Matematický ústav
Slovenská akadémia vied

Anna Jenčová

GEOMETRIA MNOŽÍN STAVOV: OD KLASICKÝCH KU KVANTOVÝM

Vedný odbor: 010102: Aplikovaná matematika

Autoreferát dizertačnej práce na získanie vedeckej hodnosti doktora matematických vied

MÚ SAV Bratislava, 2017

Dizertácia bola vypracovaná v rámci vedeckovýskumnej činnosti pri riešení projektov APVT-51-032002, APVV 0071-06, APVV-0178-11, projektov VEGA 1/0264/03, VEGA 2/0032/09, VEGA 2/0125/13 a VEGA 2/0069/16, Centra excelencie SAV-Kvantové technológie a projektov ERDF OP R&D CE QUTE ITMS 26240120009 a meta-QUTE ITMS 26240120022 na Matematickom ústave SAV.

Uchádzač: **Mgr. Anna Jenčová, PhD**
Matematický ústav SAV

Oponenti:

Stanovisko k dizertácii vypracoval Matematický ústav SAV v Bratislave

Autoreferát bol rozoslaný dňa

Obhajoba sa koná dňa pred komisiou pre obhajoby doktorských dizertácií

S dizertáciou sa možno oboznámiť

- na sekretariáte MÚ SAV
- na stránke http://www.mat.savba.sk/ jencova/

Predseda komisie pre obhajoby vo vednom odbore...

Obsah

1 Úvod **4**

2 Štruktúra a ciele práce **4**

3 Základné pojmy **5**

4 Stručný popis skúmanej problematiky **7**
4.1 Štruktúry informačnej geometrie 7
4.1.1 Klasická informačná geometria 7
4.1.2 Geometria kvantových stavov: konečnorozmerný prípad 9
4.1.3 Neparametrické kvantové informačné variety 10
4.2 Porovnávanie štatistických experimentov a postačujúce kanály 10
4.2.1 Klasické štatistické experimenty a kanály 10
4.2.2 Kvantové štatistické experimenty a kanály 11
4.2.3 Klasické a kvantové postačujúce kanály 12
4.3 Merania na kvantových kanáloch a kvantové komby 14

5 Hlavné výsledky práce **15**
5.1 Štruktúry informačnej geometrie 15
5.1.1 Konečnorozmerné kvantové stavové priestory 15
5.1.2 Neparametrické kvantové informačné variety 16
5.2 Porovnávanie kvantových kanálov a štatistických experimentov 20
5.2.1 Charakterizácie postačujúcich kanálov 20
5.2.2 Porovnávanie binárnych experimentov 22
5.2.3 Porovnávanie kvantových kanálov 22
5.3 Konvexná štruktúra množiny kvantových kanálov 23
5.3.1 Merania a kanály na K 23
5.3.2 Kvantové supermapy 24
5.3.3 Bázové normy a rozlíšiteľnosť 25

6 Závery práce **27**

Literatúra **28**

7 Zoznam prác a ich ohlas **33**

8 Geometry of families of states: from classical to quantum **38**

9 Geometrie der Familien der Zustände: vom Klassischen zum Quantum **39**

1 Úvod

Jednou zo základných vlastností kvantovej teórie je jej pravdepodobnostná povaha. Jej výstupom nie sú predpovede javov samotných, ale len ich pravdepodobností a túto neurčitosť nie je možné vysvetliť nedostatkom informácií alebo prítomnosťou skrytých premenných. Klasická teória pravdepodobnosti však nemôže zahrnúť skutočne kvantové javy. Matematický popis kvantovej mechaniky musí byť schopný zahrnúť fenomény ako je princíp neurčitosti, nekompatibilita pozorovateľných, superpozičný princíp a previazanosť. Tieto javy sa využívajú v kvantovej teórii informácie.

Rozdiel medzi klasickými a kvantovými stavovými priestormi je dobre známy. Zatiaľ čo klasický stavový priestor je Choquetov simplex, kvantové stavy majú komplikovanejšiu štruktúru. V predkladanej práci sa zameriavame na špecifickejšie vlastnosti parametrizovaných tried stavov. V klasickom prípade ide o vlastnosti, ktoré patria k základom teoretickej štatistiky, asymptotickej teórie odhadu a majú aplikácie aj v iných oblastiach. Kvantový prípad je často veľmi odlišný a niektoré dobre známe klasické výsledky je nutné netriviálnym spôsobom modifikovať, aby sa našla ich kvantová verzia. Naším hlavným cieľom je porozumieť podobnostiam a rozdielom medzi klasickými a kvantovými štruktúrami.

Parametrizovaná trieda stavov sa nazýva štatistický model alebo štatistický experiment. Reprezentuje apriórnu informáciu o skutočnom stave nejakého systému, alebo o rozdelení pravdepodobnosti, z ktorého sú vybrané dáta. Stavy môžu byť rozlíšené nejakým zaujímavým parametrom a naša schopnosť odhadnúť tento parameter závisí od geometrie stavového priestoru a od parametrizácie. To viedlo k zavedeniu diferenciálno-geometrickej štruktúry na štatistických modeloch, ktorú skúma informačná geometria. V štatistickej teórii rozhodovania sa študuje efektívnosť dostupných rozhodovacích pravidiel pre rôzne štatistické úlohy a na základe ich porovnávania sa zavádza usporiadanie a pseudometrika na štatistických experimentoch. Špeciálne triedy stavov sa objavujú aj v kvantovej teórii informácie, kde sa kvantové kanály dajú stotožniť so stavmi na viacčasťovom fyzikálnom systéme. Štatistické úlohy ako napr. odhad parametrov alebo testovanie hypotéz sa prirodzene objavujú aj v tomto kontexte a geometrická štruktúra stavového priestoru hrá aj tu rozhodujúcu úlohu.

2 Štruktúra a ciele práce

Práca pozostáva z dvanástich publikovaných článkov, pozri kapitolu 7 pre úplný zoznam. Články sú rozdelené do troch kapitol. Prvá kapitola sa zaoberá kvantovým rozšírením informačnej geometrie, druhá porovnávaním kvantových kanálov a štatistických experimentov. V tretej kapitole skúmame konvexnú štruktúru množiny kvantových kanálov. Práca je zameraná na tieto čiastkové problémy:

- Konštrukcie plochých dualistických štruktúr na variete pozitívne definitných matíc, s monotónnou Riemannovskou metrikou.

- Zavedenie štruktúry Banachovej variety na verných stavoch von Neumannovej algebry, zodpovedajúcej klasickej Pistone-Sempiho konštrukcii. Výskum jej vlastností vzhľadom na transformácie stavov kvantovými kanálmi.
- Rozšírenie Nagaoka-Amariho konštrukcie kanonickej divergencie pomocou dvojice plochých duálnych afinných konexií na neparametrický kvantový prípad.
- Charakterizácie postačujúcich kvantových kanálov pomocou niektorých veličín teórie informácie, napríklad pravdepodobnosť chýb v testovaní hypotéz a Fisherova informácia.
- Výskum informatívnosti a 2-informatívnosti pre kvantové binárne experimenty.
- Úplná kvantová verzia Le Camovho randomizačného kritéria s jasnou operačnou interpretáciou.
- Popis meraní a kanálov na sekciách stavového priestoru. Výskum ich konvexnej štruktúry, zodpovedajúcej bázovej normy a jej vzťahu k rozlíšiteľnosti.

3 Základné pojmy

Ústredným pojmom práce je *stav*, ktorý považujeme za čisto matematický objekt. Klasický stav definujeme ako rozdelenie pravdepodobnosti P na merateľnom priestore $(X, \mathcal{A})$, množinu všetkých stavov označíme $\mathcal{S}(X, \mathcal{A})$. Ak $P \ll \mu$ pre nejakú σ-konečnú mieru μ na $(X, \mathcal{A})$, môžeme ho reprezentovať hustotou $\frac{dP}{b\mu} \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Množinu takýchto stavov označíme $\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pod kvantovým stavom rozumieme normálny pozitívny unitálny funkcionál na von Neumannovej algebre $\mathcal{M}$, ktorej projekcie zodpovedajú javom na nejakom kvantovom systéme. Táto definícia zahŕňa klasické stavy v prípade, že $\mathcal{M}$ je abelovská. Množinu stavov na von Neumannovej algebre $\mathcal{M}$ označíme ako $\mathcal{S}(\mathcal{M})$, prípadne $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ak $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$ je algebra ohraničených operátorov na Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$. V tomto prípade sú stavy dané *operátormi hustoty*, t.j. pozitívnymi operátormi s jednotkovou stopou, ktoré spĺňajú

$$\rho(A) = \operatorname{Tr} \rho A, \qquad A \in B(\mathcal{H}).$$

Transformácie stavov sú reprezentované stochastickými zobrazeniami, ktoré sa nazývajú aj *kanály*. V klasickom prípade sa dajú definovať ako afinné zobrazenia medzi stavovými priestormi. Ak uvažujeme len stavy, ktoré majú hustotu vzhľadom na nejakú σ-konečnú mieru, stochastické zobrazenia možno rozšíriť na pozitívne zobrazenia $L_1(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \to L_1(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zachovávajúce normu na pozitívnom kuželi. V kvantovom prípade definujeme kanály ako preduály unitálnych normálnych úplne pozitívnych zobrazení medzi von Neumannovými algebrami. Pre konečnorozmerné algebry sú kanály dané úplne pozitívnymi stopu zachovávajúcimi zobrazeniami.

Špeciálnym prípadom sú *kvantovo-klasické* kanály, kde výstupný priestor je klasický. Takýmto kanálom hovoríme aj *merania*. Merania na stavovom priestore $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ sú v jedno-jednoznačnom vzťahu s mierami s hodnotami v pozitívnom kuželi $\mathcal{M}^+$ (*POVM*). Ak je množina výsledkov X konečná, každá POVM je daná ako postupnosť pozitívnych operátorov $M_x \in \mathcal{M}$, $x \in X$, ktoré spĺňajú rovnosť $\sum_x M_x = 1$. Pravdepodobnosť namerania výsledku $x \in X$ ak stav systému je ρ je pre zodpovedajúce meranie rovná

$$p_{M,\rho}(x) = \rho(M_x).$$

Dôležitým pojmom v teórii informácie je *divergencia*, ktorá je mierou rozdielnosti dvoch stavov. Takáto miera musí byť kontrastným funkcionálom, čo znamená, že je to nezáporná funkcia na dvojiciach stavov, ktorá je nulová práve vtedy, ak sú dané stavy rovnaké. Ďalšou prirodzenou požiadavkou je monotónnosť vzhľadom na stochastické zobrazenia, pretože transformácie stavov nemôžu zvýšiť ich štatistickú rozlíšiteľnosť. To znamená, že každá divergencia D musí spĺňať nerovnosť

$$D(T(\rho)\|T(\sigma)) \leq D(\rho\|\sigma), \tag{DPI}$$

pre všetky dvojice stavov (σ, ρ) a všetky kanály T. Základným príkladom klasickej divergencie je *relatívna entropia* (alebo *Kullback-Leiblerova divergencia, I-divergencia*). Pre rozdelenia pravdepodobnosti $P \ll Q$, je definovaná ako

$$S(P\|Q) = \int \log(\frac{dP}{dQ})dP.$$

Všeobecnejšie, ak f je konvexná funkcia na $\mathbb{R}^+$, f*-divergencia* [17, 41] je definovaná ako

$$S_f(P\|Q) = \int f(\frac{dP}{dQ})dQ.$$

Pre $f = x\log(x)$ dostaneme relatívnu entropiu. Ďalším špeciálnym prípadom je α*-divergencia*

$$S_\alpha(P\|Q) = \frac{4}{1-\alpha^2}\left(1 - \int (\frac{dP}{dQ})^{\frac{1-\alpha}{2}} dQ\right), \qquad \alpha \neq \pm 1.$$

Verziou relatívnej entropie pre kvantové operátory hustoty je Umegakiho relatívna entropia [65], ktorá má tvar

$$S(\rho\|\sigma) = \operatorname{Tr}\rho(\log(\sigma) - \log(\rho)).$$

Pre von Neumannove algebry zadefinoval relatívnu entropiu Araki [3] pomocou relatívneho modulárneho operátora. Kvantové verzie f-divergencií, tiež nazývaných *kvázi-entropie*, zaviedol Petz [48, 49]. Monotónnosť (DPI) je splnená ak f je operátor konvexná funkcia. Kvantové α-divergencie sú definované ako

$$S_\alpha(\rho\|\sigma) = \frac{4}{1-\alpha^2}\left(1 - \operatorname{Tr}\rho^{\frac{1-\alpha}{2}}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}}\right),$$

pričom (DPI) platí pre α v intervale $[-3, 3]$. Relatívna entropia a α-divergencie (alebo z nich odvodené Rényiho divergencie) sú dôležitými mierami rozlíšiteľnosti v klasickej aj kvantovej teórii informácie a štatistike.

4 Stručný popis skúmanej problematiky

4.1 Štruktúry informačnej geometrie

4.1.1 Klasická informačná geometria

Klasická informačná geometria skúma diferenciálno-geometrické štruktúry na štatistických modeloch. Tieto štruktúry sú už pomerne dobre preskúmané a majú dôležité aplikácie v rôznych oblastiach, napríklad v asymptotickej teórii odhadu, teórii informácie, štatistickej mechanike, biológii a teórii neurónových sietí [2].

Klasický *štatistický model* je parametrizovaná množina hustôt pravdepodobnosti

$$\mathcal{P} = \{p_\theta,\ \theta \in \Theta\}$$

na priestore $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ak $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená podmnožina a zobrazenie $\theta \mapsto p_\theta$ je dostatočne regulárne, môžeme na $\mathcal{P}$ definovať štruktúru diferencovateľnej variety. Rao [55] a Jeffreys [33] zaviedli na tejto variete Riemannovskú metriku λ_F danú *Fisherovou informáciou*

$$(\lambda_F)_{ij}(\theta) = E_{p_\theta}[\partial_i \log(p_\theta)\partial_j \log(p_\theta)], \qquad \partial_i := \frac{\partial}{\partial\theta_i}.$$

Podľa dobre známej Cramér-Raovej nerovnosti je Fisherova metrika v danom bode variety mierou presnosti, s akou sa tento bod dá štatisticky rozlíšiť od ostatných bodov v jeho okolí.

Na základe práce Efrona [21], Dawid [20] zadefinoval exponenciálnu afinnú konexiu $\nabla^{(e)}$. Krivosť modelu vzhľadom na túto konexiu zodpovedá Efronovej štatistickej krivosti, ktorá hrá dôležitú úlohu v asymptotickej teórii odhadu. Amari [1] zaviedol triedu *α-konexií* $\nabla^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ktoré sú odvodené z prirodzenej afinnej štruktúry na množine funkcií pomocou α-vnorení

$$p_\theta \mapsto \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha} p_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1 \\ \\ \log(p_\theta), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Špeciálne prípady sú $\nabla^{(1)} = \nabla^{(e)}$ je exponenciálna konexia a $\nabla^{(-1)} =: \nabla^{(m)}$ je konexia vznikajúca z konvexnej štruktúry stavového priestoru. Rovnaká trieda konexií vzniká ako afinná zmes

$$\nabla^{(\alpha)} = \frac{1-\alpha}{2}\nabla^{(e)} + \frac{1+\alpha}{2}\nabla^{(m)}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Iný spôsob zavedenia geometrických štruktúr na štatistickom modeli je pomocou kontrastných funkcionálov, špeciálne f-divergencií [22]. Ak f je normalizovaná tak, že $f''(1) = 1$, potom pre $\partial'_i := \frac{\partial}{\partial\theta'_i}$ a $\alpha = 2f'''(1) + 3$,

$$(\lambda_F)_{ij}(\theta) = \lambda_F(\partial_i, \partial_j)|_\theta = \partial_i\partial'_j S_f(p_\theta \| p_{\theta'})|_{\theta=\theta'}, \tag{1}$$

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ijk}(\theta) = \lambda_F(\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k)|_\theta = \partial_i\partial_j\partial'_k S_f(p_\theta \| p_{\theta'})|_{\theta=\theta'}, \tag{2}$$

Dôležitou vlastnosťou triedy α-konexií je dualita medzi $\nabla^{(\alpha)}$ a $\nabla^{(-\alpha)}$ vzhľadom na Fisherovu metriku. Nagaoka a Amari [47] skúmali Riemannovské variety s dualistickou štruktúrou $(\lambda, \nabla, \nabla^*)$. Jedným z dôležitých výsledkov je, že ak je varieta ∇-plochá, potom je aj ∇^*-plochá a existuje dvojica duálnych afinných súradnicových systémov, prepojených striktne konvexným potenciálovým funkcionálom Φ. Bregmanova divergencia vzhľadom na Φ, definovaná ako

$$D(p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) = D_\Phi(\theta_1, \theta_2) := \Phi(\theta_1) - \Phi(\theta_2) - \partial\Phi(\theta_2)(\theta_1 - \theta_2)$$

sa nazýva *kanonická divergencia*. Pre štatistické variety takto vzniká Kullback-Leiblerova divergencia a trieda α-divergencií. Z jej konštrukcie vyplýva, že pre ňu platí zovšeobecnená Pythagorova veta a vety o projekciách, čo má veľký význam pri optimalizačných úlohách.

Jednoduchým príkladom plochej štatistickej variety je varieta $\mathcal{P}_n$ pozostávajúca zo striktne pozitívnych rozdelení pravdepodobnosti na n-prvkovej množine. Ľahko vidno, že $\mathcal{P}_n$ je $\nabla^{(\pm 1)}$-plochá a kanonická divergencia je Kullback-Leiblerova divergencia. Pre $\alpha \neq \pm 1$ dostaneme triedu α-divergencií zúžením z rozšírenej variety $\hat{\mathcal{P}}_n$ striktne pozitívnych funkcií, ktorá je $\nabla^{(\alpha)}$-plochá pre všetky α.

Nezávisle od práce Amariho a Nagaoku sa k triede α-konexií dopracoval Čencov. V článku [11] zaviedol kategóriu štatistických modelov s morfizmami danými stochastickými zobrazeniami a skúmal geometrické štruktúry pozostávajúce z Riemannovskej metriky a afinnej konexie, ktoré sú invariantné vzhľadom na izomorfizmy v tejto kategórii. Dokázal, že až na násobenie skalárom sú jedinými štruktúrami s touto vlastnosťou Fisherova metrika λ_F a $\nabla^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Otázkou ostávalo zavedenie geometrickej štruktúry na neparametrických modeloch. Keďže takýto model už nie je konečnorozmerný, diferencovateľná štruktúra musí byť modelovaná na Banachovom priestore. Na to nie je možné použiť prirodzené vnorenie do L_1-, prípadne do iných L_p-priestorov, keďže pozitívny kužeľ v týchto priestoroch má prázdne vnútro. Riešenie navrhli Pistone a Sempi [53], ktorí použili exponenciálny Orliczov priestor $L_\Phi(p)$, kde

$$\Phi(x) = \cosh(x) - 1.$$

Podpriestor centrovaných funkcii v $L_\Phi(p)$ potom parametrizuje okolie bodu p na variete rozdelení pravdepodobnosti ekvivalentných p. Parametrické krivky sú práve exponenciálne triedy spájajúce dva body. Priestor $L_\Phi(p)$ nie je reflexívny, takže geometrické štruktúry zavedené pre parametrické modely nemajú priamočiare zovšeobecnenie. Riemannovská štruktúra sa vo všeobecnosti nedá zaviesť a Fisherovu informáciu dostaneme ako skalárny súčin, ktorý je definovaný diferencovaním kumulantového vytvárajúceho funkcionálu. V tomto prípade sú α-konexie definované ako sekcie na rôznych fibráciach a ich dualita zodpovedá Banachovej dualite Orliczových priestorov [24, 56].

4.1.2 Geometria kvantových stavov: konečnorozmerný prípad

Cieľom kvantovej informačnej geometrie je rozšírenie výsledkov klasickej teórie na stavové priestory kvantových systémov. V najjednoduchšom prípade, keď je kvantový systém reprezentovaný na n-rozmernom Hilbertovom priestore, stačí skúmať geometriu variety $\mathcal{D}_n$ pozitívne definitných matíc hustoty dimenzie n, pretože každý dostatočne regulárny model sa dá do nej vnoriť. Ako otvorená podmnožina euklidovského priestoru má $\mathcal{D}_n$ prirodzenú afinnú a diferencovateľnú štruktúru. Už v tomto jednoduchom prípade sa však objavuje viacero problémov, ktoré nemajú klasickú obdobu.

Dotykový priestor $T_\rho(\mathcal{D}_n)$ je izomorfný s priestorom hermitovských matíc s nulovou stopou. Riemannovská metrika na $\mathcal{D}_n$ má tvar

$$\lambda_\rho(X,Y) = \operatorname{Tr} X J_\rho(Y), \qquad X, Y \in T_\rho(\mathcal{D}_n), \tag{3}$$

kde J_ρ je vhodný operátor na maticiach. Za kvantovú verziu Fisherovej informácie sa obvykle považuje tzv. *SLD-metrika*, definovaná pomocou symetrickej logaritmickej derivácie $J_\rho^{SLD}(Y) = H$, kde $2Y = \rho H + H\rho$ [32]. Pre túto veličinu platí nerovnosť analogická Cramér-Raovej nerovnosti, ale nie je optimálna ani asymptoticky, na rozdiel od klasického prípadu.

Inšpirovaní jednoznačnosťou dokázanou v [11], Čencov a Morozova [12] študovali Riemannovské metriky na $\mathcal{D}_n$, ktoré sú monotónne vzhľadom na stochastické zobrazenia. Ukázalo sa, že na rozdiel od klasického prípadu existuje široká trieda takýchto metrík. Petz dokázal [52], že metrika je monotónna práve vtedy, ak príslušný operátor J_ρ má tvar

$$J_\rho^f := R_\rho^{-1} f(L_\rho R_\rho^{-1})^{-1}, \quad L_\rho(X) = \rho X,\ R_\rho(X) = X\rho \tag{4}$$

pre nejakú operátor monotónnu funkciu $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, ktorá je symetrická: $f(t) = tf(t^{-1})$. Označme takúto metriku λ^f. Ak navyše platí $f(1) = 1$, λ^f sa na klasickej podvariete diagonálnych matíc zhoduje s Fisherovou metrikou a hovoríme jej *kvantová Fisherova informácia*.

Najmenším prvkom v množine kvantových Fisherových informácií je λ^{SLD}, ktorú dostaneme pre $f(x) = \frac{1}{2}(1+x)$. Ďalším dôležitým príkladom je *Wigner-Yanase-Dysonova metrika* $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$, $\alpha \in [-3,3]$ [28], ktoré možno dostať ako lokálnu aproximáciu α-divergencií. Metrika $\lambda_{\pm 1}$ sa nazýva aj *Bogoljubov-Kubo-Moriho (BKM) metrika*. Lesniewski a Ruskai dokázali, že každá monotónna metrika sa dá definovať ako lokálna aproximácia nejakej kvázi-entropie [40].

Amariho konštrukcia α-konexie pomocou vnorení sa dá rozšíriť na kvantový prípad a ľahko vidno, že varieta $\mathcal{D}_n$ je plochá vzhľadom na $\nabla^{(e)}$ a $\nabla^{(m)}$. Rozšírená varieta $\hat{\mathcal{D}}_n$ striktne pozitívnych matíc je plochá vzhľadom všetky $\nabla^{(\alpha)}$. Ale $\nabla^{(e)}$ a $\nabla^{(m)}$ nie sú navzájom duálne vzhľadom na obvyklú SLD metriku. Nagaoka [46] skúmal duálne konexie k $\nabla^{(m)}$ a dokázal, že majú nenulovú torziu, čiže nemôžu byť ploché, pokiaľ metrika nie je BKM, v tom prípade je duálnou konexiou $\nabla^{(e)}$. Dualita kvantových α-konexií bola predmetom viacerých prác, napr. [27, 56, 26].

4.1.3 Neparametrické kvantové informačné variety

Neparametrická verzia kvantovej informačnej geometrie stále nie je uspokojivo preskúmaná. Hlavnou ťažkosťou je neexistencia vhodných nekomutatívnych zovšeobecnení Orliczových priestorov pre von Neumannove algebry. Pre operátory hustoty na separabilnom Hilbertovom priestore bola navrhnutá konštrukcia Banachovej variety využívajúca malé perturbácie Hamiltoniánu v každom bode [62, 25], alebo istú formu Youngovej funkcie na priestore ohraničených samoadjungovaných operátorov, [63]. Na varietach v stavovom priestore semifinitnej von Neumannovej algebry sa afinné α-konexie pre $\alpha \in (-1, 1)$ zavádzajú vnorením stavového priestoru do nekomutatívneho L_p-priestoru $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $p = \frac{2}{1-\alpha}$ [23], čo zodpovedá Amariho vnoreniam. Dualita $\pm\alpha$-konexií je dôsledkom duality priestorov $L_{\frac{2}{1-\alpha}}$ a $L_{\frac{2}{1+\alpha}}$.

4.2 Porovnávanie štatistických experimentov a postačujúce kanály

4.2.1 Klasické štatistické experimenty a kanály

V štatistickej teórii rozhodovania sa *štatistický experiment* definuje ako trojica $\mathcal{E} = (X, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, kde $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\} \subset \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu_\mathcal{E})$. Množina $\mathcal{P}$ predstavuje triedu možných rozdelení pravdepodobnosti, z ktorých boli vybrané dáta. Na základe realizácie dát $x \in X$ vyberáme rozhodnutie $d \in D$. My budeme uvažovať len konečné množiny rozhodnutí D, vo všeobecnosti je D topologický priestor. Funkcia $W : \Theta \times D \to \mathbb{R}$, taká, že $W_\theta = W(\theta, \cdot)$ sú ohraničené spojité funkcie, sa nazýva *stratová funkcia.* Položme $\|W_\theta\| := \sup_{t\in D} |W_\theta(t)|$. Trojica (Θ, D, W) sa nazýva *rozhodovací problém.* Ak D je dvojprvková množina, ide o *testovací problém.*

Najvšeobecnejšie *rozhodovacie pravidlo* sa dá popísať ako stochastické zobrazenie $M : \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu_\mathcal{E}) \to \mathcal{S}(D, \mathcal{B}_0(D))$, kde $\mathcal{B}_0(D))$ je Baireovská σ-algebra. Riziko pravidla M pri danej hodnote parametra θ je dané ako

$$R_{\mathcal{E},D,W,\theta}(M) = \int_D W_\theta dM(P_\theta).$$

Množinu všetkých rozhodovacích pravidiel budeme označovať ako $\mathcal{R}(\mathcal{E}, D)$.

Nech $\mathcal{E} = \{X, \mathcal{A}, \mathcal{P}\}$ a $\mathcal{F} = (Y, \mathcal{B}, \mathcal{Q})$ sú dva experimenty s rovnakou množinou parametrov Θ. Ak pre každý rozhodovací problém (Θ, D, W) a každé $M \in \mathcal{R}(\mathcal{F}, D)$ existuje $N \in \mathcal{R}(\mathcal{E}, D)$ také, že

$$R_{\mathcal{E},D,W,\theta}(N) \leq R_{\mathcal{F},D,W,\theta}(M), \qquad \forall\theta \in \Theta,$$

potom $\mathcal{E}$ je *informatívnejší* ako $\mathcal{F}$, čo označíme ako $\mathcal{E} \succeq \mathcal{F}$. Ľahko vidno, že toto platí ak existuje kanál $T : \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu_\mathcal{E}) \to \mathcal{S}(Y, \mathcal{B}, \mu_\mathcal{F})$ taký, že $\mathcal{Q} = T(\mathcal{P})$. V tomto prípade hovoríme, že $\mathcal{F}$ je *randomizáciou* $\mathcal{E}$. Nasledujúce tvrdenie je jedným zo základných výsledkov teórie porovnávania štatistických experimentov.

Veta 4.2.1 (Blackwell-Sherman-Steinova (BSS) veta [4, 58, 60])**.** *Experiment $\mathcal{F}$ je randomizáciou experimentu $\mathcal{E}$ práve vtedy, ak $\mathcal{E}$ je informatívnejší ako $\mathcal{F}$.*

Ďalším dôležitým výsledkom je Le Camovo *randomizačné kritérium*. Le Cam zadefinoval mieru *deficiencie* na štatistických experimentoch ako

$$\delta(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \inf_T \sup_\theta \|p_\theta - T(q_\theta)\|_1,$$

kde infimum berieme cez všetky kanály s vhodným vstupom a výstupom. Deficiencia zjavne nie je symetrická; maximum deficiencií medzi $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ definuje pseudometriku na množine štatistických experimentov s parametrickým priestorom Θ, ktorá je dôležitá v teórii asymptotickej štatistiky. Randomizačné kritérium hovorí, že deficiencia sa dá charakterizovať pomocou rizík rozhodovacích pravidiel.

Veta 4.2.2 (Le Camovo randomizačné kritérium [10])**.** *Nech* $\epsilon \geq 0$. *Potom* $\delta(\mathcal{E},\mathcal{F}) \leq \epsilon$ *práve vtedy, ak pre každý rozhodovací problém* (Θ, D, W) *a každé* $M \in \mathcal{R}(\mathcal{F}, D)$ *existuje* $M \in \mathcal{R}(\mathcal{F}, D)$ *také, že*

$$R_{\mathcal{E},D,W,\theta}(N) \leq R_{\mathcal{F},D,W,\theta}(M) + \frac{\epsilon}{2}\|W_\theta\|, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Ak sa pri definícii informatívnosti obmedzíme na testovacie problémy, dostaneme slabšie usporiadanie, ktoré nazývame *2-informatívnosť* a označujeme $\mathcal{E} \succeq_2 \mathcal{F}$. Tieto usporiadania sú ekvivalentné ak má množina parametrov Θ len dva prvky, teda pre *binárne experimenty*. Podobné tvrdenie platí pre deficienciu, [64], pozri aj [61].

Podobne ako štatistické experimenty môžeme porovnávať aj kanály. Nech T a S sú dva kanály s rovnakým vstupným priestorom. Uvažujme všetky štatistické experimenty na vstupe. Ak je výstupný experiment kanála T vždy informatívnejší ako výstup kanála S, povieme, že S je *zašumenejší* ako T. Na druhej strane, randomizácie kanála T zodpovedajú post-procesingom, čiže post-zloženiam s iným kanálom. Usporiadanie tohto typu zaviedol Shannon [57], avšak pripúšťal aj pre-procesingy a korelácie medzi vstupom a výstupom. Iné usporiadania sa dajú nájsť napr. v [37, 18, 54, 7].

4.2.2 Kvantové štatistické experimenty a kanály

Kvantový štatistický experiment definujeme ako dvojicu $\mathcal{E} = (\mathcal{M}, \mathcal{P})$, kde $\mathcal{M}$ je von Neumannova algebra a $\mathcal{P} = \{\rho_\theta,\ \theta \in \Theta\} \subset \mathcal{S}(\mathcal{M})$. Je zrejmé, že táto definícia zahŕňa aj klasické experimenty, pre ktoré $\mathcal{M} = L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu_\mathcal{E})$ je komutatívna algebra. Množinu všetkých kvantových štatistických experimentov s množinou parametrov Θ označíme ako $\mathcal{E}(\Theta)$.

Nech $\mathcal{E} \in \mathcal{E}(\Theta)$ a nech (Θ, D, W) je rozhodovací problém. Rozhodovacie pravidlá pre $\mathcal{E}$ sú potom merania resp. POVM s hodnotami v $(D, \mathcal{B}_0(D))$. Ďalej budeme uvažovať len experimenty na algebre $B(\mathcal{H})$ pre konečnorozmerné Hilbertove priestory $\mathcal{H}$. V tomto prípade stačí uvažovať rozhodovacie problémy s konečnou množinou rozhodnutí D.

Príklad 4.2.3. Špeciálnym prípadom rozhodovacieho problému je testovanie (viacnásobných) hypotéz, kde $\Theta = D = \{1, \dots, m\}$ a $W(i,j) = 1 - \delta_{ij}$. Úlohou je teda zistiť, ktorý z danej množiny stavov $\{\rho_1, \dots, \rho_m\} \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$ je ten správny. Rozhodovacie pravidlo je dané POVM $M = \{M_1, \dots, M_m\}$, pričom $\operatorname{Tr} \rho_i M_j$ sa interpretuje ako pravdepodobnosť výberu ρ_j ak skutočný stav je ρ_i. Ak sú dané apriórne pravdepodobnosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, hľadáme optimálne Bayesovské riziko, alebo ekvivalentne maximálnu Bayesovskú pravdepodobnosť úspechu. Označme $E := \{\lambda_i, \rho_i\}_{i=1}^m$, takúto množinu stavov s apriórnymi pravdepodobnosťami nazývame *(štatistický) súbor* (ensemble). Maximálna Bayesovská pravdepodobnosť úspechu je daná ako

$$P_{succ}(E) := \max_M \sum_i \lambda_i \mathrm{Tr}\, \rho_i M_i, \tag{5}$$

kde maximalizujeme cez všetky POVM.

Príklad 4.2.4. Ak v predchádzajúcom príklade položíme $\Theta = D = \{0, 1\}$, ide o *diskriminačný problém* pre dva stavy ρ_0, ρ_1, alebo testovanie jednoduchej hypotézy s jednoduchou alternatívou. Rozhodovacie pravidlá sú dané pozitívnymi operátormi $0 \le M \le I$ a maximálna Bayesovská pravdepodobnosť úspechu je

$$P_{succ}(E) = \Pi_\lambda(\rho_0, \rho_1) := \frac{1}{2}(1 - \|\lambda\rho_0 - (1-\lambda)\rho_1\|_1),$$

kde $\|\rho\|_1 = \mathrm{Tr}\, |\rho|$ je L_1-norma na $B(\mathcal{H})$.

Pojem randomizácie experimentov, Blackwellovo usporiadanie pomocou informatívnosti a Le Camova deficiencia sa dajú prirodzene rozšíriť na všetky dvojice experimentov z $\mathcal{E}(\Theta)$. Ak $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{E}(\Theta)$ a menej informatívny experiment $\mathcal{F}$ je klasický, potom BSS-veta (Veta 4.2.1) platí, podobne ostáva v platnosti aj Le Camovo randomizačné kritérium (Veta 4.2.2). Vo všeobecnosti to však nie je pravda [44]. Úplnú kvantovú verziu BSS-vety dokázali Shmaya [59] a Buscemi [5]. V týchto výsledkoch sa využíva buď previazanosť alebo kompozícia experimentu s nejakým úplným systémom stavov. Kvantovú verziu randomizačného kritéria dokázal Matsumoto [43], táto verzia je však sformulovaná pomocou zovšeobecnenia rozhodovacích problémov na tzv. kvantové rozhodovacie problémy. Takéto zovšeobecnenie je prirodzené, je však čisto matematickou konštrukciou a jeho interpretácia v operačnom zmysle nie je jasná.

Podobne môžeme rozšíriť porovnávanie kanálov, pre kvantové kanály je rozumné uvažovať experimenty na vstupnom priestore spojenom s ancilou. Ukázalo sa, že kvantový kanál Φ je v tomto silnejšom zmysle zašumenejší ako kanál Ψ práve vtedy, ak Φ je post-procesingom Ψ [13, 5]. Aplikácie tohoto zaujímavého výsledku sa našli v [9, 6, 8, 7].

4.2.3 Klasické a kvantové postačujúce kanály

Nech T je kanál a $\mathcal{E} \in \mathcal{E}(\Theta)$ je štatistický experiment na jeho vstupnom priestore. Nech $T(\mathcal{E})$ je zodpovedajúca randomizácia $\mathcal{E}$. Kanál T je *postačujúci vzhľadom na* $\mathcal{E}$ ak je zároveň $T(\mathcal{E})$ randomizáciou $\mathcal{E}$, teda ak existuje kanál S taký, že $S \circ T(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Ak $\mathcal{E}$ je klasický, potom podľa Vety 4.2.1 taký kanál existuje práve vtedy, ak $T(\mathcal{E}) \succeq \mathcal{E}$, teda ak $\mathcal{E}$ a $T(\mathcal{E})$ sú ekvivalentné v zmysle Blackwellovej informatívnosti. Pre kvantové experimenty podobné tvrdenie nie je známe.

Špeciálnym prípadom postačujúceho kanála pre klasické experimenty je *postačujúca štatistika*, čiže merateľné zobrazenie $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ také, že podmienená pravdepodobnosť $P_\theta[A|f]$, $A \in \mathcal{A}$ nezávisí od parametra θ. Postačujúce štatistiky sú charakterizované faktorizačným kritériom

$$p_\theta(x) = h(x)q_\theta(f(x)),$$

kde q_θ a h sú pozitívne merateľné funkcie. Postačujúcosť pre klasické kanály sa v literatúre uvažuje pre špeciálne prípady Markovovských jadier, [17, 30, 41]. Niektoré charakterizácie klasických postačujúcich kanálov sú zhrnuté v nasledujúcej vete.

Veta 4.2.5. *(i) [61] T je postačujúci kanál vzhľadom na $\mathcal{E}$ práve vtedy, ak $T(\mathcal{E}) \succeq_2 \mathcal{E}$.*

(ii) [39] Ak existuje $\theta_0 \in \Theta$ také, že $S(P_\theta \| P_{\theta_0}) < \infty$ pre všetky θ, potom T je postačujúci vzhľadom na $\mathcal{E}$ práve vtedy, ak

$$S(T(P_\theta)\|T(P_{\theta_0})) = S(P_\theta\|P_{\theta_0}), \qquad \theta \in \Theta.$$

(iii) [17, 41] Ak $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je striktne konvexná funkcia, potom v podmienke (ii) môžeme relatívnu entropiu S nahradiť f-divergenciou S_f.

Výskum kvantových postačujúcich kanálov začal v článkoch Petza [50, 51], ktorý študoval podmienky, za ktorých kanál Φ zachováva Arakiho relatívnu entropiu S a pravdepodobnosť prechodu $S_{1/2}$ pre podmnožinu normálnych stavov von Neumannovej algebry $\mathcal{M}$. Niektoré výsledky týchto článkov zhŕňa nasledujúca veta.

Veta 4.2.6. *[50, 51] Nech $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sú von Neumannove algebry a nech Φ je kanál $\mathcal{M}_* \to \mathcal{N}_*$. Nech $\mathcal{E} = (\mathcal{M}, \mathcal{P})$ je štatistický experiment a nech $\mathcal{P}$ obsahuje nejaký verný (faithful) stav σ.*

(i) Φ je postačujúci kanál vzhľadom na $\mathcal{E}$ práve vtedy, ak

$$S_{1/2}(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) = S_{1/2}(\rho\|\sigma), \qquad \forall \rho \in \mathcal{P}.$$

(ii) Ak $S(\rho\|\sigma) < \infty$ pre všetky $\rho \in \mathcal{P}$, potom tvrdenie (i) platí aj keď sa $S_{1/2}$ nahradí S.

(iii) Existuje kanál $\Phi_\sigma : \mathcal{N}_* \to \mathcal{M}_*$ taký, že $\Phi_\sigma \circ \Phi(\sigma) = \sigma$ a Φ je postačujúci kanál vzhľadom na $\mathcal{E}$ vtedy a len vtedy, ak $\Phi_\sigma \circ \Phi(\rho) = \rho$, $\rho \in \mathcal{P}$. Tento kanál sa nazýva Petzov duál.

Kvantová verzia faktorizačného kritéria pre konečnorozmerný prípad sa našla v článku [45], pre von Neumannove algebry typu I v [34, 35]. Rozšírenie Vety 4.2.5 (iii) bolo dokázané v [31], tu sa však vyžaduje ďalšia podmienka na operátor-konvexnú funkciu f. Táto podmienka platí pre α-divergencie, $\alpha \in (-3, 3)$.

Kvantové faktorizačné kritérium je silná podmienka na štruktúru príslušných stavov a kanála. Používa sa na nájdenie podmienok, za ktorých sa dosahuje rovnosť v niektorých entropických nerovnostiach. Dôležitým príkladom takejto aplikácie je charakterizácia kvantových Markovovských trojíc pomocou rovnosti v silnej subaditivite (SSA) entropie [29, 34].

4.3 Merania na kvantových kanáloch a kvantové komby

Nech $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ sú konečnorozmerné Hilbertove priestory a nech $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ je lineárne zobrazenie. *Choiova reprezentácia* Φ je definovaná ako [16]

$$C(\Phi) = \frac{1}{d} \sum_{i,j} \Phi(|e_i\rangle\langle e_j|) \otimes |e_i\rangle\langle e_j|,$$

kde $d = \dim(\mathcal{H})$ a $|e_1\rangle, \ldots, |e_d\rangle$ je nejaká ortonormálna báza $\mathcal{H}$. Zobrazenie $\Phi \mapsto C(\Phi)$ je lineárny a order izomorfizmus množiny lineárnych zobrazení $B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ na $B(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H})$, ktorý zobrazuje kanály na konvexnú podmnožinu stavového priestoru $\mathcal{S}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H})$.

Merania na kvantových kanáloch $B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ sa obvykle popisujú trojicou $(\mathcal{H}_0, \rho, M)$, kde $\mathcal{H}_0$ je konečnorozmerný Hilbertov priestor (ancila), $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0)$ a M je POVM, popisujúca meranie na $B(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_0)$. Ak množina výsledkov merania je $\{1, \ldots, m\}$, potom výstupné pravdepodobnosti sú dané ako

$$p_i(\Phi) = \mathrm{Tr}\,(\Phi \otimes id_{\mathcal{H}_0})(\rho) M_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Podobne ako pre kvantové stavy môžeme uvažovať problém diskriminácie dvoch kanálov Φ_0 a Φ_1. Optimálne Bayesovské riziko je v tomto prípade

$$\Pi_\lambda(\Phi_0, \Phi_1) := \min \lambda p_1(\Phi_0) + (1-\lambda) p_0(\Phi_1) = \frac{1}{2}(1 - \|\lambda\rho_0 - (1-\lambda)\rho_1\|_\diamond),$$

kde [36]

$$\|\Phi\|_\diamond := \sup_{\sigma \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}} \|(\Phi \otimes id)(\sigma)\|_1$$

je norma na hermitovských lineárnych zobrazeniach. Viac informácií o tejto norme a diskriminácii kvantových kanálov sa dá nájsť napr. [66].

Uvedený popis meraní nie je jedno-jednoznačný, ľahko vidno, že rôzne trojice môžu viesť k rovnakým výstupným pravdepodobnostiam. Iný popis pomocou tzv. *procesových POVM* zaviedol Ziman [67]. Procesové POVM sú definované ako m-tice pozitívnych operátorov $F_1, \ldots, F_m$ na $\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$ takých, že $\sum_i F_i = I \otimes \sigma$, kde $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Výsledné pravdepodobnosti sú potom dané ako

$$p_i(\Phi) = \mathrm{Tr}\, C(\Phi)(\rho) F_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Každé meranie dané nejakou trojicou $(\mathcal{H}_0, \rho, M)$ sa dá reprezentovať procesovou POVM a naopak.

Procesové POVM patria medzi (probabilistické) kvantové komby definované skupinou G.M. D'Ariana [15, 14]. Kvantové N-komby sú definované ako Choiove reprezentácie úplne pozitívnych zobrazení, ktoré zobrazujú množinu $(N-1)$-kombov na 1-komby, čiže Choiove matice kanálov. Tvoria matematický aparát popisujúci kvantové zariadenia, ktorý zároveň zahŕňa aj dosiahnuteľné transformácie medzi nimi a merania na nich, tzv. testery.

Z definície je jasné, že kvantové komby tvoria konvexnú podmnožinu viacčasťového stavového priestoru. Podobne ako pre stavy je prirodzené definovať merania na nich ako afinné zobrazenia do stavov na množine výsledkov merania. Je zjavné, že procesové POVM, resp. testery definujú merania aj v tomto zmysle. Otázka, či všetky merania môžu byť popísané takýmto spôsobom a teda či sú kvantové testery prirodzene odvodené z konvexnej štruktúry stavového priestoru, je jednou z úloh riešených v tejto práci.

5 Hlavné výsledky práce

5.1 Štruktúry informačnej geometrie

V tejto časti sa nachádzajú články zamerané na konštrukcie diferenciálno-geometrických štruktúr na kvantových stavových priestoroch. Tieto konštrukcie pre konečnorozmerný a nekonečnorozmerný prípad sa značne odlišujú, preto ich popíšeme v dvoch podkapitolách.

5.1.1 Konečnorozmerné kvantové stavové priestory

Nech $\hat{\mathcal{D}}_n$ je varieta pozitívne definitných matíc (bez normalizácie) a nech $x_1, \ldots, x_N$ je súradnicový systém na $\hat{\mathcal{D}}_n$. Dotykový priestor $T_\rho(\hat{\mathcal{D}}_n)$ v bode ρ môžeme stotožniť s priestorom všetkých Hermitovských matíc. Budeme uvažovať tri konštrukcie dualistickej afinnej štruktúry $(\lambda, \nabla, \nabla^*)$ na $\hat{\mathcal{D}}_n$. Každá z nich sa na podvariete diagonálnych matíc zhoduje s $(\lambda_F, \nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$ pre nejaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Keďže sa táto podvarieta dá stotožniť s $\hat{\mathcal{P}}_n$, je vzhľadom na túto štruktúru duálne plochá. Budeme sa zaujímať o prípady, kedy je duálne plochá celá varieta $\hat{\mathcal{D}}_n$.

Konštrukcia pomocou Amariho vnorení

Nech λ je monotónna metrika na $\hat{\mathcal{D}}_n$ daná operátorom J_ρ tvaru (4). Uvažujme konexiu $\bar{\nabla}^{(\alpha)}$, ktorú dostaneme z afinnej štruktúry priestoru Hermitovských matíc pomocou Amariho vnorenia

$$g_\alpha : \rho \mapsto \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha}\rho^{\frac{1-\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1 \\ \\ \log(\rho), & \alpha = 1 \end{cases}$$

a nech $\bar{\nabla}^{(\alpha*)}$ je duálna konexia vzhľadom na λ. Konexia $\bar{\nabla}^{(\alpha)}$ je plochá pre všetky α, avšak $\bar{\nabla}^{(\alpha*)}$ má vo všeobecnosti nenulovú torziu (a teda nie je plochá).

Veta 5.1.1. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

(i) $\bar{\nabla}^{(\alpha*)}$ *má nulovú torziu.*

(ii) α *je z intervalu* $[-3, 3]$ *a* λ *je Wigner-Yanase-Dysonova metrika* λ_α.

(iii) $\bar{\nabla}^{(\alpha*)} = \bar{\nabla}^{(-\alpha)}$.

Plochá dualistická štruktúra $(\lambda_\alpha, \bar{\nabla}^{(\alpha)}\bar{\nabla}^{(-\alpha)})$, $\alpha \in [-3, 3]$, definuje kanonickú divergenciu na $\hat{\mathcal{D}}_n$, ktorá sa zhoduje s kvantovou α-divergenciou D_α.

Konštrukcia pomocou kvázi-entropií

Nech $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je operátor konvexná funkcia, taká, že $g(1) = 0$, $g''(1) = 1$. Nech $\hat{g}$ je transpozícia g, daná vzťahom $\hat{g}(w) = wg(w^{-1})$. Označme λ^g Riemannovskú metriku na $\hat{\mathcal{D}}_n$, ktorú dostaneme z kvázi-entropie S_g ako v (1). Podľa [40] je λ^g monotónna a každú kvantovú Fisherovu informáciu dostaneme týmto spôsobom. Nech ∇^g je konexia, ktorá je daná S_g ako v (2). Potom $(\lambda, \nabla^g, \nabla^{\hat{g}})$ tvoria dualistickú štruktúru s nulovou torziou, navyše na $\hat{\mathcal{P}}_n$ sa zhoduje s $(\lambda_F, \nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$ pre $\alpha = 2g'''(1) + 3$. Platí však nasledujúce tvrdenie.

Veta 5.1.2. *Nech $\alpha = 2g'''(1) + 3$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

(i) ∇^g *je plochá.*

(ii) $\alpha \in [-3, 3]$ *a* $\nabla^g = \bar{\nabla}^{(\alpha)}$.

(iii) $\alpha \in [-3, 3]$ *a* $\lambda = \lambda_\alpha$.

Dôsledok 5.1.3. *Metrická konexia vzhľadom na kvantovú Fisherovu informáciu λ na je $\hat{\mathcal{D}}_n$ plochá práve vtedy, ak λ je Wigner-Yanaseho metrika λ_0.*

Konštrukcia pomocou afinnej zmesi

Nech $\lambda = \lambda^{BKM} = \lambda_{\pm 1}$, potom podľa vety 5.1.1 sú konexie $\bar{\nabla}^{(1)}$ a $\bar{\nabla}^{(-1)}$ navzájom duálne a ploché. Pre $\alpha \in \mathbb{R}$, položme

$$\tilde{\nabla}^{(\alpha)} := \frac{1+\alpha}{2}\bar{\nabla}^{(1)} + \frac{1-\alpha}{2}\bar{\nabla}^{(-1)},$$

potom $(\lambda^{BKM}, \tilde{\nabla}^{(\alpha)}, \tilde{\nabla}^{(-\alpha)})$ je dualistická štruktúra s nulovou torziou, ktorá sa na $\hat{\mathcal{P}}_n$ sa zhoduje s $(\lambda_F, \nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$.

Veta 5.1.4. *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

(i) $\tilde{\nabla}^{(\alpha)}$ *je plochá.*

(ii) $\tilde{\nabla}^{(\alpha)} = \bar{\nabla}^{(\alpha)}$.

(iii) $\alpha = \pm 1$.

5.1.2 Neparametrické kvantové informačné variety

V tejto časti sme skúmali geometrické štruktúry na množine verných stavov von Neumannovej algebry $\mathcal{M}$. Nech $\mathcal{M}_*$ je preduál $\mathcal{M}$.

Konštrukcia pomocou α-vnorení

Nech ϕ je verná normálna polokonečná váha (f.n.s. weight) na $\mathcal{M}^+$. Pre $p > 1$, nech $L_p(\mathcal{M}, \phi)$ je nekomutatívny L_p-priestor vzhľadom na ϕ, ktorý zaviedol Masuda [42] a nech $\|\cdot\|_{p,\phi}$ je príslušná norma. Nech $\alpha \in (-1, 1)$ a položme $p = \frac{2}{1-\alpha}$. Potom môžeme zadefinovať *nekomutatívne α-vnorenie*

$$\ell_\alpha : \mathcal{M}_* \to L_p(\mathcal{M}, \phi), \qquad \omega \mapsto pu\Delta_{\varphi,\phi}^{1/p},$$

kde $\omega = \varphi(au)$ je polárny rozklad a $\Delta_{\varphi,\phi}$ je relatívny modulárny operátor. Keďže $\|u\Delta_{\varphi,\phi}^{1/p}\|_{p,\phi} = \varphi(1)^{1/p}$, ℓ_α zobrazuje jednotkovú guľu v $\mathcal{M}_*$ na guľu s polomerom p v $L_p(\mathcal{M}, \phi)$. Vnorenie ℓ_α definuje homeomorfizmus medzi pozitívnymi kužeľmi $\mathcal{M}_*^+$ a $L_p^+(\mathcal{M}, \phi)$, [38]. Topológiu na $\mathcal{M}_*^+$ indukovanú slabou topológiou na $L_p^+(\mathcal{M}, \phi)$ nazveme *α-slabou* topológiou. Množinu $\mathcal{M}_*$ s indukovanou diferencovateľnou štruktúrou označíme ako $\mathcal{M}_\alpha$.

Položme $q = \frac{2}{1+\alpha}$, potom priestory $L_p(\mathcal{M}, \phi)$ a $L_q(\mathcal{M}, \phi)$ sú navzájom duálne. Nech $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ je dualita medzi týmito priestormi, potom pre $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ máme

$$\langle \ell_\alpha(\omega), a^*\ell_{-\alpha}(\omega)\rangle_\phi = pq\omega(a), \qquad a \in \mathcal{M}.$$

Zobrazenia ℓ_α a $\ell_{-\alpha}$ môžeme považovať za navzájom duálne súradnicové systémy na $\mathcal{M}_*$. Afinná štruktúra na L_p-priestoroch indukuje dvojicu globálne plochých konexií na duálnych bundloch $T\mathcal{M}_\alpha$ a $T\mathcal{M}_{-\alpha}$.

Nech $C \subseteq \mathcal{M}_\alpha$ a nech φ_t je hladká krivka v $\mathcal{M}_{-\alpha}$ taká, že $\varphi_{t_0} = \sigma \in C$. Potom povieme, že φ_t je *α-normálna* k C v bode σ ak a platí

$$\mathrm{Re}(\langle \dot\varphi_{t_0}, X\rangle_\phi) \le 0, \qquad \forall X \in T_\sigma(\mathcal{M}_\alpha).$$

Zadefinujme funkciu $\Psi_p : L_p(\mathcal{M}, \phi) \to \mathbb{R}^+$ ako

$$\Psi_p(x) = q\|\frac{x}{p}\|_p^p.$$

Keďže priestory $L_p(\mathcal{M}, \phi)$ sú pre všetky $p > 1$ uniformne konvexné a uniformne hladké, funkcia Ψ_p je striktne konvexná a Fréchetovsky diferencovateľná. Jej Legendre-Fenchelov duál je Ψ_q a príslušná Bregmanova divergencia má tvar

$$D_p(x, y) = \Psi_p(x) + \Psi_q(\tilde y) - \mathrm{Re}(\langle x, \tilde y\rangle_\phi), \quad x, y \in L_p(\mathcal{M}, \phi),$$

kde $\tilde y = \ell_{-\alpha}\ell_\alpha^{-1}(y)$. Ak $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$, potom

$$\begin{aligned} D_\alpha(\psi\|\varphi) &:= D_p(\ell_\alpha(\psi)\|\ell_\alpha(\varphi)) \\ &= \frac{2}{1+\alpha}\psi(1) + \frac{2}{1-\alpha}\varphi(1) - \frac{4}{1-\alpha^2}\langle \Delta_{\psi,\phi}^{\frac{1-\alpha}{2}}, \Delta_{\varphi,\phi}^{\frac{1+\alpha}{2}}\rangle_\phi, \end{aligned}$$

čo sa na $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ zhoduje s Petzovou kvázi-entropiou S_α. Nasledujúce vlastnosti D_α vyplývajú z vlastností Bregmanovej divergencie:

(i) $D_\alpha(\psi\|\varphi) \ge 0$ a rovnosť nastáva práve vtedy, ak $\varphi = \psi$.

(ii) $D_\alpha(\psi\|\varphi) = D_{-\alpha}(\varphi\|\psi)$

(iii) zovšeobecnená Pythagorova veta

$$D_\alpha(\psi\|\varphi) + D_\alpha(\varphi\|\sigma) = D_\alpha(\psi\|\sigma) + \langle \ell_\alpha(\psi) - \ell_\alpha(\varphi), \ell_{-\alpha}(\sigma) - \ell_{-\alpha}(\varphi)\rangle_\phi$$

Nech $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$, $C \subseteq \mathcal{M}_*^+$. Potom $\psi \in C$ je *α-projekciou* φ na C ak platí

$$D_\alpha(\psi\|\varphi) = \min_{\sigma\in C} D_\alpha(\sigma\|\varphi).$$

Veta 5.1.5. *Nech $C \subseteq \mathcal{M}_*^+$ a nech $\ell_\alpha(C)$ je slabo uzavretá konvexná podmnožina $L_p(\mathcal{M}, \phi)$. Potom*

(i) Pre každé $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ existuje práve jedna projekcia φ_C na C a zobrazenie $\varphi \mapsto \varphi_C$ je spojité zobrazenie z $\mathcal{M}_*^+$ s obvyklou topológiou do C s α-slabou topológiou.

(ii) Nech $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$, $\psi \in C$ a nech $\psi_t := \ell_{-\alpha}^{-1}(\ell_{-\alpha}(\psi) + t(\ell_{-\alpha}(\varphi) - \ell_{-\alpha}(\psi)))$ je geodetika vzhľadom na $-\alpha$-konexiu, spájajúca φ a ψ. Potom $\psi = \varphi_C$ práve vtedy, ak ψ_t je α-normálna k C v bode ψ.

Konštrukcie pomocou kvantovej relatívnej entropie

Nech $\mathcal{F}$ je množina verných normálnych stavov na $\mathcal{M}$. Vnorenie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_*^+$ (resp. do pozitívneho kužeľa nekomutatívneho L_p-priestoru) nemožno použiť na konštrukciu diferencovateľnej štruktúry, lebo tento pozitívny kužeľ má prázdne vnútro. Použijeme preto konštrukciu podobnú Pistone-Sempiho konštrukcii pre klasické stavy. Dôležitú úlohu pri tom hrá Arakiho relatívna entropia S.

Nech $\varphi \in \mathcal{F}$. Označme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varphi &:= \{\omega \in \mathcal{M}_*^+, S(\omega\|\varphi) < \infty\} \\ \mathcal{S}_\varphi &:= \{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{M}), S(\omega\|\varphi) < \infty\} \\ \mathcal{S}_{\varphi,C} &:= \{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{M}), S(\omega\|\varphi) \le C\}, \end{aligned}$$

kde $C > 0$. Potom $\mathcal{S}_{\varphi,C}$ je konvexná množina, kompaktná v slabej topológii, $\mathcal{S}_\varphi$ je stena (face) stavového priestoru $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ a $\mathcal{P}_\varphi$ je konvexný kužeľ generovaný $\mathcal{S}_\varphi$.

Nech $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}$ je reálny vektorový podpriestor samoadjungovaných operátorov a nech $\mathcal{M}_s^*$ je jeho duál, teda $\mathcal{M}_s^*$ je priestor hermitovských, nie nutne normálnych, funkcionálov na $\mathcal{M}$. Zadefinujme funkcionál $F_\varphi : \mathcal{M}_s^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ako

$$F_\varphi(\omega) = \begin{cases} S(\omega\|\varphi), & \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{M}) \\ \infty & \text{inak} \end{cases}.$$

Potom F_φ je striktne konvexný a zdola polospojitý, s efektívnou doménou $\mathrm{dom}(F_\varphi) = \mathcal{S}_\varphi$. Nech c_φ je konvexne združený funkcionál

$$c_\varphi(h) = \sup_{\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{M})} \{\omega(h) - F_\varphi(\omega)\}, \qquad h \in \mathcal{M}_s,$$

potom c_φ je striktne konvexný spojitý funkcionál na $\mathcal{M}_s$, ktorý všade nadobúda konečné hodnoty. Položme

$$\Phi_\varphi(h) = \frac{\exp\{c_\varphi(h)\} + \exp\{c_\varphi(-h)\}}{2} - 1, \qquad h \in \mathcal{M}_s.$$

Tvrdenie 5.1.6. *Minkowského funkcionál množiny $C_\varphi = \{h \in \mathcal{M}_s, \Phi_\varphi(h) \leq 1\}$ je spojitý vzhľadom na operátorovú normu a definuje normu na $\mathcal{M}_s$.*

Označme túto normu ako $\|\cdot\|_\varphi$. Nech B_φ je zúplnenie $\mathcal{M}_s$ vzhľadom na $\|\cdot\|_\varphi$ a nech $B_{\varphi,0} = \{h \in B_\varphi,\ \varphi(h) = 0\}$. Nech A_φ je priestor spojitých afinných funkcionálov na $\mathcal{S}_{\varphi,0}$ so suprémovou normou a nech $A_{\varphi,0} = \{f \in A_\varphi,\ f(\varphi) = 0\}$. Nech B_φ^*, $B_{\varphi,0}^*$, A_φ^* a $A_{\varphi,0}^*$ sú duálne Banachove priestory.

Tvrdenie 5.1.7. *(i) $B_{\varphi,0} = A_{\varphi,0}$, s ekvivalentnými normami.*

(ii) $B_\varphi^* = \mathcal{P}_\varphi - \mathcal{P}_\varphi$ a $B_\varphi^* \cap \mathcal{M}_*^+ = \mathcal{P}_\varphi$.

(iii) $B_{\varphi,0}^*$ je reálny podpriestor v $\mathcal{M}_*$, generovaný $\mathcal{S}_\varphi$.

(iv) Jednotková guľa v $A_{\varphi,0}^*$ má tvar $\mathcal{S}_{\varphi,1} - \mathcal{S}_{\varphi,1}$.

Funkcionál c_φ môžeme rozšíriť na B_φ. Toto rozšírenie je striktne konvexné, spojité a pre každé $h \in B_\varphi$ existuje jediný normálny stav, označený ako $[\varphi^h]$, ktorý spĺňa

$$c_\varphi(h) = [\varphi^h](h) - S([\varphi^h]\|\varphi) = \sup_{\omega \in \mathcal{S}_\varphi} \{\omega(h) - S(\omega\|\varphi)\}.$$

Navyše $[\varphi^h] \in \mathcal{F}$, zobrazenie $B_{\varphi,0} \ni h \mapsto [\varphi^h]$ je jedno-jednoznačné a platí nasledujúce retiazkové pravidlo:

Tvrdenie 5.1.8. *Nech $h, k \in B_\varphi$. Potom $B_\varphi = B_{[\varphi^h]}$ s ekvivalentnými normami a $[[\varphi^h]^k] = [\varphi^{h+k}]$.*

Štruktúru diferenciálnej variety na $\mathcal{F}$ skonštruujeme takto: pre každé $\varphi \in \mathcal{F}$, nech V_φ je otvorená jednotková guľa v $B_{\varphi,0}$ a nech $s_\varphi : V_\varphi \to \mathcal{F}$ je zobrazenie $h \mapsto [\varphi^h]$. Nech $U_\varphi := s_\varphi(V_\varphi)$ a nech $e_\varphi := s_\varphi^{-1}|_{U_\varphi}$.

Veta 5.1.9. *$\{(U_\varphi, e_\varphi),\ \varphi \in \mathcal{F}\}$ je C^∞-atlas na $\mathcal{F}$.*

Množina $\mathcal{F}_\varphi = \{[\varphi^h],\ h \in B_{\varphi,0}\}$ je súvislá komponenta variety $\mathcal{F}$ s týmto atlasom a ak $\psi \in \mathcal{F}$, potom $\psi \in \mathcal{F}_\varphi$ práve vtedy, ak funkcia

$$f_\psi : \omega \mapsto S(\omega\|\psi) - S(\omega\|\varphi) - S(\psi\|\varphi)$$

je spojitá na $S_{\varphi,1}$. V tom prípade $f_\psi \in A_{\varphi,0} = B_{\varphi,0}$ a $\psi = [\varphi^{f_\psi}]$.

Nech $\Phi : \mathcal{M}_* \to \mathcal{N}_*$ je kanál, potom jeho adjungované zobrazenie sa dá rozšíriť na kontrakciu $B_{\Phi(\varphi)} \to B_\varphi$. Postačujúce kanály pre dvojice stavov z tej istej súvislej komponenty sa dajú charakterizovať nasledovne:

Veta 5.1.10. *Ak $\psi \in \mathcal{F}_\varphi$, potom kanál Φ je postačujúci vzhľadom na $\{\varphi, \psi\}$ práve vtedy, ak $\Phi(\psi) \in \mathcal{F}_{\Phi(\varphi)}$ a $\Phi^*(f_{\Phi(\psi)}) = f_\psi$.*

Ak φ, ψ sú z jednej súvislej komponenty, definujme zobrazenie

$$U^{(e)}_{\varphi,\psi} : B_{\varphi,0} \ni h \mapsto h - \psi(h) \in B_{\psi,0}.$$

Tieto zobrazenia definujú paralelný transport na tangenciálnom bundli $T\mathcal{F}_\varphi$. Duálny paralelný transport je definovaný na kotangenciálnom bundli $T^*\mathcal{F}_\varphi$ ako

$$U^{(m)}_{\varphi,\psi} : B^*_{\varphi,0} \ni v \mapsto v \in B^*_{\psi,0},$$

teda je to triviálny paralelný transport, daný konvexnou štruktúrou na $\mathcal{F}$.

5.2 Porovnávanie kvantových kanálov a štatistických experimentov

V tejto časti uvažujeme len konečnorozmerné Hilbertove priestory.

5.2.1 Charakterizácie postačujúcich kanálov

Nech $\mathcal{H}$ je Hilbertov priestor a nech $\mathcal{E} = (B(\mathcal{H}), \mathcal{P})$ je kvantový štatistický experiment. Nech $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ je kanál. Zaujímajú nás podmienky, za ktorých je Φ postačujúci vzhľadom na $\mathcal{E}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\mathcal{P}$ je konvexná množina, obsahujúca nejaký verný stav σ taký, že $\sigma_0 := \Phi(\sigma)$ je tiež verný. Petzov duál Φ_σ má v tomto prípade tvar

$$\Phi_\sigma(X) = \sigma^{1/2}\Phi^*(\sigma_0^{-1/2} X \sigma_0^{-1/2})\sigma^{1/2}, \qquad X \in B(\mathcal{K}),$$

pozri Vetu 4.2.6 (iii).

Charakterizácia pomocou testovacích problémov

Nech $\rho \in \mathcal{P}$. Uvažujme diskriminačný problém pre $\{\rho, \sigma\}$, s apriórnymi pravdepodobnosťami $\lambda, 1-\lambda$. Nech $\Pi_\lambda(\rho, \sigma)$ je minimálna Bayesovská pravdepodobnosť chyby. Podobne, nech $\Pi_\lambda(\Phi(\rho), \Phi(\sigma))$ je minimálna Bayesovská pravdepodobnosť chyby pre diskrimináciu $\{\Phi(\rho), \Phi(\sigma)\}$. Ľahko vidno, že $\Pi^0_\lambda \geq \Pi_\lambda$. Zaujíma nás prípad, keď nastáva rovnosť pre všetky $\lambda \in (0,1)$, čo je ekvivalentné rovnosti

$$\|\rho - t\sigma\|_1 = \|\Phi(\rho) - t\Phi(\sigma)\|_1, \qquad \forall t > 0. \tag{7}$$

Veta 5.2.1. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(i) Φ *je postačujúci vzhľadom na* $\mathcal{E}$.

(ii) $\|\rho - t\sigma\|_1 = \|\Phi(\rho) - t\Phi(\sigma)\|_1$ *pre všetky* $t > 0$ *a všetky* $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ *také, že* $\sigma^{is}\rho\sigma^{-is} \in \mathcal{P}$ *pre nejaké* $s \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|\rho^{\otimes n} - t\sigma^{\otimes n}\|_1 = \|\Phi(\rho)^{\otimes n} - t\Phi(\sigma)^{\otimes n}\|_1$ *pre všetky* $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *a* $\rho \in \mathcal{P}$.

Ak $\Phi(\mathcal{P})$ *je podmnožina komutatívnej podalgebry v* $B(\mathcal{K})$, *potom (i) je ekvivalentné rovnosti* (7) *pre všetky* $\rho \in \mathcal{P}$.

Charakterizácia pomocou Radon-Nikodýmovej derivácie

Jedna z verzií Radon-Nikodýmovej derivácie pre kvantové stavy ρ, σ má tvar

$$d(\rho, \sigma) := \sigma^{-1/2} \rho \sigma^{-1/2}.$$

Ľahko vidno, že pre ľubovoľný stav ρ platí

$$d(\Phi(\rho), \Phi(\sigma)) = \Phi_\rho^*(d(\rho, \sigma)).$$

Veta 5.2.2. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(i) Φ *je postačujúci vzhľadom na* $\mathcal{E}$.

(ii) $\Phi^*(d(\Phi(\rho), \Phi(\sigma))) = d(\rho, \sigma)$, *pre všetky* $\rho \in \mathcal{P}$.

(iii) Pre všetky $\rho \in \mathcal{P}$ *je* $d(\rho, \sigma)$ *pevný bod zobrazenia* $\Phi^* \circ \Phi_\sigma^*$.

Faktorizačné kritérium

Veta 5.2.3. *Kanál* Φ *je postačujúci vzhľadom na* $\mathcal{E}$ *práve vtedy, ak existuje operátor* $\sigma^R \in B(\mathcal{H})^+$ *taký, že pre každé* $\rho \in \mathcal{P}$ *platí*

$$\rho = \Phi^*(\rho_0^L)\sigma^R, \qquad \Phi(\rho) = \rho_0^L \Phi(\sigma^R)$$

pre nejaký operátor $\rho_0^L \in B(\mathcal{K})^+$.

Charakterizácia pomocou Fisherovej informácie

Nech $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je symetrická operátor monotónna funkcia a nech λ^f je zodpovedajúca monotónna metrika. Potom $t \mapsto f(t)^{-1}$ je nezáporná operátor monotónna klesajúca funkcia. Pre každú takúto funkciu existuje pozitívna Borelovská miera ν_f na $[0, \infty)$ taká, že platí

$$f(t)^{-1} = \int_0^\infty \frac{1}{s+t} d\nu_f(s).$$

Označme tiež $\mathrm{Lin}(\mathcal{P})$ podpriestor generovaný množinou $\{\rho_1 - \rho_2,\ \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}\}$.

Veta 5.2.4. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(i) Φ *je postačujúci vzhľadom na* $\mathcal{E}$.

(ii) $\lambda_\sigma(X, X) = \lambda_{\Phi(\sigma)}(\Phi(X), \Phi(X))$ *pre všetky* $X \in \mathrm{Lin}(\mathcal{P})$ *a všetky monotónne metriky* λ.

(iii) $\lambda_\sigma^f(X, X) = \lambda_{\Phi(\sigma)}^f(\Phi(X), \Phi(X))$ *pre všetky* $X \in \mathrm{Lin}(\mathcal{P})$ *a nejakú monotónnu metriku* λ^f *takú, že* $|supp(\nu_f)| \geq \dim(\mathcal{H})^2 + \dim(\mathcal{K})^2$.

5.2.2 Porovnávanie binárnych experimentov

Nasledujúce tvrdenia treba porovnať s klasickými výsledkami pre binárne experimenty (str. 11).

Veta 5.2.5. *Nech $\mathcal{E}$ je binárny experiment. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

(i) $\mathcal{E} \succeq_2 \mathcal{F} \implies \mathcal{E} \succeq \mathcal{F}$ *pre každý binárny experiment* $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{E} \succeq_2 \mathcal{F} \implies \mathcal{E} \succeq \mathcal{F}$ *pre každý klasický binárny experiment* $\mathcal{F}$.

(iii) $\mathcal{E}$ *je klasický experiment.*

Z vlastností klasických binárnych experimentov a BSS vety vyplýva, že pre klasické experimenty, $\mathcal{E} \succeq_2 \mathcal{F}$ práve vtedy, ak $\mathcal{F}$ je randomizáciou $\mathcal{E}$. Pre kvantové experimenty platí slabšie tvrdenie.

Veta 5.2.6. *Nech* $\mathcal{E} = (B(\mathcal{H}), \mathcal{P})$ *a* $\mathcal{F} = (B(\mathcal{K}), \mathcal{Q})$ *sú binárne experimenty. Ak* $\mathcal{E} \succeq_2 \mathcal{F}$, *potom existuje úplne pozitívne zobrazenie* Φ, *také, že* $\Phi(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ *(ale* Φ *nemusí zachovávať stopu).*

5.2.3 Porovnávanie kvantových kanálov

Nech $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ a $\Psi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K}')$ sú dva kanály. *Deficiencia* kanála Φ vzhľadom na Ψ je definovaná ako

$$\delta(\Phi, \Psi) = \inf_{\alpha} \|\Phi - \alpha \circ \Psi\|_{\diamond},$$

kde α prebieha cez všetky kanály s vhodným vstupným a výstupným priestorom. Ak $\delta = 0$, potom Φ je post-processingom Ψ. Nasledujúce tvrdenie je rozšírením Cheflesovho výsledku [13], ktorý platí pre $\epsilon = 0$.

Veta 5.2.7. *Nech* $\epsilon \geq 0$. *Potom* $\delta(\Phi, \Psi) \leq \epsilon$ *práve vtedy, ak platí: Pre každý konečnorozmerný Hilbertov priestor* $\mathcal{K}_0$ *a každý súbor* $E = \{\lambda_i, \sigma_i\}_{i=1}^k$ *kde* $\sigma_i \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_0)$, $i = 1, \dots, k$,

$$P_{succ}((\Phi \otimes id)(E)) \leq P_{succ}((\Psi \otimes id)(E)) + \frac{\epsilon}{2} P_{succ}(E).$$

Pri tom stačí uvažovať $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$ *a rovnomerne rozdelené súbory s* $k = (\dim(\mathcal{K}))^2$.

Pre štatistické experimenty dostaneme nasledujúcu verziu Le Camovho randomizačného kritéria.

Veta 5.2.8. *Nech* $\mathcal{E} = (\mathcal{H}, \{\rho_\theta,\ \theta \in \Theta\})$ *a* $\mathcal{F} = (\mathcal{K}, \{\sigma_\theta,\ \theta \in \Theta\})$ *sú kvantové štatistické experimenty,* $\epsilon \geq 0$. *Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.*

(i) Existuje kanál $\alpha : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$, *taký, že*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \|\sigma_\theta - \alpha(\rho_\theta)\|_1 \leq 2\epsilon$$

(ii) Pre každú podmnožinu $\{\theta_1, \dots, \theta_n\} \subseteq \Theta$ a každý súbor $E = \{\lambda_i, \tau_i\}_{i=1}^k$, kde $\tau_i = \sum_{j=1}^n |j\rangle\langle j| \otimes \tau_i^j$, $\tau_i^j \in B(\mathcal{K})^+$, $\sum_j \operatorname{Tr} \tau_i^j = 1$ platí

$$P_{succ}(\{\lambda_i, \sum_{j=1}^n \sigma_{\theta_j} \otimes \tau_i^j\}) \leq P_{succ}(\{\lambda_i, \sum_{j=1}^n \rho_{\theta_j} \otimes \tau_i^j\}) + \epsilon P_{succ}(E).$$

Navyše, v (ii) stačí uvažovať súbory s $k = \dim(\mathcal{K})^2$ a rovnomerným rozdelením λ.

5.3 Konvexná štruktúra množiny kvantových kanálov

Nech $\mathcal{H}$ je Hilbertov priestor, $\dim(\mathcal{H}) < \infty$. Nech $K \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{H})$ je konvexná množina stavov.

5.3.1 Merania a kanály na K

Nech (X, Σ) je merateľný priestor. Meranie na K s výsledkami v (X, Σ) definujeme ako afinné zobrazenie $\mathbf{m} : K \to \mathcal{S}(X, \Sigma)$, ktoré každému $\rho \in K$ priradí zodpovedajúce rozdelenie pravdepodobnosti výsledkov merania.

Budeme sa zaoberať len prípadom, keď X je konečná množina a $\Sigma = 2^X$. Potom každé meranie $\mathbf{m}$ je dané konečnou množinou afinných funkcionálov $\{\mathbf{m}_x : K \to [0,1],\ x \in X\}$, takže

$$\mathbf{m}(\rho)(A) = \sum_{x \in A} \mathbf{m}_x(\rho), \qquad A \subseteq X.$$

Keďže $K \subset B(\mathcal{H})$, každý afinný funkcionál na K sa dá rozšíriť na hermitovský lineárny funkcionál na $B(\mathcal{H})$, a teda existujú samoadjungované operátory $\{M_x, x \in X\}$ také, že $\mathbf{m}_x(\rho) = \operatorname{Tr} M_x \rho$, $\rho \in K$. Takáto množina musí spĺňať $\sum_x M_x \in I + K^\perp$, kde

$$K^\perp = \{A \in B(\mathcal{H}),\ \operatorname{Tr} A\rho = 0,\ \forall \rho \in K\}.$$

Ak má každý afinný funkcionál $K \to [0,1]$ pozitívne rozšírenie na celé $B(\mathcal{H})$, potom operátory M_x možno vždy vybrať pozitívne. V tomto prípade hovoríme, že $\{M_x,\ x \in X\}$ je *zovšeobecnená POVM vzhľadom na K*.

Veta 5.3.1. *Nech $K \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$ je konvexná množina. Každý afinný funkcionál $K \to [0,1]$ má pozitívne rozšírenie na celé $B(\mathcal{H})$ práve vtedy, ak uzáver $\bar{K}$ je sekcia stavového priestoru, teda ak*

$$\bar{K} = K^{\perp\perp} \cap \mathcal{S}(\mathcal{H}).$$

Príkladom sekcie stavového priestoru je množina Choiových matíc všetkých kanálov $B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$. Zovšeobecnené POVM vzhľadom na túto množinu sú práve procesové POVM. Z toho vyplýva

Dôsledok 5.3.2. *Všetky merania na kanáloch sú dané procesovými POVM, resp. trojicami* $(\mathcal{H}_0, \rho, M)$ *ako v* (6).

Kanály na K definujeme ako afinné zobrazenia $K \to \mathcal{S}(\mathcal{K})$, ktorých rozšírenie na podpriestor $K^{\perp\perp}$ je úplne pozitívne. Špeciálnym prípadom sú merania na K: meranie na K je kanál na K práve vtedy, ak sa dá rozšíriť na meranie na sekcii generovanej K.

Veta 5.3.3. *Každý kanál* $K \to \mathcal{S}(\mathcal{K})$ *sa dá rozšíriť na úplne pozitívne zobrazenie* $B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$. *Úplne pozitívne zobrazenie* $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ *definuje kanál na* K *práve vtedy, ak jeho Choiova matica spĺňa*

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}} C(\Phi) \in \tau_{\mathcal{H}} + K^{\perp}. \tag{8}$$

kde $\tau_{\mathcal{H}} := \dim(\mathcal{H})^{-1} I_{\mathcal{H}}$ *je maximálne zmiešaný stav.*

Úplne pozitívne zobrazenie spĺňajúce podmienku (8) sa nazýva *zovšeobecnený kanál vzhľadom na K*.

Poznámka 5.3.4. Ak $K = \mathcal{S}(\mathcal{H})$, zovšeobecnené POVM vzhľadom na K sú práve POVM, podobne zovšeobecnené kanály sú kanály. V tomto prípade je vzťah medzi meraniami a POVM jedno-jednoznačný. To už však pre všeobecné K neplatí: ak pre dve zovšeobecnené POVM M a N platí $M_i - N_i \in K^{\perp\perp}$ pre všetky i, potom popisujú to isté meranie. To znamená, že merania zodpovedajú triedam ekvivalencie zovšeobecnených POVM. Podobné tvrdenie platí pre vzťah kanálov na K a zovšeobecnených kanálov.

5.3.2 Kvantové supermapy

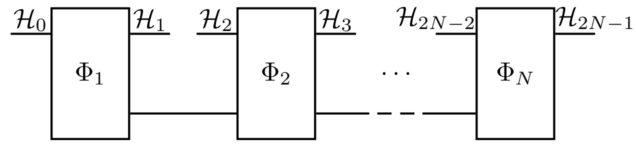
Nech K je sekcia $\mathcal{S}(\mathcal{H}_0)$ obsahujúca maximálne zmiešaný stav $\tau_{\mathcal{H}_0}$. Potom množina všetkých zovšeobecnených kanálov vzhľadom na K sa pomocou Choiových matíc dá stotožniť so sekciou stavového priestoru $\mathcal{S}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_0)$, ktorú označíme ako $\mathcal{C}_K(\mathcal{H}_0, \mathcal{K})$. To umožňuje rekurentnú definíciu *supermáp*, ktoré sú definované podobne ako kvantové komby: množina supermáp $\mathcal{C}_K(\mathcal{H}_0, \ldots, \mathcal{H}_n)$ je definovaná ako

$$\mathcal{C}_K(\mathcal{H}_0, \ldots H_n) = \mathcal{C}_{\mathcal{C}_K(\mathcal{H}_0, \ldots H_{n-1})}(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}_{n-i}, \mathcal{H}_n).$$

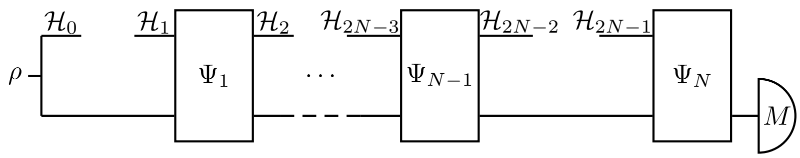
Ak $K = \mathcal{S}(\mathcal{H})$, potom $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) := \mathcal{C}_K(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ je množina kvantových kanálov $B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ a používame označenie $\mathcal{C}(\mathcal{H}_0, \ldots H_n) := \mathcal{C}_K(\mathcal{H}_0, \ldots H_n)$.

Veta 5.3.5. *Nech* $X \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_0, \ldots H_n)$.

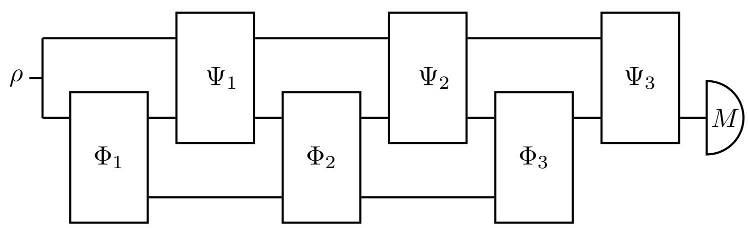
(i) Ak $n = 2N - 1$, *potom existuje ancilárny priestor* $\mathcal{H}_A$ *a kanály* $\Phi_i : B(\mathcal{H}_{2i-2} \otimes \mathcal{H}_A) \to (\mathcal{H}_{2i-1} \otimes \mathcal{H}_A)$ *také, že* $X = C(\Phi)$, *kde* $\Phi : B(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{2N-2}) \to B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{2N-1})$ *je kanál, zobrazený na obr. 1. To znamená, že* X *je kvantový* N*-komb.*



Obr. 1: Deterministický kvantový N-comb



Obr. 2: Kvantový N-tester



Obr. 3: 3-tester aplikovaný na 3-comb

(ii) $\mathcal{C}(\mathcal{H}_0, \ldots \mathcal{H}_{2N}) = \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathcal{H}_0, \ldots \mathcal{H}_{2N})$. *To znamená, že existujú kanály* Ψ_i *podobné ako v (i), ale prvý kanál má jednorozmerný vstupný priestor, a teda zodpovedá stavu. Ak na výstupnú ancilu posledného kanála aplikujeme meranie* M*, dostaneme testery [14], ktoré zodpovedajú meraniam na* N*-comboch, pozri obr. 2, 3.*

5.3.3 Bázové normy a rozlíšiteľnosť

V predchádzajúcom odstavci sme videli, že kvantové protokoly určitých typov tvoria sekcie mnohočasťových stavových priestorov. V tejto časti nás zaujíma diskriminácia takýchto protokolov, alebo všeobecnejšie diskriminácia prvkov sekcií báz pozitívneho kužeľa v priestore operátorov na konečnorozmernom Hilbertovom priestore.

Označme reálny vektorový priestor samoadjungovaných operátorov na $\mathcal{H}$ ako $B_h(\mathcal{H})$ a uvažujme usporiadaný vektorový priestor $(B_h(\mathcal{H}), B(\mathcal{H})^+)$, kde $B(\mathcal{H})^+$ je konvexný kužeľ pozitívnych operátorov. Stavový priestor $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ tvorí bázu $B(\mathcal{H})^+$, inými slovami, $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ je konvexná podmožina $B(\mathcal{H})^+$, taká, že každý nenulový pozitívny operátor sa dá jediným spôsobom napísať ako pozitívny násobok nejakého stavu. Všetky bázy kužeľa $B(\mathcal{H})^+$ sú tvaru

$$K_\rho = B(\mathcal{H})^+ \cap (c^{-1}I + \{\rho\}^\perp)$$

pre nejaký pozitívne definitný operátor $\rho \in B(\mathcal{H})^+$, $\mathrm{Tr}\,\rho = c$. Každý takýto operátor je jednotkou usporiadania (order unit) na $(B_h(\mathcal{H}), B(\mathcal{H})^+)$ a funkcia

$$\|X\|_\rho := \inf\{\lambda > 0,\ -\lambda\rho \leq X \leq \lambda\rho\}$$

je norma na $B_h(\mathcal{H})$ (order unit norm). Všimnime si, že ak $\sigma \geq 0$, potom

$$\log(\|\sigma\|_\rho) = D_{max}(\rho\|\sigma)$$

je max-relatívna entropia σ vzhľadom na ρ, [19]. Duálna norma je bázová norma (base norm) pre K_ρ, definovaná ako

$$\|X\|_{K_\rho} := \inf\{\lambda + \mu, X = \lambda\sigma_1 - \mu\sigma_2,\ \lambda, \mu \geq 0,\ \sigma_1, \sigma_2 \in K_\rho\}.$$

Nech B je sekcia bázy K_ρ, teda nech $B = K_\rho \cap B^{\perp\perp}$. Budeme tiež predpokladať, že B obsahuje nejaký striktne pozitívny prvok, vtedy povieme, že B je *verná sekcia bázy*. Definujme

$$\tilde{B} := \{\tilde{b} \in B(\mathcal{H})^+,\ \mathrm{Tr}\,\tilde{b}b = 1,\ \forall b \in B\}$$
$$\mathcal{O}_B := \{X = X_1 - X_2,\ X_1 + X_2 \in B\}$$

Veta 5.3.6. *(i) $\tilde{B}$ je verná sekcia bázy $B(\mathcal{H})^+$, ktorá sa nazýva duálnou sekciou k B.*

(ii) $\mathcal{O}_B$ je jednotková guľa normy, ktorú označíme ako $\|\cdot\|_B$. K nej duálna norma je $\|\cdot\|_{\tilde{B}}$.

(iii) $\|X\|_B = \sup_{\tilde{b}\in ri(\tilde{B})} \|X\|_{K_{\tilde{b}}} = \inf_{b\in ri(B)} \|X\|_b$.

(iv) Ak $X \geq 0$, potom $\|X\|_B = \sup_{\tilde{b}\in\tilde{B}} \mathrm{Tr}\,\tilde{b}X = \inf_{b\in B} 2^{D_{max}(X\|b)}$.

Nech $b_0, b_1 \in B$. Uvažujme problém testovania hypotézy $H_0 = b_0$ oproti alternatíve $H_1 = b_1$. Testy sú dané afinnými funkcionálmi $\varphi : B \to [0,1]$, kde $\varphi(b_i)$ je interpretované ako pravdepodobnosť zamietnutia H_0 ak "skutočná"hodnota je $b = b_i$. Nech $\lambda \in [0,1]$ je apriórna pravdepodobnosť $b = b_0$, potom stredná chyba testu φ je

$$P_e(\varphi, \lambda) = \lambda\varphi(b_0) + (1-\lambda)(1 - \varphi(b_1)).$$

Veta 5.3.7. *Optimálna Bayesovská pravdepodobnosť chyby pri testovaní $H_0 = b_0$ oproti $H_1 = b_1$ je*

$$P_e^{min}(\lambda) = \inf_\varphi P_e(\varphi, \lambda) = \frac{1}{2}(1 - \|\lambda b_0 - (1-\lambda)b_1\|_B)$$

kde infimum berieme cez všetky testy na B.

Ako sme videli v predchádzajúcej časti, množina kanálov $\mathcal{C}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ je verná sekcia bázy $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_0)^+$.

Veta 5.3.8. *Označme $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.*

(i) *Nech $X \in B_h(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_0)$ a nech Φ je hermitovské zobrazenie $B(\mathcal{H}_0) \to B(\mathcal{H}_1)$, také, že $C(\Phi) = X$. Potom*

$$\|X\|_{\mathcal{C}} = \|\Phi\|_{\diamond}$$

(ii) *Duálna sekcia $\tilde{\mathcal{C}}$ zodpovedá množine Choiových matíc zmazávacích (erasure) kanálov $\phi_\sigma : B(\mathcal{H}_1) \to B(\mathcal{H}_0)$, $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_0)$ ktoré zobrazia každý stav v $\mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ na σ.*

Duálnu normu môžeme interpretovať ako maximálnu pravdepodobnosť úspechu pri testovaní viacnásobných hypotéz.

Veta 5.3.9. *Nech $E = \{\lambda_i, \rho_i\}_{i=1}^k$ je štatistický súbor na priestore $\mathcal{K}$. Položme $\mathcal{H} = \mathbb{C}^k$ a $X_E := \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| \otimes \rho_j$, kde vektory $|j\rangle$ tvoria kanonickú bázu $\mathbb{C}^k$. Potom*

$$P_{succ}(E) = \|X_E\|_{\tilde{\mathcal{C}}}.$$

Podobné výsledky sa dajú nájsť pre kvantové supermapy. Ďalší výsledok sa týka existencie testov na kanáloch s maximálne entanglovaným vstupným stavom.

Veta 5.3.10. *Nech Φ_0, Φ_1 sú dva kanály $B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ s apriórnymi pravdepodobnosťami λ, $1-\lambda$. Potom existuje optimálny Bayesovský test daný trojicou $(\mathcal{H}, \psi, M)$ s maximálne entanglovaným vstupným stavom ψ práve vtedy, ak platí*

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}} |\lambda C(\Phi_0) - (1-\lambda) C(\Phi_1)| \propto I_{\mathcal{H}}.$$

6 Závery práce

Hlavné závery práce sa dajú zhrnúť nasledovne:

- Konštrukcie známe z klasickej informačnej geometrie definujú viacero rôznych invariantných dualistických štruktúr na kvantovej variete $\hat{\mathcal{D}}_n$. Požiadavka aby afinné konexie boli ploché však vytrieďuje jednoparametrickú triedu takýchto štruktúr. Oproti klasickému prípadu sú navyše hodnoty parametra α obmedzené na interval $[-3, 3]$.

- Na stavoch von Neumannovej algebry sú α-divergencie pre $\alpha \in (0, 1)$ kanonickými divergenciami pre duálne hladké konexie, ktoré vzniknú vnorením do L_p-priestorov.

- Skonštruovali sme diferencovateľnú štruktúru na množine verných stavov von Neumannovej algebry, ktorá je odvodená z relatívnej entropie. Kanály indukujú kontrakcie na príslušných tangenciálnych priestoroch a zachovávajú zodpovedajúcu parametrizáciu na podmnožinách stavov práve vtedy, ak sú pre ne postačujúce, teda ak definujú štatistický izomorfizmus.

- Postačujúcosť kanálov sa dá charakterizovať zachovávaním niektorých verzií monotónnych metrík, SLD metrika medzi ne nepatrí. Zachovávanie L_1-normy, resp. optimálnej Bayesovskej pravdepodobnosti chýb pri testovaní hypotéz charakterizuje postačujúce kanály ak sa vyžaduje pre i.i.d. sekvencie $\rho^{\otimes n}$ pre všetky n. Rovnosť pre $n = 1$ stačí len pre niektoré špeciálne experimenty, resp. kanály.

- Porovnali sme usporiadanie $\succeq$ a $\succeq_2$ pre binárne experimenty a dokázali sme, že sú ekvivalentné práve vtedy, ak informatívnejší experiment je klasický.

- Našla sa úplná kvantová verzia randomizačného kritéria pre kanály a štatistické experimenty, formulovaná pomocou pravdepodobností úspechu testov viacnásobných hypotéz.

- Merania na kanáloch a komboch dané ako afinné zobrazenia na Choiových maticiach zodpovedajú testerom. Tento vzťah vyplýva práve z toho, že komby tvoria sekciu stavového priestoru, ale nie je jedno-jednoznačný. Diamond norma je rozlišovacou normou na kanáloch a má špeciálny tvar tzv. base-section normy. Norma k nej duálna je tiež base-section norma a dá sa interpretovať ako pravdepodobnosť úspechu pri testovaní viacnásobných hypotéz. Optimalita maximálne entanglovaného stavu ako vstupného stavu pre diskrimináciu kanálov sa dá charakterizovať pomocou Choiových matíc kanálov.

Literatúra

[1] S. I. Amari. *Differential-geometrical Methods in Statistics.* Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] S. I. Amari and H. Nagaoka. *Method of Information Geometry.* AMS Monograph. Oxford University Press, 2000.

[3] H. Araki. Relative entropy of states of von Neumann algebras. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 11:809–833, 1976.

[4] D. Blackwell. Comparison of experiments. *Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab.*, pages 93–102, 1951.

[5] F. Buscemi. Comparison of Quantum Statistical Models: Equivalent Conditions for Sufficiency. *Commun. Math. Phys.*, 310:625–647, 2012, arXiv:1004.3794.

[6] F. Buscemi. Fully quantum second-law–like statements from the theory of statistical comparisons. arXiv:1505.00535, 2014.

[7] F. Buscemi. Degradable channels, less noisy channels, and quantum statistical morphisms: an equivalence relation. arXiv:1511.08893, 2015.

[8] F. Buscemi and N. Datta. Equivalence between divisibility and monotonic decrease of information in classical and quantum stochastic processes. *Phys. Rev. A*, 93:012101, 2016, arXiv:1408.7062.

[9] F. Buscemi, N. Datta, and S. Strelchuk. Game-theoretic characterization of antidegradable channels. *J. Math. Phys.*, 55:092202, 2014, arXiv:1404.0277.

[10] L. Le Cam. Sufficiency and approximate sufficiency. *Ann. Math. Statist.*, 34:1419–1455, 1964.

[11] N. N. Cencov. *Statisticheskie reshayushhie pravila i optimal'nye vyvody.* Nauka, Moscow, 1972. Engl. transl.: 1982, Statistical decision rules and optimal inference, American Mathematical Society, Providence.

[12] N. N. Cencov and E. A. Morozova. Markov invariant geometry on state manifolds. *Itogi Nauki i Tekhniki*, 36:69–102, 1990.

[13] Anthony Chefles. The quantum blackwell theorem and minimum error state discrimination. arXiv:0907.0866, 2009.

[14] G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti. Memory effects in quantum channel discrimination. *Phys. Rev. Lett.*, 101, 2008.

[15] G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti. Theoretical framework for quantum networks. *Phys. Rev. A*, 80, 2009.

[16] M. D. Choi. Completely Positive Linear Maps on Complex matrices. *Lin. Alg. Appl.*, 10:285–290, 1975.

[17] I. Csiszár. Information type measure of difference of probability distributions and indirect observations. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 2:299–318, 1967.

[18] I. Csiszár and J. Körner. *Information Theory. Coding Theorems for Discrete Memoryless Channels.* Academic Press, New York - San Francisco - London, 1981.

[19] N. Datta. Min- and Max-relative entropies and a new entanglement monotone. *IEEE Transactions on Information Theory*, 55:2816–2826, 2009, arXiv:0803.2770 [quant-ph].

[20] A. P. Dawid. On the concepts of sufficiency and ancillarity in the presence of nuisance parameters. *J. R. Stat. Soc. B*, 37:248–258, 1975.

[21] B. Efron. Defining the curvature of a statistical problem (with applications to second order efficiency). *Annals of Statistics*, 3:1189–1242, 1975.

[22] S. Eguchi. Second order efficiency of minimum contrast estimators in a curved exponential family. *Ann. Statist.*, 11:793, 1983.

[23] P. Gibilisco and T. Isola. Connections on statistical manifolds of density operators by geometry of non-commutative L_p-spaces. *IDAQP*, 2:169–178, 1999.

[24] P. Gibilisco and G. Pistone. Connections on non-parametric statistical manifolds by Orlicz space geometry. *IDAQP*, 1:325–347, 1998.

[25] M. Graselli and R.F. Streater. The quantum information manifold for ϵ-bounded forms. *Rep. Math. Phys.*, 46:325–335, 2000.

[26] M.R. Grasselli and R.F. Streater. On the uniqueness of the Chentsov metric in quantum information geometry. *IDAQP*, 4:173–182, 2001, math-ph/000603.

[27] H. Hasegawa. Dual geometry of the Wigner–Yanase–Dyson information content. *IDAQP*, 6:413, 2003.

[28] H. Hasegawa and D. Petz. D. Non-commutative extension of information geometry II. In O. Hirota et. al., editor, *Quantum Communication, Computing and Measurement*, New York, 1997. Plenum Press.

[29] P. Hayden, R. Jozsa, D. Petz, and A. Winter. Structure of states which satisfy strong subadditivity of quantum entropy with equality. *Commun. Math. Phys.*, 246:359–374, 2004, arXiv:quant-ph/0304007.

[30] H. Heyer. *Theory of Statistical Experiments*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[31] F. Hiai, M. Mosonyi, D. Petz, and C. Beny. Quantum f-divergences and error correction. *Rev. Math. Phys.*, 23:691–747, 2011, arXiv:1008.2529.

[32] A. S. Holevo. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory (2-nd English ed.)*. Edizioni della Normale, Pisa, 2011.

[33] H. Jeffreys. An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proceedings of Royal Society A*, 186:453–461, 1946.

[34] A Jenčová and D. Petz. Sufficiency in quantum statistical inference. *Commun. Math. Phys.*, 263:259–276, 2006, arXiv:math-ph/0412093.

[35] A. Jenčová and D. Petz. Sufficiency in quantum statistical inference. A survey with examples. *Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Top.*, 9:331–351, 2006, arXiv:quant-ph/0604091.

[36] A. Kitaev. Quantum computations: Algorithms and error correction. *Russian Mathematical Surveys*, 52:1191–1249, 1997.

[37] J. Körner and K. Marton. Comparison of two noisy channels. In *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Topics in Information Theory*, pages 411–424. North Holland, 1977.

[38] H. Kosaki. Applications of uniform convexity of noncommutative L^p-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 283:265–282, 1984.

[39] S. Kullback and R. A. Leibler. On information and sufficiency. *Ann. Math. Stat.*, 22:78–86, 1951.

[40] A. Lesniewski and M.B. Ruskai. Monotone Riemannian metrics and relative entropy on noncommutative probability spaces. *J. Math. Phys.*, 40:5702–5724, 1999, math-ph/0307057.

[41] F. Liese and I. Vajda. *Convex Statistical Distances.* Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, 1987.

[42] T. Masuda. L_p-spaces for von Neumann algebra with reference to a faithful normal semifinite weight. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 19:673–727, 1983.

[43] K. Matsumoto. A quantum version of randomization condition. arXiv:1012.2650, 2010.

[44] K. Matsumoto. An example of a quantum statistical model which cannot be mapped to a less informative one by any trace preserving positive map. arXiv:1409.5658, 2014.

[45] M. Mosonyi and D. Petz. Structure of sufficient quantum coarse-grainings. *Lett. Math. Phys.*, 68:19–30, 2004, arXiv:quant-ph/0312221.

[46] H. Nagaoka. Differential geometrical aspects of quantum state estimation end relative entropy. In R. L. Hudson V. P. Belavkin, O. Hirota, editor, *Quantum Communication, Computing and Measurement*, New York, 1995. Plenum Press.

[47] H. Nagaoka and S. I. Amari. Differential geometry of smooth families of probability distributions. Technical Report METR 82-7, University of Tokyo, Tokyo, 1982.

[48] D. Petz. Quasi-entropies for finite quantum systems. *Rep. Math. Phys.*, 23:57–65, 1984.

[49] D. Petz. Quasi-entropies for states of a von Neumann algebra. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 21:787–800, 1985.

[50] D. Petz. Sufficient subalgebras and the relative entropy of states of a von Neumann algebra. *Commun. Math. Phys.*, 105:123–131, 1986.

[51] D. Petz. Sufficiency of channels over von Neumann algebras. *Quart. J. Math. Oxford*, 39:97–108, 1988.

[52] D. Petz. Monotone metrics on matrix spaces. *Lin. Alg. Appl.*, 244:81–96, SEP 1 1996.

[53] G. Pistone and C. Sempi. An infinite-dimensional geometric structure on the space of all the probability measures equivalent to a given one. *Ann. Statist.*, 23:1543–1561, 1995.

[54] M. Raginsky. Shannon meets Blackwell and Le Cam: Channels, codes, and statistical experiments. *IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings*, pages 1220–1224, 2011.

[55] C. R. Rao. Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bulletin of the Calcuta Mathematical Society*, 37:81–91, 1945.

[56] M. R.Grasselli. Dual connections in nonparametric classical information geometry. *Ann. Inst. Stat. Math.*, 62:873–896, 2010.

[57] C. E. Shannon. A note on a partial ordering for communication channels. *Inform. Control*, 1:390–397, 1958.

[58] S. Sherman. On a theorem of Hardy, Littlewood, Pólya and Blackwell. *Proc. Nat. Acad. Sciences*, 37:826–831, 1951.

[59] E. Shmaya. Comparison of information structures and completely positive maps. *J. Phys. A-Math. Gen.*, 38:9717–9727, 2005.

[60] C. Stein. Notes on a Seminar on Theoretical Statistics. I. Comparison of experiments. Technical report, University of Chicago, 1951.

[61] H. Strasser. *Mathematical Theory of Statistics.* de Gruyter, Berlin, New York, 1985.

[62] R. F. Streater. The Information Manifold for Relatively Bounded Potentials. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 228:217–235, 2000.

[63] R.F. Streater. Quantum Orlicz spaces in information geometry. *Open Sys. Inf. Dyn.*, 11:350, 2004.

[64] E. Torgersen. Comparison of statistical experiments when the parameter space is finite. *Z. Wahrscheintlichkeitstheorie verw. geb.*, 16:219–249, 1970.

[65] H. Umegaki. Conditional expectation in an operator algebra, IV: Entropy and information. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 14:59–85, 1962.

[66] J. Watrous. Theory of Quantum Information. University of Waterloo, Waterloo, 2011,

[67] M. Ziman. Process positive-operator-valued measure: A mathematical framework for the description of process tomography experiments. *Phys. Rev. A*, 77, 2008.

7 Zoznam prác a ich ohlas

Zoznam použitých článkov (s citáciami podľa WOS/Scopus)

[IG1] A. Jenčová, Geometry of quantum states: dual connections and divergence functions, *Rep. Math. Phys.*, **47**(2001), 121–138.

[1] P. Gibilisco, T. Isola, Wigner-Yanase information on quantum state space: The geometric approach, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 3752-3762

[2] H. Hasegawa, Dual geometry of the Wigner-Yanase-Dyson information content, IDAQP **6** (2003), 413-430

[3] M. Grasselli, Duality, monotonicity and the Wigner-Yanase-Dyson metrics, IDAQP **7** (2004), 215-232

[4] P. Gibilisco, T. Isola, On the characterisation of paired monotone metrics, *Ann. Instit. Stat. Math.* **56** (2004), 369-381

[5] P. Gibilisco, T. Isola, On the monotonicity of scalar curvature in classical and quantum information geometry, *J. Math. Phys.* **46** (2005), art. nr. 23501

[6] D. Han, H.-F. Sun, Submanifolds of curved exponential family in quantum statistics, *Beijing Ligong Daxue Xuebao/Transaction of Beijing Institute of Technology* **29** (2009), 918-920+935

[7] S. Zhu, Z. Ma, Topologies on quantum states, *Phys. Lett. A* **374** (2010), 1336-1341

[8] R. Kostecki, The general form of γ-family of quantum relative entropies, *Open Systems and Information Dynamics* **18** (2011), 191-221

[9] W. Stephan, Continuity of the Maximum-Entropy Inference, *Commun.in Math. Phys.* **330** (2014), 1263-1292

[10] S. Weis, Information Topologies on Non-Commutative State Spaces, *Journal of Convex Analysis* **21** (2014), 339-399

[IG2] A. Jenčová, Generalized relative entropies as contrast functionals on density matrices, *Int. J Theor. Phys.*, **43** (2004), 1635–1649

[1] P. Slater: Quantum and Fisher information from the Husimi and related distributions, *J. Math. Phys.* **47** (2006), art. nr. 22104

[2] I. Bengtsson, K. Zyczkowski, *Geometry of Quantum States. An Introduction to Quantum Entanglement*, (2006)

[3] D. Petz, *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*, Theoretical and Mathematical Physics Series,(2008) 1-209

[4] R. Kostecki, The general form of γ-family of quantum relative entropies, *Open Systems and Information Dynamics* **18** (2011), 191-221

[IG3] A. Jenčová, Flat connections and Wigner-Yanase-Dyson metrics, *Rep. Math.Phys*, **52** (2003), 331–351, arxiv:math-ph/0307057

[1] S. Luo, Q. Zhang, On skew information, *IEEE Transactions on Information Theory* **50** (2004), 1778-1782 (cituje preprint arxiv:math-ph/0307057)

[2] K. Yanagi, S. Furuichi, K. Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relation, *IEEE Transactions on Information Theory* **51** (2005), 4401-4404

[3] R. Kostecki, The general form of γ-family of quantum relative entropies, *Open Systems and Information Dynamics* **18** (2011), 191-221

[4] J. Mikeš, E. Stepanova, A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible SO(3)-structure as a model of abstract statistical manifold, *Annals of Global Analysis and Geometry* **45** (2014), 111-128

[5] D. Pires, L. Céleri, D. Soares-Pinto, Geometric lower bound for a quantum coherence measure, *Phys. Rev. A* **91** (2015), art. nr. 42330

[IG4] A. Jenčová, Quantum information geometry and non-commutative L_p-spaces, *IDAQP*, **8** (2005), 215–233.

[1] R. P. Kostecki, Quantum theory as inductive inference, *AIP Conference Proceedings* **1305** (2010), 33-40

[2] R. Kostecki, The general form of γ-family of quantum relative entropies, *Open Systems and Information Dynamics* **18** (2011), 191-221

[IG5] A. Jenčová, A construction of nonparametric quantum information manifold, *J. Funct. Anal.*, 239 (2006), 1–20.

[1] R. Streater, *Statistical dynamics: A stochastic approach to nonequilibrium thermodynamics* Second edition, (2009) 1-382

[2] G. Pistone, κ-exponential models from the geometrical viewpoint, *European Physical Journal B* **70** (2009), 29-37

[3] R. P. Kostecki, Quantum theory as inductive inference, *AIP Conference Proceedings* **1305** (2010), 33-40

[4] G. Loaiza, H. Quiceno, A q-exponential statistical Banach manifold, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **398** (2013), 466-476

[5] G. Pistone, Nonparametric information geometry, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 8085 LNCS (2013), 5-36

[6] M. H. A. Al-Rashed, B. Zegarlinski, Monotone norms and Finsler structures in noncommutative spaces, *Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top.* **17** (2014), 1450029

[7] H. Quiceno Echavarría, J. Arango Parra, A statistical manifold modeled on Orlicz spaces using Kaniadakis κ-exponential models, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **431** (2015), 1080-1098

[IG6] A. Jenčová, On quantum information manifolds, In *Algebraic and Geometric Methods in Statistics*, Cambridge University Press , 2010.

[1] R. P. Kostecki, Information dynamics and new geometric foundations of quantum theory, *AIP Conference Proceedings 1424* (2012)

[CE1] A. Jenčová, Quantum Hypothesis Testing and Sufficient Subalgebras, *Lett. Math. Phys.*, **93** (2010), 15–27.

[1] F. Hiai, M. Mosonyi, D. Petz, C. Bény, Quantum f-divergences and error correction, *Rev. Math. Phys.* **23** (2011), 691-747

[2] A. Łuczak, On a general concept of sufficiency in von neumann algebras, *Probability and Mathematical Statistics* **35** (2015), 313-324

[3] G. Vazquez-Vilar, Multiple quantum hypothesis testing expressions and classical-quantum channel converse bounds,*IEEE ISIT - Proceedings* (2016), 2854-2857, art. nr. 7541820

[CE2] A. Jenčová, Reversibility conditions for quantum operations, *Rev. Math. Phys.*, **24** (2012), 1250016, arXiv:1107.0453

[1] F. Hiai, M. Mosonyi, D. Petz, C. Bény, Quantum f-divergences and error correction, *Rev. Math. Phys.* **23** (2011) (cituje preprint arXiv:1107.0453)

[2] L. Jian, K. He, Q. Yuan, F. Wang, On partially trace distance preserving maps and reversible quantum channels, *Journal of Applied Mathematics* (2013), art. nr. 474291

[3] M. E. Shirokov, Reversibility of a quantum channel: General conditions and their applications to Bosonic linear channels, *J. Math. Phys.* **54** (2013), art. nr. 112201

[4] M. E. Shirokov, Reversibility conditions for quantum channels and their applications, *Sbornik Mathematics* **204** (2013)

[5] A. S. M. Hassan, P. S. Joag, Invariance of quantum correlations under local channel for a bipartite quantum state, *EPL* **103** (2013), art. nr. 10004

[6] M. E. Shirokov, Criteria for equality in two entropic inequalities, *Sbornik Mathematics* **205** (2014)

[7] M. Shirokov, T. Shulman, On superactivation of zero-error capacities and reversibility of a quantum channel, *Commun. Math. Phys.* **335** (2015)

[8] M. Junge, R. Renner, D. Sutter, M. Wilde, A. Winter, Universal recoverability in quantum information, IEEE ISIT - Proceedings (2016), 7541748

[CE3] A. Jenčová, Comparison of quantum binary experiments, *Rep. Math. Phys.*, **70** (2012), 237–249.

[1] T. Heinosaari, M. A. Jivulescu, D. Reeb, M. M. Wolf, Extending quantum operations, *J. Math. Phys.* **53** (2012), art. nr. 102208

[2] F. Buscemi, Degradable channels, less noisy channels, and quantum statistical morphisms: An equivalence relation, *Problems of Information Transmission* **52** (2016), 201-213

[CE4] A. Jenčová: Comparison of quantum channels and statistical experiments, 2016 IEEE ISIT, 2249 - 2253, IEEE Conference Publications, 2016

[CS1] A. Jenčová, Generalized channels: Channels for convex subsets of the state space, *J. Math. Phys.*, **53** (2012), 012201, arXiv:1105.1899

[1] G. M. D'Ariano, P. Perinotti, M. Sedlák, Extremal quantum protocols, *J. Math. Phys.* **52** (2011), art. nr. 82202 (cituje preprint arXiv:1105.1899)

[2] T. Heinosaari, M. A. Jivulescu, D. Reeb, M. M. Wolf, Extending quantum operations, *J. Math. Phys.* **53** (2012), art. nr. 102208

[3] G. Chiribella, A. Toigo, V. Umanita, Normal completely positive maps on the space of quantum operations, *Open Systems & Information Dynamics* **20** (2013), art. nr. 1350003

[4] G. Chiribella, G. M. D'Ariano, P. Perinotti, B. Valiron, Quantum computations without definite causal structure, *Phys. Rev. A* **88** (2013), art. nr. 22318

[5] C.-G. Ambrozie, A. Gheondea, An interpolation problem for completely positive maps on matrix algebras: solvability and parametrization, *Linear and Multilinear Algebra* **63** (2015)

[6] T. Heinosaari, T. Miyadera, M. Ziman, An invitation to quantum incompatibility, *J. Phys. A-Math. Theor.* **49** (2016), art. nr. 123001

[7] J. M. Dominy, A. Shabani, D. A. Lidar, A general framework for complete positivity, *Quantum Information Processing* **15**, (2016)

[CS2] A. Jenčová, Base norms and discrimination of generalized quantum channels, *J. Math. Phys*, **55** (2014), 022201, arXiv:1308.4030.

[1] E. Haapasalo, M. Sedlák, M. Ziman, Distance to boundary and minimum-error discrimination, *Phys. Rev. A* **89** (2014), art. nr. 62303

[2] M. Sedlák, M. Ziman, Optimal single-shot strategies for discrimination of quantum measurements, *Phys. Rev. A* **90** (2014), art. nr. 52312

[3] G. Chiribella, D. Ebler, Optimal quantum networks and one-shot entropies, *New Journal of Physics* **18** (2016), art. nr. 93053

Spolu 52 citácií v databázach WOS/Scopus.

Zoznam ostatných prác, súvisiacich s problematikou

[1] A. Jenčová, Dualistic properties of the manifold of quantum states, In: *Disordered and complex systems*, AIP Conference Proceedings, Melville, New York, 2001 (1 citácia)

[2] A. Jenčová, Quantum information geometry and standard purification, J.Math.Phys., **43** (2002), 2187-2201 (1 citácia)

[3] A. Jenčová, Geodesic distances on density matrices, J. Math. Phys. **45** (2004), 1787-1794 (6 citácií)

[4] A. Jenčová, D. Petz, Sufficiency in quantum statistical inference, Commun. Math. Phys. **263** (2006), 259-276 (27 citácií)

[5] A. Jenčová, D. Petz: Sufficiency in quantum statistical inference. A survey with examples, IDAQP **9** (2006), 331-351 (7 citácií)

[6] M. Guta, A. Jenčová: Local asymptotic normality in quantum statistics, Commun. Math. Phys. **276** (2007) 341-379 (13 citácií)

[7] A. Jenčová, M.B. Ruskai: A unified treatment of convexity of relative entropy and related trace functions, with conditions for equality, *Rev. Math. Phys.* **22** (2010), 1099-1121 (25 citácií)

[8] A. Jenčová, D. Petz and J. Pitrik: Markov triplets on CCR-algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **76** (2010), 27-50 (1 citácia)

[9] A. Jenčová, The structure of strongly additive states and Markov triplets on the CAR algebra, *J. Math. Phys.* **51** (2010), 112103 (0 citácií)

[10] A. Jenčová, Extremality conditions for generalized channels, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 122203 (0 citácií)

[11] A. Jenčová: Extremal generalized quantum measurements, *Linear Algebra Appl.* 439 (2013), 4070-4079 (0 citácií)

[12] Z. Puchala, A. Jenčová, M. Sedlák, M. Ziman: Exploring boundaries of quantum convex structures: special role of unitary processes, *Phys. Rev. A* **92**, 012304 (2015) (0 citácií)

[13] A. Jenčová: On the convex structure of process POVMs, *J. Math. Phys.* **57** (2016), 015207 (0 citácií)

[14] A. Jenčová, M. Plávala: Conditions for optimal input states for discrimination of quantum channels, to appear in J. Math. Phys., 2016, arxiv.org/abs/1603.01437 (1 citácia)

[15] A. Jenčová: Preservation of a quantum Renyi relative entropy implies existence of a recovery map, to appear in J. Phys.A, 2016, arxiv.org/abs/1604.02831 (0 citácií)

[16] A. Jenčová: Rényi relative entropies and noncommutative Lp-spaces, 2016, arxiv.org/abs/1609.08462 (0 citácií)

8 Geometry of families of states: from classical to quantum

The difference between the classical and quantum state spaces is already well understood. While the classical state space is a Choquet simplex, quantum states have a more complicated structure. In the present thesis, we aim at the study of more specific properties of parametrized families of states. In the classical case, these properties are fundamental in theoretical statistics and asymptotic estimation theory, with applications also in other areas. The quantum case is often quite different and the properties have to be reformulated in a nontrivial way to recapture the classical results. The purpose of this work is to gain some understanding of the similarities and differences between the classical and quantum structures.

We find quantum versions of some of the results of two important classical theories, dealing with parametrized families of probability distributions and their structure: information geometry and theory of comparison of statistical experiments. As a tool for some of these tasks, but also as an interesting question in its own right, the convex structure of the set of quantum channels and its role in discrimination problems is investigated. The particular tasks solved in the thesis are the following:

- On the manifold of all positive definite complex matrices, we describe dually flat affine structures with a monotone Riemannian metric.
- On the set of faithful states on a von Neumann algebra, we define a Banach manifold structure which corresponds to the classical Pistone-Sempi construction. We investigate its behaviour with respect to quantum channels.
- We define affine connections on the state space of a von Neumann algebra, obtained by embeddings into noncommutative L_p-spaces. We study their duality and the corresponding canonical divergences.
- We investigate conditions for sufficiency of a quantum channel with respect to a set of states, given in terms of some information-theoretical quantities such as error probabilities of hypothesis testing or quantum Fisher information.
- For binary quantum experiments, we find relations between informativity and 2-informativity, that is, informativity with respect to testing problems.
- We find a fully quantum version of Le Cam's randomization criterion with a clear operational interpretation.
- We study measurements and channels on sections of the state space, their convex structure, the corresponding base norms and their relation to discrimination tasks.

9 Geometrie der Familien der Zustände: vom Klassischen zum Quantum

Der Unterschied zwischen den Zustandsräume von Klassischen und Quanten Systemen ist bereits gut verstanden. Während der klassische Zustandsraum ein Choquet-Simplex ist, haben Quantenzustände eine kompliziertere Struktur. Die vorliegende Dissertation ist dem Untersuchung von spezifischeren Eigenschaften der parametrisierten Familien der Zustände gewitmet. Im klassischen Fall sind diese Eigenschaften in der theoretischen Statistik und der asymptotischen Schätzungstheorie fundamental, mit Anwendungen auch in anderen Bereichen. Der Quantenfall ist oft ganz unterschiedlich und die Eigenschaften müssen in einer nicht-trivialen Weise umformuliert werden, um die klassischen Ergebnisse wiederzuerobern. Der Zweck dieser Arbeit ist es, ein gewisses Verständnis der Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den klassischen und Quantenstrukturen zu gewinnen.

Wir finden Quantenversionen einiger der Ergebnisse zweier wichtiger klassischer Theorien, die sich mit parametrisierten Familien von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihrer Struktur beschäftigen: Informationsgeometrie und Theorie des Vergleichs von statistischen Experimenten. Als ein Instrument für einige dieser Aufgaben, aber auch als eine interessante Frage an sich, wird die konvexe Struktur der Quantenkanäle und ihre Rolle bei Diskriminierungsproblemen untersucht. Die folgende Aufgaben wurden gelöst:

- Wir beschreiben flache dualistische Strukturen mit einer monotonen Riemannschen Metrik auf der Mannigfaltigkeit aller positiv definiten komplexen Matrizen.
- Auf dem Mange von allen treuen Zuständen einer von Neumann-Algebra, wir definieren eine Banach-Mannigfaltigkeitsstruktur die dem Klassischen Konstruktion von Pistone-Sempi entspricht. Wir untersuchen ihr Verhalten unter Quantenkanäle.
- Wir definieren affine Verbindungen auf dem Zustandsraum einer von Neumann-Algebra, die durch Einbettungen in nichtkommutative L_p-Raume erhalten wird. Wir studieren die Dualität und die entsprechenden kanonischen Divergenzen.
- Wir untersuchen die Bedinnungen Suffizienz eines Quantenkanals für eine Familie von Zuständen, die durch informationstheoretische Größen formuliert werden, wie Fehlerwahrscheinlichkeiten des Hypothesentests oder Quantum-Fisher-Informationen.
- Für binäre Quantenexperimente finden wir Beziehungen zwischen Informativität und 2-Informativität.
- Wir iinden eine Volle-Quantum Version von Le Cam's Randomisierung Kriterium mit einer klaren operativen Interpretation.
- Wir studieren Messungen und Kanäle auf Teilmengen des Zustandsraums, ihre konvexe Struktur, die entsprechenden Basisnormen und ihr Verhältnis zu Diskriminierungsaufgaben.