(I) ¿Qué se hace en este artículo?

(II) ¿Cómo se hace?

(III) ¿Cómo podemos utilizarlo?

¿Qué se hace en este artículo?

Respuesta corta:

Se generalizan resultados/construcciones de la geometría tórica al mundo de las variedades de conglomerado. Esto se aplica para

(1) Probar la conjetura de positividad

(2) Estudiar la conjetura de Fock-Goncharov.

(falsa en general pero cierta en varios casos)

(3) Construcción de superpotenciales de LG. y compactificaciones (modelos minimales) para las variedades de conglomerado.

Sea Γ un conjunto de datos fijos

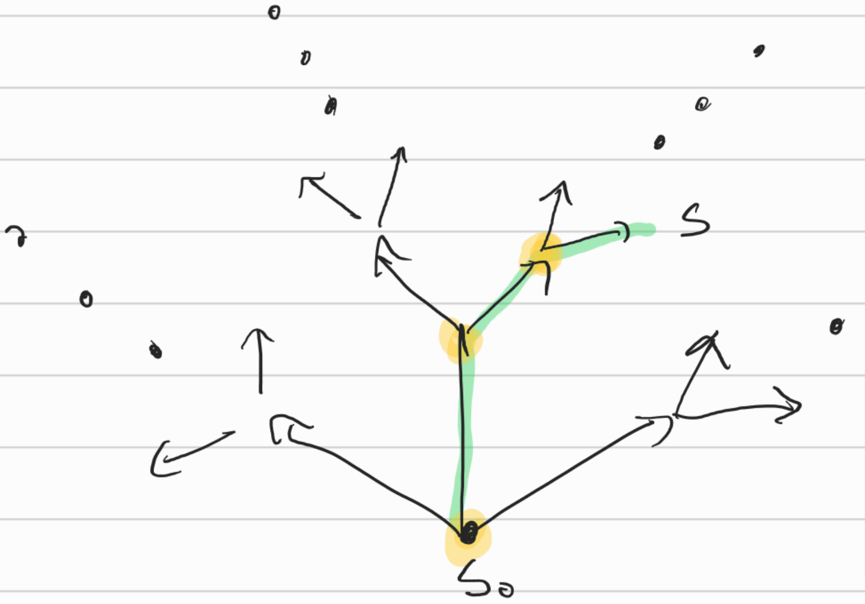
- $I_{uf} \subseteq I$ conjunto de índices $|I| = n$
- $N \simeq \mathbb{Z}^{|I|}$ con $N^\circ \subseteq N$.
- $\{ \, , \, \} : N \times N \longrightarrow \mathbb{Q}$ bilineal antisimétrica
- $(d_1, \dots, d_n)$ enteros co-primos.

Sea $s_0 = (e_1, \dots, e_n)$ una semilla inicial.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}_{\Gamma, s_0} = \bigcup\limits_{s_0 \rightsquigarrow s} T_{N^\circ, s} \\
\Gamma, s_0 \arrow[ur, bend left] \arrow[dr, bend right] & \\
 & \mathcal{X}_{\Gamma, s_0} = \bigcup\limits_{s_0 \rightsquigarrow s} T_{M, s}
\end{tikzcd}
$$

Dónde

- $T_{N^\circ, s}$ es una copia de T_{N°
- $T_{M, s}$ es una copia de T_M
- $s_0 \rightsquigarrow s$ quiere decir $s = \mu_{i_r} \circ \cdots \circ \mu_{i_1}(s_0)$
  con $r \geq 0$ y $i_j \neq i_{j+1}$
- Los toros se pegan mediante mutacciones



Árbol n-regular

$A_{i,s} \longmapsto \bigcirc$

$$\mu^{*}_{s_0,s} : \mathbb{C}(T_s) \to \mathbb{C}(T_{s_0})$$

$$\boxed{\mu_{s_0,s} : T_{s_0} \dashrightarrow T_s}$$

* Cada copia de T_{N^o} y T_M está dotada de un conjunto distinguido de caracteres (= monomios de Laurent).

Explicación:

$$\mathbb{C}[T_L] = \mathbb{C}[L^*] = \langle \overbrace{z^{l} \mid l \in L^*}^{\text{base como } \mathbb{C}\text{-espacio vectorial.}} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \langle \underbrace{z^{\pm b_1}, \ldots\ldots, z^{\pm b_n}}_{\text{conjunto generador como álgebra si } \{b_1,\ldots,b_n\} \text{ es base de } L^*} \rangle_{alg}$$

Tenemos una base inicial

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ para N

$\rightsquigarrow \{z^{e_1}, \ldots, z^{e_n}\} \subseteq \mathbb{C}[N] = \mathbb{C}[T_M]$

Tenemos una base inicial

$\{f_1, \ldots, f_n\}$ para M° $(f_i = d_i^{-1} e_i^*)$

$\rightsquigarrow \{z^{f_1}, \ldots, z^{f_n}\} \subseteq \mathbb{C}[M^\circ] = \mathbb{C}[T_{N^\circ}]$

Tenemos una regla de mutación de bases para N y M° Listo ✓

<u>Notación</u> Para $i \in I$ $s_0 \rightsquigarrow s$

Caracteres asociados a los toros iniciales

$$A_i := z^{f_i} \quad \text{y} \quad X_i = z^{e_i}$$

Caracteres asociados a los otros toros.

$$A_{i,s} = z^{f_{i,s}} \quad \text{y} \quad X_{i,s} = z^{e_{i,s}}$$

Definición

El conjunto de $\mathcal{A}$-variables de conglomerado es

$$\{ \mu^{*}_{s_0,s}(A_{i,s}) \in \mathbb{C}(A_1,\dots,A_n) \mid i \in I \ s_0 \rightsquigarrow s \}$$

El conjunto de $\mathcal{X}$-variables de conglomerado es

$$\{ \mu^{*}_{s_0,s}(X_{i,s}) \in \mathbb{C}(X_1,\dots,X_n) \mid i \in I \ s_0 \rightsquigarrow s \}$$

Teorema (Fenómeno de Laurent 01')

$$\mu^{*}_{s_0,s}(A_{i,s}) \in \mathbb{Z}[A_1^{\pm 1},\dots,A_n^{\pm}] \quad \forall i \ \forall s.$$

Corolario

$\mu^{*}_{s_0,s}(A_{i,s})$ es una función regular en $\mathcal{A}$.

Conjetura de positividad.

$$\mu^{*}_{s_0,s}(A_{i,s}) \in \mathbb{N}[A_1^{\pm 1},\dots,A_n^{\pm 1}]$$

conglomerado

Nota: En general las $\mathcal{X}$-variables de **no** son polinomios de Laurent en $X_1,\dots,X_n$

La conjetura de Fock-Goncharov.

En geometría tórica tenemos lo siguiente:

$$\boxed{L \text{ parametriza una base de } \mathbb{C}[T_{L^*}]}$$

Versión high tech:

T_L tiene una base canónica de funciones globales parametrizada por los puntos tropicales enteros del toro dual T_{L^*}.

La conjetura de FG es el enunciado análogo para variedades de conglomerado.

¿Cuál es el dual de una variedad de conglomerado y cuál es su tropicalización?

Obs: $\mathcal{A}_\Gamma$ no es el dual de $\mathcal{X}_\Gamma$.

El caso tórico se obtiene haciendo $I_{uf} = \emptyset$

en este caso $\mathcal{A}_\Gamma = T_{N^\circ}$, $\mathcal{X}_\Gamma = T_M$

pero T_{N° y T_M no son toros duales.

Dado un par (Γ, s_0) se define el dual de Langlands $(\Gamma^\vee, s_0^\vee)$ haciendo los

Γ	$\Gamma^\vee$
N	N^0
N^0	$D\cdot N$
$\{\cdot,\cdot\}$	$D^{-1}\{\cdot,\cdot\}$
$\vdots$	$\vdots$
s_0	$s_0^\vee = (d_i^{-1} e_i \mid i \in I)$

$D = \mathrm{mcm}(d_1, \dots, d_n)$

$\Gamma_{+s_0} = B \qquad -B^T$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{\Gamma^\vee, s_0^\vee} = \cup T_N \qquad \mathcal{X}_{\Gamma^\vee, s_0^\vee} = \cup T_{M^0}$$

$$\mathcal{A}_{\Gamma, s_0} = \cup T_{N^0} \qquad \mathcal{X}_{\Gamma^\vee, s_0^\vee} = \cup T_M$$

Def

El dual de $\mathcal{A}_\Gamma$ es $\mathcal{X}_{\Gamma^\vee}$ y el dual de $\mathcal{X}_\Gamma$ es $\mathcal{A}_{\Gamma^\vee}$.

Hay 2 maneras (equivalentes) de definir los puntos enteros tropicales de una variedad de conglomerado

1. Usando su estructura de esquema positivo. (à la Fock-Goncharov)

2. Usando su estructura de variedad log-Calabi-Yau (à la Gross-Siebert).

Esbozo:

$$\frac{A_1 + 2A_1A_2^3}{A_3 + A_1^4}$$

El semicampo asociado a T_2 es

$$\mathbb{Q}_{sf}(T_2) = \frac{\mathbb{N}[z^\ell \mid \ell \in L^*]}{\mathbb{N}[z^\ell \mid \ell \in L^*]} \subseteq \mathbb{C}(T_2)$$

si $\mathbb{P}$ es un semicampo entonces

$$T_2(\mathbb{P}) = \mathrm{Hom}_{sf}(\mathbb{Q}_{sf}(T_2), \mathbb{P})$$

generaliza el funtor de puntos en geo algebraica.

$$\mathbb{P} = \begin{cases} \mathbb{Z}^T = (\mathbb{Z}, \max, +) \\ \mathbb{Z}^t = (\mathbb{Z}, \min, +) \end{cases}$$

no tienen estructura lineal

$$T_L(\mathbb{Z}^T) \overset{1}{\equiv} L \overset{2}{\equiv} T_L(\mathbb{Z}^t)$$

↳ como conjunto

Si $f: T_2 \dashrightarrow T_L$ es una función birracional positiva (f^* induce un isomorfismo de $Q_{sf}(T_2)$) entonces

$f^{trop}(\mathbb{P}): T_L(\mathbb{P}) \longrightarrow T_L(\mathbb{P})$ es iso.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{\Gamma, s^0}(\mathbb{P}) \overset{s^0}{\equiv} N^\circ \otimes \mathbb{P}$ $\quad$ $\mathcal{X}_{\Gamma, s^0}(\mathbb{P}) \overset{s^0}{\equiv} M \otimes \mathbb{P}$

pues las mutaciones son positivas.

$$T_L(\mathbb{P}) \equiv L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^\times$$

$\mathbb{P}^\times$ es el grupo abeliano subyacente

Nota La tropicalización (2) es la tropicalización geométrica y se tiene que pensar como cierto conjunto de valuaciones divisoriales discretas.

Regresaremos a esto al final.

Conjetura (baby FG)

Si $\mathcal{V}$ es una variedad de conglomerados y $\mathcal{V}^\vee$ es su dual. Entonces la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones regulares $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$ tiene una base canónica parametrizada por los puntos tropicales enteros de $\mathcal{V}^\vee$.

Nota • En la conjetura original se describe a la base como el conjunto de "polinomios de Laurent universales positivos extremales" (falsa en general)

• GHK dan contraejemplos para $\mathcal{V} = \mathcal{X}$.

Filosofía: en general $\mathcal{X}$ tiene pocas funciones globales.

El enfoque de GHKK

Punto de partida: La conjetura de FG es un enunciado de simetría especular (mirror symmetry).

$\exists$ varias versiones del fenómeno de simetría especular, todas relacionadas entre sí:

1. Para variedades Calabi-Yau
2. Para variedades Fano
3. Para variedades log-Calabi-Yau

Vagamente:

Si X es una variedad (log)-CY $\rightarrow$ $\exists$ una variedad espejo $\tilde{X}$ tal que la geometría algebraica de X es equivalente a la geometría simpléctica de $\tilde{X}$ y viceversa.

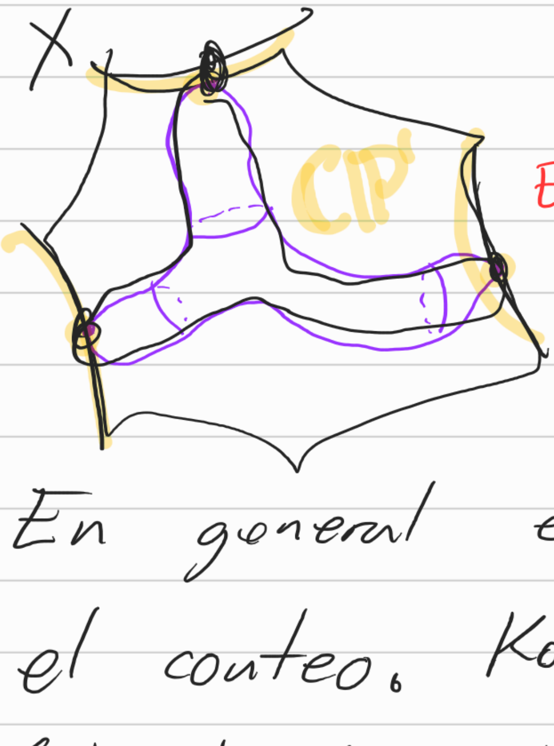
Para construir $\tilde{X}$ a partir de X se necesita podar contar ciertas curvas en X.

<u>Conjetura</u> (Gross-Siebert)

Si X es log-Calabi-Yau afín con frontera maximal $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ es log-Calabi-Yau afín.

En particular, debería existir un álgebra fin. generada R tal que

$$\tilde{X} = \mathrm{Spec}(R).$$



El conteo está relacionado con ciertos invariantes de Gromov-Witten.

En general es muy difícil realizar el conteo. Kontsevich-Soibelman y Gross-Sibert desarrollan el formalismo de los diagramas de dispersión (a.k.a. estructuras de Wall-crossing) como la versión tropical/combinatoria para realizar este conteo.

¿Cómo se relaciona con las variedades de conglomerado y la conjetura de FG?

Las variedades de conglomerado son variedades log-Calabi-Yau. $(\mathbb{C}^*)^n_{z_1,\dots,z_n} = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$

Razón: Tienen una forma de volumen sin ceros ni polos que se obtiene pegando la forma de volumen estandard de cada toro en su atlas.

Meta: Para cada variedad de conglomerado V construir un álgebra canónica $\mathrm{can}(V)$ utilizando el programa de simetría especular.

Nota La relación geométrica precisa entre la simetría especular y las variedades de conglomerado se obtuvo por Keel-Yu en 2019 en un artículo muy largo.

El álgebra canónica

Objetivo: Construir can(V)

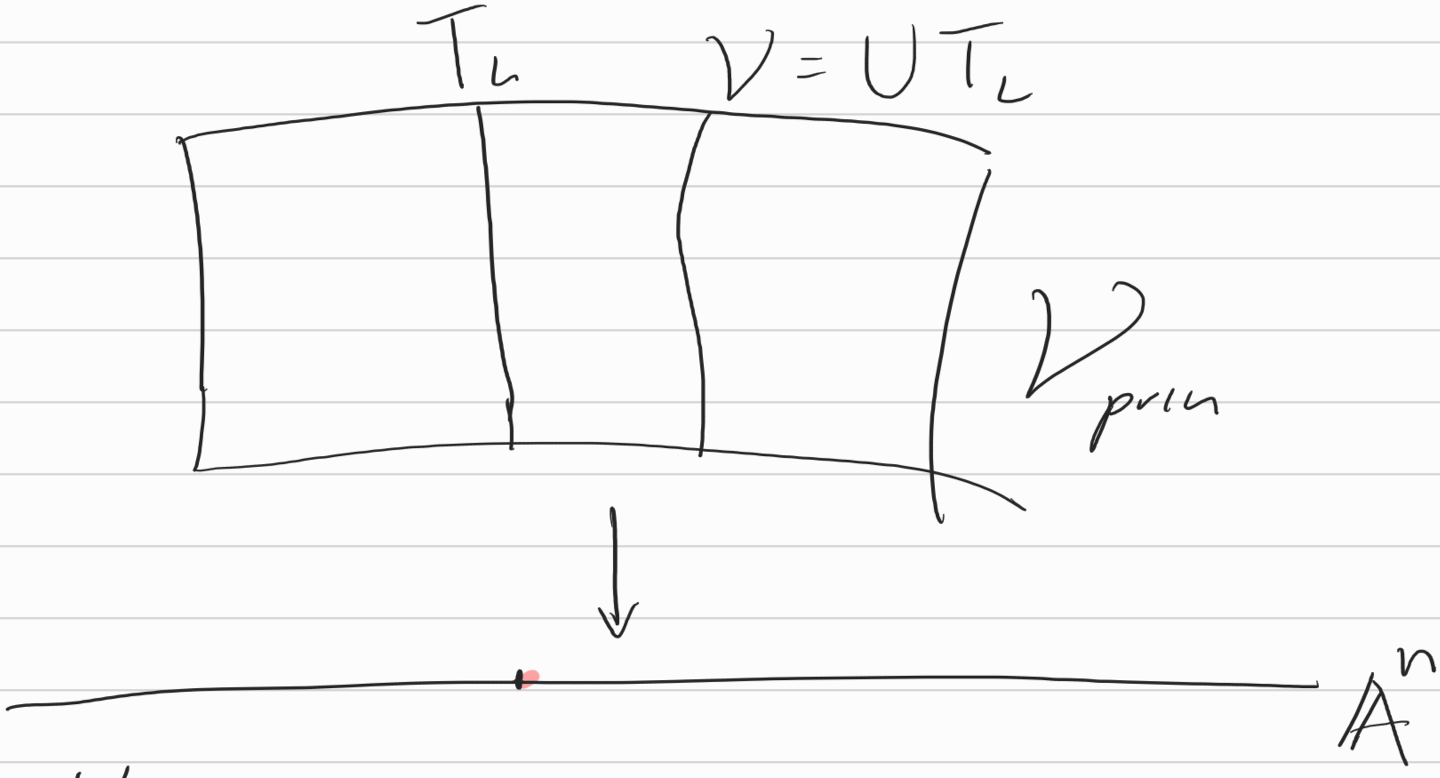
¿Cómo? Construir una base y describir como se expresa un producto de dos elementos de la base como combinación lineal de elementos de la base

- Si $V = T_L$ entonces

$$\mathrm{can}(T_L) = \mathbb{C}[L^*] = \bigoplus_{l \in L^*} \mathbb{C} \cdot \chi^l$$

$$\chi^l \cdot \chi^{l'} = \chi^{l+l'}$$

Idea: Degenerar V a un toro y transportar el caso tórico a V.



Problema

La teoría de deformación nos dice que esto solo es posible en una vecindad de la fibra tórica.

GHKK: Enuncian y demuestran la conjetura de Fock-Goncharov formal (Sección 6).

$\Rightarrow$ En general can(V) "no existe".

pero uno puede intentar construir el álgebra más grande que se parece a can(V). Esta se llama mid(V).

Se tiene que

$$\mathrm{ord}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{mid}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathrm{up}(\mathcal{V}) =: \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$$

álgebra de conglomerado

$\mathrm{mid}(\mathcal{V})$ está generado por las funciones theta.

Sketch de la construcción

Tomamos $\mathcal{X}_{\Gamma} = \mathcal{V}^{\vee}$

1. Elección de s_0 da una identificación de $\mathcal{X}_{\Gamma}(\mathbb{Z}^{T}) \equiv M^{\circ}$.

2. Se construye un diagrama de dispersión en M°.

3. $\mathrm{mid}(\mathcal{V})$ se obtiene realizando a nivel tropical los conteos de las curvas en $\mathcal{V}^{\vee} = \mathcal{X}_{\Gamma}$.

A nivel tropical estas curvas son llamadas líneas quebradas (broken lines).

Resumen

1. Diagramas de dispersión
2. Tropicalización
3. Líneas quebradas y funciones theta

curvas que uno quiere contar

4. Los monomios de conglomerado son funciones theta ($\mathrm{ord}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{mid}(\mathcal{A})$)

<u>corolario</u> Teorema de positividad.

5. Comportamiento de las funciones theta en la degeneración tórica principal.
6. Conjetura de FG-formal
7. $\mathrm{mid}(\mathcal{A})$
8. Condiciones para que la conjetura de FG sea cierta

(8) y (9) Generalización de la construcción de una variedad tórica por medio de un politopo.
+ bases de funciones globales para una compactificación parcial de una variedad de conglomerado.

(9) Construcción de superpotenciales de Landau-Ginzburg

(10) Interpretación desde la teoría de representaciones de carcajos.

Motivación para 9

Uno puede estar más interesado en una compactificación parcial de $\mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{V}}$

Ejemplo.

$\mathcal{V} \subseteq Gr_k(\mathbb{C}^n)$ $\quad \mathcal{V} \subset G \quad \mathcal{V} \subset G/N$

con G un grupo semisimple.

¿Se puede obtener una base de funciones globales de $\overline{\mathcal{V}}$ partir de una de $\mathcal{V}$?

Caso tórico: Si $T_L \subseteq T_\sigma$ donde σ es un cono $\Rightarrow$ las

$$\mathbb{C}[T_\sigma] = \bigoplus_{l \in \sigma^\vee \cap L^*} \mathbb{C} \cdot x^l$$

En 9 Dan condiciones para que el resultado análogo sea cierto para variedades de conglomerado. Más aún en varios casos se parametrizan bases de $\Gamma(\overline{\mathcal{V}}, \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{V}}})$ con los puntos enteros de un cono:

Idea:

En geometría tórica.

$m \in M$ define una función global

$$\chi^m : T_N \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

Pero a su vez define una compactificación parcial

$$T_M \subseteq T_\sigma \qquad \text{dónde } \sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} m$$

Más generalmente

$W = \sum \chi^m : T_N \longrightarrow \mathbb{C}^*$ define compactificación parcial $T_M \subseteq T_W$

La interpretación geométrica de la tropicalización (vía valuaciones divisoriales discretas) permite generalizar esto a las variedades de conglomerado-

Si $\mathcal{V}$ es una variedad de conglomerado

$\mathcal{V} \subseteq Y$ compactificación parcial buena
(modelo minimal parcial)

$\Longrightarrow$ uno puede esperar que

$\sum_{p \in \partial Y} \vartheta_p = W_{\vartheta} : \mathcal{V}^{\vee} \longrightarrow \mathbb{C}$ generaliza

el caso tórico.

$W_{\vartheta}^{Trop} : \mathcal{V}^{\vee}(\mathbb{Z}^T) \longrightarrow \mathbb{Z}$

En familias de casos buenos

$\Xi = \{ x \in \mathcal{V}^{\vee}(\mathbb{Z}^T) \mid W_{\vartheta}^{Trop}(x) \geq 0 \}$

parametriza una base de

$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$

Ejemplos

- GHKK tratan el caso SL_{n+1}/N

W_ϑ existe y es igual al superpotencial de Borenstein-Kazhdan

- Magee estudia los casos $A \subset SL_n/U$ y $\mathrm{Conf}_3^\times(\widetilde{\mathcal{F}\ell})$

espacio de configuración de ternas de banderas en posicion genl.

en este caso Ξ es el cono de Knutson-Tao para semillas s_0 bien escogidas

- Bossinger-Cheung-Magee-N.C. (en progeso) probamos que W_ϑ coincide con el potencial de Marsh-Rietsch para la Grassmanniana.

$Q: 1 \to 2 \qquad \dim A_Q = 2$

$\Rightarrow A_Q(\mathbb{Z}^T) = \mathbb{Z}^2$

$\subseteq A_Q(\mathbb{R}^T) = \mathbb{R}^2$