§9 Funciones theta para compactificaciones y el superpotencial

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

30 de marzo 2022

Ejemplo

Sea $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) := \{\{0\} \subset V \subset \mathbb{C}^n : \dim V = k\}$ la *Grassmanniana* con su encaje de Plücker

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \quad V \mapsto [p_J(M_V)]_J$$

donde M_V es una $k \times n$ matriz cuyas columnas forman una base de V y las *coordenadas de Plücker* $\{p_J : J \in \binom{[n]}{k}\}$ actúan tomando determinates de submatrices cuadradas.

Satisfaces las *relaciones de Plücker*, por ejemplo para $I \in \binom{[n]}{k-2}$ y $i, j, k, l \notin I$ tenemos

$$p_{Iij}p_{Ikl} - p_{Iik}p_{Ijl} + p_{Iil}p_{Ijk}.$$

Sea $\widetilde{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)}$ el cono afín de $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ menos el origen y $A_{k,n}$ el anillo de coordenadas homogéneas = el anillo de funciones en $\widetilde{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)}$.

Ejemplo

Definimos el carcaj, donde $i \times j$ corresponde a $p_{[1,k-j]\cup[k-j+i+1,k+i]} = z^{f_{i\times j}}$

$$
\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[dr] & & & & \\
& 1\times 1 \arrow[r]\arrow[d] & 1\times 2 \arrow[r]\arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 1\times k \\
& 2\times 1 \arrow[r]\arrow[d] & 2\times 2 \arrow[r]\arrow[d]\arrow[ul] & \cdots \arrow[r]\arrow[ul] & 2\times k \arrow[ul] \\
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d]\arrow[ul] & \vdots \arrow[ul] & \vdots \arrow[ul] \\
& (n-k)\times 1 & (n-k)\times 2 \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] & (n-k)\times k \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Mutación en vertices 4-valentes $\leftrightarrow$ relaciones de Plücker, e.g.

$$
\begin{aligned}
\mu^*_{1\times 1}(z^{f_{1\times 1}}) &= \frac{z^{f_{1\times 2}} z^{f_{2\times 1}} + z^{f_{\varnothing}} z^{f_{2\times 2}}}{z^{f_{1\times 1}}} \\
&= \frac{p_{[1,k-2]\cup[k,k+1]} p_{[1,k-2]\cup[k+1,k+2]} + p_{[1,k-1]\cup\{k+1\}} p_{[1,k]}}{p_{[1,k-1]\cup\{k+1\}}} = p_{[1,k-2]\cup\{k,k+2\}}.
\end{aligned}
$$

Sean $\Gamma_{k,n}$ los datos fijos asociados y $\mathcal{A}_{k,n} = \mathcal{A}_{\Gamma_{k,n}}$.

Ejemplo

Teorema (Scott, 2006)

El álgebra de conglomerado (ordinario) asociado a $\Gamma_{k,n}$ coincide con $A_{k,n}$. Por lo tanto, (salvo algo en codimensión 2) tenemos

$$\mathcal{A}_{k,n} \cong \widetilde{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)} \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_n)$$

donde $D_i = \{p_{[i+1,i+k]} = 0\} \subset \widetilde{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)}$ es el divisor obtenido de dejar que la coordenada congelada $p_{[i+1,i+n]}$ sea cero.

Objetivo

Muchas veces, como en el ejemplo, la variedad que nos interesa es una compactificación parcial de una variedad de conglomerado.

Pregunta: Sea R el anillo de funciones en una compactificación parcial de una variedad de conglomerado. ¿Tiene R una base de funciones theta?

1. El caso tórico
2. La reciprocidad de las funciones theta
3. El superpotencial de una compactificación

Variedades tóricas

$T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ tiene base de funciones indexadas por M.

Podemos compactificar $T_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$ a $\mathbb{A}^n$ dejando que las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ sean cero, lo cual corresponde a la variedad tóricas asociada al cono

$$\sigma := \sum_i \mathbb{R}_{\geq 0} e_i, \quad \{e_i : i \in I\} \text{ base de } N.$$

Es decir, agregamos divisores $D_i := \{x_i = z^{f_i} = 0\}$ a T_N. Las funciones en $\mathbb{A}^n$ son las funciones de T_N cuyo orden de anularse en D_i es ≥ 0:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathbb{A}^n] &= \{f \in \mathbb{C}[T_N] : \mathrm{ord}_{D_i}(f) \geq 0 \forall i\} \\ &= \{f = \sum c_m z^m \in \mathbb{C}[M] : \langle m, e_i \rangle \geq 0 \forall i\} = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \end{aligned}$$

son las funciones regulares en T_N que siguen regular en $\mathbb{A}^n$.

Notación

Consideramos

- una variedad de conglomerado $\mathcal{V}$ (de tipo $\mathcal{A}$ o $\mathcal{X}$),
- una compactificación parcial $\mathcal{V} \subset Y$ con frontera $D_1, \ldots, D_s$
- los conjunto $\Theta(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}^\vee(\mathbb{Z}^T)$ y $\Theta(\mathcal{V}^\vee) \subset \mathcal{V}(\mathbb{Z}^T)$
- el mapeo $i : \mathcal{V}(\mathbb{Z}^t) \to \mathcal{V}(\mathbb{Z}^T)$ que cambia el signo
- recuerda $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^t)$ coincide con el conjunto de valuaciones de forma $\mathrm{ord}_D : k(\mathcal{V}) \to \mathbb{Z}$.
- dada una semilla s escribimos $\mathcal{V}_s(\mathbb{Z}^T) = L$ para la identificación de $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^T)$ con L determinada por s

Pregunta: ¿Cuáles funciones regulares (theta) en $\mathcal{V}$ siguen regular en Y?

La reciprocidad de theta

Tenemos dos emparejamientos tropicales:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Theta(\mathcal{V}^\vee) \times \Theta(\mathcal{V}) \to \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle^\vee : \Theta(\mathcal{V}^\vee) \times \Theta(\mathcal{V}) \to \mathbb{Z}$$

definidos por

$$\langle a, b \rangle = i^{-1}(a)(\vartheta_b^{\mathcal{V}}) \quad \text{y} \quad \langle a, b \rangle^\vee = i^{-1}(b)(\vartheta_a^{\mathcal{V}^\vee}),$$

donde los elementos de $i^{-1}(\Theta(\mathcal{V}^\vee)) \subset \mathcal{V}(\mathbb{Z}^t)$ se consideran como valuaciones.

Definición

Decimos que $\mathcal{V}$ satisface la reciprocidad de theta si $\Theta(\mathcal{V}^\vee) = \mathcal{V}(\mathbb{Z}^T)$ y $\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle^\vee$ para todos $(a, b) \in \mathcal{V}(\mathbb{Z}^T) \times \Theta(\mathcal{V})$.

¿Porqué es útil?

Sea ord_{D_j} la valuación en $\mathbb{C}(\mathcal{V}) \setminus \{0\}$ asociada a $D_j \Rightarrow \mathrm{ord}_{D_j} \in \mathcal{V}(\mathbb{Z}^t)$.
Si $\Theta(\mathcal{V}^\vee) = \mathcal{V}(\mathbb{Z}^T)$ entonces $i(\mathrm{ord}_{D_j}) \in \Theta(\mathcal{V}^\vee)$ da una función theta polinomial $\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{i(\mathrm{ord}_{D_j})} \in \mathrm{mid}(\mathcal{V}^\vee)$ cuya tropicalización es

$$(\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{i(\mathrm{ord}_{D_j})})^t : \mathcal{V}^\vee(\mathbb{Z}^t) \to \mathbb{Z} \quad \text{donde} \quad v \mapsto v(\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{i(\mathrm{ord}_{D_j})}) = \langle i(\mathrm{ord}_{D_j}), i(v) \rangle.$$

Si $\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle^\vee$ para todas a y b eso implica

$$\begin{aligned} (\vartheta^{\mathcal{V}}_{i(v)})^t(\mathrm{ord}_{D_j}) &= \mathrm{ord}_{D_j}(\vartheta^{\mathcal{V}}_{i(v)}) = \langle i(\mathrm{ord}_{D_j}), i(v) \rangle^\vee \\ &= \langle i(\mathrm{ord}_{D_j}), i(v) \rangle = v(\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{i(\mathrm{ord}_{D_j})}) = (\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{i(\mathrm{ord}_{D_j})})^t(v) \end{aligned}$$

Entonces, $\vartheta^{\mathcal{V}}_{i(v)} \in \mathrm{mid}(\mathcal{V})$ es regular en D_j si y solo si $0 \leq (\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{i(\mathrm{ord}_{D_j})})^t(v)$ que determina un conjunto poliedral en $\mathcal{V}^\vee_s(\mathbb{R}^t)$ y en $\mathcal{V}^\vee_s(\mathbb{R}^T)$.

El superpotencial

Supongamos $\mathcal{V}$ satisface la reciprocidad de theta y definimos el *superpotential* asociado a $\mathcal{V} \subset Y$:

$$W_Y := \sum_{j=1}^{n} \vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{i(\mathrm{ord}_{D_j})}.$$

Supongamos que $W_Y^T(v) \geq 0$ implica $\mathrm{ord}_{D_j}(\vartheta^{\mathcal{V}}_{i(v)}) \geq 0$ para todas j. En este caso las funciones theta de $\mathcal{V}$ que son funciones regulares en Y corresponden a los puntos enteros de

$$\Xi_Y := \{q \in \mathcal{V}^\vee(\mathbb{R}^T) \mid W_Y^T(q) \geq 0\}.$$

Definición

Decimos que $\mathcal{V} \subset Y$ tiene suficientes funciones theta si $\Theta(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^\vee(\mathbb{Z}^T)$ y las funciones theta de $\mathcal{V}$ parametrizado por $\Xi_Y(\mathbb{Z})$ son una base de $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Una condición combinatoria

Definición

La semilla $s = (e_i : i \in I)$ *es* *optimizada* *para* $n \in \mathcal{A}(\mathbb{Z}^t)$ *si* $n \in \mathcal{A}_s(\mathbb{Z}^t) = N^\circ$ *satisface* $\{e_k, n\} \geq 0$ *para todas* $k \in I_{\mathrm{mut}}$.

Lema

- *[GHKK, Lema 9.3(i)] Si* s *es optimizada para* $n \in \mathcal{X}^\vee(\mathbb{Z}^T) \overset{s}{\cong} d \cdot N$ *entonces*
$$\vartheta_n^{\mathcal{X}}|_{T_{M;s} \subset \mathcal{X}} = z^{i(n)}.$$
- *Supongamos que* $\mathcal{A}$ *satisface la conjetura Fock–Goncharov full y sea* $\mathcal{A} \subset Y$ *una compactificación parcial con* $D_1, \ldots, D_r$ *los divisores irreducibles divisores de la frontera. Si* $p_2^*|_{N^\circ} : N^\circ \to N_{\mathrm{mut}}^*$ *es sobreyectiva y cada* $\mathrm{ord}_{D_j} \in \mathcal{A}^\vee(\mathbb{Z}^t)$ *tiene una semilla optimizada entonces,* $\mathcal{A} \subset Y$ *tiene suficientes funciones theta.*

Ejemplo

Recuerda $\mathcal{A}_{k,n} \subset \widetilde{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)}$ con los divisores $\{z^{f_{i\times k}} = 0\}$ y $\{z^{f_{(n-k)\times j}} = 0\}$ para $1 \leq i \leq n-k$ y $1 \leq j \leq k$. Nota la semilla inicial s es optimizada para $e_{i\times k}$ si

$$\{e_{p\times q}, e_{i\times k}\} \geq 0 \ \ \forall p, q \quad \Leftrightarrow \quad \nexists \text{ flechas } e_{p\times q} \to e_{i\times k}$$

En particular, la semilla inicial es optimizada para $\varnothing$ y $(n-k)\times k$

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[dr] & & & & \\
& 1\times 1 \arrow[r] \arrow[d] & 1\times 2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 1\times k \\
& 2\times 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2\times 2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul] & \cdots \arrow[r] \arrow[ul] & 2\times k \arrow[ul] \\
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \arrow[ul] & \vdots \arrow[ul] & \vdots \arrow[ul] \\
& (n-k)\times 1 & (n-k)\times 2 \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] & (n-k)\times k \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \vartheta_{\varnothing}|_{T_{M;s}} = z^{-e_{\varnothing}}$ y $\vartheta_{\varnothing}|_{T_{M;s}} = z^{-e_{(n-k)\times k}}$

Ejemplo

Para los demás vértices congelados existen secuencias de mutaciones así a un carcaj donde el vértice es una fuente. Usando los pull-backs calculamos

$$\begin{aligned}\vartheta_{i\times k}|_{T_{M;s}} &= z^{-e_{i\times k}}(1+z^{-e_{i\times(k-1)}}(1+\dots z^{e_{i\times 2}}(1+z^{e_{i\times 1}})\dots))\\ \vartheta_{(n-k)\times j}|_{T_{M;s}} &= z^{-e_{(n-k)\times j}}(1+z^{-e_{(n-k-1)\times j}}(1+\dots z^{e_{2\times j}}(1+z^{e_{1\times j}})\dots))\end{aligned}$$

El superpotencial es $W=\sum_{i=1}^{n-k}\vartheta_{i\times k}+\sum_{j=1}^{k}\vartheta_{(n-k)\times j}+\vartheta_{\varnothing}$

Teorema

La tropicalización del superpotencial W con respecto a la semilla s define el cono $\Xi_s=\{m\in M_{\mathbb{R}}: W^T|_{T_{M;s}}(m)\geq 0\}$ que coincide con el cono de Gelfan–Tsetlin (bajo isomorfismo de latices).

Referencias para variedades con estructura de conglomerado

1. Berenstein, Arkady; Fomin, Sergey; Zelevinsky, Andrei. Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells. Duke Math. J. 126 (2005), no. 1, 1–52.
2. Scott, Joshua S. Grassmannians and cluster algebras. Proc. London Math. Soc. (3) 92 (2006), no. 2, 345–380.
3. Geiss, Christof; Leclerc, Bernard; Schröer, Jan. Partial flag varieties and preprojective algebras. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008), no. 3, 825–876.
4. Shen, Linhui; Weng, Daping. Cluster structures on double Bott-Samelson cells. Forum Math. Sigma 9 (2021), Paper No. e66, 89 pp.
5. Leclerc, B. Cluster structures on strata of flag varieties. Adv. Math. 300 (2016), 190–228.
6. Serhiyenko, K.; Sherman-Bennett, M.; Williams, L. Cluster structures in Schubert varieties in the Grassmannian. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 119 (2019), no. 6, 1694–1744.