symétrique réelle, par théorème, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. On obtient :

$$\Sigma = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^T \quad (3-72)$$

où  $\mathbf{R}$  est la matrice de rotation et  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale dont les valeurs diagonales  $\delta_i$  ont pour racines les valeurs diagonales de  $\mathbf{D}$  :

$$d_i = \sqrt{\delta_i} \quad (3-73)$$

En initialisant le problème avec  $\Sigma = \mathbf{I}_n$  à l'itération zéro, le processus d'optimisation converge bien vers une matrice dont les valeurs propres sont toutes positives, ceci de manière à pouvoir calculer les racines carrées.

La connaissance de  $\mathbf{R}$  et de  $\mathbf{D}$  caractérise entièrement l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le polygone articulaire. Lorsqu'on compose cette ellipse par l'application linéaire de matrice  $\mathbf{S}_1^{-1}$  (qui agit du sous espace articulaire image de  $\mathbf{J}_m$  vers l'espace opérationnel), on obtient la plus grande ellipse inscrite dans le polygone opérationnel. Ce point sera détaillé dans le chapitre suivant.

En conclusion, la transformation qui caractérise la déformation du cercle articulaire en ellipse opérationnelle admissible de plus grande surface est donnée par la relation matricielle :

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{R} \mathbf{D}. \quad (3-74)$$

Les valeurs singulières de  $\mathbf{X}$  sont les longueurs des demi-axes de l'ellipse. Elles témoignent de vitesses opérationnelles admissibles suivant des directions orthogonales. Les indices de performances que nous suggérons d'utiliser pour caractériser les performances en vitesses des MPAR se basent sur la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{X}$ , p. ex.  $\text{cond}(\mathbf{X})$ ,  $\min(\sigma(\mathbf{X}))$ , etc.

### 3.2.2.4.2 Raisonnement dans l'espace opérationnel

L'approche présentée section 3.2.2.4.1 a été menée dans l'espace articulaire. Cependant plutôt que de chercher la plus grande ellipse inscrite dans le polygone articulaire puis de calculer son

image dans l'espace opérationnel, il est envisageable de chercher directement la plus grande ellipse incluse dans le polygone opérationnel.

Soit  $M'$  un point du sous espace articulaire image de  $J_m$  qui a pour image le point  $K'$  de l'espace opérationnel. La relation matricielle :

$$M' = S_1 K' \quad (3-75)$$

témoigne de la relation de passage entre ces deux espaces ( $M'$  est la matrice colonne associée au point  $M'$  dans le base  $\mathcal{B}_{3m(J_m)}$  et  $K'$  est celle associée au point  $K'$  dans le base propre à la DVS de  $J_m$ ).

L'équation (3-40), vérifiée pour tous les indices  $i$  éléments de  $\{1, \dots, m\}$ , précisait dans l'espace articulaire la relation d'appartenance du point  $M'$  au polygone articulaire. Grâce à la relation (3-75), la relation (3-40) devient dans l'espace opérationnel :

$$E_i^T S_1 K' \leq 1 \quad (3-76)$$

Aussi, puisqu'en dehors de cette équation, le système qui permet de vérifier que l'ellipse est bien comprise dans le domaine admissible reste inchangé, la relation à vérifier par l'application linéaire qui caractérise l'ellipse opérationnelle s'exprime ainsi :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, U_1(i) S_1 \Sigma' S_1^T U_1(i)^T \leq 1 \quad (3-77)$$

où  $\Sigma'$  est une matrice symétrique qui est définie de la manière suivante :

$$\Sigma' = R' D'^2 R'^T. \quad (3-78)$$

Cette relation est pratiquement similaire à la relation (3-72) obtenue dans l'espace articulaire.  $R'$  et  $D'$  sont respectivement la matrice de passage qui oriente l'ellipse opérationnelle convenablement et la matrice diagonale qui transforme le cercle en ellipse.

Dans l'espace opérationnel, le problème d'optimisation consiste à trouver la matrice  $\Sigma'$  symétrique qui vérifie :

$$\begin{aligned} & -\det(\Sigma') \text{ minimum,} \\ & \text{sous les contraintes} \\ & U_1(i) S_1 \Sigma' S_1^T U_1(i)^T \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (3-79)$$

La décomposition en valeurs propres de  $\Sigma'$  permet d'obtenir les matrices  $R'$  et  $D'$ . La matrice  $X'$  telle que :

$$X' = R' D', \quad (3-80)$$

caractérise l'application linéaire qui transforme un cercle en l'ellipse de plus grande surface inscrite dans le polytope opérationnel. Le rapport des valeurs extrêmes de  $D'$  constitue donc l'indice d'isotropie construit précédemment.

On vérifie aisément par le calcul que :

$$X = X', \quad (3-81)$$

c'est-à-dire que les ellipses obtenues par les deux méthodes sont bien identiques. En effet, d'après les définitions de  $X$  et de  $X'$ , on constate que :

$$\Sigma = S_1 X X^T S_1^T \text{ et} \quad (3-82)$$

$$\Sigma' = X' X'^T. \quad (3-83)$$

Donc les contraintes d'appartenance aux domaines admissibles s'écrivent :

□ en raisonnant dans l'espace articulaire :

$$U_1(i) S_1 X X^T S_1^T U_1(i)^T \leq 1, \quad (3-84)$$

□ en raisonnant dans l'espace opérationnel :

$$U_1(i) \mathcal{S}_1 X' X'^T \mathcal{S}_1^T U_1(i)^T \leq 1. \quad (3-85)$$

Le problème d'optimisation dans l'espace opérationnel revient à minimiser la fonction :

$$-\det(\Sigma') = -\det(X' X'^T), \quad (3-86)$$

et il en est de même en raisonnant dans l'espace articulaire puisque comme :

$$-\det(\Sigma) = -2 \det(\mathcal{S}_1) \times \det(X X^T) \quad (3-87)$$

et que :

$$\det(\mathcal{S}_1) \geq 0, \quad (3-88)$$

il est équivalent de minimiser la fonction  $-\det(\Sigma)$  ou bien  $-\det(X X^T)$ .

### 3.2.2.5 Recherche des vitesses extrêmes du polygone opérationnel

Nous allons consacrer cette section à la recherche des grandeurs extrêmes du polygone opérationnel  $v_{polygone}^{\max}$  et  $v_{polygone}^{\min}$ , dont le rapport peut constituer un indice d'isotropie :

- $v_{parallélogramme}^{\max}$  constitue la plus grande vitesse qu'est capable d'atteindre la nacelle. Celle-ci est obtenue suivant une direction bien particulière, illustrée par un coin du polygone opérationnel.
- $v_{parallélogramme}^{\min}$  est appelée « vitesse isotrope maximale » du mécanisme. Il s'agit de la vitesse maximale que l'on peut atteindre quelle que soit la direction de l'espace opérationnel. Graphiquement cette vitesse constitue le rayon du plus grand cercle centré sur l'origine, inclus dans le polygone opérationnel.

#### 3.2.2.5.1 Recherche de la vitesse maximale du polygone opérationnel

L'équation (3-76), vérifiée pour tous les indices  $i$  éléments de  $\{1, \dots, m\}$ , précisait dans l'espace opérationnel la relation d'appartenance du point  $K'$  au polygone opérationnel. Pour un point  $K'_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , situé sur la frontière  $i$  cette relation s'écrit :

$$E_i^T \mathcal{S}_1 K'_i = 1 \quad (3-89)$$

La relation qui caractérise l'appartenance du point  $K'_{m+i}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  à la face diamétralement opposée est :

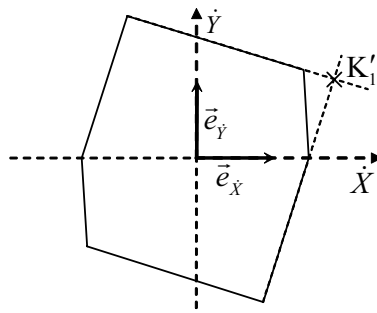
$$-E_i^T \mathcal{S}_1 K'_{m+i} = 1 \quad (3-90)$$

Si, pour des raisons de symétrie, nous avons omis sciemment de considérer les faces de type (3-90), maintenant qu'il s'agit de trouver les coins du polytope opérationnel, on ne peut plus les omettre. Un coin du polytope est un point de l'espace de dimension  $n$ , il convient donc de rechercher parmi les  $2m$  équations des frontières ( $m$  de type (3-89) et  $m$  de type (3-90)), toutes les combinaisons de  $n$  faces qui engendrent des coins. Pour cela, on s'intéresse aux  $C_{2m}^n$  combinaisons de faces possibles.

Si le système est résolvable, on vérifie que le point  $K'_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 2m\}$  calculé appartient bien au parallélogramme admissible.

Il se peut que le système ne soit pas résolvable, lorsque par exemple deux vecteurs  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_j$  ont la même projection dans le plan image de  $J_m$  ( $E_i = E_j$ ).

De plus lorsque l'on a réussi à déterminer un point  $K'_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 2m\}$ , ce point peut se situer en dehors de l'espace admissible (cf. Figure 3.22).



**Figure 3.22.** Obtention d'un point en dehors du polytope admissible

Il convient donc d'éliminer ces points. Après cette opération, il ne reste plus que  $r$  coins valides ( $r \leq 2m$ ). Pour plus de détails sur la manière de formuler ce système et d'éliminer les points indésirables, on pourra se reporter à l'analyse en efforts en fin de chapitre.

Une fois que l'ensemble de tous les coins  $K'_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ , est déterminé, il ne reste plus qu'à retenir la plus grande distance de ces points au centre :

$$v_{polygone}^{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \|K'_i\| \quad (3-91)$$

### 3.2.2.5.2 Recherche de la vitesse minimale du polygone opérationnel

La plus petite distance  $v_{polygone}^{\min}$  est forcément mesurée entre le centre et un point situé sur un des cotés du parallélogramme.  $H'_i$  le point du côté  $i$  le plus proche du centre a pour propriété d'être colinéaire avec la normale au côté.

La relation d'appartenance (3-89) du point  $H'_i$  à la face  $i$  peut être reformulée ainsi :

$$\mathbf{E}'_i{}^T \mathbf{H}' = 1, \quad (3-92)$$

si l'on définit la normale au côté  $i$  par le vecteur colonne  $\mathbf{E}'_i$  tel que :

$$\mathbf{E}'_i = \mathbf{S}_i \mathbf{E}_i. \quad (3-93)$$

La relation de colinéarité s'écrit :

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \mid \mathbf{H}'_i = k \mathbf{E}'_i \quad (3-94)$$

Aussi, (3-94) explicité dans (3-93) implique que :

$$\mathbf{E}'_i{}^T k \mathbf{E}'_i = 1 \quad (3-95)$$

D'où l'expression de  $k$  :

$$k = 1 / \|\mathbf{E}'_i\|^2 \quad (3-96)$$

En remplaçant l'expression de  $k$  dans (3-94) et en calculant la distance du point  $H'_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  au centre, on aboutit à :

$$\|\mathbf{H}'_i\| = 1 / \|\mathbf{E}'_i\|, \quad (3-97)$$

ou encore en s'aidant de la définition de  $\mathbf{E}'_i$  :

$$\|\mathbf{H}'_i\| = 1 / \|\mathbf{S}_i \mathbf{E}_i\|. \quad (3-98)$$

Il suffit alors de retenir la valeur minimum pour obtenir  $v_{polygone}^{\min}$  :

$$v_{polygone}^{\min} = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \|\mathbf{H}'_i\| \quad (3-99)$$

### 3.2.2.6 Bilan

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence les limitations des méthodes d'analyse usuelles et des indices de performances basés sur le conditionnement de la matrice jacobienne lorsqu'il s'agit d'évaluer les performances des MPAR en termes d'isotropie en vitesses. Nous avons introduit de nouveaux outils pour évaluer et optimiser ces mécanismes, qui s'intéressent aux performances réelles dans l'espace opérationnel, plutôt qu'à la qualité de la transformation entre espace articulaire et espace opérationnel. Le premier outil s'inspire de l'approche usuelle : il est basé sur un ellipsoïde opérationnel. Celui-ci a pour particularité de témoigner plus fidèlement des performances en vitesses que l'ellipsoïde usuel. Le second outil se sert du polytope opérationnel. La manière de le déterminer ainsi que de trouver ses grandeurs extrêmes est développée. Nous laissons le choix au concepteur d'élaborer à l'aide de ces outils, l'indice de performances qu'il estime le plus pertinent pour caractériser sa machine.

## 3.3 Extensions : évaluation des performances en efforts des robots parallèles à câbles

### 3.3.1 Introduction

Après s'être intéressé à l'analyse en vitesse pour les MPAR, il nous est paru naturel de s'intéresser aux performances en efforts de ce type de mécanismes. Si pour les mécanismes classiques le conditionnement de la matrice jacobienne témoigne aussi bien du comportement en efforts que de celui en vitesses – à cause de la dualité effort-vitesse systématique – nous verrons que pour les MPAR il est nécessaire de mener une analyse spécifique pour caractériser les performances en efforts. Dans un souci de généralisation, nous nous sommes efforcés de rendre compatible cette méthode avec les mécanismes parallèles à câbles où seuls des efforts de traction pure sont envisageables dans les câbles. Cette particularité rend nécessaire la redondance d'actionnement pour le fonctionnement des robots [Verhoeven 1998] (à l'exception des mécanismes de type « grue » où la gravité permet de tendre les câbles).

La difficulté a consisté à caractériser le polytope des efforts opérationnels. Une fois celui-ci déterminé, la recherche des grandeurs extrêmes du polytope, comme celle de l'ellipsoïde de plus grande surface comprise dans le polytope est réalisée conformément à la méthode de la section précédente.

Légèrement en marge par rapport aux objectifs que nous nous étions fixés, les robots à câbles offrent un champ de recherche important pour obtenir de forts débattements angulaires. C'est ainsi que le robot Falcon [Kawamura 1995] [Kawamura 2000] (7 actionneurs / 6 ddl) est capable d'atteindre des débattements angulaires de  $\pm 45^\circ$  suivant deux axes et de  $\pm 25^\circ$  autour de l'axe de l'outil au centre de son volume de travail (voir Figure 3.23).

Dans le but d'augmenter le volume de travail, des robots présentant une plus grande redondance d'actionnement ont vu le jour [Lafourcade 2002] [Lindemann 1989] (9 actionneurs / 6 ddl). Divers outils mathématiques ont été élaborés en vue de caractériser ces robots. C'est ainsi que Kawamura et Ken [Kawamura 1993] proposent de vérifier que la tension est toujours posi-



tive dans les câbles à l'aide d'un processus itératif. Verhoeven et Hiller [Verhoeven 2000] [Verhoeven 2002] décrivent à l'aide d'inégalités le domaine de l'espace opérationnel où les tensions dans les câbles sont supérieures à un certain seuil. Des approches se basant sur la matrice de rigidité ont également émergé [Choe 1996] [Verhoeven 1998]. La méthode que nous proposons permet de caractériser complètement les performances en efforts de ce type de mécanismes. D'autres indices en efforts existent, tels dans [Takeda 2000] ou dans [Shen 1994] où il est proposé d'envisager un domaine constitué de plusieurs morceaux d'ellipsoïdes. Nguyen [Nguyen 1987] [Nguyen 1988] propose une méthode graphique de caractérisation des efforts transmissibles pour la saisie de pièces par un préhenseur à touches. Ce problème est facilement transposable aux robots à câbles puisque la nécessité d'efforts de saisie d'amplitudes positives uniquement se traduit par l'exigence de tensions positives dans les câbles exclusivement.

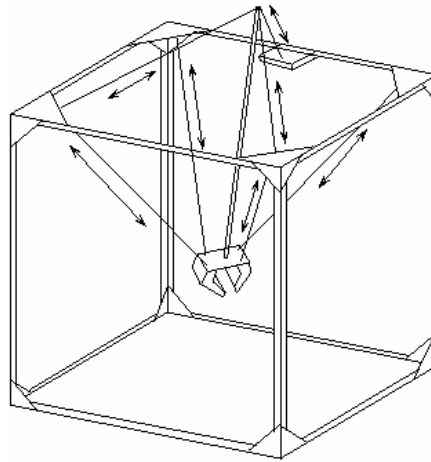


Figure 3.23. Robot à câbles Falcon

### 3.3.2 Modélisation des robots parallèles à câbles

Pour illustrer les propos qui vont suivre, envisageons le cas du manipulateur parallèle à câbles présenté Figure 3.24. Il s'agit d'un mécanisme plan 3 actionneurs / 2 degrés de liberté, composé de trois moteurs rotatifs agissant par le biais de câbles sur une nacelle ponctuelle. Ce mécanisme, ainsi qu'un mécanisme identique mais à 4 actionneurs sont présentés dans [Williams 2001].

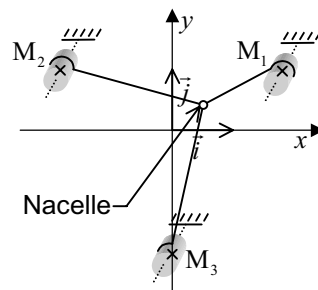


Figure 3.24. Géométrie d'un manipulateur parallèle à câbles typique

*Rappel :*

- $m$  est la dimension de l'espace articulaire (sur la figure ci-dessus  $m = 3$ ),

- $n$  est la dimension de l'espace opérationnel ( $n = 2$ ),

On note :

- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \dots \ \tau_m]^T$  le vecteur des efforts articulaires et,
- $\boldsymbol{f} = [f_1 \ \dots \ f_n]^T$  le vecteur des efforts opérationnels.

Les formules vont être établies pour n'importe quelle dimension d'espace dès lors que  $m > n$ .

### 3.3.3 Transformation des efforts de l'espace articulaire vers l'espace opérationnel

Nous rappelons que la matrice jacobienne inverse  $\boldsymbol{J}_m$  associe aux vitesses opérationnelles  $\dot{\boldsymbol{x}}$ , les vitesses articulaires  $\dot{\boldsymbol{q}}$  ( $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_m \dot{\boldsymbol{x}}$ ). En faisant l'hypothèse qu'aucune puissance interne n'est dissipée dans le mécanisme, le théorème de conservation de la puissance appliqué à ce mécanisme s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{f}. \quad (3-100)$$

Ce qui implique que :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{J}_m^T \boldsymbol{\tau}. \quad (3-101)$$

Le domaine des efforts articulaires admissibles, c'est-à-dire le domaine de l'espace articulaire où chaque point représente une combinaison d'efforts moteurs réaliste, est un parallélépipède rectangle, défini par les  $2m$  inégalités :

$$\begin{cases} \tau_i \geq \tau_i^{\min} \\ \tau_i \leq \tau_i^{\max} \end{cases}, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (3-102)$$

La valeur maximale  $\tau_i^{\max}$  est déterminée soit par les performances maximales du moteur  $i$ , soit par la contrainte de traction maximale qu'est capable de supporter le câble. La valeur minimum  $\tau_i^{\min}$  caractérise la contrainte minimale que l'on souhaite imposer au mécanisme pour que les câbles restent tendus suffisamment afin de rattraper les jeux ou de contrôler la fréquence des vibrations. Dans le cas des MPAR classiques, il suffit de choisir :

$$\tau_i^{\min} = -\tau_i^{\max} \quad (3-103)$$

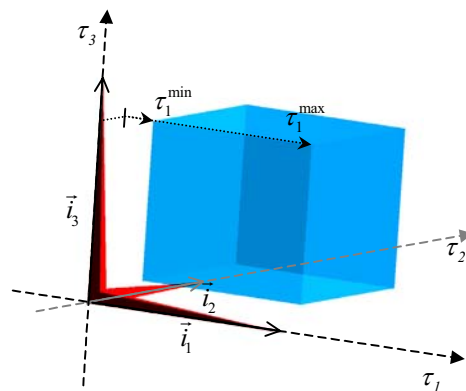


Figure 3.25. Espace des forces articulaires admissibles

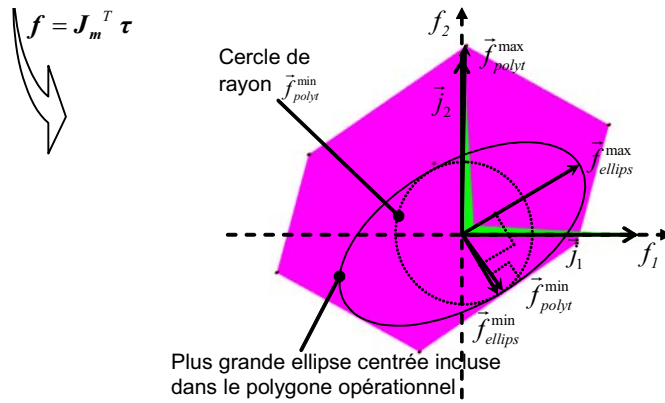


Figure 3.26. Espace des forces opérationnelles admissibles

Lorsque l'on fait subir au domaine des efforts articulaires admissibles, la transformation caractérisée par  $\mathbf{J}_m^T$ , on aboutit au polygone des efforts opérationnels. Dans la section suivante nous allons nous efforcer de caractériser mathématiquement ce polygone. Une description systématique des frontières sera établie de manière à pouvoir traiter le reste du problème à l'aide des outils mathématiques développés en début de chapitre.

De nouveau, la décomposition en valeurs singulières de la matrice jacobienne permet de se rendre compte de la manière dont le parallélépipède rectangle se transforme en polytope opérationnel :

$$\mathbf{J}_m^T = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (3-104)$$

A une transposition de matrices près, les matrices  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{V}$  représentent les matrices établies lors de la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{J}_m$  effectuée en début de chapitre. En effet si on note :

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (3-105)$$

les égalités suivantes sont vérifiées:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_1, \quad (3-106)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \text{ et :} \quad (3-107)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1^T. \quad (3-108)$$

Aussi, nous rappelons que :

- $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des matrices de passage de dimensions  $m \times m$  et  $n \times n$  respectivement. Elles représentent les rotations des bases canoniques vers les bases adaptées à la DVS.
- $\mathbf{S}$  est une matrice rectangulaire de dimensions  $n \times m$  qui regroupe les valeurs singulières de  $\mathbf{J}_m$  :  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ .

$\mathbf{S}$  peut être décomposée en deux sous-matrices :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' \mathbf{P}, \quad (3-109)$$

où  $\mathbf{P}$  est une matrice de projection de l'espace articulaire vers l'image de  $\mathbf{J}_m^T$ . De dimension  $n \times m$  elle s'écrit :

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \mathbf{0} \\ & & 1 & \end{array} \right]. \quad (3-110)$$

$\mathbf{S}'$  est une matrice diagonale constituée des valeurs singulières de  $\mathbf{J}_m^T$  :

$$\mathbf{S}' = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \quad (3-111)$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la manière dont le parallélépipède est transformé. Pour cela introduisons :

- le vecteur articulaire  $\boldsymbol{\tau}_s$  dont les composantes sont exprimées dans la base utile à la DVS,
- le vecteur  $\boldsymbol{\tau}_r$  restriction du vecteur précédent à l'image de  $\mathbf{J}_m^T$ ,
- et  $\mathbf{f}_s$  le vecteur des efforts opérationnels exprimé dans la base utile à la DVS.

Le schéma suivant illustre les différentes transformations que subissent les différents vecteurs :

$$\boldsymbol{\tau} \xrightarrow{V^T} \boldsymbol{\tau}_s \xrightarrow{P} \boldsymbol{\tau}_r \xrightarrow{S'} \mathbf{f}_s \xrightarrow{U} \mathbf{f}$$

Notre but sera d'écrire les égalités qui caractérisent chaque frontière  $\mathcal{S}_k$  du polytope opérationnel. Les égalités devront être de la forme suivante de manière à être compatibles avec le formalisme introduit en début de chapitre :

$$\mathcal{S}_k = \{M \mid \mathbf{m}^T \mathbf{v}_k = 1\} \quad (3-112)$$

où  $\mathbf{m}$  est le vecteur allant de  $O$ , l'origine du repère au point  $M$  appartenant à la frontière et  $\mathbf{v}_k$  est le vecteur caractéristique de la frontière. Il faut remarquer qu'un tel formalisme est toujours possible sauf lorsque la frontière vient à rencontrer l'origine (ce cas extrême témoigne d'une singularité pour le mécanisme).

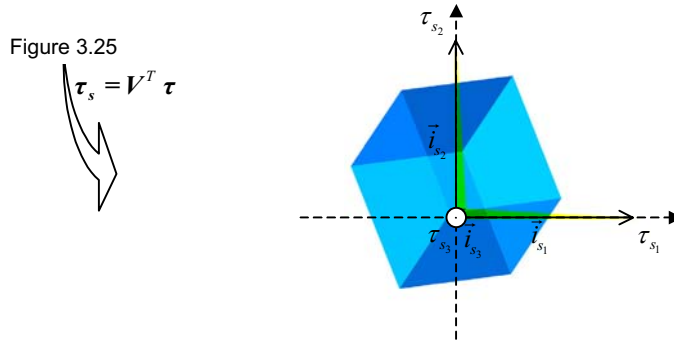


Figure 3.27. Domaine des efforts articulaires admissibles vu depuis un point colinéaire avec le noyau de  $\mathbf{J}_m^T$

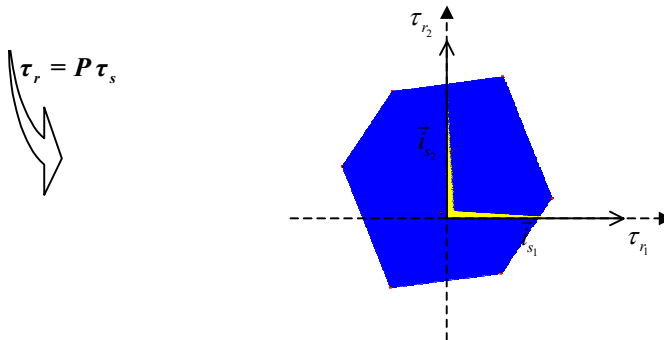
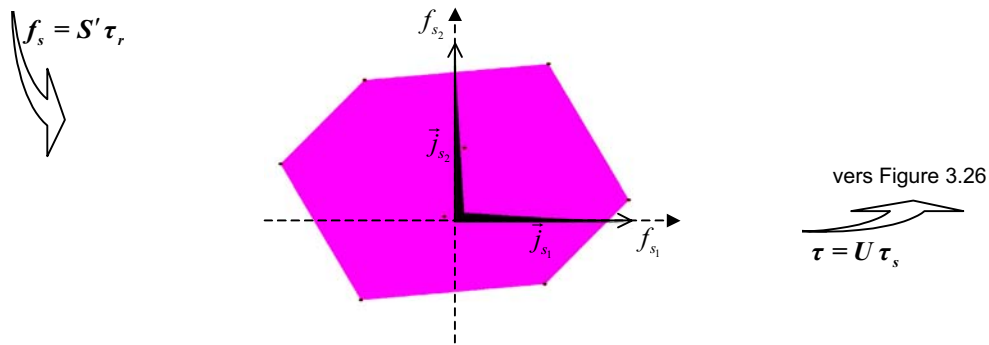


Figure 3.28. Projection du domaine des efforts articulaires admissibles dans le plan image de  $\mathbf{J}_m^T$



**Figure 3.29.** Domaine des efforts opérationnels admissibles orienté selon les vecteurs de la base opérationnelle utiles à la DVS

Les figures précédentes illustrent les transformations des différents domaines de l'espace. La différence essentielle avec l'analyse en vitesses réside dans la projection du domaine articulaire qu'il faut effectuer pour aboutir au domaine opérationnel. Pour les vitesses, ce passage était réalisé en considérant l'intersection du domaine articulaire admissible avec le plan image de la jacobienne. Physiquement, cela signifie que plutôt que de choisir un seul jeu de vitesses articulaires relatif à une vitesse opérationnelle donnée, il est possible de choisir plusieurs efforts articulaires engendrant un même effort opérationnel. En effet, le mécanisme est capable d'efforts internes, c'est-à-dire d'efforts articulaires n'ayant aucune répercussion sur les efforts opérationnels mais générant des contraintes dans le mécanisme. Pour les vitesses, il fallait que celles-ci soient parfaitement synchronisées les unes aux autres.

### 3.3.4 Mise en équations du problème

Le problème consiste à trouver le polytope des efforts opérationnels admissibles. La méthode simple proposée (non optimisée) se résume à :

1. déterminer tous les coins du polytope des efforts articulaires admissibles,
2. trouver leurs coordonnées dans la base articulaire utile à la DVS de  $\mathbf{J}_m^T$ ,
3. calculer leurs projections dans le plan image de  $\mathbf{J}_m^T$ ,
4. trouver toutes les droites de l'image de  $\mathbf{J}_m^T$  joignant ces différents points,
5. chercher parmi ces droites, celles qui constituent les frontières,
6. retranscrire les frontières dans l'espace opérationnel.

Les différentes étapes sont présentées dans la suite de ce chapitre.

#### Étape n°1

Le domaine des efforts articulaires admissibles est un parallélépipède rectangle de dimension  $m$ . Aussi possède-t'il  $2^m$  coins :

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{vertex}_l}, l \in \{1, \dots, 2^m\}. \quad (3-113)$$

Une manière de calculer les coordonnées de  $\boldsymbol{\tau}_{\text{vertex}_l}$  dans la base canonique de l'espace articulaire est de décréter que lorsque la  $i^{\text{ème}}$  décimale de la représentation binaire de  $l-1$  vaut 1, la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $\boldsymbol{\tau}_{\text{vertex}_l}$  vaut  $\tau_i^{\max}$ , autrement elle vaut  $\tau_i^{\min}$ .

*Exemple :*

$m = 3 \rightarrow$  Le domaine articulaire admissible possède  $2^3 = 8$  coins (cf. Figure 3.25), et le coin n°5 peut être défini ainsi :

$$5 - 1 = 4 = 0000100 \Big|_{\text{binaire}} \quad (3-114)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{vertex}_5} = \left[ \tau_1^{\min} \quad \tau_2^{\min} \quad \tau_3^{\min} \quad \tau_4^{\min} \quad \tau_5^{\min} \quad \tau_6^{\max} \quad \tau_7^{\min} \quad \tau_8^{\min} \right]^T \quad (3-115)$$

(Ce vecteur est décrit dans la base articulaire canonique.)

### Étape n°2

$$\boldsymbol{\tau}_{s_{\text{vertex}_l}} = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\tau}_{\text{vertex}_l} \quad (3-116)$$

$\boldsymbol{\tau}_{s_{\text{vertex}_l}}$  caractérise un des coins du polytope articulaire dans la base utile à la DVS.

### Étape n°3

$$\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_l}} = \mathbf{P} \boldsymbol{\tau}_{s_{\text{vertex}_l}} \quad (3-117)$$

$\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_l}}$  est un vecteur de dimension  $n$ . Il représente la projection du point  $\boldsymbol{\tau}_{s_{\text{vertex}_l}}$  dans le plan image de  $\mathbf{J}_m^T$ . On dénombre  $2^m$  points comme celui-ci :  $l \in \{1, \dots, 2^m\}$ .

### Étape n°4

Puisque les frontières du polytope recherché sont des hyperplans de l'espace de dimension  $n$ , restriction de l'espace articulaire à l'image de  $\mathbf{J}_m^T$ , chaque frontière peut être caractérisée par une relation du type :

$$\mathbf{p}^T \mathbf{u}_k = 1, \quad (3-118)$$

où  $\mathbf{u}_k$  est le vecteur de dimension  $n$  caractéristique de l'hyperplan  $k$ , et  $\mathbf{p}$  le vecteur colonne associé au point  $\mathbf{P}$  appartenant à l'hyperplan.

*Remarque :* Nous rappelons que sur l'exemple décrit Figure 3.28, les hyperplans envisagés sont en réalité des droites.

Puisque  $\mathbf{u}_k$  est de dimension  $n$ ,  $n$  équations linéaires indépendantes sont nécessaires pour le déterminer. La méthode proposée consiste à choisir  $n$  points distincts de type  $\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_l}}$  parmi les  $2^m$  points au total, et d'exprimer le fait qu'ils appartiennent à l'hyperplan envisagé grâce à la relation :

$$\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_l}}^T \mathbf{u}_k = 1 \quad (3-119)$$

Il existe  $C_{2^m}^n$  manières de choisir ces points, conduisant à  $C_{2^m}^n$  systèmes linéaires ( $C_{2^m}^n$  désigne le nombre de combinaisons de  $n$  éléments parmi  $2^m$ ).

Les systèmes obtenus peuvent être écrits matriciellement ainsi:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_{l_1}}}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_{l_n}}}^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3-120)$$

avec  $l_i \in \{1, \dots, 2^m\}$ , selon laquelle des  $C_{2^m}^n$  combinaisons on est en train de considérer ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) et  $k \in \{1, \dots, C_{2^m}^n\}$ ).

Notons  $\mathbf{T}_k$  la matrice caractéristique du système d'équations:

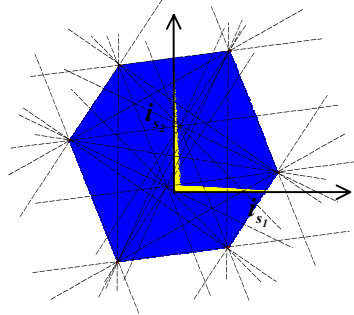
$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_1}}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_n}}^T \end{bmatrix}. \quad (3-121)$$

La résolution du système linéaire (3-120) à  $n$  équations pour  $n$  inconnues engendre le vecteur  $\mathbf{u}_k$  caractéristique de l'hyperplan  $k$  :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{T}_k^{-1} [1 \quad \dots \quad 1]^T \quad (3-122)$$

Soulignons le fait que pour certaines combinaisons de points ce système n'est pas de Cramer ( $\det(\mathbf{T}_k) = 0$ ). Aussi le vecteur  $\mathbf{u}_k$  ne peut être déterminé. Ce phénomène survient lorsque deux des projections de coins sont identiques ( $\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_i}} = \boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_j}}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, 2^m\}$ ) ou lorsqu'elles sont alignées avec l'origine  $\mathbf{O}$  ( $\exists k \in \mathbb{R}^* \mid \boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_i}} = k \boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_j}}$ ). Dans le premier cas nous n'avons pas à nous préoccuper de l'indétermination du vecteur  $\mathbf{u}_k$ , puisque la combinaison des points retenue n'engendre aucun hyperplan. Dans le deuxième cas, il se peut qu'un hyperplan existe, il croise alors l'origine. Soit cet hyperplan ne constitue pas une frontière, soit il témoigne d'une position singulière. L'algorithme final doit tenir compte de cette difficulté.

Cette étape se solde par la détermination de  $q$  vecteurs  $\mathbf{u}_k$ ,  $q \leq C_{2^m}^n$ ,  $k \in \{1, \dots, q\}$  caractéristiques de  $q$  hyperplans valides, c'est-à-dire de  $q$  frontières potentielles (voir Figure 3.30).



**Figure 3.30.** Représentation de toutes les frontières potentielles du polytope recherché

### Étape n°5

Comment déterminer les frontières du polytope parmi les  $q$  hyperplans ? En remarquant que lorsqu'un hyperplan constitue une frontière, tous les coins du polytope sont situés d'un seul et même côté de l'hyperplan (le polytope est un domaine convexe). Mathématiquement cela se traduit par :

$$(FrontièreType1 = \text{VRAI}) \text{ OU } (FrontièreType2 = \text{VRAI}) \quad (3-123)$$

avec :

$$FrontièreType1 = ((\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_1}}^T \mathbf{u}_k \leq 1) \dots \text{ ET } (\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_{2^m}}}^T \mathbf{u}_k \leq 1)) \text{ et :} \quad (3-124)$$

$$FrontièreType2 = ((\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_1}}^T \mathbf{u}_k \geq 1) \dots \text{ ET } (\boldsymbol{\tau}_{r_{\text{vertex}_{2^m}}}^T \mathbf{u}_k \geq 1)). \quad (3-125)$$

Lorsque la condition (3-123) est vérifiée, cela signifie que le vecteur  $\mathbf{u}_k$  caractérise une frontière du polytope recherché. Parmi les  $q$  hyperplans corrects, seuls  $r$  constituent les frontières du polytope ( $r \leq q$ ).

A ce stade là, il faut vérifier si l'origine  $\mathbf{O}$  appartient bien au polytope. En effet, si  $\mathbf{O}$  est situé en dehors, cela signifie que pour cette position particulière, le mécanisme n'est même pas capable de pouvoir s'opposer à une sollicitation nulle, en résumé que cette position n'est pas réaliste. Cette vérification revient à s'assurer que chaque frontière est du type 1 uniquement (relation (3-124)), c'est-à-dire que tous les coins du polytope sont situés en dessous (du côté de l'origine) de la frontière envisagée.

Au final, une description complète du polytope recherché est établie :

$$\begin{cases} \mathbf{p}^T \mathbf{u}_1 \leq 1 \\ \dots \\ \mathbf{p}^T \mathbf{u}_r \leq 1 \end{cases} \quad (3-126)$$

Il s'agit d'un jeu d'inégalités, où  $\mathbf{p}$  est le vecteur associé au point  $\mathbf{P}$ , un point appartenant au polytope, et les vecteurs  $\mathbf{u}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  caractérisent chaque frontière du domaine. Ce polytope constitue la projection des efforts articulaires admissibles dans le plan image de  $\mathbf{J}_m^T$ .

### Étape n°6

Transposer ce polytope dans l'espace opérationnel est réalisé simplement en transposant chaque frontière. A l'aide de la formule suivante, nous rappelons comment retranscrire dans l'espace opérationnel le vecteur caractéristique de chaque frontière :

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{S}^{T-1} \mathbf{u}_k \quad (3-127)$$

$\mathbf{v}_k$  représente le vecteur caractéristique de la frontière  $k$ , exprimé dans la base opérationnelle utile à la DVS (cf. (3-112)).

Ainsi, le polytope des efforts opérationnels admissibles est caractérisé par le système :

$$\begin{cases} \mathbf{m}^T \mathbf{v}_1 \leq 1 \\ \dots \\ \mathbf{m}^T \mathbf{v}_r \leq 1 \end{cases} \quad (3-128)$$

Avec un tel formalisme, il est possible de déterminer les caractéristiques essentielles de ce polytope (cf. section consacrée à l'analyse en vitesses).

### 3.3.5 Étude de cas

La plus grande force isotrope qu'est capable d'engendrer un mécanisme peut constituer un bon moyen de caractériser les performances d'un mécanisme à câbles. En effet il s'agit de la force maximale que le mécanisme peut garantir d'atteindre dans n'importe quelle direction de l'espace opérationnel. Le moyen de calculer cet effort  $f_{polyt}^{\min}$  est rappelé dans la formule suivante :

$$f_{polyt}^{\min} = \min_{i \in \{1, \dots, r\}} \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|} \quad (3-129)$$

(Se référer au début du chapitre pour plus d'explications.)

Dans le but de valider cet algorithme, nous avons envisagé le mécanisme simple présenté Figure 3.24. Les trois moteurs sont situés sur un cercle de rayon  $l$ , et repérés grâce à l'angle  $\theta_i$  mesurés à partir de l'axe  $x$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  :

$$l = 1000 \text{ mm}, \quad (3-130)$$



$$\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 150^\circ, \theta_3 = 270^\circ, \quad (3-131)$$

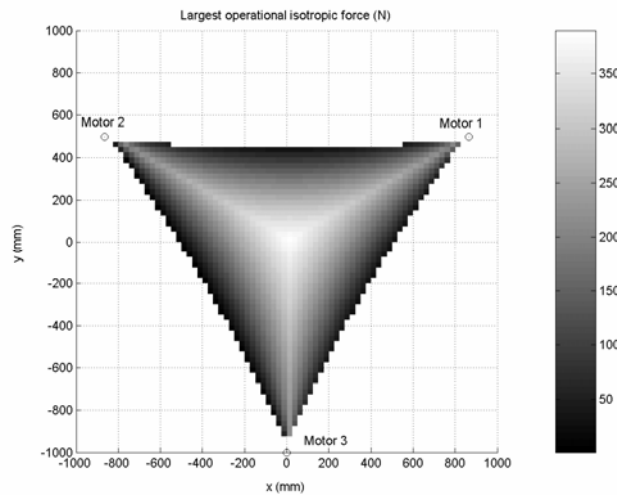
Avec ce mécanisme, il est possible d'établir simplement la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_m$  :

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} a_1^x / \|\mathbf{a}_1\| & a_1^y / \|\mathbf{a}_1\| \\ a_2^x / \|\mathbf{a}_2\| & a_2^y / \|\mathbf{a}_2\| \\ a_3^x / \|\mathbf{a}_3\| & a_3^y / \|\mathbf{a}_3\| \end{bmatrix}, \quad (3-132)$$

où  $\mathbf{a}_i$  représente le vecteur allant du point M (de coordonnées  $(x, y)$ ) la position de la nacelle, à  $\mathbf{M}_i$  la position du moteur  $i$ , dans la base canonique.  $a_i^x$  et  $a_i^y$  sont respectivement les coordonnées de ce vecteur suivant l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées :

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} l \cos \theta_i - x \\ l \sin \theta_i - y \end{bmatrix}. \quad (3-133)$$

La Figure 3.31 représente la plus grande force opérationnelle isotrope en chacun des points atteignables par le mécanisme. Nous avons imposé aux forces articulaires d'appartenir au domaine  $[50, 500]$ , c'est-à-dire  $\tau_i \geq 50$  de manière à éliminer les jeux, et  $\tau_i \leq 500$  pour limiter la tension dans les câbles ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

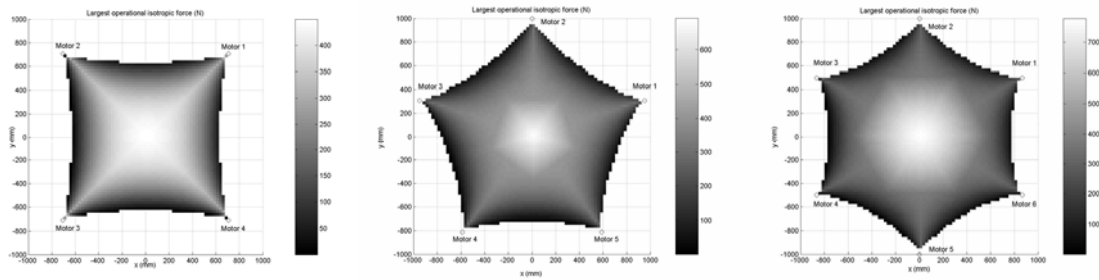


**Figure 3.31.** Représentation de la plus grande force opérationnelle isotrope d'un mécanisme parallèle plan à câbles à 3 actionneurs

Pour obtenir ce graphe, il a fallu :

1. discrétiser l'espace opérationnel,
2. calculer en chacun des points la matrice jacobienne,
3. puis se servir de la méthode proposée pour déterminer le polytope opérationnel,
4. et enfin calculer la plus grande force isotrope.

De la même manière que pour le mécanisme précédent nous avons calculé la plus grande force opérationnelle isotrope pour des mécanismes parallèles plans à câbles à 4, 5 et 6 actionneurs, répartis régulièrement sur un cercle de rayon 1000. Les figures obtenues sont présentées ci-dessous.



**Figure 3.32.** Représentation de la plus grande force opérationnelle isotrope pour des mécanismes parallèles plans à câbles à 4, 5 et 6 actionneurs

Avec de tels résultats, nous serions capables de mener à bien un processus d'optimisation visant à déterminer la géométrie la mieux adaptée à la tâche que l'on souhaite accomplir (par exemple, s'il fallait que la plus grande force opérationnelle isotrope soit plus grande qu'un seuil donné dans tout le volume de travail).

### 3.3.6 Conclusion de l'analyse en efforts

Insistons sur plusieurs aspects de cette analyse en efforts :

- Si cette méthode est parfaitement adaptée aux robots parallèles à câbles, elle peut être utilisée pour des MPAR classiques. Pour cela il suffit de choisir  $\tau_i^{\min} = -\tau_i^{\max}$ , qui traduit le fait que ce type de mécanismes peut supporter des efforts aussi bien de traction que de compression.
- Nous nous sommes concentrés sur le plus grand effort opérationnel isotrope, mais rien ne nous empêche de construire d'autres indices de performances pour caractériser le mécanisme. La section consacrée à l'analyse en vitesse propose un panel non-exhaustif d'indices de performances, qui peuvent être transposés simplement à l'analyse en effort.
- Dans cette section, l'algorithme pour déterminer le polytope opérationnel est présenté de manière linéaire ; ceci par souci de simplicité. Il est très facile d'optimiser à moindre frais cet algorithme en regroupant plusieurs étapes en une seule. L'explosion combinatoire qui survient lorsque l'on considère des espaces de dimension élevée, ne constitue pas un réel handicap puisque le processus d'optimisation ne justifie pas de contrainte de temps de calcul.

## 3.4 Étude de cas : le robot Archi

### 3.4.1 Introduction

Le robot Archi [Marquet 2001a], fabriqué à mon arrivée au LIRMM, exploite le principe de la redondance d'actionnement : il dispose de quatre chaînes cinématiques motorisées pour 3 ddl. La nacelle est capable des mouvements du plan ( $T_x$ ,  $T_y$  et  $R_z$ ) et grâce à sa mécanique particulière, la rotation est d'amplitude infinie (voir Figure 3.33 ; pour de plus amples détails, on pourra se reporter à l'annexe D).

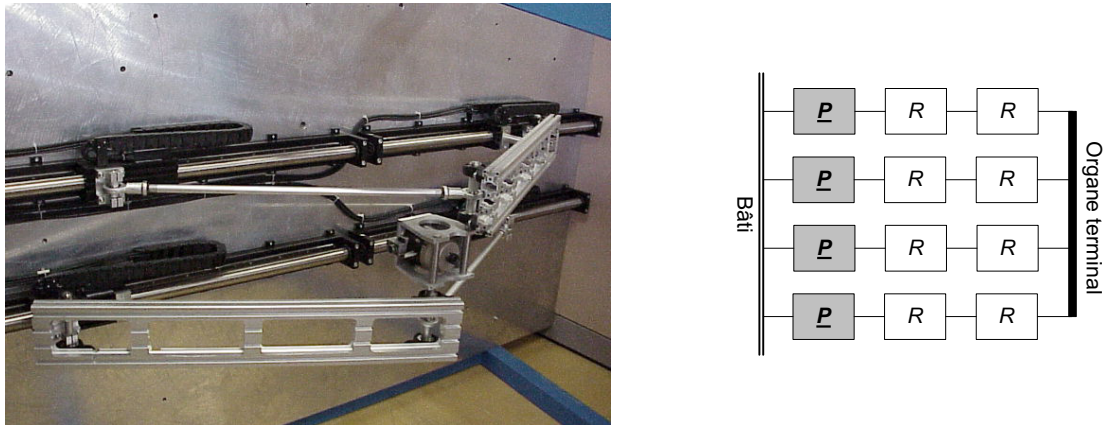


Figure 3.33. Le robot Archi (LIRMM), photo et graphe d'agencement

Puisque la dimension de l'espace opérationnel vaut 3, il est possible d'illustrer les différents espaces opérationnels qui caractérisent ce robot. La totalité des modèles du robot sont disponibles dans [Marquet 2001b] [Marquet 2002a]. Seuls sont détaillés dans cette section l'expression du modèle géométrique inverse et de la jacobienne nécessaires pour les calculs des indices de performance.

### 3.4.2 Modélisation du robot Archi

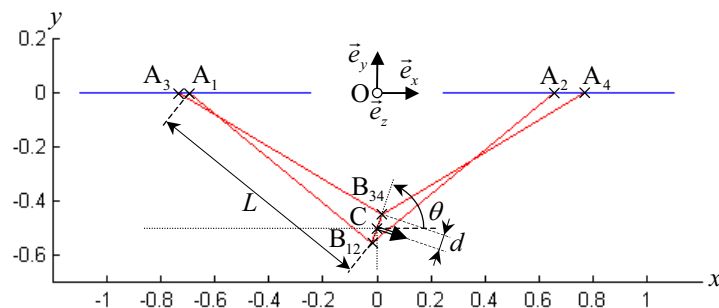


Figure 3.34. Schéma architectural du robot Archi

Le vecteur des coordonnées articulaires généralisées vaut :

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T \quad (3-134)$$

et précise les positions des points  $A_i$  caractéristiques des moteurs :

$$\mathbf{A}_i = [q_i \quad 0]^T, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (3-135)$$

(Les coordonnées sont exprimées dans le repère plan  $\mathfrak{R} = \langle O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y) \rangle$ .)

Le vecteur des coordonnées opérationnelles vaut :

$$\mathbf{x} = [x \quad y \quad \theta]^T \quad (3-136)$$

où  $x$  et  $y$  désignent les coordonnées du point commandé  $C$  dans  $\mathfrak{R}$  et  $\theta$ , l'angle de rotation autour de  $\vec{e}_z$  mesuré par rapport à l'axe des abscisses. Les coordonnées  $(x_{12}, y_{12})$  et  $(x_{34}, y_{34})$  des points géométriques  $B_{12}$  et  $B_{34}$  relatifs à la nacelle sont :

$$x_{12} = x - d \cos \theta, \quad (3-137)$$

$$y_{12} = y - d \sin \theta, \quad (3-138)$$

$$x_{34} = x + d \cos \theta, \quad (3-139)$$

$$y_{34} = y + d \sin \theta. \quad (3-140)$$

Le modèle géométrique inverse vaut :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = x_{12} - s_1 \\ q_2 = x_{12} + s_1 \end{array} \right. \quad (3-141)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_2 = x_{12} + s_1 \\ q_3 = x_{34} - s_2 \end{array} \right. \quad (3-142)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 = x_{34} - s_2 \\ q_4 = x_{34} + s_2 \end{array} \right. \quad (3-143)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_4 = x_{34} + s_2 \end{array} \right. \quad (3-144)$$

avec :

$$s_1 = \sqrt{L^2 - y_{12}^2} \text{ et} \quad (3-145)$$

$$s_2 = \sqrt{L^2 - y_{34}^2}. \quad (3-146)$$

et permet de préciser l'expression de la matrice jacobienne inverse  $\mathbf{J}_m$  :

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} 1 & y_{12}/s_1 & d(\sin \theta - y_{12}/s_1 \cos \theta) \\ 1 & -y_{12}/s_1 & d(\sin \theta + y_{12}/s_1 \cos \theta) \\ 1 & y_{34}/s_2 & d(-\sin \theta + y_{34}/s_2 \cos \theta) \\ 1 & -y_{34}/s_2 & d(-\sin \theta - y_{34}/s_2 \cos \theta) \end{bmatrix}. \quad (3-147)$$

$\mathbf{J}_m$  vérifie la relation matricielle usuelle  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{x}}$  où  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\dot{\mathbf{x}}$  sont les vecteurs vitesses du robot ( $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$  et  $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ ).

Dans le but de tenir compte à la fois de la présence de vitesses linéaires et angulaires dans la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_m$ , nous avons eu recours à la matrice poids  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \end{bmatrix}. \quad (3-148)$$

D'où le calcul de la matrice jacobienne normalisée  $\mathbf{J}_{mw}$  :

$$\mathbf{J}_{mw} = \mathbf{J}_m \mathbf{W}. \quad (3-149)$$

Les grandeurs géométriques qui ont été retenues pour le robot sont :

$$L = 0,872 \text{ m et} \quad (3-150)$$

$$d = 0,055 \text{ m}. \quad (3-151)$$

### 3.4.3 Tracé des domaines opérationnels

Nous avons choisi arbitrairement de déterminer les différents espaces des vitesses opérationnelles au point  $\mathbf{x}_0$  de coordonnées :

$$\mathbf{x}_0 = [0 \text{ m} \quad -0,5 \text{ m} \quad 8\pi/20 \text{ rad}]^T. \quad (3-152)$$

Ce point est celui illustré Figure 3.34. La méthode a consisté à déterminer les différents domaines articulaires puis à les transposer dans l'espace opérationnel

### 3.4.3.1 Espace des vitesses opérationnelles

Pour obtenir le polytope des vitesses opérationnelles, nous nous sommes attachés à déterminer dans un premier temps le polytope des vitesses articulaires, intersection du domaine des vitesses articulaires admissibles avec l'espace image de  $\mathbf{J}_{mw}$ . Nous avons caractérisé chaque frontière plane du domaine à l'aide de son vecteur représentatif que nous avons transposé dans l'espace opérationnel.

L'ellipsoïde usuel n'est rien d'autre que la transposition à l'espace des vitesses opérationnelles de la boule unité. C'est l'aplatissement de cet ellipsoïde qui constitue le conditionnement :

$$\text{cond}(\mathbf{J}_{mw}(\mathbf{x}_0)) = 1,4021 \quad (3-153)$$

L'ellipsoïde optimisé constitue le plus grand ellipsoïde compris dans le polytope opérationnel. On désigne par pcond (comme pseudo-conditionnement) l'aplatissement de cet ellipsoïde :

$$\text{pcond}(\mathbf{J}_{mw}(\mathbf{x}_0)) = 1,5566 \quad (3-154)$$

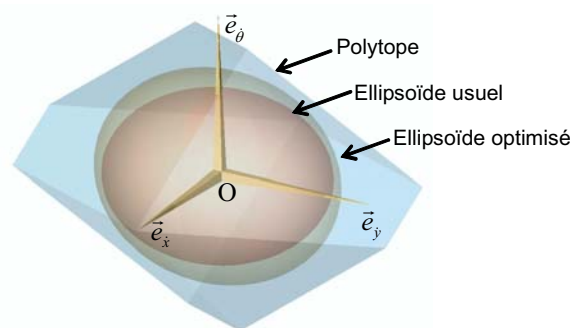


Figure 3.35. Espaces des vitesses opérationnelles du robot Archi

### 3.4.3.2 Espace des efforts opérationnels

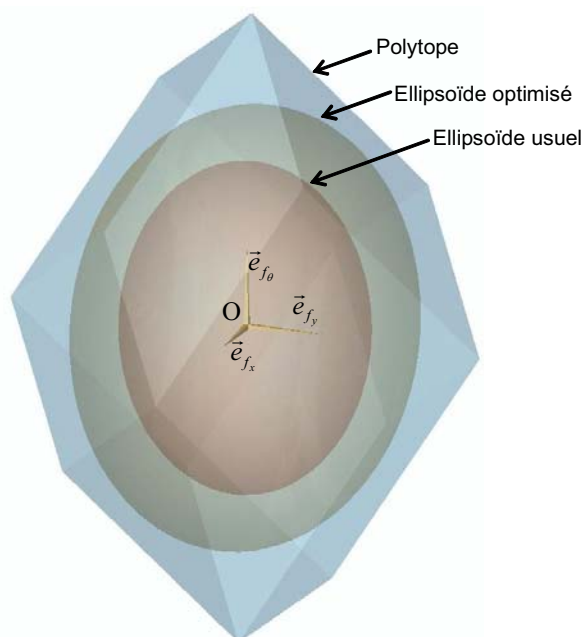


Figure 3.36. Espaces des efforts opérationnels du robot Archi

Le polytope des efforts opérationnels a été déterminé en envisageant la projection du domaine des efforts articulaires admissibles dans l'espace image de  $\mathbf{J}_{mw}^T$ . Chaque frontière plane a été définie à l'aide de son vecteur caractéristique. L'ellipsoïde usuel n'est rien d'autre que la transposition à l'espace des efforts opérationnels de la boule unité. Les longueurs des demi-axes de cet ellipsoïde valent l'inverse des longueurs pour l'ellipsoïde en vitesses. L'aplatissement de cet ellipsoïde est caractérisé par :

$$\text{cond}(\mathbf{J}_{mw}^T(\mathbf{x}_0)) = \text{cond}(\mathbf{J}_{mw}(\mathbf{x}_0)) = 1,4021 \quad (3-155)$$

L'ellipsoïde optimisé constitue le plus grand ellipsoïde des efforts compris dans le polytope opérationnel. On désigne par  $\text{fpcond}$  l'aplatissement de cet ellipsoïde :

$$\text{fpcond}(\mathbf{J}_{mw}^T(\mathbf{x}_0)) = 1,4290 \quad (3-156)$$

## 3.5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons élaboré des indices de performances adaptés aux mécanismes parallèles à actionnement redondant (MPAR). En partant du constat, que le conditionnement de la matrice jacobienne donnait des résultats difficiles à interpréter pour les MPAR, nous avons revisité le concept d'isotropie. Nous nous sommes d'abord focalisés sur l'analyse de l'isotropie en vitesses. Pour cela nous avons distingué ellipsoïde opérationnel de polytope opérationnel. Bien que ce soit le polytope qui représente le domaine réel des vitesses opérationnelles, nous avons justifié l'utilisation de l'ellipsoïde qui représente un domaine plus harmonieux sans angles vifs. Le conditionnement de la matrice jacobienne créé à l'origine pour témoigner de la sensibilité d'un système linéaire aux erreurs d'approximation, justifiait parfaitement son utilisation pour caractériser l'isotropie en vitesse des mécanismes simples. Pour les MPAR, le sens dégénérait puisque le conditionnement se bornait à évaluer l'application de passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel, alors que d'un point de vue utilisateur, il fallait se focaliser sur les performances dans l'espace opérationnel. Aussi nous sommes nous concentrés sur l'ellipsoïde opérationnel réellement significatif du domaine des vitesses opérationnelles admissibles. Dans le but de proposer un panel plus exhaustif d'indices de performances au concepteur, nous nous sommes également attachés à caractériser le polytope opérationnel. En l'absence de dualité évidente entre efforts et vitesses pour les MPAR, nous avons reconduit cette analyse dans l'espace des efforts. En effet, pour un MPAR, les vitesses des actionneurs doivent être synchronisées les unes aux autres pour être compatibles avec le mécanisme, alors que les efforts présentent plus de latitude puisqu'ils sont en droit de générer des efforts internes au mécanisme. De manière à étendre encore plus le concept, nous avons proposé une approche capable de traiter le cas des robots parallèles à câbles, où seuls des efforts de traction pure peuvent être observés dans les câbles. Cette analyse s'est avérée essentielle dans mes travaux de thèse parce que les MPAR constituent une solution conséquente pour obtenir de forts débattements angulaires. Si les concepts ont été explicités en détails, les algorithmes qui permettent d'aboutir aux différents domaines de l'espace méritent d'être optimisés. Il serait judicieux de rechercher une solution algébrique aux problèmes évoqués plutôt que d'utiliser la procédure d'optimisation mise en place. Par ailleurs, en raison de la forte similitude qui existe entre les robots à actionnement redondant et les robots à redondance cinématique

[Chiacchio 1996], il conviendrait de transposer cette méthode d'analyse à cette catégorie de robots.





---

# Le robot Eureka ou l'obtention de grandes rotations par dispositif mécanique et actionnement redondant

---

*Résumé du chapitre*

Ce chapitre présente le robot Eureka, un nouveau mécanisme capable de 3 translations – 2 rotations. Ce dispositif possède des débattements angulaires importants :  $\pm 90^\circ$  autour du premier axe et une révolution complète autour du second. De telles performances s'expliquent par la redondance d'actionnement et par l'utilisation d'une nacelle munie d'un dispositif de transformation de mouvement T/R. Ce chapitre complète donc les deux études menées précédemment puisqu'il effectue la synthèse des outils développés. La méthode d'analyse cinématique simplifiée développée au chapitre 2 permet de conduire l'étude des singularités. Ce robot a la particularité d'avoir un modèle géométrique direct facile à obtenir. Un tracé du volume de travail est réalisé. Des architectures réalistes libres de collisions internes sont exposées. Le prototype en cours de réalisation est présenté.

*Sommaire :*

4.1	Introduction .....	126
4.2	Concept général.....	126
4.3	Modélisation géométrique.....	127
4.4	Étude des singularités .....	128
4.5	Modèles géométriques et cinématiques.....	133
4.6	Étude de cas .....	136
4.7	Le prototype du robot Eureka .....	140
4.8	Conclusion .....	141

## 4.1 Introduction

Ce chapitre s'intéresse au problème des robots 3T-2R qui a été peu traité jusque là. Parmi les machines à 5 ddl on retrouve essentiellement des architectures hybrides parallèle / série, telles la version à 5 ddl du robot Tricept [Siciliano 1999], ou bien le robot GeorgV [Tönshoff 1998b], ou encore le robot Dumbo [Tönshoff 2002]. On compte également la machine parallèle de Zamanov [Zamanov 1992] dont l'architecture est radicalement différente puisque pleinement parallèle et constituée de 5 vérins. Une autre approche intéressante a été suivie par Stocco [Stocco 1996] qui propose un mécanisme constitué de deux sous-ensembles agissant sur une nacelle commune.

Ce chapitre introduit un nouveau mécanisme, le robot Eureka [Krut 2003d], qui combine les deux manières d'obtenir de forts débattements angulaires développés dans les deux chapitres précédents. Il s'agit de la redondance d'actionnement (Eureka dispose de 6 moteurs pour 5 ddl seulement), et de l'utilisation d'un dispositif de transformation mécanique T-R fixé sur la nacelle articulée. Grâce à ces différentes approches, le mécanisme est capable de 3T-2R avec forts débattements angulaires suivant les deux directions ; la première rotation s'effectue autour d'un axe de direction fixe par rapport au bâti, la suivante a lieu autour d'un axe orthogonal au premier.

Une analyse complète des singularités est réalisée grâce à la méthode développée dans le chapitre consacré à la famille des robots H4/I4, et permet de mettre en avant les conditions géométriques à respecter pour que le robot fonctionne convenablement. Les modèles géométriques sont détaillés et témoignent de la simplicité du mécanisme. Le volume de travail est déterminé et le prototype en cours de fabrication est détaillé.

## 4.2 Concept général

Eureka, la machine proposée, est un MPAR à 6 actionneurs pour 5 ddl. La Figure 4.1 expose l'agencement des différentes chaînes cinématiques.

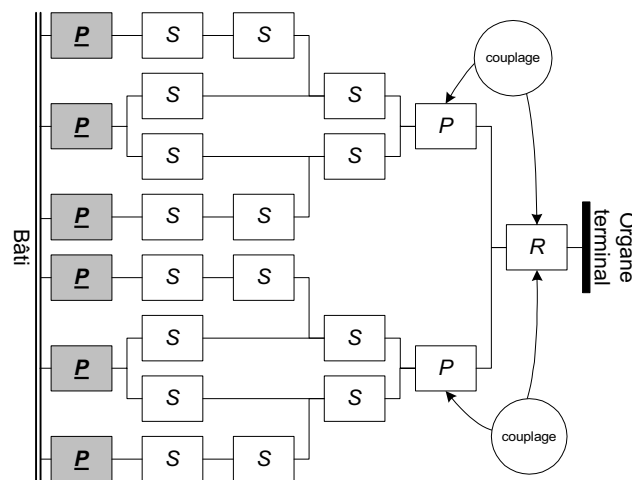


Figure 4.1. Graphe d'agencement du robot Eureka

La symétrie du robot est à remarquer : deux sous-ensembles mécaniques identiques composés d'un parallélogramme spatial et de deux barres simples sont reliés entre eux par le biais d'une nacelle articulée.

Toutes les remarques valables pour les robots Delta ou bien de type H4/I4 restent valables :

- les moteurs sont solidaires du bâti pour limiter les masses en mouvement,
- les actionneurs peuvent être linéaires ou bien rotatifs,
- les liaisons rotules peuvent être remplacées par des liaisons cardan afin de s'affranchir des problèmes de rotation interne des barres autour de leur axe,
- les parallélogrammes spatiaux  $(SS)_2$  peuvent être remplacés par de vrais parallélogrammes plans de type  $R(RR)_2R$  semblables à ceux du robot Orthoglide [Chablat 2003] (ce qui rigidifierait la structure mais la rendrait hyperstatique).

### 4.3 Modélisation géométrique

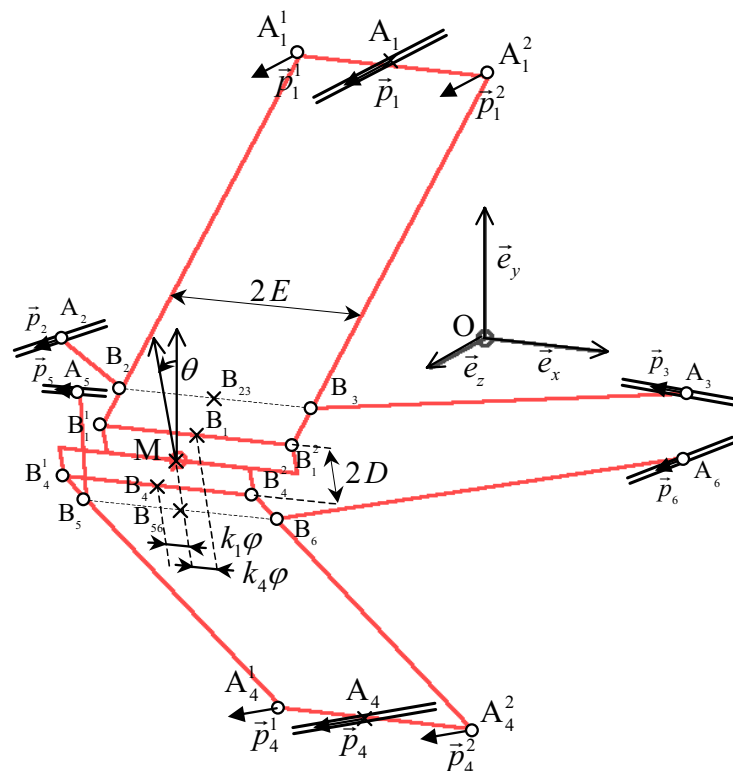
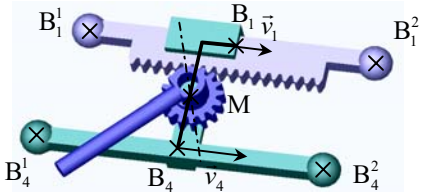
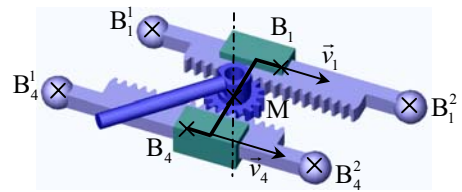


Figure 4.2. Modélisation géométrique du robot Eureka

La nacelle du robot est similaire à celle des robots I4 [Krut 2003a] : tandis que deux pièces intermédiaires se tradatent l'une par rapport à l'autre, un dispositif mécanique transforme ce mouvement en rotation.

*Rappel* : il convient de distinguer deux types de nacelles (voir Table 4.1). La nacelle de type I4L est constituée de deux liaisons glissières et de deux dispositifs pignons-crémaillère couplés entre eux par le biais du pignon. La nacelle de type I4R est constituée d'une pièce de moins mais du coup perd son caractère symétrique bien utile pour équilibrer parfaitement les forces.

**Table 4.1.** Principes des nacelles du robot Eureka

Type de nacelle	Type 2	Type 3
Architecture		

Pour poursuivre la description du mécanisme, il est nécessaire d'introduire les notations suivantes :

- Le rapport  $f$  ( $0 \leq f \leq 1$ ) précise l'emplacement du point qui fait la jonction entre la barre simple et le parallélogramme :

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_j^k + f(\mathbf{A}_j^k - \mathbf{B}_j^k), \quad (4-1)$$

pour  $(i, j, k) \in \{(2,1,1), (3,1,2), (5,4,1), (6,4,2)\}$ .

- Le formalisme mathématique développé doit pouvoir traiter les deux types de nacelle. Ainsi si l'on note  $\mathbf{M} = [x \ y \ z]^T$  le vecteur des coordonnées de l'effecteur dans  $\mathfrak{R} = \langle O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rangle$ , et  $\mathbf{R}$  la matrice qui caractérise la rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe orienté selon  $\vec{e}_x$  :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (4-2)$$

alors :

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{M} + \mathbf{R} [k_1 \varphi \quad D \quad 0]^T, \quad (4-3)$$

$$\mathbf{B}_4 = \mathbf{M} + \mathbf{R} [k_4 \varphi \quad -D \quad 0]^T, \quad (4-4)$$

où  $\varphi$  désigne la rotation provoquée par le mécanisme de transformation de mouvement T/R, et  $k_1$  et  $k_4$  constituent les rapports de transmission :

- $k_4 = 0$  pour une nacelle de type 2 et,
- $k_4 = -k_1$  pour une nacelle de type 3.

## 4.4 Étude des singularités

Dans cette section, la condition géométrique à vérifier pour s'assurer du bon fonctionnement du mécanisme (absence de singularités) est établie. L'accent est porté sur l'orientation des parallélogrammes spatiaux responsables du mouvement de rotation de la nacelle. Puis l'intérêt des barres simples qui agissent sur les parallélogrammes est souligné. Toute cette étude est menée grâce à la méthode d'analyse cinématique simplifiée développée pour les robots de type H4/I4, mais retranscrite pour ce robot.

Chaque partie latérale de la nacelle est reliée à des parallélogrammes spatiaux de type Delta par le biais de liaisons rotules. Notons  $\mathbf{n}_i^j$  le vecteur reliant le point  $A_i^j$  au point  $B_i^j$ ,  $i \in \{1,2\}$ ,  $\mathbf{n}_i$  le vecteur allant de  $A_i$  à  $B_i$  et  $\mathbf{u}_i$  le vecteur reliant le point  $B_i^1$  au point  $B_i^2$  (voir Figure 4.3).

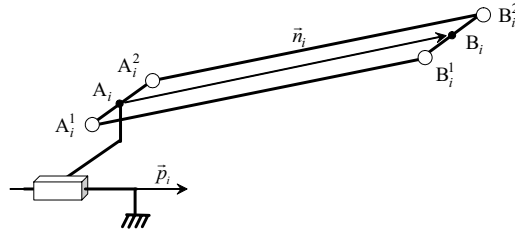


Figure 4.3. Chaîne cinématique  $\underline{P}(SS)_2$

La vitesse du point  $A_i^j$  peut s'écrire ainsi :

$$\mathbf{V}_{A_i^j} = \dot{q}_i \mathbf{p}_i^j, \quad i \in \{1,4\}, \quad j \in \{1,2\}, \quad (4-5)$$

où  $\mathbf{p}_i^j$  est le vecteur tangent à la trajectoire du point  $A_i^j$  orienté convenablement. Pour des moteurs linéaires, ce vecteur est unitaire alors que pour des moteurs rotatifs sa norme est égale à la distance du point  $A_i^j$  à l'axe de rotation du moteur. Cette expression est également valable pour les barres simples :

$$\mathbf{V}_{A_i} = \dot{q}_i \mathbf{p}_i, \quad i \in \{2,3,5,6\}. \quad (4-6)$$

$\dot{q}_i$  peut être exprimé en fonction  $\mathbf{V}_{B_i^j}$  en écrivant la propriété d'équiprojectivité des vitesses des extrémités des barres sur les barres :

$$\mathbf{V}_{A_i^j}^T \mathbf{n}_i^j = \mathbf{V}_{B_i^j}^T \mathbf{n}_i^j, \quad (4-7)$$

c'est ainsi que :

$$\dot{q}_i = \frac{\mathbf{V}_{B_i^j}^T \mathbf{n}_i^j}{\mathbf{p}_i^{jT} \mathbf{n}_i^j}. \quad (4-8)$$

En précisant que  $\mathbf{V}_M$  désigne la vitesse du point M par rapport au repère  $\mathfrak{R} = \langle O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rangle$  attaché au bâti,  $\boldsymbol{\omega}$  la vitesse de rotation de l'organe terminal, et  $v_i \mathbf{v}_i$  la vitesse relative du point  $B_i^j$  par rapport à la partie centrale de la nacelle ( $i \in \{1,4\}$ ,  $j \in \{1,2\}$ ), on peut exprimer la vitesse du point  $B_i^j$  de la manière suivante<sup>1</sup> :

$$\mathbf{V}_{B_i^j} = \mathbf{V}_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i^j + v_i \mathbf{v}_i, \quad i \in \{1,4\}, \quad j \in \{1,2\}, \quad (4-9)$$

avec :

- $\mathbf{s}_i^j$  le vecteur reliant M au point  $B_i^j$ ,
- $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_4$  sont les vecteurs unitaires qui dirigent les liaisons glissières de la nacelle (voir Table 4.1).

Dériver l'expression (4-1) permet d'exprimer la vitesse des points  $B_i$  :

$$\mathbf{V}_{B_i} = (1-f)\mathbf{V}_{B_i^k} + f\mathbf{V}_{A_i^k} \quad (4-10)$$

pour  $(i,j,k) \in \{(2,1,1), (3,1,2), (5,4,1), (6,4,2)\}$ .

<sup>1</sup> Remarque : Cette notation est compatible avec l'expression suivante :  $\mathbf{V}_{P_t} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{t} = d\mathbf{P}\mathbf{t} / dt$ .

En prenant en considération les relations (4-5) et (4-8), on peut formuler l'expression suivante :

$$\mathbf{V}_{B_i}^T \mathbf{n}_i = (1-f) \mathbf{V}_{B_j^k}^T \mathbf{n}_i + f {}^k_j r_i \mathbf{V}_{B_j^k}^T \mathbf{n}_j^k, \quad (4-11)$$

avec :

$${}^k_j r_i = \frac{\mathbf{p}_j^{kT} \mathbf{n}_i}{\mathbf{p}_j^{kT} \mathbf{n}_j^k}, \quad (4-12)$$

pour  $(i, j, k) \in \{(2,1,1), (3,1,2), (5,4,1), (6,4,2)\}$ .

(4-11) peut être reformulé ainsi :

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{V}_{B_i} = {}^k_j \mathbf{n}_i^T \mathbf{V}_{B_j^k}, \quad (4-13)$$

avec :

$${}^k_j \mathbf{n}_i = (1-f) \mathbf{n}_i + f {}^k_j r_i \mathbf{n}_j^k. \quad (4-14)$$

Ainsi, grâce aux propriétés d'équiprojectivité des vitesses sur les barres, il est possible d'établir le système matriciel suivant :

$$\mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{V}_M^T & \boldsymbol{\omega}^T & v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T = \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}, \quad (4-15)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^{1T} & [\mathbf{s}_1^1 \times \mathbf{n}_1^1]^T & \mathbf{v}_1^T \mathbf{n}_1^1 & 0 \\ \mathbf{n}_1^{2T} & [\mathbf{s}_1^2 \times \mathbf{n}_1^2]^T & \mathbf{v}_1^T \mathbf{n}_1^2 & 0 \\ {}^1_1 \mathbf{n}_2^T & [\mathbf{s}_1^1 \times {}^1_1 \mathbf{n}_2]^T & \mathbf{v}_1^T {}^1_1 \mathbf{n}_2 & 0 \\ {}^2_1 \mathbf{n}_3^T & [\mathbf{s}_1^2 \times {}^2_1 \mathbf{n}_3]^T & \mathbf{v}_1^T {}^2_1 \mathbf{n}_3 & 0 \\ \mathbf{n}_4^{1T} & [\mathbf{s}_4^1 \times \mathbf{n}_4^1]^T & 0 & \mathbf{v}_4^T \mathbf{n}_4^1 \\ \mathbf{n}_4^{2T} & [\mathbf{s}_4^2 \times \mathbf{n}_4^2]^T & 0 & \mathbf{v}_4^T \mathbf{n}_4^2 \\ {}^1_4 \mathbf{n}_5^T & [\mathbf{s}_4^1 \times {}^1_4 \mathbf{n}_5]^T & 0 & \mathbf{v}_4^T {}^1_4 \mathbf{n}_5 \\ {}^2_4 \mathbf{n}_6^T & [\mathbf{s}_4^2 \times {}^2_4 \mathbf{n}_6]^T & 0 & \mathbf{v}_4^T {}^2_4 \mathbf{n}_6 \end{bmatrix}, \quad (4-16)$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{1T} \mathbf{n}_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{p}_1^{2T} \mathbf{n}_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_2^T \mathbf{n}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}_3^T \mathbf{n}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_4^{1T} \mathbf{n}_4^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_4^{2T} \mathbf{n}_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_5^T \mathbf{n}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_6^T \mathbf{n}_6 \end{bmatrix} \text{ et,} \quad (4-17)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T. \quad (4-18)$$

En précisant que lorsque le mécanisme est assemblé les relations suivantes sont respectées :

$$\mathbf{n}_i^1 = \mathbf{n}_i^2 = \mathbf{n}_i, \quad (4-19)$$

$$\mathbf{p}_i^1 = \mathbf{p}_i^2 = \mathbf{p}_i, \quad (4-20)$$

en soustrayant la ligne n°1 avec la ligne n°2, et la ligne n°4 avec la ligne n°5, le système (4-15) peut être reformulé ainsi :

$$\mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{V}_M^T & \boldsymbol{\omega}^T & v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T = \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}, \quad (4-21)$$

avec :

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T & [\mathbf{s}_1^1 \times \mathbf{n}_1]^T & \mathbf{v}_1^T \mathbf{n}_1 & 0 \\ {}^1_1 \mathbf{n}_2^T & [\mathbf{s}_1^1 \times {}^1_1 \mathbf{n}_2]^T & \mathbf{v}_1^T {}^1_1 \mathbf{n}_2 & 0 \\ {}^2_1 \mathbf{n}_3^T & [\mathbf{s}_1^2 \times {}^2_1 \mathbf{n}_3]^T & \mathbf{v}_1^T {}^2_1 \mathbf{n}_3 & 0 \\ \mathbf{n}_4^T & [\mathbf{s}_4^1 \times \mathbf{n}_4^T]^T & 0 & \mathbf{v}_4^T \mathbf{n}_4 \\ {}^1_4 \mathbf{n}_5^T & [\mathbf{s}_4^1 \times {}^1_4 \mathbf{n}_5]^T & 0 & \mathbf{v}_4^T {}^1_4 \mathbf{n}_5 \\ {}^2_4 \mathbf{n}_6^T & [\mathbf{s}_4^2 \times {}^2_4 \mathbf{n}_6]^T & 0 & \mathbf{v}_4^T {}^2_4 \mathbf{n}_6 \\ \mathbf{0}^T & [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n}_1]^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & [\mathbf{u}_4 \times \mathbf{n}_4]^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et} \quad (4-22)$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \mathbf{n}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_2^T \mathbf{n}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}_3^T \mathbf{n}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_4^T \mathbf{n}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_5^T \mathbf{n}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_6^T \mathbf{n}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4-23)$$

#### 4.4.1 Conditions géométriques à satisfaire concernant les rotations

Dans cette section, nous précisons les conditions géométriques à vérifier par le mécanisme, pour permettre à la nacelle de s'orienter convenablement autour d'un axe de direction fixe par rapport au bâti. Si cette rotation est obtenue par l'inclinaison de la nacelle, la seconde rotation opérationnelle de la machine est réalisée grâce au dispositif monté sur la nacelle articulée qui transforme un mouvement de translation en rotation.

En notant  $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{21} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$ , où  $\mathbf{M}_{22}$  désigne la partie inférieure de  $\mathbf{M}_2$  constituée des deux der-

nières lignes (de même pour  $\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{21} \\ \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix}$ ), l'expression suivante peut être établie :

$$\mathbf{M}_{22} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_M^T & \boldsymbol{\omega}^T & v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}. \quad (4-24)$$

Puisque tous les termes des 3 premières colonnes de  $\mathbf{M}_{22}$  valent zéro,  $V_M$  n'a pas d'influence dans l'équation (4-24). Il en est de même pour les colonnes associées aux variables  $v_1$  et  $v_2$ . Si bien que l'on aboutit au système sous-déterminé (3 inconnues pour 2 équations) suivant :

$$\mathbf{M}_{un} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (4-25)$$

avec :

$$\mathbf{M}_{un} = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n}_1]^T \\ [\mathbf{u}_4 \times \mathbf{n}_4]^T \end{bmatrix}. \quad (4-26)$$

#### 4.4.1.1 Condition géométrique pour obtenir la rotation souhaitée

Dans ce chapitre nous nous focalisons sur le mouvement d'inclinaison de la nacelle. Nous avons décidé qu'elle aurait lieu selon  $\vec{e}_x$  :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{e}_x, \quad (4-27)$$

avec  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ .

Ainsi :

$$\omega_y = \omega_z = 0, \quad (4-28)$$

Pour que la relation matricielle (4-25) soit respectée quel que soit  $\omega_x$ , il suffit de respecter la condition :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_x. \quad (4-29)$$

#### 4.4.1.2 Condition géométrique pour éliminer les rotations inappropriées

Une condition nécessaire pour que la relation (4-28) soit respectée est :

$$\det(\mathbf{M}'_{un}) \neq 0, \quad (4-30)$$

où  $\mathbf{M}'_{un}$  désigne la matrice extraite de  $\mathbf{M}_{un}$  constituée des deux dernières colonnes.

En remarquant que ce déterminant est égal à la surface du polygone construit à partir des deux vecteurs lignes de  $\mathbf{M}_{un}$ , la condition (4-30) peut être reformulée ainsi :

$$\|[\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}_1] \times [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}_4]\| \neq 0. \quad (4-31)$$

De cette expression, on en déduit que pour que l'architecture du robot ne présente pas de singularité, il faut que  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{n}_i$   $i \in \{1, 4\}$  ne soient jamais parallèles à l'intérieur du volume de travail. De plus,  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_4$  ne devront jamais être parallèles entre eux.

#### 4.4.2 Condition géométrique pour obtenir un bon positionnement des parallélogrammes

Au regard de  $N_2$ , il apparaît que l'architecture du robot doit vérifier que  $\mathbf{p}_i$  et  $\mathbf{n}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  ne soient jamais perpendiculaires à l'intérieur du volume de travail ; en d'autres termes que les directions de déplacement des moteurs ne soient jamais orthogonales avec les directions des barres auxquelles ils sont reliés.



## 4.5 Modèles géométriques et cinématiques

Dans cette section, les relations entre les positions des actionneurs et les coordonnées opérationnelles (représentés par les vecteurs  $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_6]^T$  et  $\mathbf{x} = [x_M \ y_M \ z_M \ \theta \ \varphi]^T$ ) sont établies. Les relations cinématiques entre les vitesses des actionneurs  $\dot{\mathbf{q}}$  et celles de la nacelle  $\dot{\mathbf{x}}$  sont également exposées.

### 4.5.1 Relations géométriques

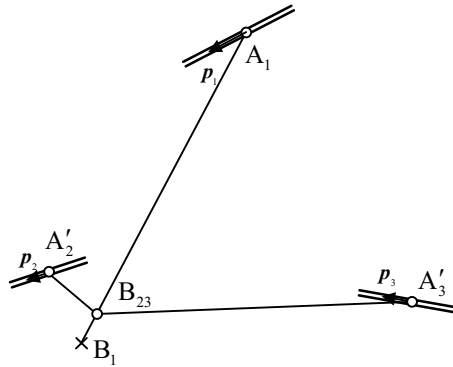


Figure 4.4. Schéma simplifié de la partie supérieure du robot Eureka

Pour simplifier les relations vectorielles introduisons les points  $B_{23}$ ,  $B_{56}$ ,  $A_i$ ,  $i \in \{2, 3, 5, 6\}$ , définis de la manière suivante :

$$\mathbf{B}_{23} = f \mathbf{A}_1 + (1-f) \mathbf{B}_1, \quad (4-32)$$

$$\mathbf{B}_{56} = f \mathbf{A}_4 + (1-f) \mathbf{B}_4, \quad (4-33)$$

$$\mathbf{A}'_2 = \mathbf{A}_2 + [E \ 0 \ 0]^T, \quad (4-34)$$

$$\mathbf{A}'_3 = \mathbf{A}_3 + [-E \ 0 \ 0]^T, \quad (4-35)$$

$$\mathbf{A}'_5 = \mathbf{A}_5 + [E \ 0 \ 0]^T, \quad (4-36)$$

$$\mathbf{A}'_6 = \mathbf{A}_6 + [-E \ 0 \ 0]^T. \quad (4-37)$$

#### 4.5.1.1 Modèle géométrique inverse

Comme à l'accoutumée, le MGI est issu des relations d'invariance des longueurs des barres. Le modèle peut être explicité aussi bien pour des moteurs linéaires que des moteurs rotatifs (voir par exemple dans [Merlet 2001a]).

La démarche consiste à déterminer dans un premier temps  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_4$  (et donc  $q_1$  et  $q_4$ ) à l'aide des relations :

$$\|\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i\|^2 = l_i^2, \quad i \in \{1, 4\}. \quad (4-38)$$

(où  $l_i, i \in \{1, 4\}$  désigne la longueur de la  $i^{\text{ème}}$  barre).

Puis, il convient d'expliciter les coordonnées des points  $B_{23}$  et  $B_{56}$  grâce aux relations (4-32) et (4-33), dans le but de déterminer les points  $A'_i$ ,  $i \in \{2, 3, 5, 6\}$ , à l'aide des relations :

$$\|B_{23} - A'_i\|^2 = l_i'^2, \quad i \in \{2, 3\}, \quad (4-39)$$

$$\|B_{56} - A'_i\|^2 = l_i'^2, \quad i \in \{5, 6\}, \quad (4-40)$$

(où  $l'_i$ ,  $i \in \{2, 3, 5, 6\}$  désigne la longueur de la  $i^{\text{ème}}$  barre).

Pour finir, il suffit d'expliciter les positions des points  $A_i$ ,  $i \in \{2, 3, 5, 6\}$ , grâce aux relations (4-34) à (4-37), pour obtenir les coordonnées articulaires  $q_i$ ,  $i \in \{2, 3, 5, 6\}$ .

#### 4.5.1.2 Modèle géométrique direct

Une des particularités intéressantes pour cette machine est qu'il existe une expression analytique pour le MGD. En effet, en connaissant la position des trois moteurs supérieurs (respectivement inférieurs), le point  $B_{23}$  peut être déterminé simplement (respectivement le point  $B_{56}$ ). Cette opération peut-être réalisée par exemple en considérant l'intersection de trois sphères.

Ainsi, si l'on considère la partie supérieure du mécanisme et que l'on note :

$$B_{23} = [X \quad Y \quad Z]^T, \quad (4-41)$$

$$A_1 = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T, \quad (4-42)$$

$$A'_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T, \quad i \in \{2, 3\}, \quad (4-43)$$

le système qui témoigne de l'invariance des longueurs des barres s'écrit :

$$(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 + (Z - z_i)^2 = l_i'^2, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (4-44)$$

avec :

$$l'_1 = (1 - f) l_1. \quad (4-45)$$

Il peut être reformulé ainsi :

$$\begin{cases} \eta Z^2 + 2\iota Z + \kappa = 0 & (4-46) \\ X = \varepsilon Z + \phi & (4-47) \\ Y = \varphi Z + \gamma & (4-48) \end{cases}$$

avec :

$$\eta = \varepsilon^2 + \varphi^2 + 1, \quad (4-49)$$

$$\iota = \varepsilon \phi - x_1 \varepsilon + \varphi \gamma - y_1 \varphi - z_1, \quad (4-50)$$

$$\kappa = \phi^2 + x_1^2 - 2x_1 \phi + \gamma^2 + y_1^2 - 2y_1 \gamma + z_1^2 - l_1'^2, \quad (4-51)$$

$$\varepsilon = \frac{\beta_3 \chi_2 - \beta_2 \chi_3}{\beta_3 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_3}, \quad (4-52)$$

$$\phi = \frac{\beta_3 \delta_2 - \beta_2 \delta_3}{\beta_3 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_3}, \quad (4-53)$$

$$\varphi = \frac{\alpha_3 \chi_2 - \alpha_2 \chi_3}{\alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3}, \quad (4-54)$$

$$\gamma = \frac{\alpha_3 \delta_2 - \alpha_2 \delta_3}{\alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3}, \quad (4-55)$$

$$\alpha_i = 2(x_i - x_1), \quad i \in \{2, 3\}, \quad (4-56)$$

$$\beta_i = 2(y_i - y_1), \quad i \in \{2, 3\}, \quad (4-57)$$

$$\chi_i = -2(z_i - z_1), \quad i \in \{2, 3\} \text{ et,} \quad (4-58)$$

$$\delta_i = (x_i^2 - x_1^2) + (y_i^2 - y_1^2) + (z_i^2 - z_1^2) - (l_i'^2 - l_1'^2), \quad i \in \{2, 3\}. \quad (4-59)$$

$Z$  est calculé comme la plus grande racine du polynôme (4-46) ; il s'agit de la solution réellement compatible avec la géométrie du mécanisme (la nacelle est située à l'avant des moteurs :  $Z > q_i, i \in \{1, 2, 3\}$ ). Puis  $X$  et  $Y$  sont explicités à l'aide des relations (4-47) et (4-48) respectivement. Ainsi le point  $B_{23}$  est entièrement explicité. En menant un calcul analogue, le point  $B_{56}$  peut également être déterminé.

Puis, en inversant les relations (4-32) et (4-33), les points  $B_1$  et  $B_4$  sont précisés :

$$B_1 = \frac{B_{23} - f A_1}{1 - f}, \quad (4-60)$$

$$B_4 = \frac{B_{56} - f A_4}{1 - f}. \quad (4-61)$$

Notons  $s_{14}$  le vecteur reliant le point  $B_1$  au point  $B_4$  ( $s_{14} = B_4 - B_1$ ), les coordonnées du point  $M$  peuvent être exprimées ainsi :

$$M = B_1 + \begin{bmatrix} \frac{-k_1}{k_4 - k_1} s_{14}^T e_x & \frac{1}{2} s_{14}^T e_y & \frac{1}{2} s_{14}^T e_z \end{bmatrix}^T. \quad (4-62)$$

Finalement, le vecteur des coordonnées opérationnelles  $x$  s'écrit de la manière suivante :

$$x = \begin{bmatrix} M^T & \tan^{-1} \left( \frac{s_{14}^T e_z}{s_{14}^T e_y} \right) & \frac{s_{14}^T e_x}{k_4 - k_1} \end{bmatrix}^T. \quad (4-63)$$

*Remarque* : Soulignons le fait que pour un MPAR, déterminer le vecteur des coordonnées opérationnelles (la position des moteurs étant connue) peut être réalisé de plusieurs manières parce que la dimension de l'espace articulaire est supérieure à celle de l'espace opérationnel (voir [Marquet 2002c]). Le calcul tel qu'il a été mené suppose que la nacelle puisse se monter entre les deux sous-ensembles mécaniques supérieur et inférieur. Cette hypothèse est réaliste si la relation suivante est bien respectée :

$$(s_{14}^T e_y)^2 + (s_{14}^T e_z)^2 = (2D)^2, \quad (4-64)$$

où  $2D$  constitue une dimension caractéristique de la nacelle (voir Figure 4.2).

## 4.5.2 Relation cinématique

La relation entre le jeu des vitesses articulaires et celui des vitesses opérationnelles peut s'exprimer sous la forme matricielle usuelle :

$$J_x \dot{x} = J_q \dot{q}. \quad (4-65)$$

Soulignons le fait que  $\omega = \dot{\theta} e_x$  et introduisons la matrice  $L$  :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & k_4 \end{bmatrix}^T, \quad (4-66)$$

qui vérifie l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} V_M^T & \omega^T & v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T = L \dot{x}. \quad (4-67)$$

De cette manière, considérer les égalités matricielles (4-21) et (4-67) implique que :

$$J_x = M_2 L, \quad (4-68)$$

$$J_q = N_2. \quad (4-69)$$

## 4.6 Étude de cas

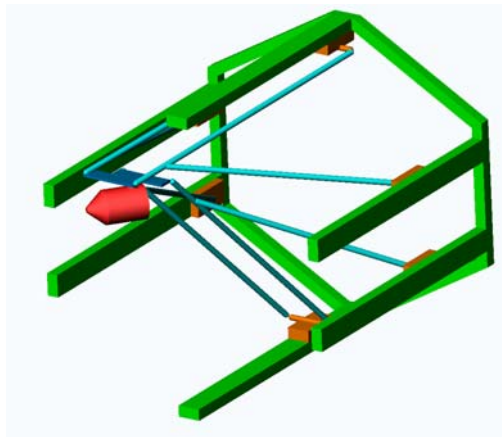
Dans cette section, nous mettons l'accent sur une géométrie particulière où les six moteurs sont parallèles et orientés suivant  $\vec{e}_z$  de manière à procurer au mécanisme un grand volume de travail selon cette direction.

### 4.6.1 Considérations pratiques

Pour plus de simplicité, il serait préférable de relier les barres simples directement à la nacelle. Cependant cette configuration présente trop de collisions entre barres. Une architecture plus réaliste consiste à fixer les barres simples sur les parallélogrammes et vérifier la relation suivante pour palier les collisions :

$$f > 2D/l_i, \quad i \in \{1, 4\}. \quad (4-70)$$

La machine décrite Figure 4.5 illustre cet agencement.



**Figure 4.5.** Architecture sans collisions internes n°1 du robot Eureka

Dans le cas où les barres simples sont reliées directement à la nacelle ( $f = 0$ ), il est nécessaire d'envisager l'utilisation de barres incurvées pour éviter les collisions (voir Figure 4.6).

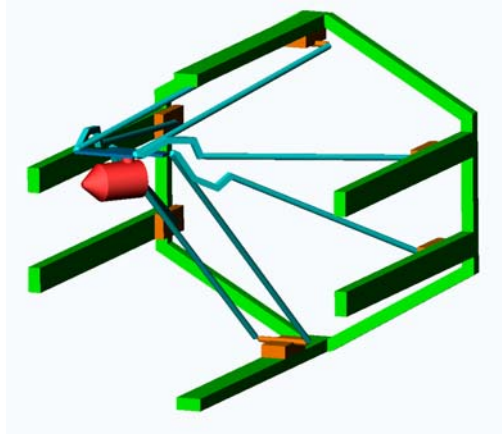


Figure 4.6. Architecture sans collisions internes n°2 du robot Eureka

### 4.6.2 Géométrie du robot

Les vecteurs représentatifs des origines  $O_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , des moteurs linéaires sont :

$$\mathbf{O}_1 = [0 \quad J \quad 0]^T, \quad (4-71)$$

$$\mathbf{O}_2 = [-H \quad I \quad 0]^T, \quad (4-72)$$

$$\mathbf{O}_3 = [H \quad I \quad 0]^T, \quad (4-73)$$

$$\mathbf{O}_4 = [0 \quad -J \quad 0]^T, \quad (4-74)$$

$$\mathbf{O}_5 = [-H \quad -I \quad 0]^T, \quad (4-75)$$

$$\mathbf{O}_6 = [H \quad -I \quad 0]^T, \quad (4-76)$$

où  $H$ ,  $I$  et  $J$  définissent les dimensions du bâti :

$$H = 0,45 \text{ m}, \quad I = 0,08 \text{ m} \quad \text{et} \quad J = 0,4 \text{ m}. \quad (4-77)$$

Ces paramètres ainsi que tous les autres découlent d'une optimisation visant à maximiser la taille du volume de travail en tenant compte des performances de la machine. Le pseudo-conditionnement développé au chapitre 3 a permis de limiter le volume de travail à la zone de l'espace où l'anisotropie en vitesses ne dépasse pas un facteur de 8 (voir sections suivantes).

Nous avons retenu une nacelle de type 3 ( $k_4 = -k_1$ ) dont les grandeurs géométriques sont (cf. Figure 4.2) :

$$D = 0,05 \text{ m}, \quad E = 0,06 \text{ m} \quad \text{et} \quad k_1 = -0,05 \text{ m/rad}. \quad (4-78)$$

*Remarque :* Le rapport de transmission  $|k_1|$  est choisi égal à  $D$  de manière à avoir la même sensibilité angulaire pour les variables opérationnelles  $\theta$  et  $\varphi$ .

Les longueurs des barres valent :

$$l_i = 0,9 \text{ m}, \quad i \in \{1, 4\} \quad \text{et}, \quad (4-79)$$

$$l'_i = 0,9 \text{ m}, \quad i \in \{1, 2, 5, 6\}. \quad (4-80)$$

Le rapport  $f$  qui détermine le point de fixation des barres simples sur les parallélogrammes spatiaux a pour valeur :

$$f = 1/8, \quad (4-81)$$

et les bornes des moteurs linéaires sont telles que :

$$0 \leq q_i \leq 1,26 \text{ m.} \quad (4-82)$$

Afin de calculer le pseudo-conditionnement, nous nous sommes attachés à déterminer la matrice jacobienne normalisée. En effet puisque  $\mathbf{J}_x$  n'est pas homogène (le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}$  mélange les mètres avec les radians) nous avons utilisé la technique de normalisation de matrices explicitée dans [Stocco 1998] de manière à avoir affaire à un vecteur de coordonnées opérationnelles  $\tilde{\mathbf{x}}$  homogène (vitesses linéaires uniquement) :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{W}_x \dot{\mathbf{x}} \quad (4-83)$$

avec :

$$\mathbf{W}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |k_1| \end{bmatrix}. \quad (4-84)$$

$D$  (la demi-largeur de la nacelle) et  $|k_1|$  (le rapport de transmission) constituent les grandeurs caractéristiques de la machines relatives à  $\theta$  et  $\varphi$ . Ces paramètres fixent les rapports entre vitesses linéaires et vitesses angulaires.

(4-65) implique que :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x \mathbf{W}_x^{-1} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (4-85)$$

### 4.6.3 Éléments de comparaison des indices de manipulabilité

Ce robot à actionnement redondant permet de mettre en œuvre la méthode de calcul des indices de manipulabilité développés dans le chapitre 3. Pour une posture particulière du robot, nous allons confronter les différents indices.

*Remarque :* En raison de la dimension élevée de l'espace opérationnel, il sera impossible de réaliser un tracé des différents domaines.

La posture retenue arbitrairement est celle illustrée Figure 4.7.

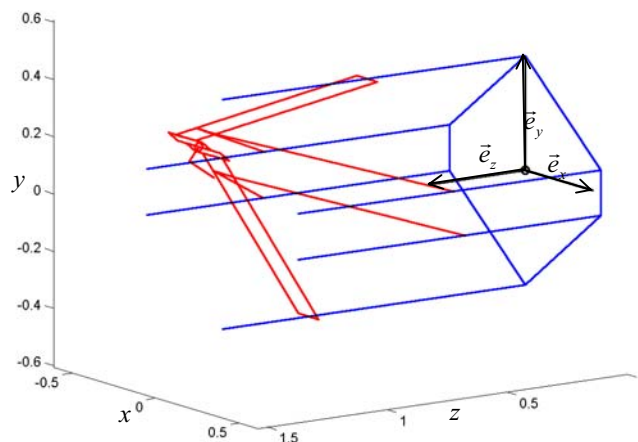


Figure 4.7. Schéma du robot Eureka dans une posture particulière

Elle correspond au vecteur des coordonnées opérationnelles :

$$\mathbf{x}_0 = [0,2 \text{ m} \quad 0,3 \text{ m} \quad 1,5 \text{ m} \quad 50^\circ \quad 30^\circ]^T \quad (4-86)$$

Pour ce cas précis (voir Table 4.2), on remarque que le pseudo-conditionnement, c'est-à-dire l'aplatissement du plus grand ellipsoïde compris dans le polytope opérationnel, est plus faible que le conditionnement. Cela témoigne donc d'un comportement en vitesse plus isotrope que l'indice usuel ne le laisse entendre.

**Table 4.2.** Valeurs des différents indices d'isotropie pour le robot Eureka

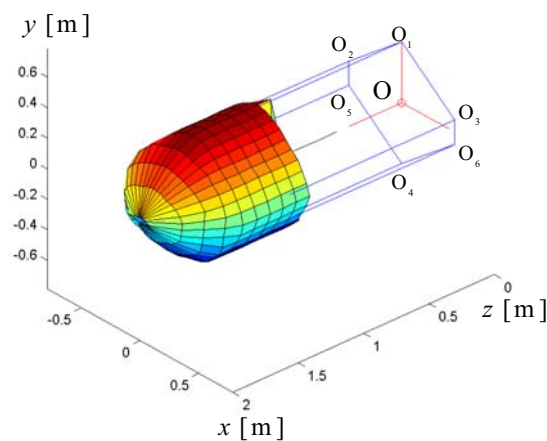
Indice d'isotropie	Valeur [sans unité]	Demi-longueurs des axes des ellipsoïdes correspondantes	Produit des demi-longueurs
$\text{cond}(\mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x \mathbf{W}_x^{-1})$	4,3134	(0,3462 0,6951 1,0438 1,2718 1,4932)	0,4770
$\text{pcond}(\mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x \mathbf{W}_x^{-1})^*$	4,1393	(0,3682 0,7380 1,1762 1,4593 1,5242)	0,7109

\* On note  $\text{pcond}$  le rapport des grandeurs extrêmes du plus grand ellipsoïde opérationnel inclus dans le polytope opérationnel.

Puisque le produit des demi-longueurs des axes des ellipsoïdes est directement proportionnel au volume des ellipsoïdes, on constate que le volume de l'ellipsoïde des vitesses opérationnelles obtenu conformément au chapitre 3 est 1,49 fois plus grande que celui original (implicite à la DVS) ; ce qui signifie que l'ellipsoïde original est loin d'occuper toute la place à l'intérieur du polytope opérationnel.

#### 4.6.4 Volume de travail

Le volume de travail est donné Figure 4.8.



**Figure 4.8.** Estimation du volume de travail du robot Eureka

Il constitue le lieu des points de l'organe terminal où :

- ❑ les moteurs ne sont pas hors limites,
- ❑ le pseudo-conditionnement de la matrice jacobienne inverse normalisée reste inférieur à huit. En d'autres termes l'anisotropie des vitesses opérationnelles est meilleure que huit.
- ❑ L'orientation de l'organe terminal est quelconque :

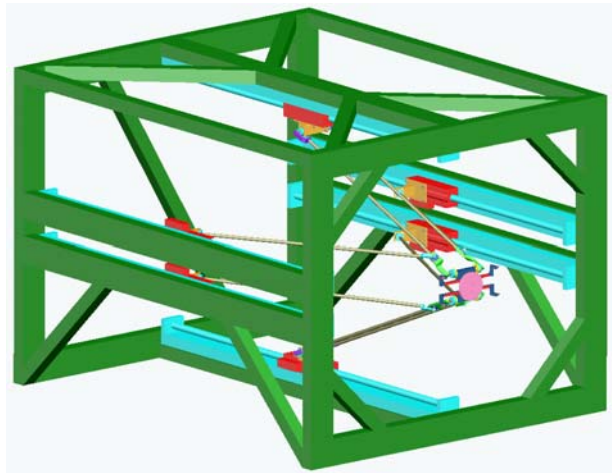
$$\theta \in [-90^\circ, 90^\circ] \text{ et} \quad (4-87)$$

$$\varphi \in [-90^\circ, 90^\circ]. \quad (4-88)$$

*Remarque :* Soulignons le fait que selon  $z$  le volume de travail ne dépend que de la course des moteurs.

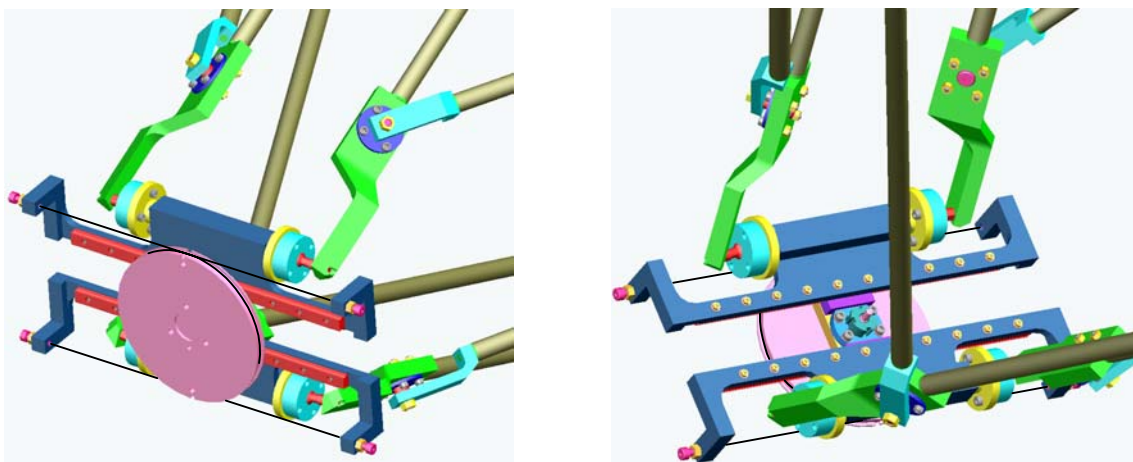
## 4.7 Le prototype du robot Eureka

Un prototype est en cours de fabrication au LIRMM. L'architecture est relativement simple grâce à l'utilisation de moteurs linéaires (voir Figure 4.9).



**Figure 4.9.** Image CAO du robot Eureka, vue d'ensemble

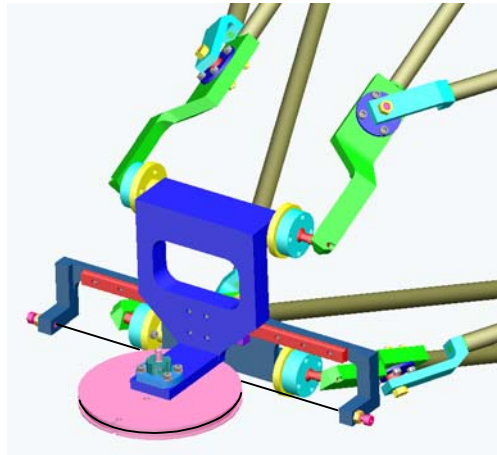
Les dimensions du robot sont celles retenues pour le calcul du volume de travail. Les barres et la nacelle sont en aluminium. Les liaisons rotules sont de nouvelles rotules à billes développées par la société Ephaist (Japon) (une photo des rotules est disponible dans l'annexe D). Plutôt que d'utiliser un dispositif à pignon-crémaillère nous avons retenu l'emploi d'un mécanisme à poulie-câble (voir Figure 4.10).



**Figure 4.10.** Image CAO du robot Eureka, détail de la nacelle ; à gauche : vue depuis l'avant ; à droite : vue depuis l'arrière



Pour certaines applications, il serait préférable que la rotation de la poulie ait lieu autour d'un axe vertical (pour  $\theta = 0$ ) et non pas horizontal. Cette configuration permettrait par ailleurs de limiter les risques de collision de l'effecteur avec les barres du mécanisme. Dans le but d'obtenir cette rotation, nous avons réfléchi à un moyen de modifier la nacelle. La Figure 4.11 illustre cette modification. Il est à noter que la nacelle est de type 2 (contrairement à la nacelle originelle de type 3) dans un souci de simplicité.



**Figure 4.11.** Image CAO du robot Eureka, détail de la nacelle modifiée pour que la rotation de la poulie ait lieu autour d'un axe vertical (dans cette position)

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau mécanisme combinant la redondance d'actionnement et l'utilisation d'une nacelle munie d'un dispositif de transformation T/R. Nous avons prouvé que pour peu que certaines conditions géométriques soient respectées, cette architecture :

- offre un grand volume de travail en rotation et en translation,
- dispose de modèles géométriques et cinématiques particulièrement simples bien utiles pour la commande du robot,
- présente des architectures réalistes libres de collisions internes.



---

# Conclusion générale

---

Nous nous sommes attachés au cours de cette thèse à concevoir des robots à forts débattements angulaires. Après avoir établi l'ensemble des approches destinées à vaincre les sur-mobilités qui interviennent dès lors que l'on conçoit un mécanisme à forts débattements angulaires, nous avons privilégié les approches suivantes :

- ❑ l'emploi de dispositifs mécaniques de transformation de mouvement T/R,
- ❑ l'utilisation de mécanismes d'amplification des rotations,
- ❑ l'emploi de la redondance d'actionnement.

Les robots imaginés ont nécessité la mise au point de certains outils mathématiques d'analyse, et nous nous sommes focalisés essentiellement sur :

- ❑ le moyen d'étudier les singularités, notamment celles que les matrices jacobienues usuelles ne parviennent pas à mettre en évidence,
- ❑ la façon de quantifier les performances de l'effecteur de mécanismes à actionnement redondant.

## Apports

### État de l'Art

L'analyse de l'ensemble des robots capables d'orienter l'effecteur a permis de faire émerger les différentes approches pour parvenir à de forts débattements angulaires. Nous avons établi une liste de ces approches.

### La famille des robots I4

La famille des robots I4 exploite le principe de nacelle articulée munie d'un dispositif mécanique de transformation de mouvement T/R. Grâce à cette approche, ces robots 3T-1R peuvent offrir un débattement angulaire aussi important que souhaité.

### Le dispositif mécanique Twice

Le concept d'amplification des rotations a été étendu à 2 rotations avec le dispositif mécanique Twice. Il constitue un mécanisme additionnel capable d'augmenter les débattements angulaires de certains robots déjà existant.

### Une méthode d'analyse des singularités des robots H4/I4

Nous avons proposé une approche systématique pour mener l'analyse des singularités de la vaste famille des robots H4/I4. Cette étude de la cinématique des robots permet de caractériser

les singularités en un minimum de calculs. Cette méthode est également étendue au cas du robot Eureka.

### **Des indices de performance pour mécanismes à actionnement redondant**

En vue de caractériser réellement le comportement de l'effecteur, plutôt que la qualité de la transformation entre espaces articulaires et opérationnels, des indices de performance ont été élaborés. Ils s'adressent aux mécanismes à actionnement redondant et concernent aussi bien les vitesses que les efforts.

### **Le robot Eureka**

Ce mécanisme 3T-2R concilie les deux approches proposées au cours de cette thèse : il exploite la redondance d'actionnement et possède une nacelle équipée d'un dispositif de transformation de mouvement T/R. L'effecteur est capable de s'orienter selon un hémisphère complet.

## **Perspectives**

Nous proposons certaines idées de développements futurs concernant les points suivants :

### **La méthode d'analyse des singularités des robots H4/I4**

La méthode d'analyse des singularités développée pour les robots H4/I4 pourrait être étendue à d'autres robots comme nous l'avons vu pour le robot Eureka. Dans sa formulation actuelle elle se limite à des robots où seule l'invariance des longueurs des barres importe dans l'écriture des contraintes cinématiques entre la base et l'effecteur. Il serait bon de l'étendre à d'autres mécanismes dont certaines liaisons imposent des contraintes cinématiques supplémentaires.

De plus, plutôt que de se servir de ce procédé comme d'un outil d'analyse des singularités d'un robot déjà existant, il serait judicieux de l'utiliser lors du processus de conception d'un nouveau robot, pour qu'il guide le concepteur vers une structure valable. Ainsi, une étude systématique de l'ensemble des robots H4/I4 peut être menée, ce qui peut permettre de faire émerger les robots réellement fonctionnels.

### **Les indices de performance pour mécanismes à actionnement redondant**

Les indices de performance établis pour caractériser les performances en vitesses et en efforts de l'effecteur de mécanismes parallèles à actionnement redondant mériteraient d'être optimisés. En effet, en l'absence de solution algébrique évidente, la résolution du problème nécessite un processus d'optimisation.

Par ailleurs, en raison de la forte similitude qui existe entre les robots à actionnement redondant et les robots à redondance cinématique, il conviendrait de transposer cette méthode d'analyse à cette catégorie de robots.

## **Recherches futures**

Les robots développés ou simplement imaginés au cours de cette thèse auront atteint un des objectifs visés par cette thèse : parvenir à de forts débattements angulaires. S'intéresser aux structures parallèles des robots manipulateurs, c'est prendre conscience du formidable potentiel qu'offre la mise en parallèle de chaînes cinématiques, pourtant forts simples, pour aboutir à des mécanismes de transmission de mouvement performants.

Pour la communauté des roboticiens, l'approche qui consiste à imaginer des mécanismes à chaînes cinématiques fermées est longtemps apparue comme peu naturelle de prime abord, alors que dans la nature cette manière d'agencer « actionneurs » et « transmission » est très répandue. Ainsi, lorsque l'on considère une jambe humaine, par exemple, celle-ci est constituée d'os s'articulant au niveau du genou, reliés entre eux par des muscles. Le parallèle avec les structures mécaniques est immédiat si l'on remplace os par segments, genou par liaison rotule et muscles par vérins.

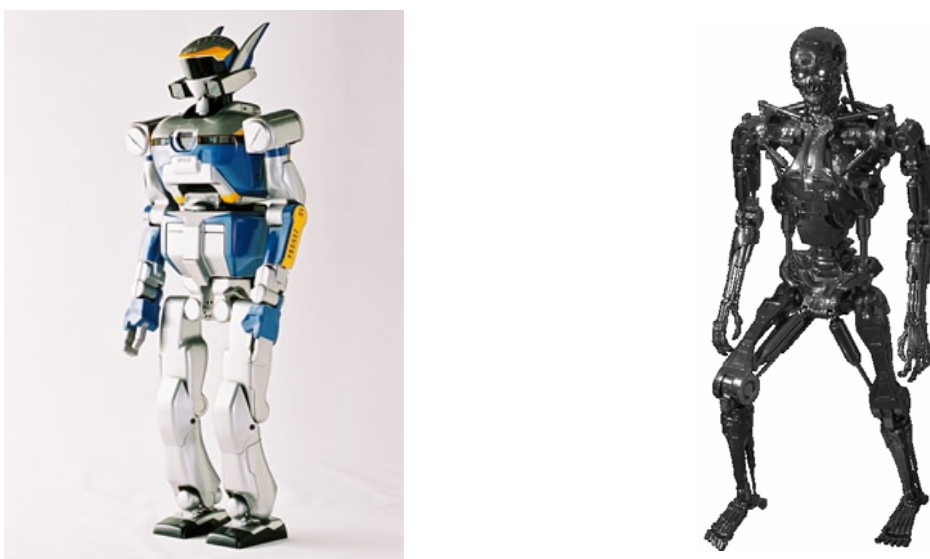
Il est possible de dégager d'autres similitudes du corps humain avec les mécanismes parallèles, comme par exemple, la redondance cinématique qui permet à une main de saisir un même objet mais avec une configuration pour le bras différente suivant que l'individu souhaite exercer un effort important ou engendrer un mouvement précis.

De plus si l'on relève la capacité des muscles à n'exercer des efforts que lorsqu'ils se contractent, on est frappé par la similitude avec les robots à câbles dont les efforts dans les câbles doivent se limiter à de la traction pure.

Malgré cela, dans le domaine récent qu'est la robotique humanoïde, on trouve aujourd'hui essentiellement des plate-formes de travail conservant le point de vue « historique » de la robotique de manipulation : les membres des robots s'inspirent des robots manipulateurs sériels classiques.

La recherche d'architectures mécaniques humanoïdes évoluées permettant aux robots de disposer de capacités de mouvement proches de celles de l'homme, a été peu menée jusque là. A ce jour, les robots humanoïdes d'architecture complexe relèvent surtout du domaine de la science-fiction (voir figure 5.1). Parmi les travaux qui portent sur des organes à architecture parallèle, on peut mentionner l'épaule à actionnement redondant de Hayward [Hayward 1993] développée dans un souci de compacité et de forte capacité de charge.

Mes travaux futurs de recherche concerneront les architectures mécaniques des robots humanoïdes. Le besoin de structures légères pour privilégier la dynamique et diminuer les besoins énergétiques se faisant sentir, mes travaux se tourneront tout naturellement vers les mécanismes à architecture parallèle répondant à ce besoin.



**Figure 5.1.** Robots humanoïdes ; à gauche le robot HRP-2 de l'AIST (Japon) ; à droite : vue d'artiste d'un robot humanoïde doté d'articulations à architecture parallèle



---

# Références bibliographiques

---

- [Angeles 1992] Angeles J., “The design of isotropic manipulator architectures in the presence of redundancies”, in *Int. J. Robotics Research*, Vol. 11, No. 3, pp. 196-201, 1992.
- [Angeles 2000] Angeles J., Morozov A. and Navarro O., “A novel manipulator architecture for the production of SCARA motions”, in *proc. of IEEE ICRA: International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2370-2375, San Francisco, April 24-28, 2000.
- [Bicchi 1995] Bicchi A., Melchiorri C. and Balluchi D., “On the mobility and manipulability of general limb robots”, in *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 11, No. 2, pp. 215-228, 1995.
- [Bonev 2003] Bonev L., “The True Origins of Parallel Robots”, in [www.parallemic.org](http://www.parallemic.org), 2003.
- [Candido 1941] Candido G., « Le risoluzioni della equazione di quarto grado (Ferrari-Eulero-Lagrange) », *Period. Mat.*, Vol. 4, No. 21, pp. 88-106, 1941.
- [Chablat 2003] Chablat D. and Wenger P., “Architecture Optimization of a 3-DOF Parallel Mechanism for Machining Applications, the Orthoglide”, in *IEEE Transactions On Robotics and Automation*, 2003.
- [Chiacchio 1991] Chiacchio P., Chiaverini S., Sciacivico L. and Siciliano B., “Global task space manipulability ellipsoids for multiple-arm systems”, in *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 7, No. 5, pp. 678-685, 1991.
- [Chiacchio 1996] Chiacchio P., Bouffard-Vercelli Y. and Pierrot F., “Evaluation of Force Capabilities for Redundant Manipulators”, in *Proc. of IEEE ICRA: International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, Minnesota, USA, April 1996.
- [Choe 1996] Choe W., Kino H., Katsuta K. and Kawamura S., “A Design of Parallel Wire Driven Robots for Ultrahigh Speed Motion Based on Stiffness Analysis”, in *Proc. of the Japan-USA Symposium on Flexible Automation*, Vol.1, pp.159-166, Boston, USA, July 1996.
- [Clavel 1988] Clavel R., DELTA, “A Fast Robot with Parallel Geometry”, in *18<sup>th</sup> Int. Symp. on Industrial Robot*, pp. 91-100, Lausanne, Switzerland, April 26-28, 1988.
- [Clavel 1989] Clavel R., « Une nouvelle structure de manipulateur parallèle pour la robotique légère », *APII*, pp. 501-519, 1989.
- [Clavel 1994] Clavel R., « Robots parallèles », *Techniques de l'Ingénieur*, Art. 7710, Vol. S., Juillet 1994.
- [Company 1999] Company O. and Pierrot F., “A new 3T-1R parallel robot”, in *Proc. of IEEE ICAR'99: 9<sup>th</sup> International Conference on Advanced Robotics*, pp. 557-562, Tokyo, Japan, October 25-27, 1999.

- [Company 2000] Company O., « Machines-outils rapides à structure parallèle. Methodologie de conception, applications, et nouveaux concepts », *Ph.D. Thesis*, Université Montpellier II, December 2000.
- [Company 2002] Company O., Krut S. and Pierrot F., “Modeling and Preliminary Design Issues of a 4-Axis Parallel Machine for Heavy Parts Handling”, in *IMechE Journal of Multibody Dynamics*, Vol. 216, Special Issue, Part K, pp. 1-11, January 2002.
- [Corradini 2003] Corradini C., Fauroux J.-C., Krut S. and Company O., “Evaluation of a 4-Degree of Freedom Parallel Manipulator Stiffness”, in *Proc. of the 11<sup>th</sup> World Congress in Mechanism and Machine Science*, Tianjin, China, August, 2003.
- [Démidovitch 1979] Démidovitch B. and Maron I., *Éléments de calcul numérique*, Mir, Moscow, 1979.
- [Durand 1960] Durand E., *Solution numérique des équations algébriques*, Masson, Paris, 1960.
- [Eberly 2000] Eberly D., “Intersection of Ellipses”, in *Internal Doc. of Magic Software Inc.*, 6006 Meadow Run Court, Chapel Hill, NC 27516, USA, October 10, 2000.
- [Fang 2002] Fang Y. and Tsai L.-W., “Structure Synthesis of a Class of 4-DoF and 5-DoF Parallel Manipulators with Identical Limb Structures”, in *Int. J. Robotics Research*, Vol. 21, No. 9, pp. 799-810, September 2002.
- [Furuya 1983] Furuya N., Soma K., Chin E. and Makino, “Research and development of selective compliance assembly robot arm”, *Hardware and software of SCARA controller, Journal of the Japan Society of Precision Engineering/Seimitsu Kogaku Kai-shi*, Vol. 49, No. 7, pp. 835-841, 1983.
- [Gosselin 1988] Gosselin C. and Angeles J., “The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator”, in *ASME J. Mech., Trans. and Automation in Design*, Vol 110, pp. 35-41, 1988.
- [Gosselin 1988] Gosselin C., “Kinematic analysis optimization and programming of parallel robotic manipulators”, *Ph.D. Thesis*, McGill University, Montréal, 1988.
- [Gosselin 1990] Gosselin C., “Dexterity indices for planar and spatial robotic manipulators”, in *Proc. IEEE ICRA: International Conference on Robotics and Automation*, pp. 650-655, Cincinnati, Ohio, USA, 1990.
- [Gosselin 1996] Gosselin C.M., St-Pierre E. and Gagné M., “On the development of the agile eye: mechanical design, control issues and experimentation”, *IEEE Robotics and Automation Society Magazine*, Vol. 3, No. 4, pp. 29-37, 1996.
- [Gough 1957] Gough V.E., “Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tire performance”, in *Proc. of Auto Div. Inst. Mech. Eng.*, 1956-1957.
- [Hayward 1992] Hayward V., Khatib O., Craig J., and Lozano-Perez T., “Kinematic Analysis And Design Of Redundant Manipulators”, *Robotics Review 2*, MIT Press, pp. 191-195, 1992.
- [Hayward 1993] Hayward V., “Design of a Hydraulic Robot Shoulder Based on a Combinatorial Mechanism”, *Preprints of the 3<sup>rd</sup> Int. Symp. on Experimental Robotics*, Yoshikawa T. and Miyazaki F. Eds., pp. 297-310, Kyoto, Japan, 1993.
- [Herrero 2000] Herrero A., Zatarain M. and Almandoz X., “Development of a Five-drive Parallel Kinematics Machine”, *Internal Report*, Fundacion Tekniker, Avda. Otaola, 20., 20600 Eiber, Spain, 2000.
- [Hervé 1978] Hervé J.M., “Analyse structurelle des mécanismes par groupes de déplacements”, in *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 13, pp. 437-450, 1978.



- [Hervé 1995] Hervé J.M., “Group mathematics and parallel link mechanisms”, in *proc. of 9<sup>th</sup> World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pp. 2079-2082, Milan, Italy, August 30-September 2, 1995.
- [Hervé 1999] Hervé J.M., “The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design”, in *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, pp. 719-730, 1999.
- [Iftom 2003] IFToMM (the Int. Fed. for the Promotion of Mechanism and Machine Science), “Standardization of Terminology”, in *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 38, Part 7-10, pp. 597-1111, July 2003.
- [Kawamura 1993] Kawamura S. and Ken H., “A New Type of Master Robot for Teleoperation Using a Radial Wire Drive System”, in *Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Yokohama, Japan, July 26-30, 1993.
- [Kawamura 1995] Kawamura S., Choe W., Tanaka S. and Pandian S.R., “Development of an Ultrahigh Speed Robot FALCON using Wire Drive System”, in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, Nagoya, Japan, pp. 215-220, 1995.
- [Kawamura 2000] Kawamura S., Kino H. and Choe W., “High-speed Manipulation by using Parallel Wire-driven Robots”, in *Int. J. of Robotica*, Cambridge University Press, Vol. 18, Part 1, pp.13-21, January/February 2000.
- [Kim 2002] Kim J., Hwang J. C., Kim J. S., Iurascu C. C., Park F. C. and Cho Y., “Analysis and Design of a New 6 D.O.F Full Tilting Parallel Mechanism”, in *Proc. of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Quebec City, Quebec, Canada, October 3-4, 2002.
- [Klein 1991] Klein C. and Miklos T., “Spatial robotics isotropy”, in *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 10, No. 4, pp. 426-437, 1991.
- [Klema 1980] Klema V. C. and Laub A. J., “The singular value decomposition: its computation and some applications,” in *IEEE Transactions and Automatic Control*, Vol. AC-25, No. 2, pp. 164-176, 1980.
- [Kock 1998] Kock S. and Schumacher W., “A Parallel x-y Manipulator with Actuation Redundancy for High-Speed And Active-Stiffness Applications” in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, pp. 2295-2300, May 1998.
- [Krut 2002a] Krut S., Company O., Marquet F., Pierrot F., “Twice: A Tilting Angle Amplification System for Parallel Robots”, in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 4108-4113, Washington, DC, USA, May 11-15, 2002.
- [Krut 2002b] Krut S., Company O., Pierrot F., “Velocity Performance Indexes for Parallel Mechanisms with Actuation Redundancy”, in *Proc. of Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pp. 46-56, Quebec City, Quebec, Canada, October 3-4, 2002.
- [Krut 2003a] Krut S., Company O., Benoit M., Ota H. and Pierrot F., “I4: A new parallel mechanism for Scara motions”, in *proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan, September 14-19, 2003.
- [Krut 2003b] Krut S., Company O. and Pierrot F., “Velocity Performance Indexes for Parallel Mechanisms with Actuation Redundancy”, to appear in *Int. J. of Robotica*, Cambridge University Press, 2003.

- [Krut 2003c] Krut S., « De l'Étude à la Réalisation de Robots Parallèles à Forts Débattements Angulaires », in *Proc. of J'Docs03*, Montpellier, France, March 4-5, 11-12, 2003.
- [Krut 2003d] Krut S., Company O. and Pierrot F., "Eureka: A New 5-Degree-of-Freedom Redundant Parallel Mechanism with High Tilting Capabilities in *Proc. of IEEE/RSJ IROS: International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Las Vegas, USA, October 27-31, 2003.
- [Lafourcade 2002] Lafourcade, P., Libre M. and Reboulet, C., "Design of a Parallel Wire-Driven Manipulator for Wind Tunnels", in *Proc. of Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Quebec City, Quebec, Canada, October 2002.
- [Lee 2002] Lee C.-C. and Hervé J. M., "Discontinuous Mobility of One Family of Spatial 6R Mechanisms through the Group Algebraic Structure of Displacement Set", in *Proc. of DETC-ASME Design Engineering Technical Conferences*, Montreal, Canada, September 29-October 2, 2002.
- [Leguay-Durand 1998] Leguay-Durand S., « Conception et optimisation de mécanismes parallèles à mobilités restreintes », *Ph.D. Thesis*, ONERA Toulouse, June 23, 1998.
- [Li 2003] Li Q. C. and Huang Z., "A Family of Symmetrical Lower-Mobility Parallel Mechanisms with Spherical and Parallel Subchains", in *J. Robotic Systems*, Vol. 20, No. 6, pp. 297-305, 2003.
- [Lindemann 1989] Lindemann R. and Tesar D., "Construction and Demonstration of a 9-String 6-DOF Force Reflecting Joystick for Telerobotics", in *Proc. of NASA International Conference on Space Telerobotics*, No. 4, pp. 55-63, 1989.
- [Marquet 2001a] Marquet F., Krut S., Company O., and Pierrot F., "Archi: a New Redundant Parallel Mechanism: Modeling, Control and First Results", in *Proc. of IEEE/RSJ IROS: International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Maui, Hawaii, USA, October 29 to November 3, 2001.
- [Marquet 2001b] Marquet F., Krut S., Company O. and Pierrot F., "Archi, a Redundant Mechanism for Machining with Unlimited Rotation Capacities", in *Proc. of IEEE ICAR 2001: 10<sup>th</sup> Int. Conf. on Robotics and Automation*, Budapest, pp. 683-689, August 22-25, 2001.
- [Marquet 2002a] Marquet F., Company O., Krut S., Gascuel O. and Pierrot F., "Control of a 3-Dof Over-Actuated Parallel Mechanism", in *Proc. of 2002 ASME Int. DETC/CIE: Design Engineering Technical Conferences - Computers and Information in Engineering Conference*, Montreal, Canada, September 29 to October 2, 2002.
- [Marquet 2002b] Marquet F., Company O., Krut S., Pierrot F., "Enhancing Parallel Robots Accuracy with Redundant Sensors", in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 4114-4119, Washington, DC, USA, May 11-15, 2002.
- [Marquet 2002c] Marquet F., « Contribution à l'étude de l'apport de la redondance en robotique parallèle », *Ph.D. Thesis*, Université Montpellier II, November 2002.
- [Merlet 1997a] Merlet J.-P., *Les robots parallèles*, Hermès, 1997.
- [Merlet 1998] Merlet, J.-P., "Determination of 6D Workspaces of a Gough-Type 6 d.o.f. Parallel Manipulator", in *Proc. of 12<sup>th</sup> RoManSy*, pp. 261-268, Paris, France, July 6-9, 1998.
- [Merlet 2001a] Merlet J.-P. and Pierrot F., « Modélisation des robots parallèles », *Analyse et modélisation des robots manipulateurs*, Lavoisier, ISBN 2-7462-0300-6, pp. 93-144, 2001.

- [Merlet 2001b] Merlet J.-P., "A parser for the interval evaluation of analytical functions and its applications to engineering problems", in *J. of Symbolic Computation*, Vol. 31, pp. 475-486, 2001.
- [Merlet 2002] Merlet J.P., "Still a long way to go on the road for parallel mechanisms", in *Proc. of 2002 ASME Int. DETC/CIE: Design Engineering Technical Conferences - Computers and Information in Engineering Conference*, Montréal, Canada, September 29 to October 2, 2002.
- [Mineur 1966] Mineur H., *Technique de calcul numérique*, Dunod, Paris, 1966.
- [Nguyen 1987] Nguyen V.-D., "Constructing Stable Grasps in 3D", in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp.234-239, 1987.
- [Nguyen 1988] Nguyen V.-D., "Constructing Force-Closure Grasps", in *IJRR: International Journal of Robotics Research*, Vol. 7, No. 3, pp.3-16, June 1988.
- [Park 1996] Park F.C. and Kim J.W., "Kinematic manipulability of closed chains", in *Recent Advances in Robot Kinematics*, J. Lenarcic and V. Parenti-Castelli Eds., Kluwer Academic Pub., pp. 99-108, 1996.
- [Pierrot 1991a] Pierrot F., « Robots pleinement parallèles légers : conception, modélisation et commande », *Pb.D. Thesis*, Université Montpellier II, April 24, 1991.
- [Pierrot 1991b] Pierrot F., Dauchez P., and Fournier A. "Hexa: a fast six-dof fully parallel robot", in *proc. of IEEE ICAR: International Conference on Advanced Robotics*, pp. 1159-1163, Pise, Italy, June 19-22, 1991.
- [Pierrot 1991c] Pierrot F., Dauchez P. and Fournier A., "Fast parallel robots", in *Journal of Robotic Systems*, Vol. 8, No. 6, pp. 829-840, 1991.
- [Pierrot 1997] Pierrot F. and Chiacchio P., "Evaluation of Velocity Capabilities for Redundant Parallel Robots", in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico, pp. 774-779, April 1997.
- [Pierrot 1999] Pierrot F., Company O., "H4: a new family of 4-dof parallel robots", in *Proc of IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pp. 508-513, Atlanta, Georgia, USA, September 19-22, 1999.
- [Pierrot 2001] Pierrot F., Marquet F., Company O. and Gil T., "H4 parallel robot: modeling, design and preliminary experiments", in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, Seoul, Korea, May 2001.
- [Pierrot 2002] Pierrot F., Krut S., Marquet F., Company O., "Modelling and Preliminary Design Issues of a 4-axis Parallel Machine for Heavy Parts Handling", in *proc. of PKS 2002: Parallel Kinematic Seminar*, Chemnitz, Germany, April 23-25, 2002.
- [Pierrot 2003] Pierrot F., Company O. and Marquet F., "A New High Speed Four-DOF Parallel Robot. Synthesis and Modeling Issues", to appear in *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2003.
- [Pollard 1938] Pollard W. L. V., "Position controlling apparatus", *USA Pattern (1942)*, April 1938.
- [Rolland 1999] Rolland L., "The Manta and the Kanuk: Novel 4 dof parallel mechanism for industrial handling", in *Proc. of ASME Dynamic Systems and Control Division IMECE '99 Conference*, Vol. 67, pp 831-844, Nashville, USA, November 14-19, 1999.
- [Ryu 1998] Ryu S.J., Kim J.W., Hwang J.C., Park C., Ho H.S., Lee K., Lee Y., Cornel U., Park F.C. and Kim J., "ECLIPSE: An Overactuated Parallel Mechanism for Rapid Machining", in *Proc. ASME Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Vol. 8, pp. 681-689, USA, 1998.

- [Ryu 1998] Ryu S.J., Kim J.W., Hwang J.C., Park C., Ho H.S., Lee K., Lee Y., Cornel U., Park F.C. and Kim J., “ECLIPSE: An Overactuated Parallel Mechanism for Rapid Machining”, in *Proc. of ASME Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Vol. 8, pp. 681-689, USA, 1998.
- [Salisbury 1982] Salisbury J.K. and Craig J.J., “Articulated hands: force control and kinematic issues”, in *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 1, No. 1, pp. 4-17, 1982.
- [Shen 1994] Shen Y., Osumi H. and Arai T., “Manipulability Measures for Multi-wire Driven Parallel Mechanisms”, in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Industrial Technology*, pp. 550-554.
- [Siciliano 1999] Siciliano B., “The Tricept Robot: Inverse kinematics, manipulability analysis and closed-loop direct kinematics algorithm”, in *Int. J. of Robotica*, Cambridge University Press, pp. 437-445, 1999.
- [Stewart 1965] Stewart D., “A platform with 6 degrees of freedom”, in *Proc. of the Inst. of Mech. engineers*, Part 1-15, pp. 371-386, 1965.
- [Stocco 1996] Stocco L. and Salcudean S.E., “A coarse-fine approach to force-reflecting hand controller design”, in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 404-410, Minneapolis, April 24-26, 1996.
- [Stocco 1998] Stocco L., Salcudean S.E. and Sassani F., “Matrix Normalization for Optimal Robot Design”, in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1346-1351, Leuven, Belgium, May 16-21, 1998.
- [Takeda 2000] Takeda Y. and Funabashi H., “Kinematic Synthesis of Spatial In-parallel Wire-driven Mechanism with 6 Degrees of Freedom with 8 Force Transmissibility”, in *Proc. of DETC-ASME Design Engineering Technical Conferences*, Baltimore, Maryland, USA, September 10-13, 2000.
- [Tönshoff 1998a] Tönshoff H.K., “A systematic comparison of parallel kinematics”, *Keynote in Proc. of First European-American Forum on Parallel Kinematic Machines*, Milan, August 31 and September 1, 1998.
- [Tönshoff 1998b] Tönshoff K., Grendel H., and Kaak R., “A hybrid manipulator for laser machining”, in *Proc. of First European-American Forum on Parallel Kinematic Machines*, Milan, August 31 and September 1, 1998.
- [Tönshoff 2002] Tönshoff K. and *al.*, “Modelling of error effects on the new hybrid kinematic DUMBO structure”, in *Proc. of 3<sup>rd</sup> Chemnitz Parallelkinematik Seminar*, Chemnitz, pp. 639-653, April 23-25, 2002.
- [Treib 1998] Treib T. and Zirn O., “Erste Erfahrungen mit dem parallelkinematischen Konzept Triaglride”, in *Proc. of Seminar “Hexapod, Linapod, Dyna-M”*, WZL RWTH, Aachen, 1998.
- [Tsai 1996] Tsai L.W., “Kinematics of a three-dof platform with three extensible limbs”, in *Recent Advances in Robot Kinematics*, J. Lenarcic and V. Parenti-Castelli Eds., Kluwer Academic Pub., pp. 401-410, 1996.
- [Verhoeven 1998] Verhoeven R., Hiller M. and Tadokoro S., “Workspace of tendon-driven Stewart platforms: Basics, classification, details on the planar 2-dof class”, in *Proc. of the 4th. International Conference on Motion and Vibration Control MOVIC'98*, Vol. 3, pp. 871-876, 1998.
- [Verhoeven 2000] Verhoeven R. and Hiller M., “Estimating the Controllable Workspace of Tendon-based Stewart Platforms”, in *Proc. of ARK International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, pp. 277-284, Portoroz, Slovenia, 2000.
- [Verhoeven 2002] Verhoeven R. and Hiller M., “Tension Distribution in Tendon-based Stewart Platforms”, in *Proc. of ARK International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, Caldes de Malavella, Spain, 2002.

- 
- [Wenger 2000] Wenger P., and Chablat, D., “Kinematic Analysis of a New Parallel Machine Tool: The Orthoglide”, in *Proc. of ARK 2000: 7<sup>th</sup> International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, Piran-Portoroz, Slovenia, June 26-30, 2000.
- [Williams 2001] Williams II R. L., Gallina P. “Planar Cable-Direct-Driven Robots, Part I: Kinematics and Statics”, in *Proc. of DETC-ASME Design Engineering Technical Conferences*, Pittsburgh, Pennsylvania, September 9-12, 2001.
- [Yoshikawa 1985a] Yoshikawa T., “Manipulability of robotic mechanisms”, in *Robotics Research: The second International Symposium*, H. Hanafusa and H. Inoue Eds., MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, Vol. 4, pp. 3-9, 1985.
- [Yoshikawa 1985b] Yoshikawa T., “Dynamic manipulability of robot manipulators”, in *Journal of Robotic Systems*, Vol. 2, No. 1, pp. 113-124, 1985.
- [Zamanov 1992] Zamanov V.B. and Sotirov Z.M., “Parallel manipulators in robotics”, in *Proc. of IMACS/SICE: Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, Kobe, pp. 409-418, September 16-20, 1992.
- [Zanganeh 1997] Zanganeh K. and Angeles J., “Kinematic isotropy and the optimum design of parallel manipulators”, in *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 16, No. 2, pp. 185-197, 1997.
- [Zlatanov 1998] Zlatanov D., Fenton R.G., and Benhabib B., “Identification and classification of the singular configurations of mechanisms”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 33, No. 6, pp. 743-760, August 1998.



---

# Les graphes d'agencement

---

*Préambule*

Un graphe d'agencement est censé caractériser la topologie d'un mécanisme : il témoigne des différentes chaînes cinématiques. Cette annexe vise à formaliser ces graphes ; on les retrouve désormais abondamment dans la littérature.

## A.1 Introduction

Pour décrire théoriquement un mécanisme on fait souvent référence à :

- *La topologie du mécanisme* : la façon dont les joints, segments et actionneurs sont agencés les uns par rapport aux autres de manière à produire les mouvements souhaités,
- *La géométrie du mécanisme* : la dimension des segments, la position des actionneurs et des liaisons dans l'espace, pour établir les modèles du mécanisme [Merlet 2002].

Les graphes d'agencements visent à mieux appréhender la topologie des mécanismes. Les éléments qui constituent un graphe sont :

- les liaisons représentées par des boîtes,
- les pièces représentées par des traits,
- mais aussi des éléments de couplage qui agissent entre deux liaisons.

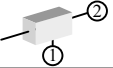
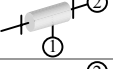
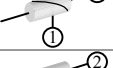
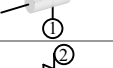


*Remarque* : Contrairement à ce que l'on peut observer dans certains manuels, une boîte reçoit donc deux traits et deux traits uniquement (une liaison est reliée à deux pièces).

## A.2 Symbolique

### A.2.1 Les liaisons

On distingue essentiellement 6 types de liaisons (voir Table A.1).

**Table A.1.** Inventaire des liaisons

Liaisons	Symbolique	Schématisation technologique	Mobilités	degrés de liberté
Glissière	P (Prismatic)		1 T	1
Pivot	R (Revolute)		1 R	1
Glissière hélicoïdale	H (Helicoidal)		1 T/R	1
Pivot glissant	C (Cylindrical)		1 T + 1 R	2
Cardan	U (Universal)		2 R	2
Rotule	S (Spherical)		3 R	3

On distingue les liaisons motorisées (caractères gras) de celles passives, mais aussi des liaisons équipées d'un dispositif de mesure (caractères soulignés) (voir Table A.2). Nous avons choisi d'effectuer cette distinction parce que certains robots (comme le robot H4 dans sa version actuelle) présentent une redondance de capteurs.

**Table A.2.** Nature des liaisons

Nature	Symbolique
Liaison passive	<u>L</u>
Actionneur	<b>L</b>
Dispositif de mesure	<u><b>L</b></u>

*Remarque n°1 :* Dans la majorité des cas, seules les liaisons à un degré de liberté peuvent être motorisées ou équipées d'un dispositif de mesure. Cependant des études sont menées à propos d'actionneurs sphériques (3 ddl) et il existe certains moteurs plans (2 ddl).

*Remarque n°2 :* De manière générale les actionneurs (liaisons motorisées) sont équipés d'un dispositif de mesure pour permettre l'asservissement.

### A.2.2 Les pièces

Les pièces sont représentées par des traits. On a l'habitude de distinguer par des traits de nature différente le bâti et l'organe terminal des pièces simples (voir Table A.3). Pour faciliter la lecture, on place le bâti à gauche du graphe et l'organe terminal à droite. Dans le cas des architec-



tures main droite – main gauche le bâti est représenté de part et d'autre et au centre on retrouve l'outil et la pièce manufacturée.

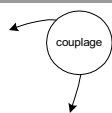
**Table A.3.** Types de pièces

Pièce	Symbolique
bâti	
organe terminal	█
pièce simple	—

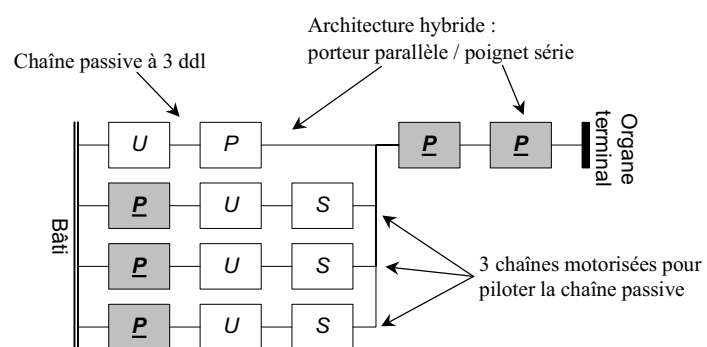
### A.2.3 Les éléments de couplage

Cette notation a été introduite pour ne pas modéliser les dispositifs mécaniques qui réalisent un couplage entre différentes liaisons. Elle précise uniquement le fait que les mouvements relatifs de deux liaisons sont parfaitement coordonnés. Représentés par des cercles, les éléments de couplage sont reliés par des arcs aux liaisons concernées. On recense plusieurs dispositifs de couplage (voir Table A.4).

**Table A.4.** Nature des éléments de couplage

Dispositifs mécaniques	Couplage	Symbolique
engrenages	$R \leftrightarrow R$	
pignon-crémaillère	$R \leftrightarrow P$	
système poulie-courroie	$R \leftrightarrow R$ ou $R \leftrightarrow P$	

## A.3 Exemple



**Figure A.1.** Le robot Georg V (IFW, Université de Hanovre), photo et graphe d'agencement



---

# Diverses architectures de robots

## I4

---

### B.1 Définitions

**I4** constitue une famille de robots à 4 degrés de libertés, constitué d'un bâti ( $B$ ), d'une nacelle articulée ( $NA$ ) et de quatre chaînes cinématiques ( $CC$ ) reliant la nacelle au bâti. L'organe terminal ( $OT$ ), préhenseur ou autre, est relié à la nacelle : les possibilités de mouvement de l' $OT$  sont 3T-1R (la rotation ayant lieu autour d'un axe d'orientation fixe).

Chaque  $CC$  inclut un actionneur ( $A$ ) et une transmission mécanique ( $TM$ ).

$NA$  est constituée de deux ou trois sous-parties ( $SP$ ). La rotation de l'organe terminal est provoquée par un dispositif mécanique particulier ( $DM$ ) qui transforme un mouvement de translation en un mouvement de rotation.

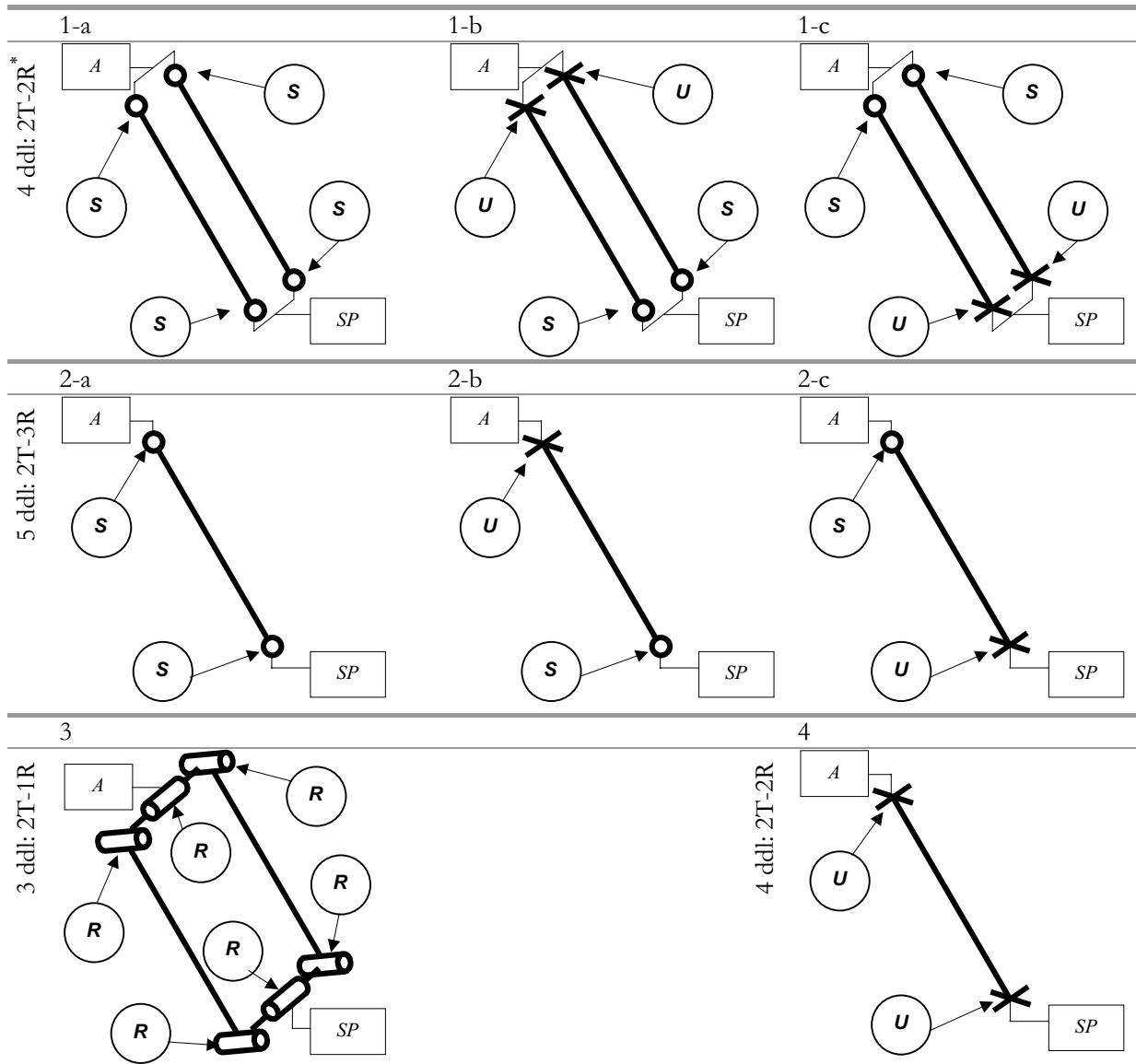
### B.2 Les actionneurs ( $A$ )

$A$  peut être de type:

- $P$  (Prismatic) : le guidage de la liaison glissière est relié à  $B$ , et la partie mobile de la liaison glissière constitue  $A$ .
- $R$  (Rotoid) : le guidage en rotation est fixé à  $B$ , et le rotor de l'actionneur constitue  $A$ .

### B.3 Les transmissions mécaniques ( $TM$ )

Les différents types de  $TM$  entre l' $A$  et les  $SP$  sont résumés dans la Table B.1.

**Table B.1.** Les différents types de transmission mécanique

\* Il s'agit du nombre de degrés de liberté entre  $A$  et  $SP$  (sans considérer les mobilités internes de la  $TM$ ).

## B.4 La nacelle articulée ( $NA$ )

$NA$  peut être de deux types :

- *Type 2* : Elle est constituée de deux  $SP$  ( $SPG$  pour sous-partie de gauche et  $SPD$  pour sous-partie de droite) et d'une articulation entre ces deux sous parties. La liaison doit posséder au moins un degré de liberté en translation.
- *Type 3* : Elle est constituée de trois  $SP$  ( $SPG$ ,  $SPD$  et  $SPC$  pour sous-partie centrale), d'une articulation entre  $SPG$  et  $SPC$  et d'une autre liaison entre  $SPD$  et  $SPC$ . Une des liaisons doit posséder au moins un degré de liberté en translation.

## B.5 Le dispositif mécanique de la nacelle (*DM*)

*DM* est un mécanisme à insérer entre deux *SP* reliées entre elles par une liaison capable d'un degré de liberté en translation au moins. Sa fonction est de transformer le mouvement relatif de translation en un mouvement de rotation de l'*OT*. Concrètement, il s'agit soit :

- d'un dispositif pignon-crémaillère,
- d'un système à poulie et câble,
- d'un mécanisme à courroie,
- etc.

## B.6 $I4 = 1 B + 4 A + 4 TM + 1 NA + 1 DM$

Les différentes possibilités pour construire un mécanisme I4 isostatique (sans contrainte interne) sont résumées dans la Table B.2.

**Table B.2.** Différentes possibilités d'architecture isostatiques de robots I4

N° machine	<i>A</i>	<i>TM</i>	<i>NA</i>
A1	<i>P</i>	3 <i>Type 1</i> + 1 <i>Type 2</i>	<i>Type 2, Joint = P</i>
A2	<i>R</i>	3 <i>Type 1</i> + 1 <i>Type 2</i>	<i>Type 2, Joint = P</i>
B1	<i>P</i>	4 <i>Type 1</i>	<i>Type 2, Joint = C</i>
B2	<i>R</i>	4 <i>Type 1</i>	<i>Type 2, Joint = C</i>
C1	<i>P</i>	4 <i>Type 1</i>	<i>Type 3, Joint 1 = P, Joint 2 = R</i>
C2	<i>R</i>	4 <i>Type 1</i>	<i>Type 3, Joint 1 = P, Joint 2 = R</i>

Les robots de la famille I4 fabriqués au LIRMM sont tous deux hyperstatiques (voir Table B.3).

**Table B.3.** Différentes possibilités d'architecture hyperstatiques de robots I4

N° machine	<i>A</i>	<i>TM</i>	<i>NA</i>
D1	<i>P</i>	4 <i>Type 1</i>	<i>Type 2, Joint = P</i>
E1	<i>T</i>	4 <i>Type 1</i>	<i>Type 3, Joint 1 = P, Joint 2 = P*</i>

\* Les articulations *Joint 1* et *Joint 2* sont couplées entre elles par le biais de deux crémaillères et d'un pignon en commun.

*Remarques:*

- La machine D1 fonctionne au LIRMM sous le nom de I4R. Elle utilise certaines pièces fournies par la compagnie ABB.
- La machine E1 fonctionne au LIRMM sous le nom de I4L. Elle utilise certaines pièces de la compagnie Toyoda et des articulations INA.

Évidemment, d'autres architectures existent, dépendant essentiellement de la manière de choisir les joints et de les agencer entre les *SP*.

## B.7 Quelques exemples

Les figures suivantes illustrent quelques exemples de nacelles de robots de la famille I4.

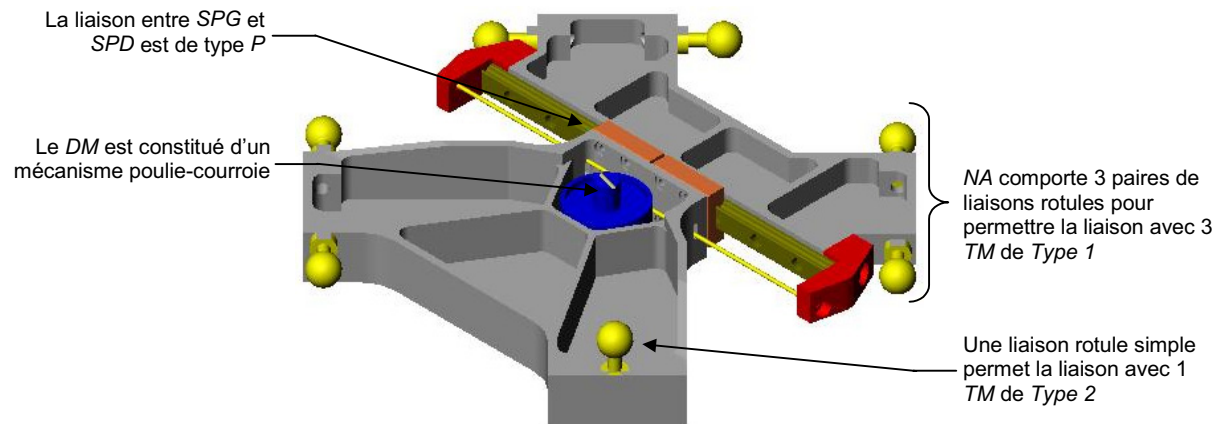


Figure B.1. Robot I4 : nacelle des machines A1 et A2

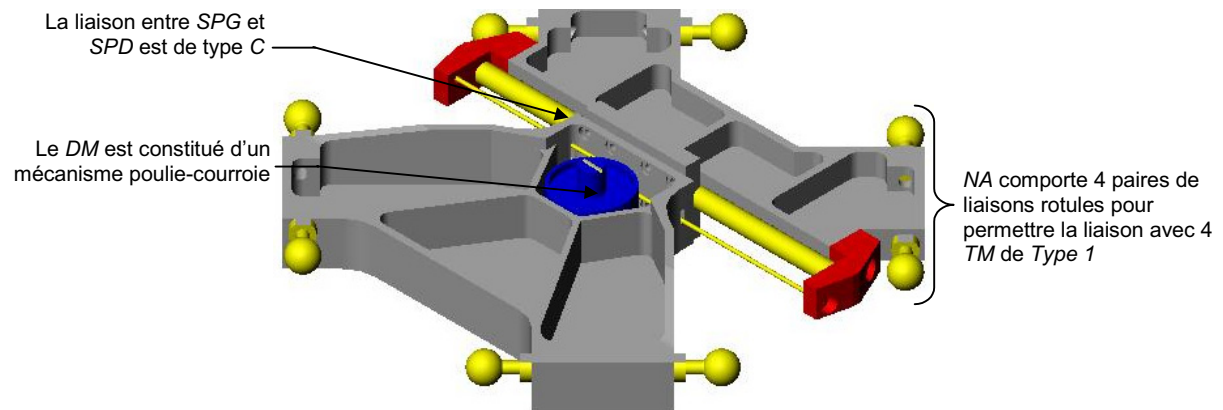


Figure B.2. Robot I4 : nacelle des machines B1 et B2

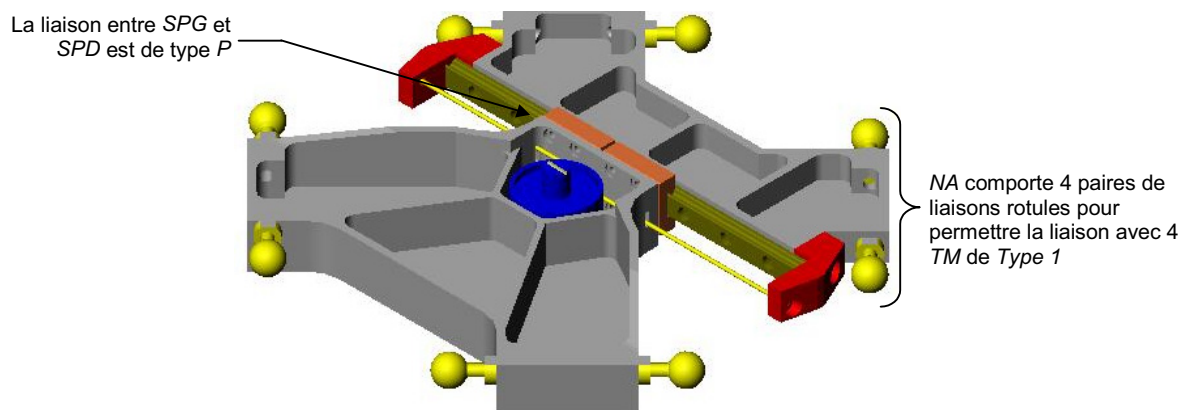
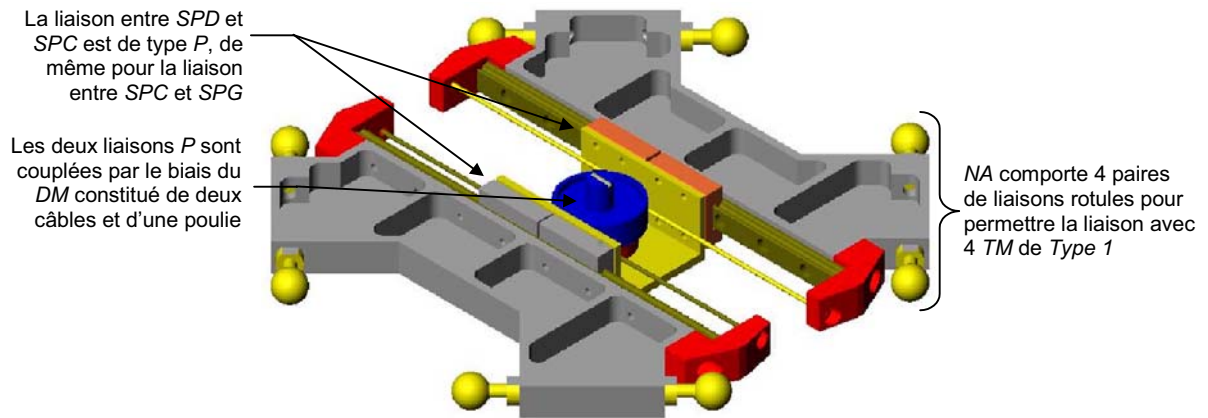


Figure B.3. Robot I4 : nacelle de la machine D1 (mécanisme hyperstatique)



**Figure B.4.** Robot I4 : nacelle de la machine E1 (mécanisme hyperstatique)





---

# Le dispositif de commande des robots parallèles du LIRMM

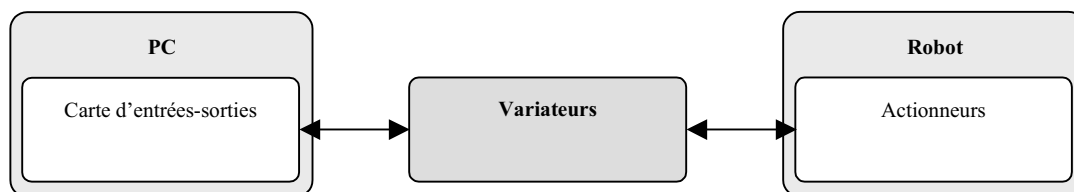
---

*Preamble*

Une grande partie de ma thèse a été consacrée à la réalisation de robots. Pour les commander nous avons fait le choix de mettre en place un moyen informatique robuste commun à l'ensemble des robots.

## C.1 Architecture matérielle

L'architecture de commande des robots repose sur l'utilisation d'un PC fonctionnant sous Microsoft Windows et muni du logiciel Venturcom RTX. Ce logiciel constitue un système d'exploitation temps réel capable de coexister avec Windows. Le PC est muni d'une carte au format PCI disposant d'entrées et de sorties numériques et analogiques. Les variateurs font le lien entre le PC et les actionneurs du robot (voir Figure C.1).



**Figure C.1.** Architecture matérielle pour la commande des robots

## C.2 Architecture logicielle

L'architecture logicielle repose sur la coexistence de deux processus : un processus Win32 pour l'interface utilisateur et un processus temps réel pour la commande du robot (voir Figure C.2). La mémoire partagée permet de faire dialoguer les deux processus entre eux. Microsoft Visual C++ permet de gérer l'ensemble du projet.

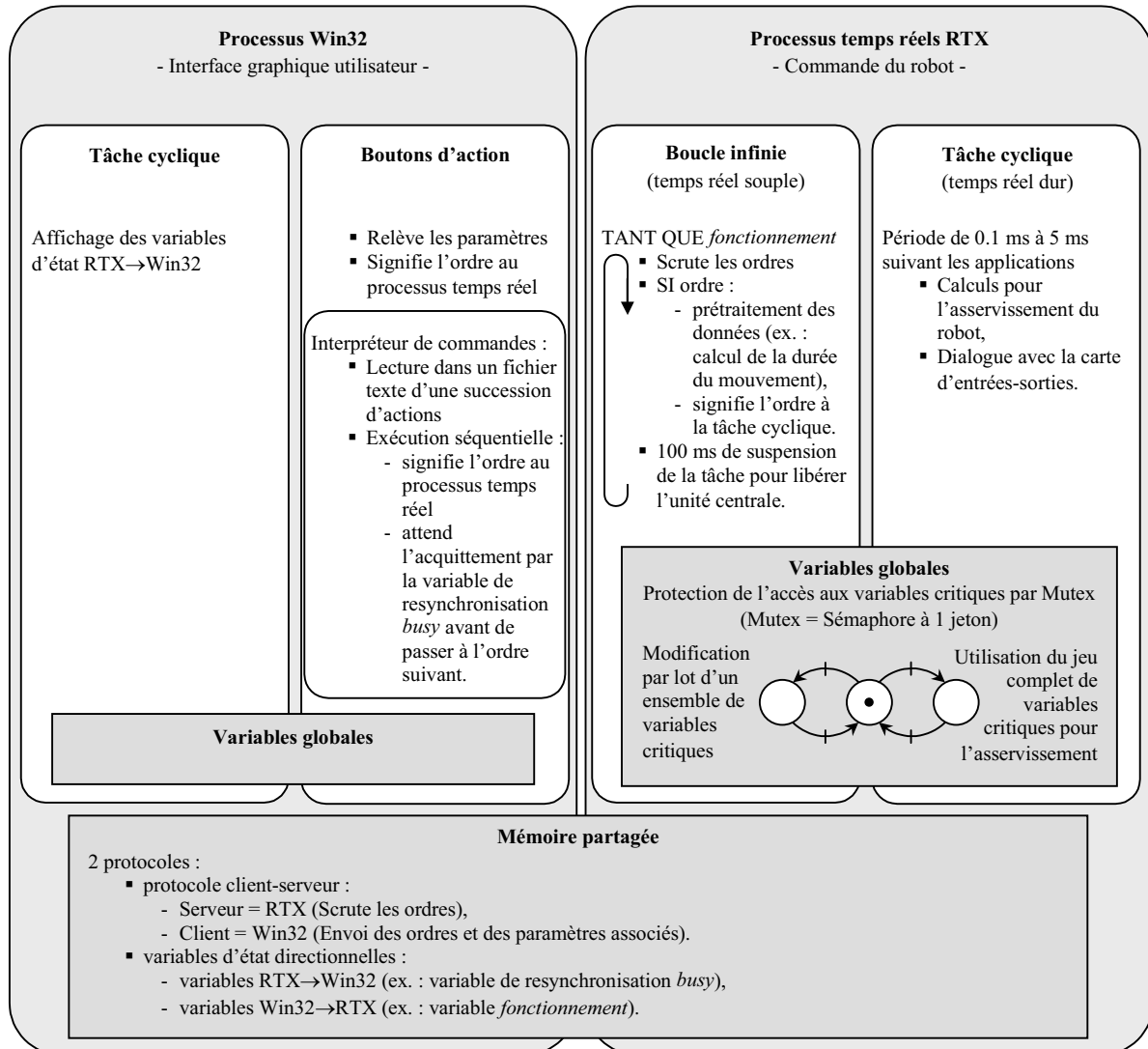


Figure C.2. Architecture logicielle de commande des robots parallèles

## C.3 Asservissement

L'asservissement des robots est réalisé de manière classique (voir Figure C.3 et Figure C.4).

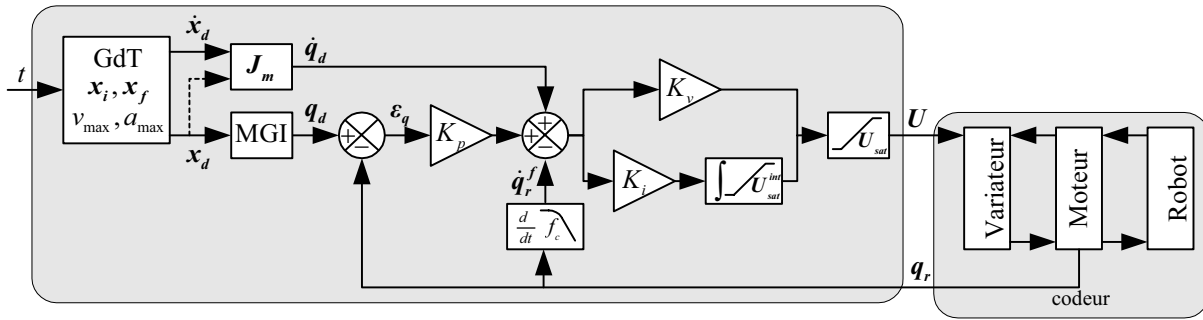


Figure C.3. Asservissement du robot I4L (consigne des variateurs proportionnelle à un effort)

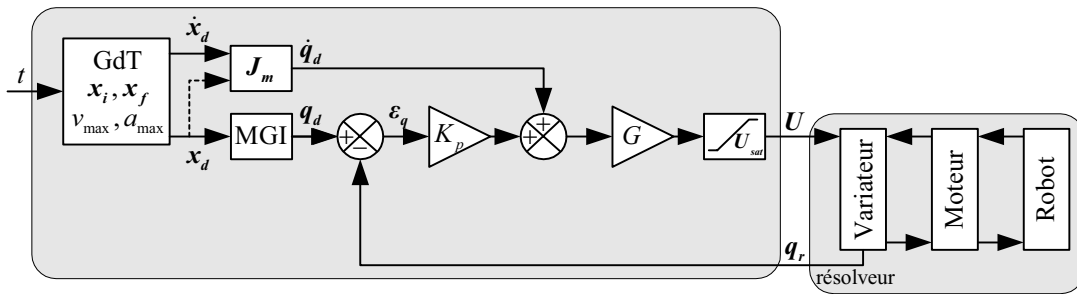


Figure C.4. Asservissement du robot I4R (consigne des variateurs proportionnelle à une vitesse)

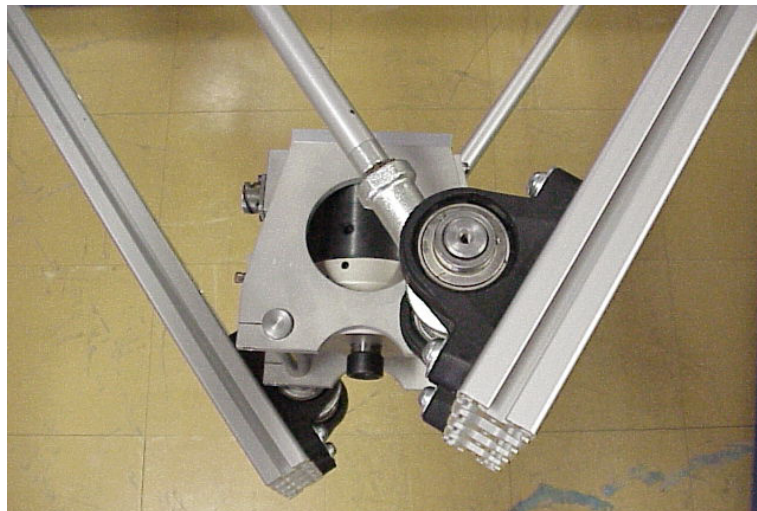


---

## Galerie de photos des robots parallèles du LIRMM

---

### D.1 Le robot Archi

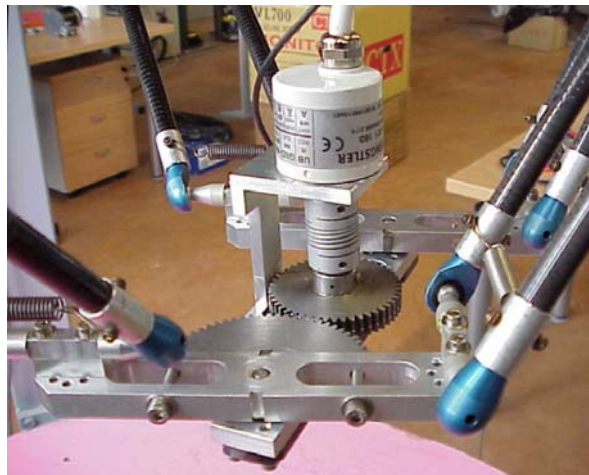


**Figure D.1.** Photo du robot Archi, détail de la nacelle

## D.2 Le robot H4

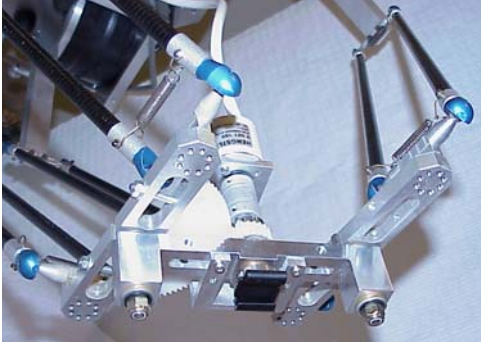



**Figure D.2.** Photo du robot H4, détail du bâti (pourvu des variateurs)



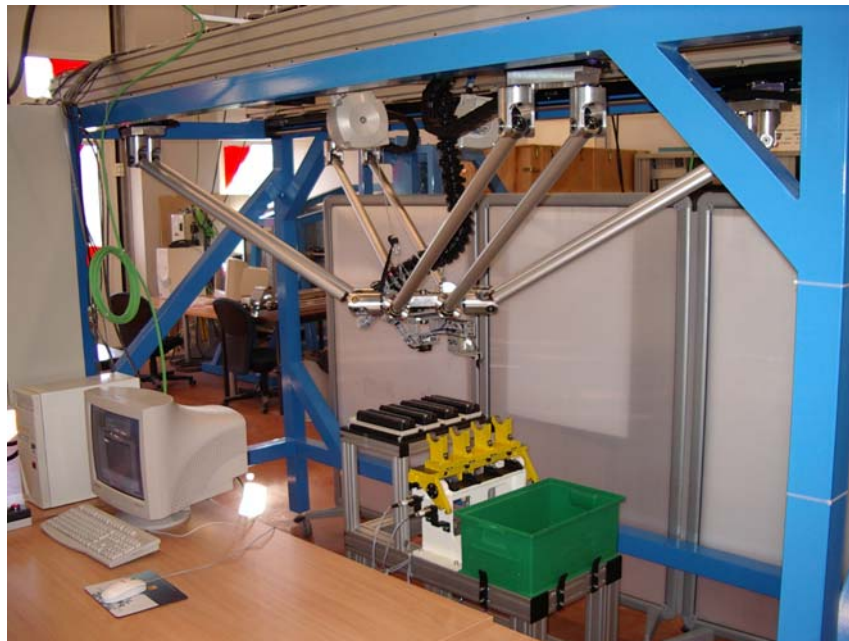
**Figure D.3.** Photo du robot H4, détail de la nacelle, du pignon à rattrapage de jeu et du codeur additionnel

**Table D.1.** Évolution de la nacelle du robot H4

Version*	n°1	n°2
Schéma		
guidages en rotation	paliers lisses	roulements à deux rangées de billes
engrenages	simples, en bakélite	à rattrapage de jeu, en acier

\* La version originelle ne figure pas dans ce comparatif : la nacelle ne comportait pas de dispositif d'amplification de la rotation à engrenages, ni de codeur additionnel.

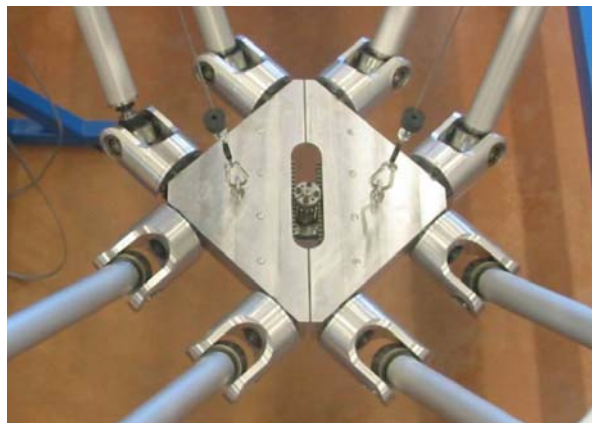
## D.3 Le robot I4L



**Figure D.4.** Photo du robot I4L, agencement du poste de travail équipé du banc Comau



**Figure D.5.** Photo du robot I4L, détail de la nacelle



**Figure D.6.** Photo du robot I4L, détail de la nacelle et du dispositif à pignon – 2 crémaillères



**Figure D.7.** Photo du robot I4L, détail des compensateurs de gravité





Figure D.8. Photo du robot I4L, détail des rotules INA

## D.4 Le robot I4R

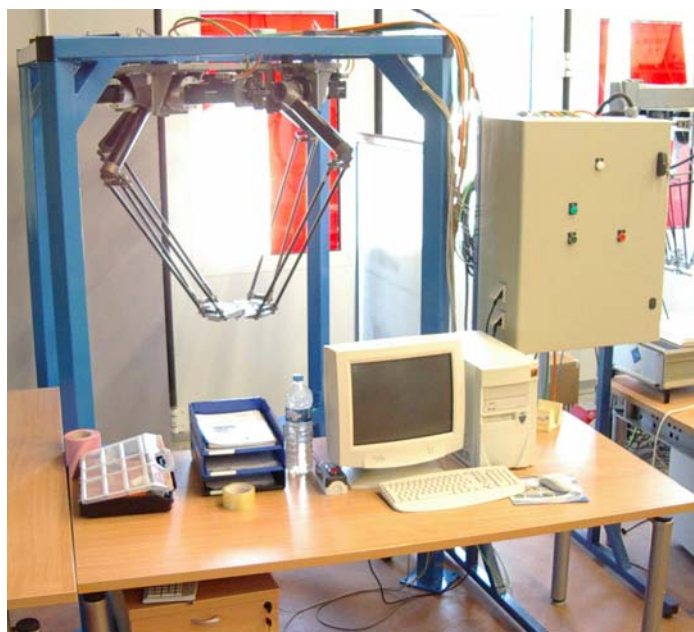


Figure D.9. Photo du robot I4R, agencement du poste de travail

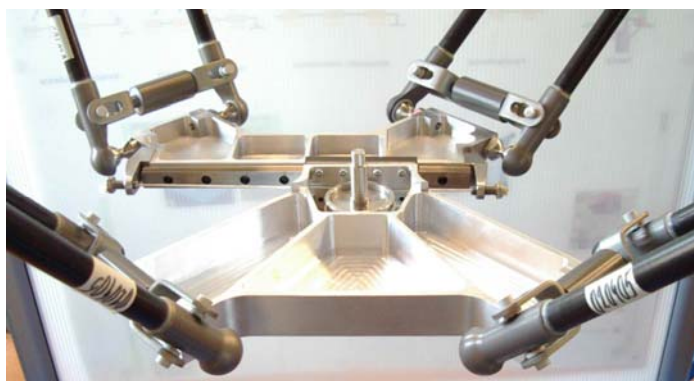


Figure D.10. Photo du robot I4R, détail de la nacelle, du dispositif à poulie – câble



**Figure D.11.** Photo du robot I4R, détail des actionneurs rotatifs et des capteurs de fin de course

## D.5 Le robot Eureka



**Figure D.12.** Photos des rotules Hephaist du robot Eureka

---

# Liste des publications réalisées dans le cadre de cette thèse

---

## E.1 Articles journaux

- [Krut 2003b] Krut S., Company O. and Pierrot F., “Velocity Performance Indexes for Parallel Mechanisms with Actuation Redundancy”, *to appear in Int. J. of Robotica*, Cambridge University Press, 2003.
- [Company 2002] Company O., Krut S. and Pierrot F., “Modeling and Preliminary Design Issues of a 4-Axis Parallel Machine for Heavy Parts Handling”, in *IMechE Journal of Multibody Dynamics*, Vol. 216, Special Issue, Part K, pp. 1-11, January 2002.

## E.2 Actes de conférences

- [Krut 2003d] Krut S., Company O. and Pierrot F., “Eureka: A New 5-Degree-of-Freedom Redundant Parallel Mechanism with High Tilting Capabilities in *Proc. of IEEE/RSJ IROS: International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Las Vegas, USA, October 27-31, 2003.
- [Krut 2003a] Krut S., Company O., Benoit M., Ota H. and Pierrot F., “I4: A new parallel mechanism for Scara motions”, in *proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan, September 14-19, 2003.
- [Corradini 2003] Corradini C., Fauroux J.-C., Krut S. and Company O., “Evaluation of a 4-Degree of Freedom Parallel Manipulator Stiffness”, in *Proc. of the 11<sup>th</sup> World Congress in Mechanism and Machine Science*, Tianjin, China, August, 2003.

- [Marquet 2002a] Marquet F., Company O., Krut S., Gascuel O. and Pierrot F., “Control of a 3-Dof Over-Actuated Parallel Mechanism”, in *Proc. of 2002 ASME Int. DETC/CIE: Design Engineering Technical Conferences - Computers and Information in Engineering Conference*, Montreal, Canada, September 29 to October 2, 2002.
- [Marquet 2002b] Marquet F., Company O., Krut S., Pierrot F., “Enhancing Parallel Robots Accuracy with Redundant Sensors”, in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 4114-4119, Washington, DC, USA, May 11-15, 2002.
- [Krut 2002a] Krut S., Company O., Marquet F., Pierrot F., “Twice: A Tilting Angle Amplification System for Parallel Robots”, in *Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 4108-4113, Washington, DC, USA, May 11-15, 2002.
- [Pierrot 2002] Pierrot F., Krut S., Marquet F., Company O., “Modelling and Preliminary Design Issues of a 4-axis Parallel Machine for Heavy Parts Handling”, in *proc. of PKS 2002: Parallel Kinematic Seminar*, Chemnitz, Germany, April 23-25, 2002.
- [Marquet 2001a] Marquet F., Krut S., Company O., and Pierrot F., “Archi: a New Redundant Parallel Mechanism: Modeling, Control and First Results”, in *Proc. of IEEE/RSJ IROS: International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Maui, Hawaii, USA, October 29 to November 3, 2001.
- [Marquet 2001b] Marquet F., Krut S., Company O. and Pierrot F., “Archi, a Redundant Mechanism for Machining with Unlimited Rotation Capacities”, in *Proc. of IEEE ICAR 2001: 10<sup>th</sup> Int. Conf. on Robotics and Automation*, Budapest, pp. 683-689, August 22-25, 2001.

### E.3 Séminaires et autres

- [Krut 2003c] Krut S., « De l’Étude à la Réalisation de Robots Parallèles à Forts Débattements Angulaires », in *Proc. of J’Docs03*, Montpellier, France, March 4-5, 11-12, 2003.
- [Krut 2002b] Krut S., Company O., Pierrot F., “Velocity Performance Indexes for Parallel Mechanisms with Actuation Redundancy”, in *Proc. of Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pp. 46-56, Quebec City, Quebec, Canada, October 3-4, 2002.







---

**TITRE :**

« Contributions à l'étude des robots parallèles légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements angulaires »

---

**RÉSUMÉ :**

Les robots parallèles sont caractérisés par leur architecture mécanique constituée de chaînes cinématiques fermées. Cette particularité leur procure une dynamique élevée. En contrepartie, ils souffrent de positions critiques (dites singulières) où les performances se dégradent. Celles-ci surviennent notamment lors de mouvements de rotation ; aussi la possibilité d'obtenir de forts débattements angulaires pose problème. Pour le résoudre, nous commençons par dresser un panorama des mécanismes parallèles 3T-1R et 3T-2R (T signifie translation, et R rotation) et nous mettons en évidence les différentes approches pour parvenir à de forts débattements angulaires. Puis, nous introduisons une nouvelle famille de robots parallèles légers (dont tous les actionneurs sont solidaires du bâti) 3T-1R capables d'une rotation de 360°. Il s'agit des robots I4 qui s'appuient sur un dispositif mécanique de transformation de mouvement T/R placé directement sur la plateforme mobile. Une méthode d'analyse de cette catégorie de robots, incluant également les robots H4, est explicitée. Elle permet de mettre en évidence tous types de singularités. Puis une autre approche, le concept d'amplification des rotations, est développée avec Twice, un dispositif mécanique 2R. Ensuite, l'accent est porté sur les mécanismes à actionnement redondant capables d'offrir de forts débattements angulaires : après une analyse critique du conditionnement de la matrice jacobienne et de la notion d'isotropie, la manière d'obtenir des indices réellement significatifs des performances en vitesses et en efforts pour ce type de mécanismes est explicitée. Pour finir, le robot Eureka conciliant les approches « dispositif mécanique T/R » et « actionnement redondant » est présenté. Robot parallèle léger 3T-2R, il est capable d'orienter l'effecteur selon un hémisphère complet.

---

**MOTS-CLÉS :**

Robots parallèles légers, forts débattements angulaires, méthode d'analyse des singularités, redondance d'actionnement, indices de performance, robots I4, mécanisme Twice, robot Eureka

---

**TITLE:**

“Contribution to the study of lightweight parallel robots, 3T-1R and 3T-2R, with high tilting capabilities”

---

**ABSTRACT:**

Parallel robots are characterized by their mechanical architecture built with closed kinematic chains. This feature leads to high dynamics. On the other hand, they suffer from critical configurations (called singularities) where performance collapses. It occurs principally when doing rotations; as a consequence achieving high tilting angles is a real problem. To face it, we begin by drawing up an overview of parallel mechanisms 3T-1R and 3T-2R (T means translation, and R rotation) and we enlighten the different approaches to achieve high tilting angles. Then, we introduce a novel family of lightweight parallel robots (the actuators are fixed to the frame) 3T-1R capable of achieving a 360° rotation. They are called I4 robots and are based on a mechanical T/R motion transformation device located directly on the articulated traveling plate. An analysis method of this category of robots, including also H4 robots, is explained. The proposed method can handle all kinds of singularities. Then, another approach, the concept of rotation amplification, is developed with Twice, a 2R mechanical device. Afterwards, the focus is given to over-actuated mechanisms capable of offering high tilting angles: after a critical analysis of the classical concepts of isotropy, the ways to obtain relevant performance indexes in terms of velocities and forces for this type of mechanisms are explained. Finally, the Eureka robot, which mixes the approaches “mechanical T/R device” and “over-actuation” is presented. This 3T-2R lightweight parallel robot can achieve orientating the effector in a whole hemisphere.

---

**KEYWORDS:**

Lightweight parallel robots, high tilting capabilities, singularities analysis method, actuation redundancy, performance indexes, I4 robots, Twice mechanism, Eureka robot

---

**DISCIPLINE :**

Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal

---

**LABORATOIRE :**

Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier (LIRMM)  
UMR CNRS / Université Montpellier II, no. 5506  
161, rue Ada – 34392 Montpellier Cedex 5 – France