CURSO AVANZADO DE ÁLGEBRA: GRUPOS CUÁNTICOS SEMESTRE 2017/1

CHRISTOF GEISS

Presentación

Grupos cuánticos son una clase de álgebras de Hopf que son obtenidas como deformaciones de la envolvente universal de un álgebra de Lie semisimple, o más generalmente de un álgebra de Kac-Moody simetrizable. Fueron introducidas independientemente por Drinfeld y Jimbo para encontrar soluciones de la ecuación de Yang-Baxter cuantizada. Tienen conexiones importantes por ejemplo con topología de dimensiones bajas, física matemática y teoría de representaciones. Para estas aplicaciones es importante que las repesentaciones de grupos cuánticas son categorías tensoriales con una estructura de trensas o de liston no trivial, ver por ejemplo [2] para una exposición accesible. En este curso nos enfocaremos en la teoría básica de grupos cuánticos de tipo finito y sus representaciones, basado en el libro de texto de J.C. Jantzen [1]. Como prerrequisito sería conveniente tener conocimientos básicos de la teoría de álgebras de Lie semisimples. Más específicamente trataremos los siguientes temas en este curso:

1. La envolvente universal cuantizada $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Definición, clasificación de representaciones de dimensión finita y sus productos tensoriales.

2. La envolvente universal cuantizada de un álgebra de Lie semisimple

Definición de $U_q(\mathfrak{g})$ en términos de la matriz de Cartan y clasificación de sus representaciones de dimensión finita. Como en el caso clásico esto esta basado en el previo estudio del caso $\mathfrak{sl}_2$.

3. Forma bilineal y centro

$U_q(\mathfrak{g})$ tiene una forma bilineal invariante y no degenerada que es en cierto sentido similar a la forma de Killing en el caso clásico. Esto permite adaptar el homomorfismo de Harish-Chandra a nuestra situación, lo cual nos permite a identificar el centro de $U_q(\mathfrak{g})$.

4. R-matrices y el anillo de coordenadas cuantizado

Para dos representaciones M, N de dimensión finita de $U_q(\mathfrak{g})$ los productos tensoriales $M \otimes N$ y $N \otimes M$ son isomorfos de una forma no-trivial. Esta información es codificada en las R-matrices que nos provén de soluciones de la ecuación Yang-Baxter cuántizada. También nos ayudan a entender la cuantización del anillo de coordenadas de un grupo algebraico semisimple.

5. Bases canónicas

Las bases canónicas (del subálgebra $U_q(\mathfrak{n})$ de $U_q(\mathfrak{g})$) fueron descubiertos independientemente por M. Kashiwara [3] y G. Lusztig [4], y tuvieron un impacto profundo en la teoría de representaciones. Entre otras cosas, se obtiene de forma simultanea una basa para todas las representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ y se puede entender productos tensoriales de una forma combinatoria. Seguimos aquí, en lo que el tiempo lo permite, al método más elemental de Kashiwara.

Referencias

[1] Jantzen, Jens Carsten: *Lectures on quantum groups.* Graduate Studies in Mathematics, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. viii+266 pp. ISBN: 0-8218-0478-2

[2] Kassel, Christian: *Quantum groups.* Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer-Verlag, New York, 1995. xii+531 pp. ISBN: 0-387-94370-6

[3] Kashiwara, Masaki: *Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras.* Comm. Math. Phys. 133 (1990), no. 2, 249–260.

[4] Lusztig, G.: *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras.* J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), no. 2, 447–498.

[5] Lusztig, George: *Introduction to quantum groups.* Progress in Mathematics, 110. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993. xii+341 pp. ISBN: 0-8176-3712-5