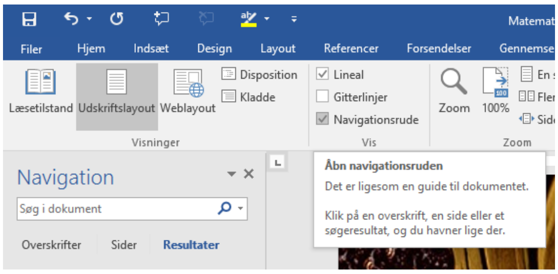
MATEMATIKBANKEN

FORMELSAMLING

| FP9 | FP10 | Noget ekstra | Hjælpeark | Guldark |

Vejledning til brug af formelsamlingen



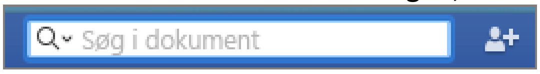
Denne formelsamling er større end normale formelsamlinger. Det betyder også, at det er noget sværere at finde rundt.

Søgning i formelsamlingen

Windows:
I Windows kan man trykke Ctrl + b eller trykke "Vis" og sætte flueben ved "Navigationsrude", så der kommer en navigationsrude op.

Her er det nu nemt at søge på det, som man gerne vil finde frem til.

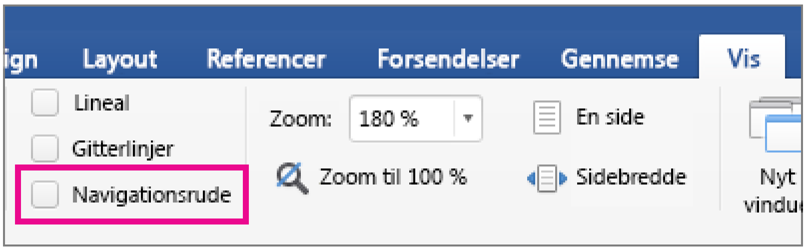
Mac:
På Mac skriv ordet eller sætningen, du vil finde, i søgefeltet i øverste højre hjørne af dokumentet.



Indtast tekst til at søge i dokumentet.

Word fremhæver alle forekomster af ordet eller sætningen i hele dokumentet.

Eller Klik på "Vis" → "Navigationsrude".



Ellers er der en indholdsfortegnelse der er opbygget efter vores 8 forløb.

1. Geometri
2. Tal og Algebra
3. Førstegradsfunktioner
4. P.E.T: Pythagoras, ensvinklede trekanter og trigonometri
5. Statistik
6. Økonomi
7. Kombinatorik og sandsynlighed
8. Andre funktioner

Derudover er der en hel del mere.

Alle overskrifter i indholdsfortegnelsen kan man trykke på. Derefter hopper man videre ned til emnet. (Laver man selv rettelser i formelsamlingen, skal man huske at opdatere indholdsfortegnelsen).

Har du forslag til tilføjelse eller rettelser, er du velkommen til at sende en mail
info@matematikbanken.dk

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

OVERSIGT OVER EMNER

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Indhold

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Geometri

Længde

Længde er endimensional og består af en række tætsiddende punkter, som ikke har nogen højde eller bredde. Længden kan måles i forskellige enheder.

Linje

Uendelig lang længde.

Linjestykke

En længde mellem 2 punkter.

Parallelle linjer

Linjer med samme hældning som derfor aldrig krydser hinanden.

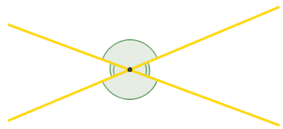
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Vinkler

Topvinkel

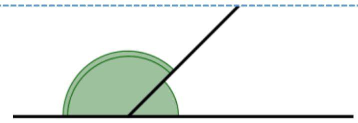
To rette linjer, der krydser hinanden, danner to topvinkler. Topvinkler er parvis lige store.

De 2 parvise topvinkler, giver tilsammen altid 360°



Nabovinkler

To vinkler, der har et "ben" til fælles og summen af dens vinkler er 180°. Dem kalder vi nabovinkler

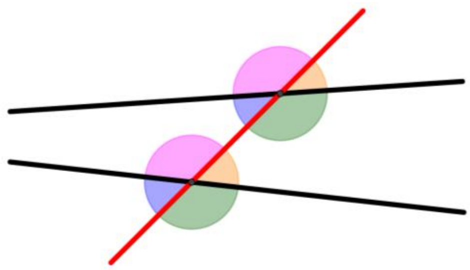


Lige vinkel

En vinkel som er netop 180°
Der kan aldrig være en lige vinkel i en trekant

Ensliggende vinkler

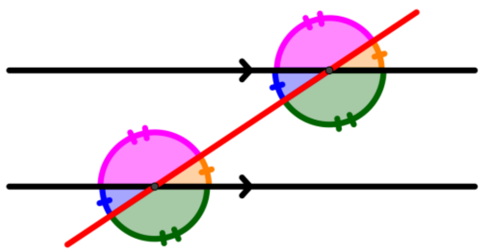
Når en linje (vist med rød) skærer to andre linjer (vist med sort), så vil der opstå 4 vinkelpar, som er ensliggende. I eksemplet til højre er de ensliggende vinkler markeret med samme farve.



To vinkler er ensliggende, når den røde skærende linje udgør:

- enten det venstre vinkelben i begge vinkler og det højre ben udgøres af hver sin sorte linje.
- eller det højre vinkelben i begge vinkler og det venstre ben udgøres af hver sin sorte linje.

(Ofte vil man derudover sige, at de to vinkler, skal være på samme side af den røde skærende linje. Så det har vi valgt her i vores eksempel, men det kan diskuteres)



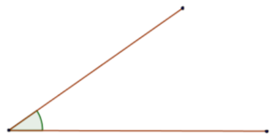
Hvis bare et ensliggende vinkelpar har samme størrelse, så vil de to sorte linjer være parallelle.

Hvis de to sorte linjer er parallelle, så vil de ensliggende vinkler have samme størrelse.

Kongruente vinkler	To vinkler med samme vinkelsum
Komplementærvinkler	To vinkler som til sammen har en vinkelsum på 90°
Supplementvinkler	To vinkler som til sammen har en vinkelsum på 180°
Eksplementvinkler	To vinkler som til sammen har en vinkelsum på 360°

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Spids vinkel
En vinkel som er mindre end 90°
Der vil altid være mindst to spids vinkler i en trekant.



Ret vinkel
En vinkel som er netop 90°
Der kan aldrig være mere end en ret vinkel i en trekant

Stump vinkel
En vinkel som er større end 90°
Der kan aldrig være mere end en stump vinkel i en trekant

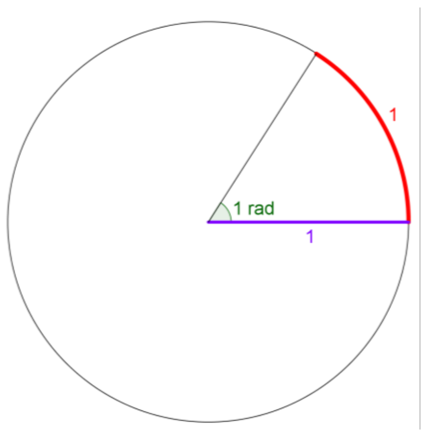
Vinkelsum
Når man lægger alle vinklerne i polygonen sammen.

Trekant har en vinkelsum på 180°
En firkant har en vinkelsum på 360°
En femkant har en vinkelsum på 540°

Vinkelsum i et n-kantet-polygon
n er antallet af kanter

$$vinkelsum = (n-2) \cdot 180°$$

Radianer
1 radian er den vinkel, hvor cirkelbuen (rød)
har samme længde som radius (blå) i cirklen.



En hel cirkel indeholder 2 π radian.

Omregning radianer til grader

$$grader = \frac{radianer \cdot 180}{\pi}$$

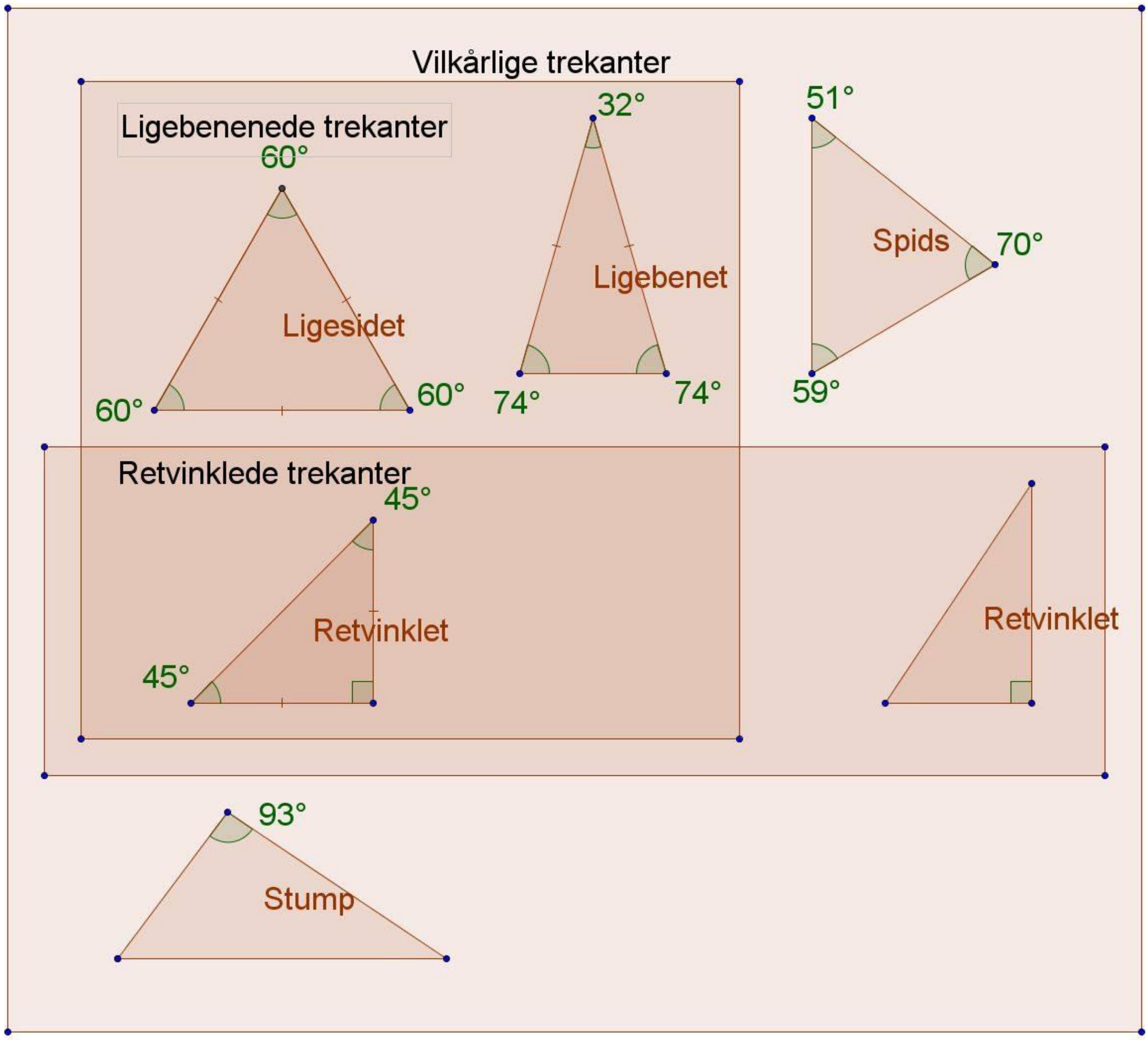
Omregning grader til radianer

$$radianer = \frac{grader \cdot \pi}{180}$$

Regulær polygon
Betyder at siderne er lige lange og alle vinkler er lige store.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Trekanter



Ligesidet trekant

En ligesidet trekant er regulær. De 3 vinkler er 60°. I en ligesidet trekant vil både højder, vinkelhalveringslinjer, medianer og midtnormaler ligge oven i hinanden. Dvs. deres skæringspunkt, vil være trekantens tyngdepunkt og centrum for den omskrevne- og indskrevne cirkel

Ligebenet trekant

I en ligebenet trekant er 2 sider lige lange og 2 vinkler lige store. Det to vinkler, som er lige store, kaldes for grundvinkler.

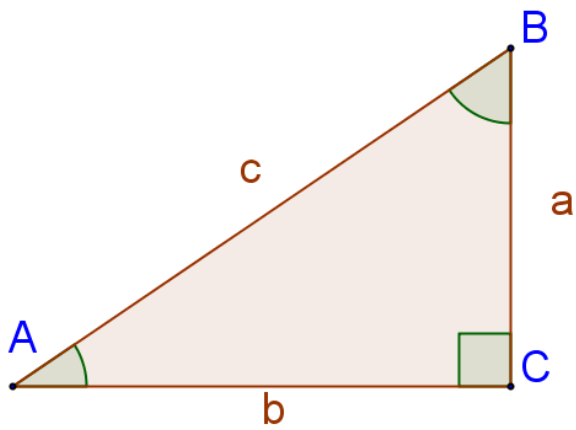
Stumpvinklet trekant

En stumpvinklet trekant består af en stump vinkel på over 90° og to spidse vinkler på under 90°.

Spidsvinklet trekant
En spidsvinklet trekant består af 3 spidse vinkler på under 90°

Retvinklet trekant
En retvinklet trekant består af 1 ret vinkel på 90° og to spidse vinkler på under 90°.

Navngivning af sider i en retvinklet trekant



I en retvinklet trekant hedder den rette vinkel altid C.
Man går så med uret, så hedder den næste vinkel A og derefter B.
Siderne navngives i forhold til modstående vinkel.
Side c ligger over for vinkel C
Side a ligger over for vinkel A
Side b ligger over for vinkel B

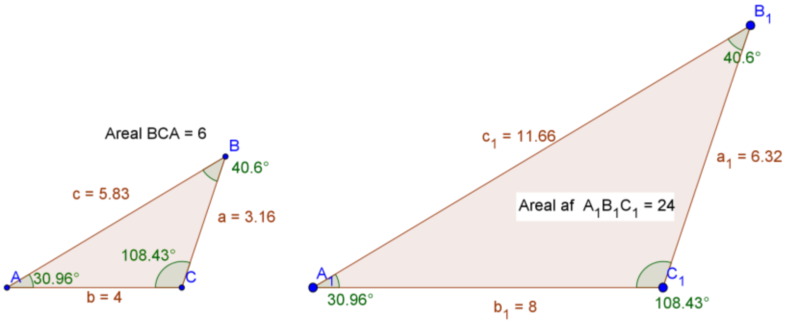
De 2 korte sider (a og b) kaldes for kateter
Den længste side (c) kaldes for hypotenusen

Sider skrives altid med små bogstaver (eks. abc)
Vinkler skrives altid med store bogstaver (eks. ABC)

Ensvinklede trekanter
Hvis en trekant parvis har samme vinkler, kalder man dem ensvinklede.

Forholdet mellem de parvis ens sider er ens for alle sider.

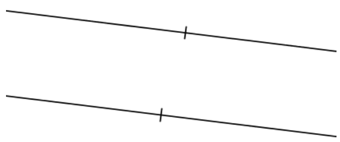
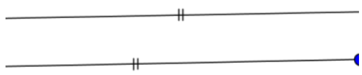
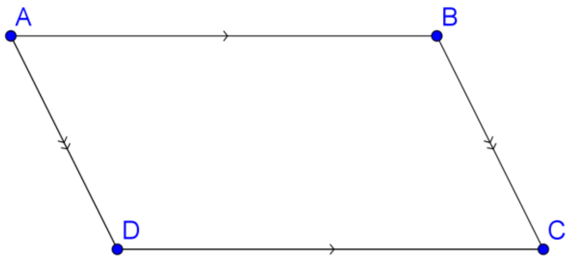
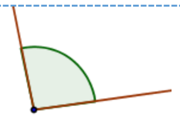
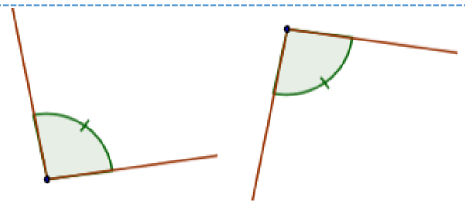
I eksemplet er forholdet mellem $\Delta ABC\ og\ \Delta A_1B_1C_1$ er 2



Det kan også udtrykkes som $forhold = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

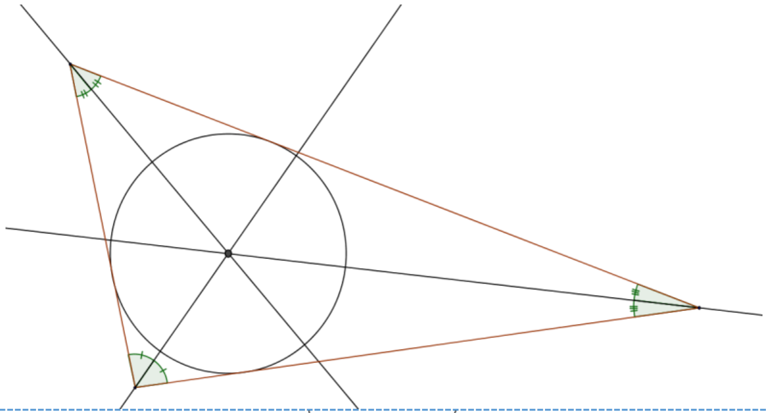
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Tegn og symboler

ΔABC	Punkterne A, B og C danner en trekant
 a)  b)	Linjestykker med samme antal streger som markering har samme længde. Linjerne på figur a har sammen længde. Det er linjerne på figur b også. Men linjerne i figur a og b er IKKE samme længde.
	Linjer med samme antal pile som markering er parallelle. Linjestykkerne $\lvert AB\rvert\ og\ \lvert CD\rvert$ er parallelle, hvilket kan skrives som: AB∥CD Modsat er Linjestykkerne $\lvert AB\rvert\ og\ \lvert BC\rvert$ ikke parallelle, hvilket kan skrives som: AB∦BC
$\lvert AB\rvert$	Ofte vil man skrive et linjestykke med to lodrette linjer. Eks. $\lvert AB\rvert$ er linjestykket, som går fra punktet af A til punktet B.
	Vinkel Kan skrives som ∠ABC, hvor vinklen er ved punktet B.
	Vinkel med samme markering er helt ens. Har de ingen markering, så ved man ikke om de er ens.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

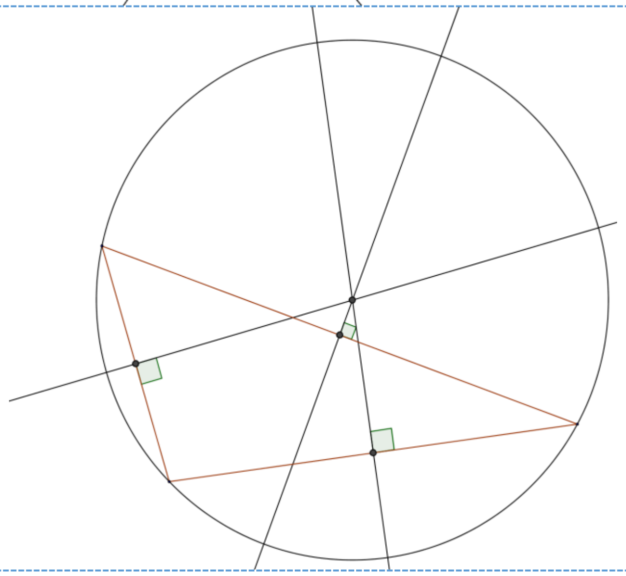
Linjer i en trekant



Vinkelhalveringslinjer

Dele hver vinkel i 2 lige store vinkler.

Vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt er centrum for trekantens indskrevne cirkel

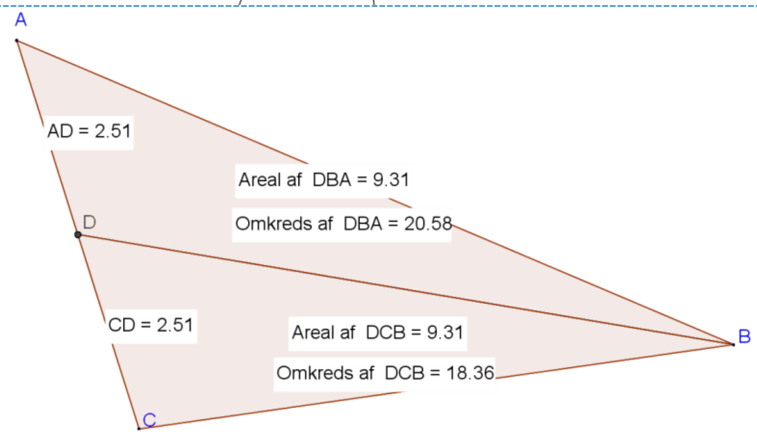


Midtnormaler

En midtnormal deler en side i en trekant i 2 ens længder.

Midtnormalen går vinkelret ud fra linjestykkets midtpunkt.

Midtnormalernes skæringspunkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel



Median

En median går fra vinkelspids til modsatte sides midtpunkt.

En median deler en trekant i 2 lige store arealer.

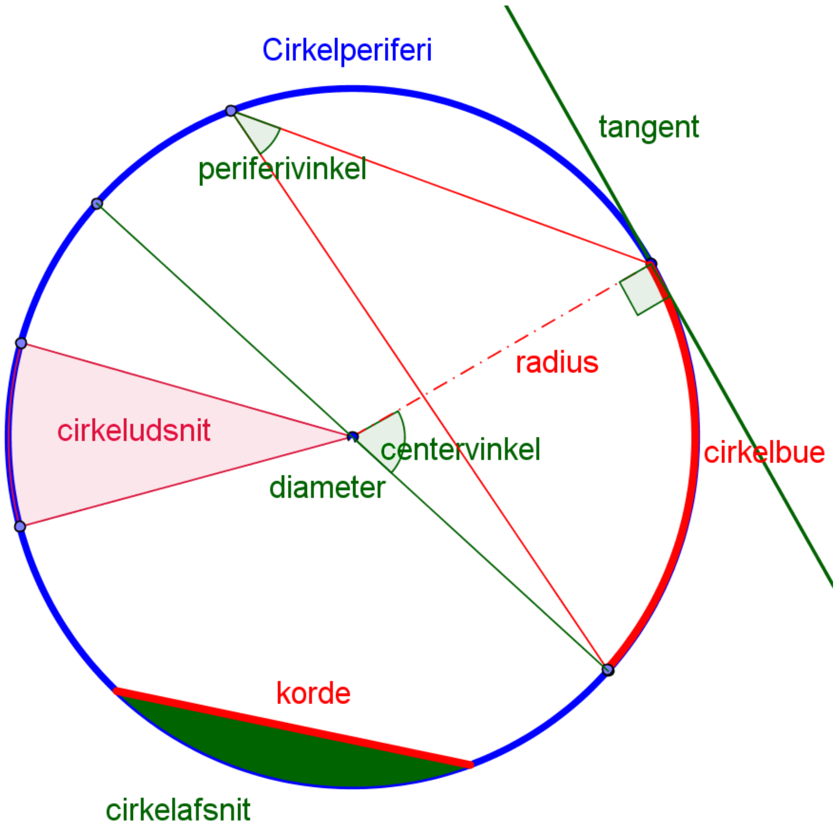
Omkredsen kan dog godt være forskellig.

Skæringspunktet mellem flere medianer er trekantens tyngdepunkt

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

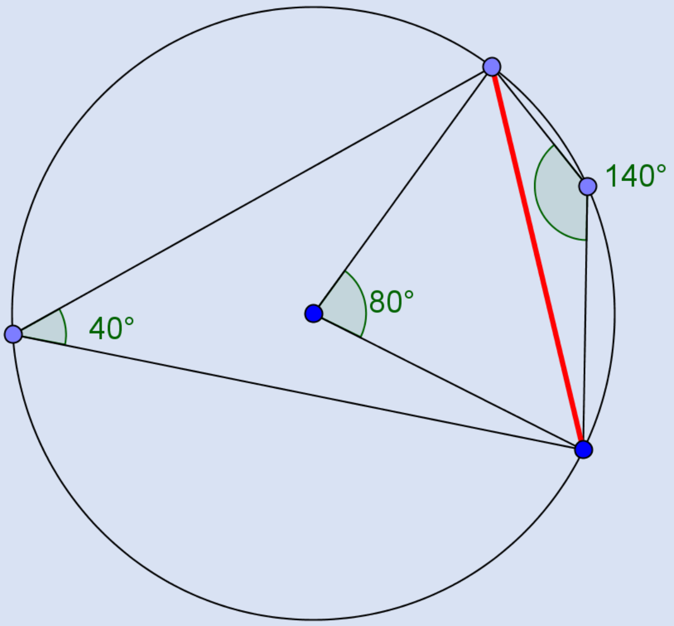
Cirkler

En cirkel er defineret som en punkter, der har samme afstand til et punkt. Punktet kalder vi for centrum og afstand fra punkterne til centrum kaldes radius



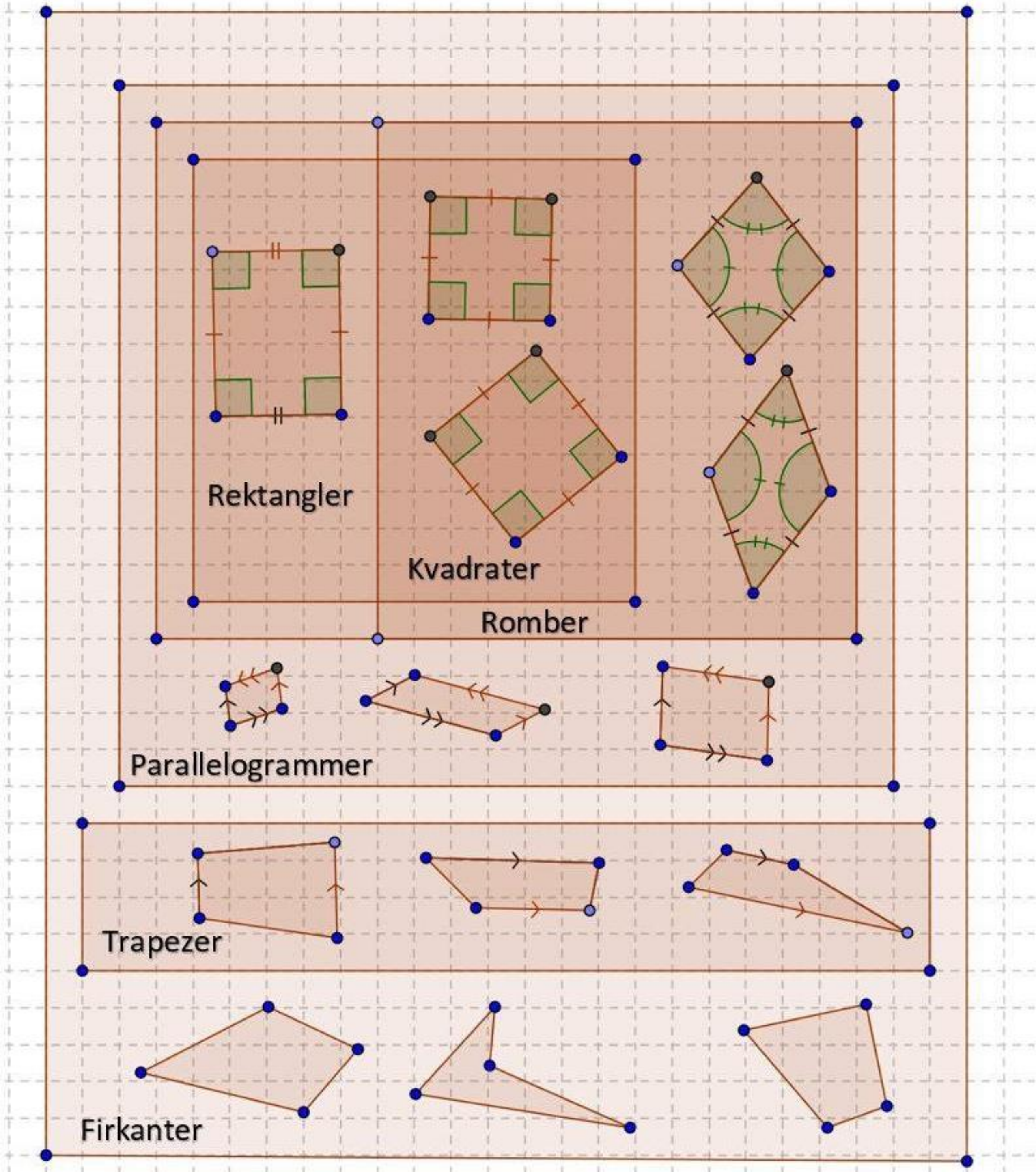
Centrum	Punktet der ligger lige langt væk fra alle punkter der ligger på cirkelperiferien. (Man kan kalde det midtpunktet)
Cirkelperiferi	Cirklens omkreds, afstand fra cirkelperiferi til centrum er altid radius
Cirkelbue	Et stykke af omkredsen, givet i forhold til en centervinkel $$længde\ cirkelbue = omkreds \cdot \frac{centervinkel}{360}$$
Radius	Afstanden fra centrum til cirkelperiferi
Diameter	En korde der går gennem centrum. Diameter er 2 · radius
Cirkeludsnit	Et cirkeludsnit er en del af cirklens areal, givet i forhold til en centervinkel $$areal\ cirkeludsnit = areal \cdot \frac{centervinkel}{360}$$
Tangent	En linje der netop kun rører i et punkt på cirkelperiferien og står vinkelret på radius.
Korde	Et ret linjestykke der går fra et punkt på cirkelperiferien til et andet punkt på periferien
Cirkelafsnit	Arealet mellem en cirkelbue og en korde.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Centervinkel	Vinkel med toppunkt i centrum
Periferivinkel	Vinkel med toppunkt på periferien
	 Hvis periferivinklen og centervinklen, deler korde, så gælder: Periferivinklen er altid halvt så stor som centervinklen, når periferivinklen ligger uden for centervinklens ben Hvis periferivinklen ligger inden for centervinklens ben, så vil vinklen altid være $180 - \frac{centervinkel}{2} = periferivinkel$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Firkanter



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Areal og omkreds

Arealet har altid enhed i anden potens ”enhed^2”

Trekant

Omkreds:

$$O = a + b + c$$

O: omkreds
a, b, c: sidelængder

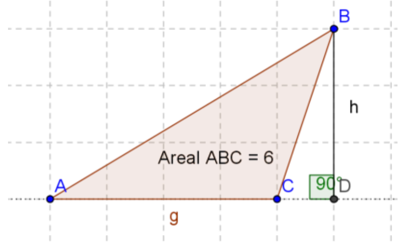
Areal:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

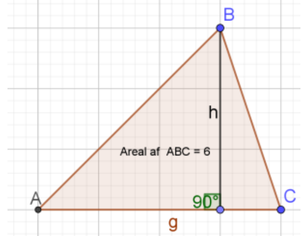
h: højde
g: grundlinje

Højden er altid vinkelret på grundlinjen
Man bestemmer selv hvilken side der er grundlinjen.

Eks. Hvor højde ligger uden for trekanten



Eks. Hvor højde ligger inden i trekanten



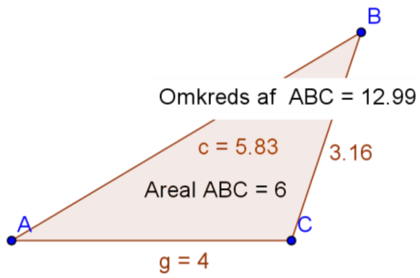
Eks. Beregning som kan anvendes ved begge eksempler ovenfor

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

Herons formel

Bruges til at finde et areal

$$omkredsen = a + b + c$$
$$s = \frac{1}{2} \cdot (omkredsen)$$
$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$



Eks.
Virker kun på trekanter

$$s = \frac{1}{2} \cdot 12{,}99 = 6{,}495$$

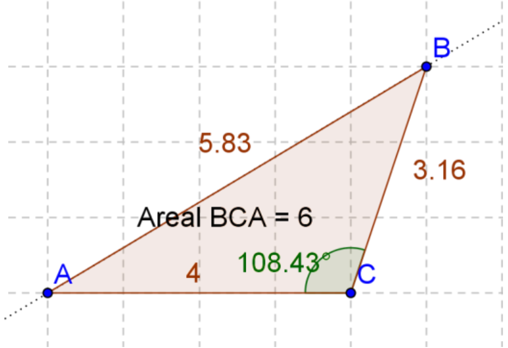
$$\sqrt{6{,}495 \cdot (6{,}495 - 3{,}16) \cdot (6{,}495 - 4) \cdot (6{,}495 - 5{,}8}$$
$$\approx 5{,}99$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Appelsinformlen

Navnet kommer fra når man læser formlen, lyder det som ”en halv a b sin”
Man skal kende 2 sider og den vinkel der ligger mellem de 2 sider

$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(C)$ Man bestemmer selv hvilken vinkel der er C, bare man husker, at de sider, som man bruger, er benene til den vinkel, som man kender.



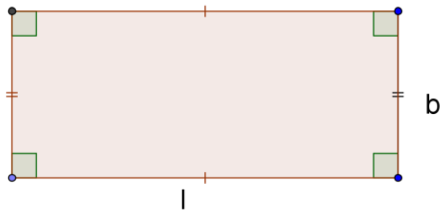
Eks.
$$\frac{1}{2} \cdot 3{,}16 \cdot 4 \cdot \sin(108{,}43) \approx 5{,}995851$$

Regulær trekant

Se formel for regulære polygoner

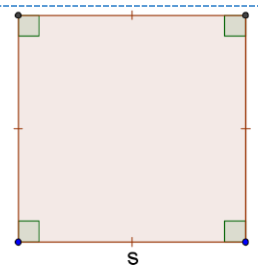
Rektangel

Har fire sider
$A{=}l{\cdot}b$
$O = 2l + 2b$
Alle vinkler er 90 º
Siderne er parvis lige lange



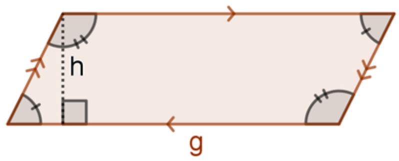
Kvadrat

Har fire lige lange sider
Er regulær
$A = s^2$
$O = 4s$
Alle sider er lige lange og alle vinkler er 90 º
Diagonaler er lige lange
$diagonal = \sqrt{s^2 + s^2}$



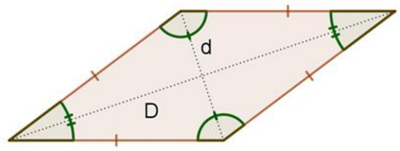
Parallelogram

$A{=}h{\cdot}$g
h=højde
g=grundlinje
O=alle sider lagt sammen
Siderne er parvis parallelle
Diagonalerne er ikke lige lange



Rombe

Alle sider er lige lange
Vinkler er parvis lige store
Diagonaler er ikke ens
$.A = \frac{D \cdot d}{2}$
D er store diagonal og d er lille diagonal

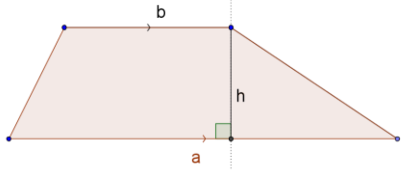


Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Trapez

$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$

Netop to af siderne er parallelle



Cirkel

$A = r^2 \cdot \pi$

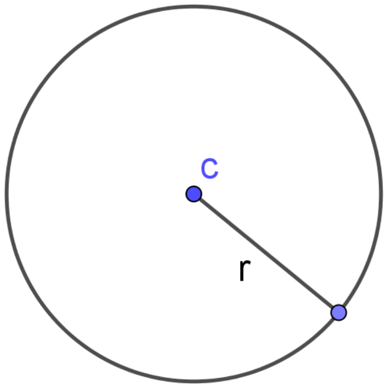
$O = 2 \cdot r \cdot \pi$

Kender man Arealet

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Kender man omkredsen

$$r = \frac{O}{2 \cdot \pi}$$



Cirkelring

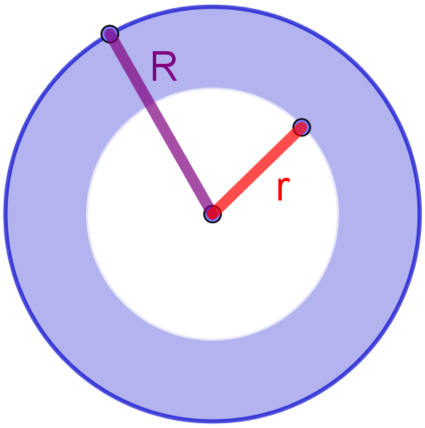
$A = (R^2 \cdot \pi) - (r^2 \cdot \pi)$

Eller

$A = (R^2 - r^2) \cdot \pi$

R: Den store cirkels radius

r: Den lille cirkels radius



Cirkeludsnit

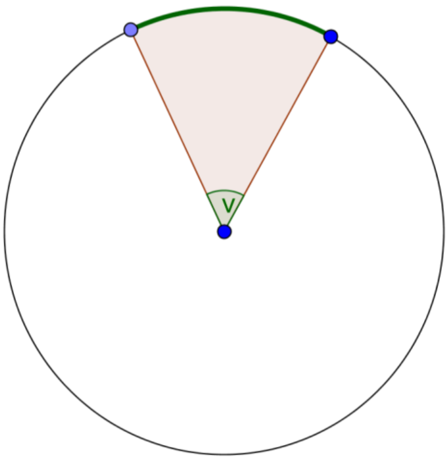
$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{v}{360}$

r: radius

v: vinkel i grader

Buelængde: $\pi \cdot r \cdot 2 \cdot \frac{v}{360}$

$$O = \pi \cdot r \cdot 2 \cdot \frac{v}{360} + 2r$$

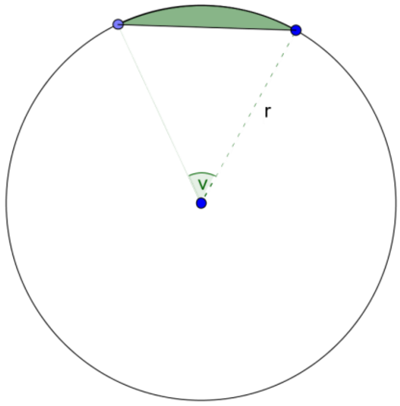


Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Cirkelafsnit (Det grønne)

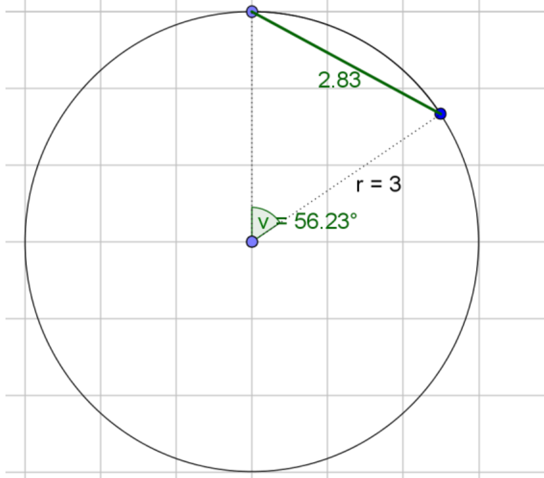
$$A = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\pi \cdot \frac{v}{180} - sin(v)\right)$$

r: radius
v: vinkel i grader



Korde

$$Længde = 2 \cdot r \cdot sin\left(\frac{v}{2}\right)$$



Eksempel

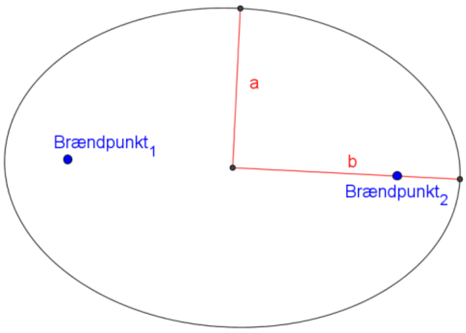
$$2 \cdot 3 \cdot \sin\left(\frac{56{,}23}{2}\right) \approx 2{,}827$$

Ellipse

$A = \pi \cdot a \cdot b$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

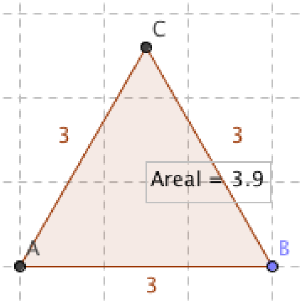
A: areal
O: omkreds



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

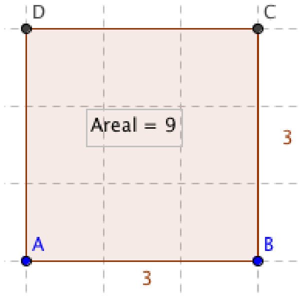
Areal ud fra sidelængden i regulære polygoner

Areal for en ligesidet trekant



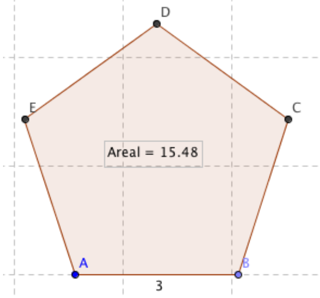
$$\mathbf{0,433 \cdot s^2 = A}$$
$$0{,}433 \cdot 3^2 = 3{,}897$$

Areal for en ligesidet firkant (kvadrat)



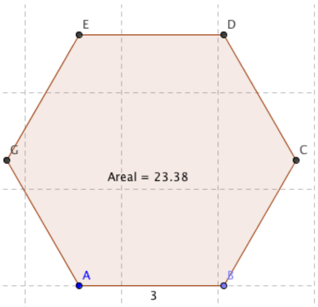
$$s^2 = A$$
$$3^2 = 9$$

Areal for en regulær femkant



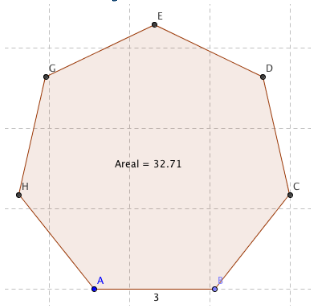
$$1{,}7205 \cdot s^2 = A$$
$$1{,}7205 \cdot 3^2 \approx 15{,}4845$$

Areal for en regulær seks-kant



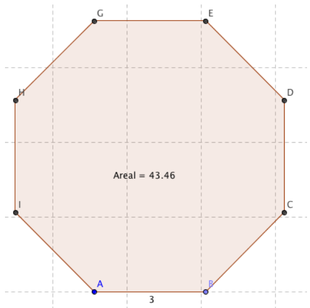
$$2{,}5981 \cdot s^2 = A$$
$$2{,}5981 \cdot 3^2 = 23{,}38$$

Areal for en regulær syv-kant



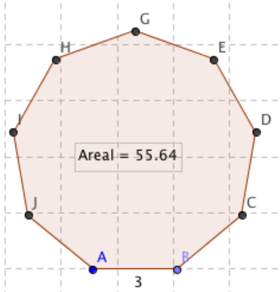
$$3{,}6339 \cdot s^2 = A$$
$$3{,}6339 \cdot 3^2 = 32{,}71$$

Areal for en regulær otte-kant



$$4{,}8284 \cdot s^2 = A$$
$$4{,}8282 \cdot 3^2 = 43{,}46$$

Areal for en regulær ni-kant



$$6{,}1818 \cdot s^2 = A$$
$$6{,}1818 \cdot 3^2 = 55{,}64$$

Areal for en regulær polygon

n: antal kanter

s: sidelængde

Vinkelsum: $180 \cdot (n-2)$

$$\frac{1}{4} \cdot tan\left(\frac{vinkelsum}{2n}\right) \cdot s^2 \cdot n = A$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Rumfang og overflader

V, som står for volumen, bruges normalt i formler for rumfanget
O, som står for overfladen, bruges normalt i formler for overfladen

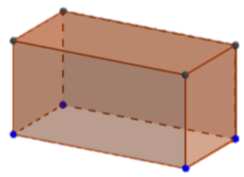
Kasse

$V = h \cdot l \cdot b$

$O = 2 \cdot h \cdot l + 2 \cdot h \cdot b + 2 \cdot l \cdot b$

V: rumfang

O: Overfladeareal



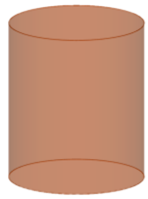
Cylinder

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

G: Grundflade $(\pi \cdot r^2)$

Krummeoverflade $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Overflade i alt $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot (\pi \cdot r^2)$



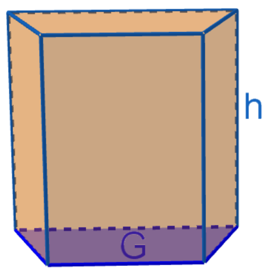
Prisme

$V = G \cdot h$

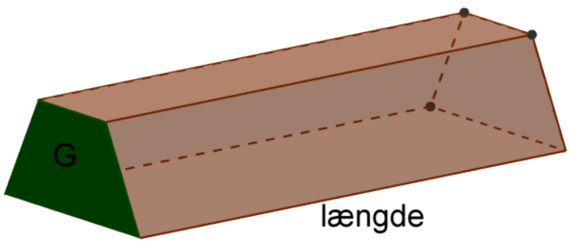
G: Den flade der er ens, hele vejen hen, eller hele vejen op.

Overflade: Alle overflader lagt sammen. Der findes ikke en formel, som kan bruges til alle prismer.

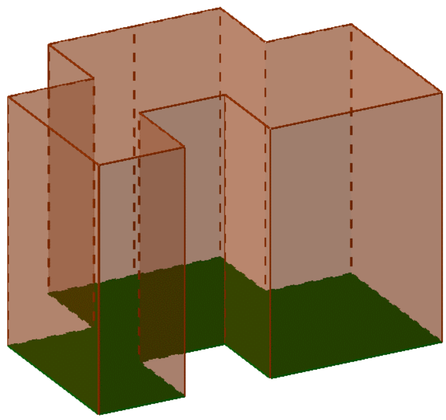
En cylinder er også en prisme, men man omtaler det som en cylinder når grundfladen er en cirkel.



Eksempel på grundflade i prisme der ligger ned
Den grønne flade, er ens hele vejen hen.



Eksempler på prisme der står op.
Den grønne flade er ens hele vejen op



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Pyramide

Rumfang:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

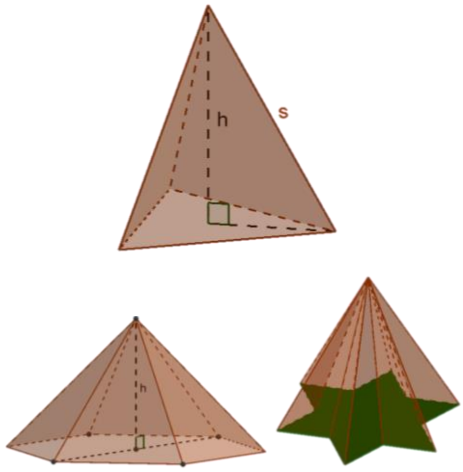
Hvor G = bundens grundflade og h = højden
Bemærk at grundfladen kan have mange forskellige former.

Overfladeareal:

Find arealet af hver side af pyramiden og læg det sammen.

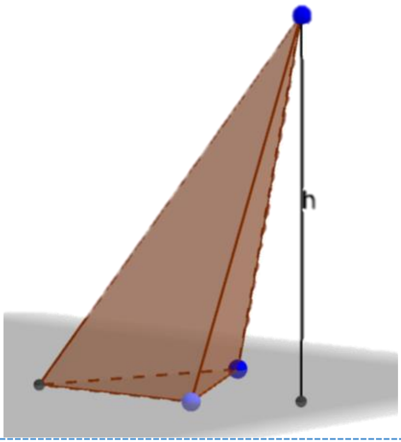
Vær opmærksom på, om bunden skal med i overfladearealet.

Pyramider behøver ikke have en trekantet grundflade, den kan lige så godt være ti-kantet - eller en anden form



Skævpyramide

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$



Pyramidestub

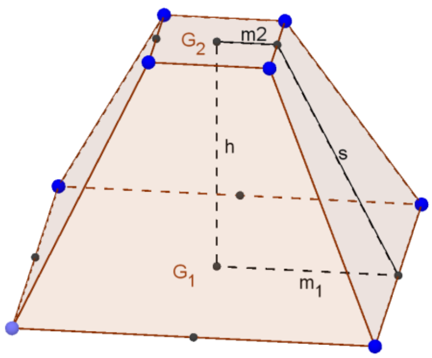
$$V = \frac{1}{3} h(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 \cdot G_2})$$

G_1: Store grundflade
G_2: Lille grundflade

$$s = \sqrt{h^2 + (m_1 - m_2)}$$

s: sidelængden
m_1 og m_2: Længde fra midten af grundfladen til siden

En pyramidestub kan godt have andre typer grundflader en firkantet.



Kugle

(Eks. en bold)

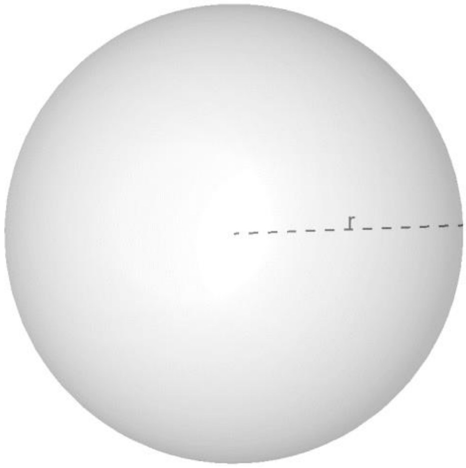
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$Overflade = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$r = \sqrt[3]{V \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi}}$$

Eller

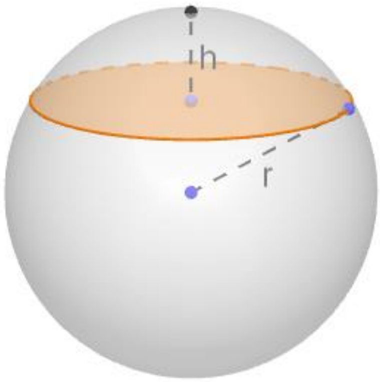
$$r = \sqrt{\frac{Overflade}{4 \cdot \pi}}$$



Kugletop

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3r - h)$$

$$Overflade = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



Kegle

Samme formel som til en pyramide

$$V = \frac{1}{3} h \cdot G$$

h: højde

G: grundflade $(\pi \cdot r^2)$

s: sidelængde

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

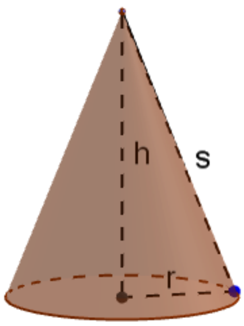
$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$r = \sqrt{s^2 - h^2}$$

$$Krummeoverflade = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$$

Eller

$$Krummeoverfalde = \pi \cdot r \cdot s$$



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Keglestub

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$

$s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

R: store radius

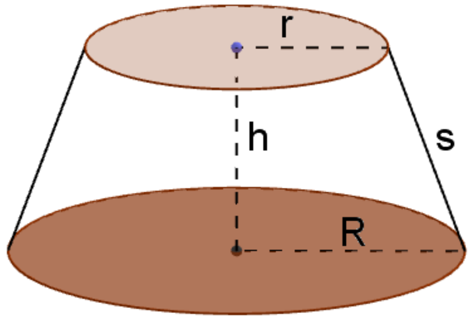
r: lille radius

$$Krummeoverflade = \pi \cdot (R + r) \cdot s$$

Eller

$$Krummeoverflade = \pi \cdot (R + r) \cdot \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Overflade i alt = krumme overflade + top + bund



Skæv cylinder / skæv prisme

Gælder for begge

$$V = G \cdot h$$

Eller

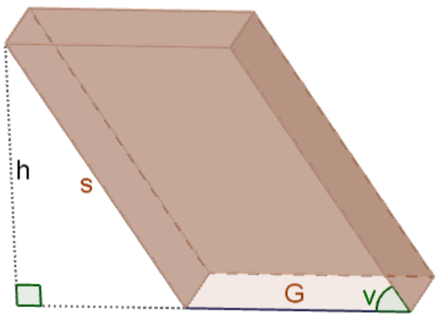
$$V = G \cdot s \cdot \sin(v)$$

Særlig for skæv cylinder:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Eller

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot s \cdot \sin(v)$$

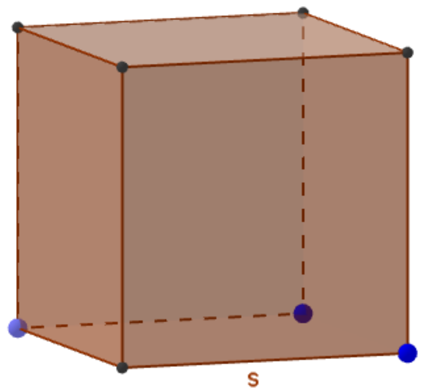


Regulær kasse

$V = s^3$

$s = \sqrt[3]{V}$

$Overflade = s^2 \cdot 6$



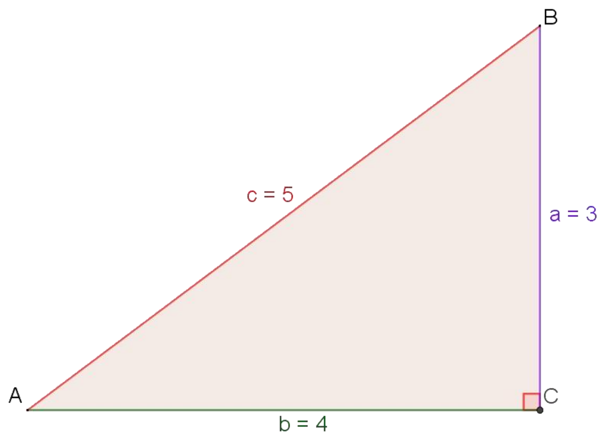
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

P.E.T. - Pythagoras, Ensvinklede trekanter og Trigonometri

Pythagoras' sætning

Er en sætning, der kan bruges til at finde en manglende side på en retvinklet trekant.

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Eksempel (kender de to kateter):
Vi kender de to kateter (de korteste sider, side a og side b) og vil gerne finde hypotenusen (den længste side, side c).

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$c = 5$$

Eller

$$c^2 = 3^2 + 4^2$$

Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMat

$$c = -5 \quad \vee \quad c = 5$$

Da c ikke kan være negativ, kan vi kun bruge løsningen c=5

Eksempel (kender en katete og hypotenusen):
Vi kender side a = 3 og siden c = 5.

$$b = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$b = 4$$

Eller

$$5^2 = 3^2 + b^2$$

Ligningen løses for b vha. CAS-værktøjet WordMat

$$b = -4 \quad \vee \quad b = 4$$

Da b ikke kan være negativ, kan vi kun bruge løsningen c=5

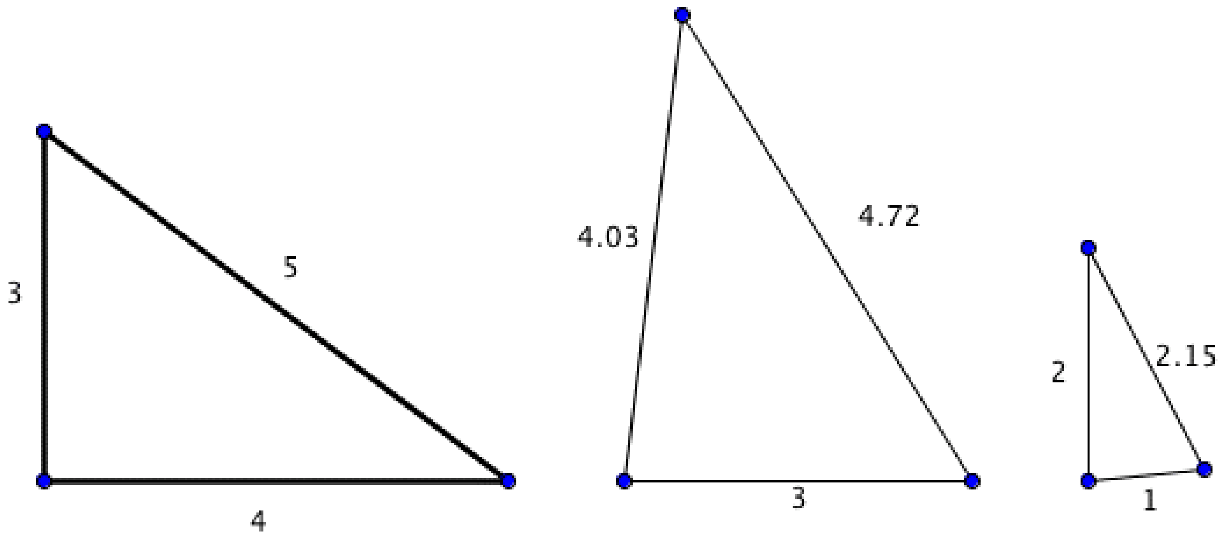
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Den omvendte Pythagoras

Pythagoras' sætning kan bruges til at tjekke, om en trekant er retvinklet. Det kræver, at man kender alle sidelængder.

Hvis sidelængderne i en trekant passer med; $a^2 + b^2 = c^2$, så ved vi at trekanten er retvinklet.

Skitser af trekanter



Eksempel på beregningen:

Trekant 1:

$$3^2 + 4^2 = 25$$
$$5^2 = 25$$

Da både højre og venstre side af Pythagoras' sætning (a^2+b^2 = c^2) giver 25, så ved vi, at Pythagoras' sætning passer på trekant 1. Det betyder at trekant 1 er retvinklet

Trekant 2:

$$3^2 + 4{,}03^2 = 25{,}2409$$
$$4{,}72^2 = 22{,}2784$$

Da a^2+b^2 her ikke er det samme som c^2, betyder det, at trekant 2 IKKE er retvinklet

Trekant 3:

$$2^2 + 1^2 = 5$$
$$2{,}15^2 = 4{,}6225$$

Da a^2+b^2 ikke er det samme som c^2, betyder det, at trekant 3 IKKE er retvinklet

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Ensvinklede trekanter

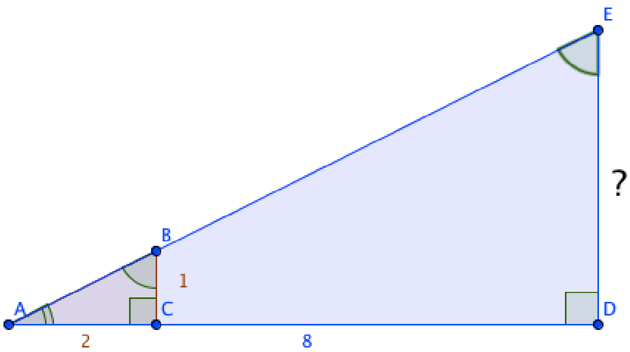
Forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede trekanter er konstant, dvs. det samme.

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{|CD|}{|BE|} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{6{,}71}{2{,}24} = 2{,}996 \approx 3$$

$Dvs. forholdet\ mellem\ de\ ensliggende\ sider\ er\ 3$



Da trekanter er ensvinklede, kan jeg finde længden af IEDI
Først finder jeg forholdet mellem siden |AC| og |AD|

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{8}{2} = 4$$

Nu kan jeg så finde |ED| ved at tage |BC| og gange med 4

$$|BC| \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$

Dvs. I *ED* I er 4 høj

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Ligedannede og kongruente figurer

Ligedannede figurer

To figurer er ligedannede, hvis den ene figur er enten en forstørrelse eller en kopi af den anden figur. De to figurer må gerne være drejet eller spejlet i forhold til hinanden.

To trekanter er **ligedannede** hvis:

- mindst 2 af vinklerne i de to trekanter er parvis lige store.

Eller

- alle 3 sidelængder i den ene trekant har parvis samme forhold til alle 3 sidelængder i den anden trekant.

Kongruente figurer

To figurer er kongruente, hvis den ene figur er en kopi af den anden figur. De to figurer må gerne være drejet eller spejlet i forhold til hinanden.

To trekanter er **kongruente** hvis:

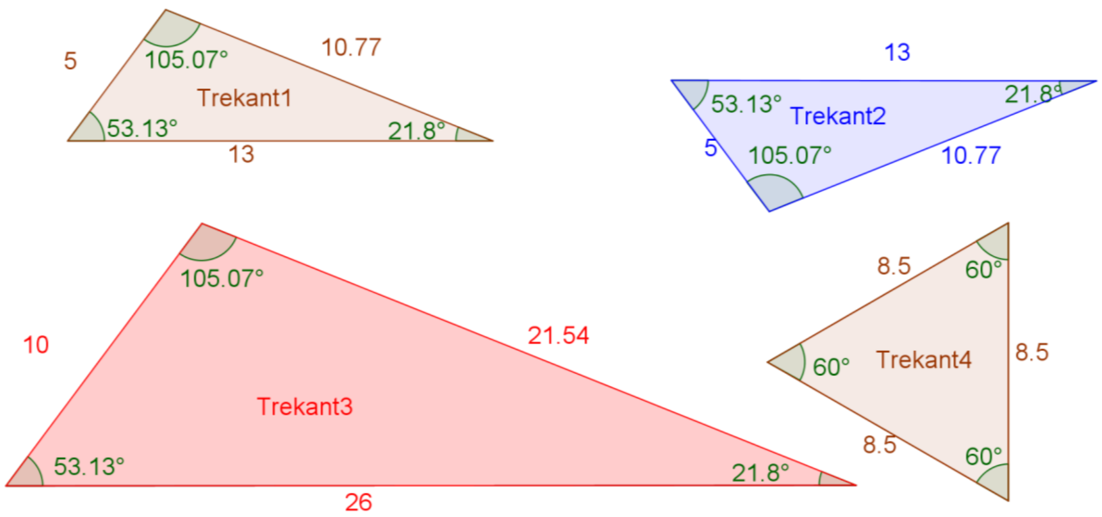
- siderne parvis er lige store
- 2 sider er parvis lige store og den mellemliggende vinkel er lige store.
- en side og de hosliggende vinkler parvis er lige store.

Eksempler:

Trekant 1 og 2 er **kongruente**

Trekant 1, 2 og 3 er **ligedannede**

Trekant 4 er hverken ligedannet eller kongruent med de øvrige 3 trekanter.



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

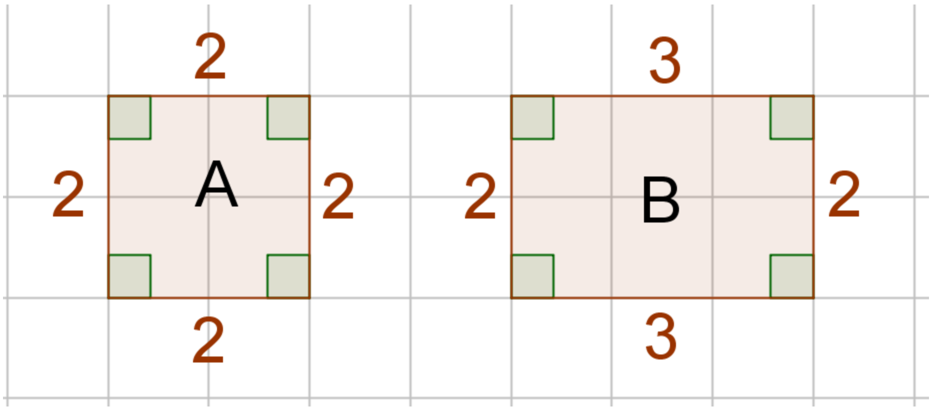
Ligedannede og ensvinklede figurer

Hvis en figur er ligedannet, så er den også ensvinklet. **Men** en figur kan godt være ensvinklet uden at være ligedannet.

Alle trekanter, som er ensvinklede, er også ligedannede.

Mens f.eks. firkanter ikke altid er ligedannede, når de er ens vinklede.

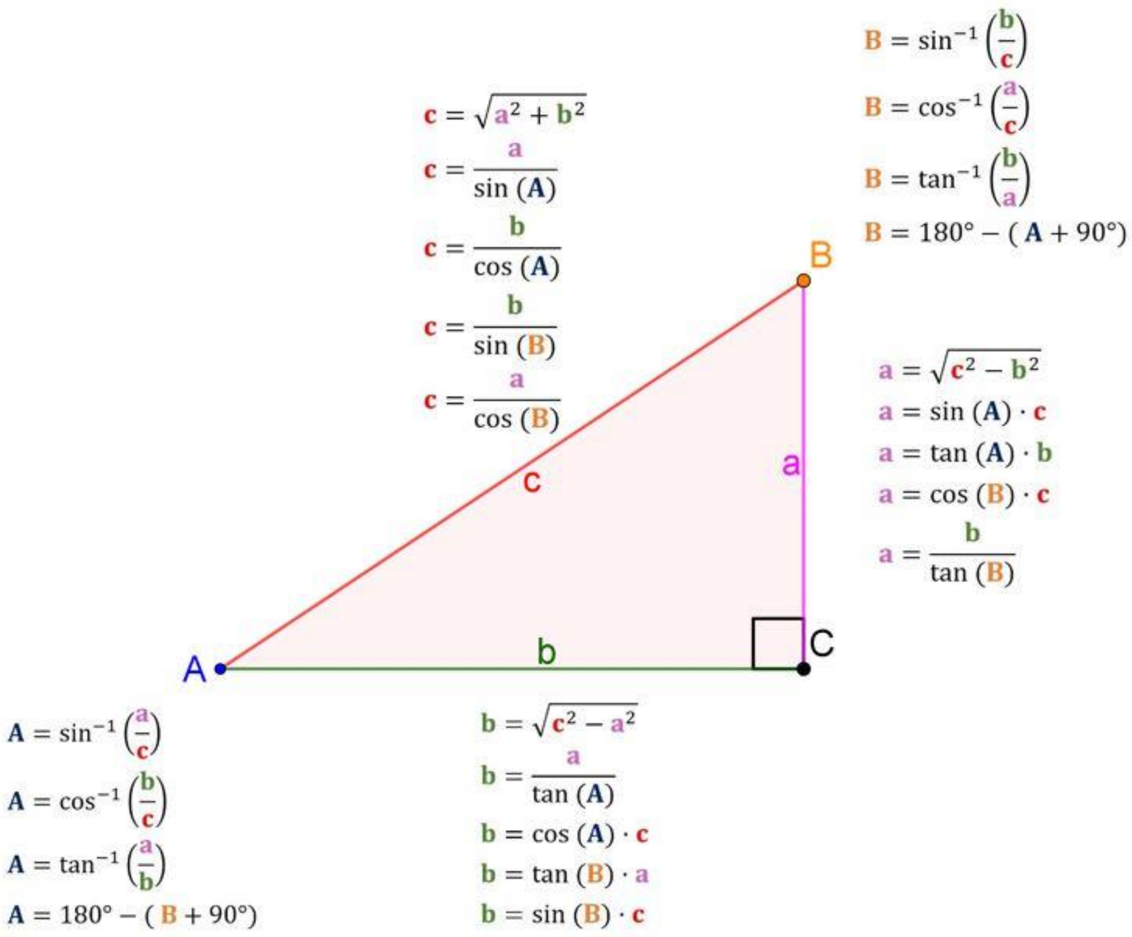
Eks. er kvadratet A og rektanglet B ensvinklede, men ikke ligedannede.



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Trigonometri i retvinklede trekanter

HUSK:
Vinkler angives med store bogstaver (A, B og C)
Sider angives med små bogstaver (a, b og c)
Vinkel C er altid 90°



Eksempel:

Hvis vi kender a = 5 og B = 52° og gerne vil finde længden af siden c.
Først finder vi de formler, der står ude for siden c, derefter finder vi den formel, som indeholder a og B.

$$c = \frac{a}{\cos(B)}$$

$$c = \frac{5}{\cos(52)}$$

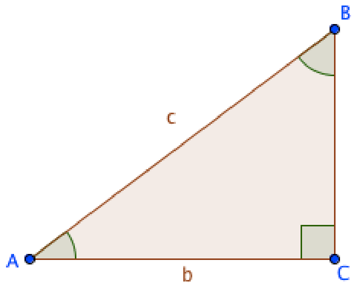
⇕ *Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$c = 8{,}121346$$

Se video om hvordan man bruger hjælpearket på: http://matematikbanken.dk/L/230/

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Formler for retvinklede Trekanter

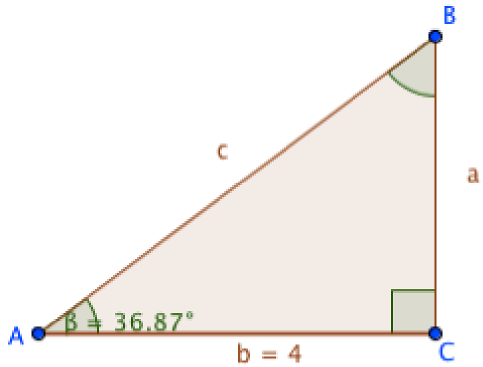


$$\cos(vinkel) = \frac{hosliggende\ katete}{hypotenusen}$$

$$\sin(vinkel) = \frac{modstående\ katete}{hypotenusen}$$

$$\tan(vinkel) = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$$

Eksempel:



Her kender vi vinkel A og den hosliggende katete, dermed kan vi finde værdien af hypotenusen

$$\cos(36{,}87) = \frac{4}{c}$$

Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$\boldsymbol{c = 5}$$

Eller vi kan finde værdien af den modstående katete (a)

$$\tan(36{,}87) = \frac{a}{4}$$

Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$\boldsymbol{a = 3}$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Vilkårlige trekanter

Modsat Pythagoras' sætning og de trigonometriske formler ovenfor, der kun kan bruges i retvinklede trekanter, kan Cosinus- og sinusrelationen bruges i en hvilken som helst trekant.

Cosinusrelationen:

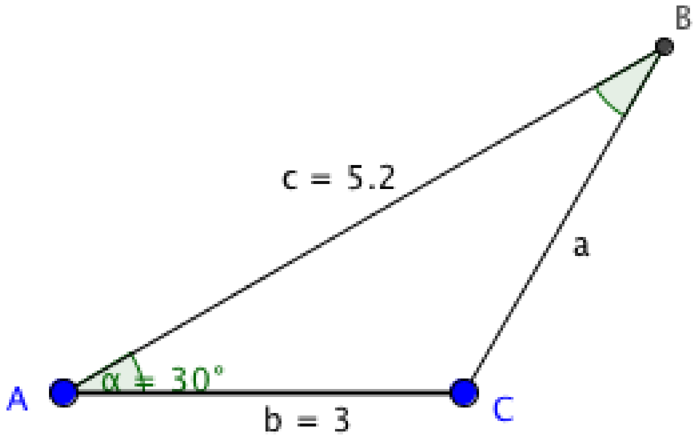
Alt efter hvilken side man ønsker at finde, kan man bruge en af nedenstående formler:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)$$

Eksempel:



$$a^2 = 3^2 + 5{,}2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5{,}2 \cdot \cos(30)$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$a = -3{,}003333 \quad \vee \quad a = 3{,}003333$$

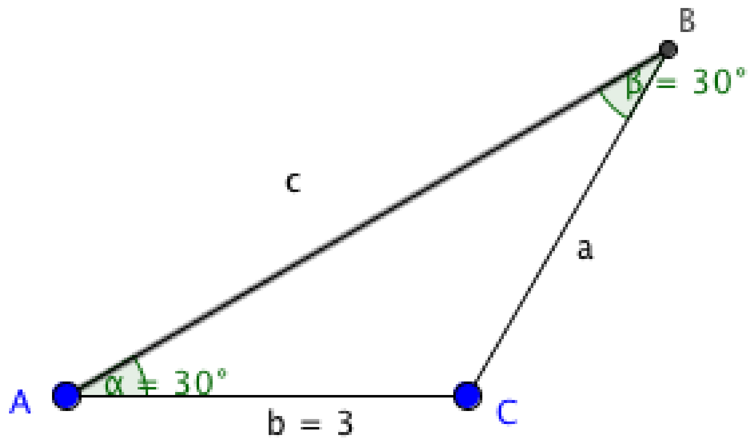
Da et linjestykke ikke kan være negativt, ved jeg at a=3

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Sinusrelationen

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Eksempel:



$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$$

$$\frac{a}{\sin(30)} = \frac{3}{\sin(30)}$$

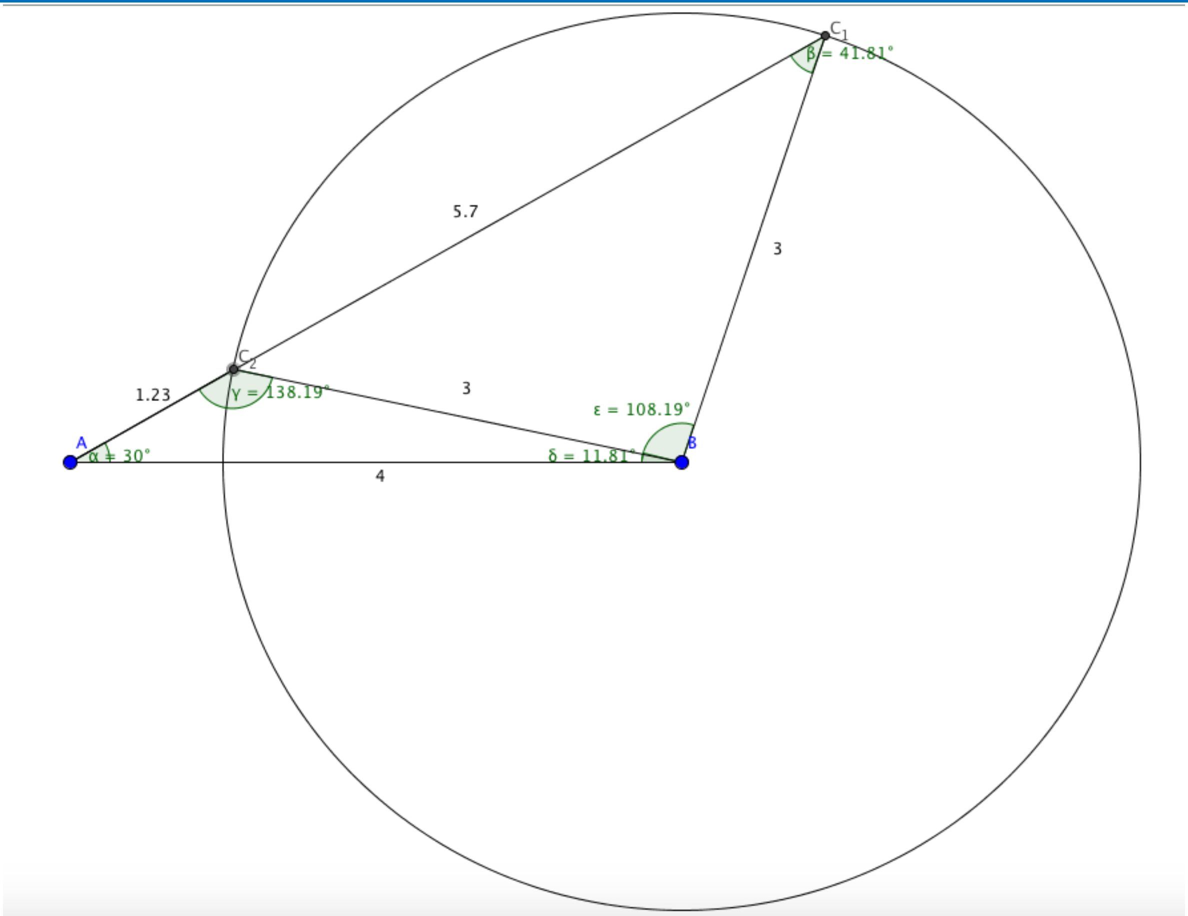
Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$a = 3$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Sinusfælden

Hvis man kender vinkel A og siden a og b i en trekant, så kan der være to løsninger



Eksempel:

$Vi\ kender\ vinkel\ A = 30^0$ og at b = 4 og a = 3

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$$\frac{3}{\sin(30)} = \frac{4}{\sin\,(C)}$$

Ligningen løses for C vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$C = 41{,}81031$$

Sinus-fælden består i, at formlen kun finder den ene af løsninger. Den anden kan findes som nedenfor:

$$180 - 41{,}81 = 138{,}19$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Bevisførelse

Modbevis

Når man skal bevise noget, skal man ofte bevise det med algebra eller lave et modbevis med et regnestykke.

Et modbevis er, når man kan konkludere ved et regnestykke og/eller algebra at hypotesen ikke holder.

Eksempel på modbevis

Bevis at når man fordobler enten radius eller en højde i en cylinder, vil man rumfanget stadig være det samme.

Vi siger at højden er 10 og radius er 2.

$$\pi \cdot 2^2 \cdot 10 \approx 125{,}6637$$

Vi fordobler højden: $\pi \cdot 2^2 \cdot 20 \approx 251{,}3274$

Vi fordobler radius: $\pi \cdot 4^2 \cdot 10 \approx 502{,}6548$

De 2 resultater er ikke ens, med det oprindelige regnestykke vi startede med (125,6637). Vi har dermed bevist ved hjælp af et modbevis, at hypotesen ikke er rigtig.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Nogle gange er nok at et regnestykke/flere regnestykker passer på hypotesen

Hypotese:
Et rektangels areal vil altid vokse hvis man gør omkredsen større:

Bevis om hypotesen er sand:

Vi har fx. et rektangel med siderne 4 og 3
Omkreds: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$
Areal: $4 \cdot 3 = 12$

Vi gør siderne lidt større og vælger sidelængerne 5 og 4 og har nu en omkreds på 18.
Areal: $4 \cdot 5 = 20$

Vi kan se at hypotesen passer i dette tilfælde, men gælder det nu i alle tilfælde.
Vi prøver med et nyt forsøg
Side længder 6 og 5, med en omkreds på 22.
Areal: $6 \cdot 5 = 30$

Det passer stadig på hypotesen, MEN
Jeg bruger nu sidelængden 20 og 1, det giver en omkreds på 42.
Areal: $20 \cdot 1 = 20$

Her kan vi så se, at det ikke passer. Man skal derfor passe på med at konkludere på noget, der baserer sig på et eller flere regnestykker.

Kan man ikke finde noget modbevis med tal, så skal man bevise med bogstaver.

Bogstavsbevis

Hypotese:
Når man fordobler begge sider i et rektangel, vil arealet altid være 4 gange så stort.

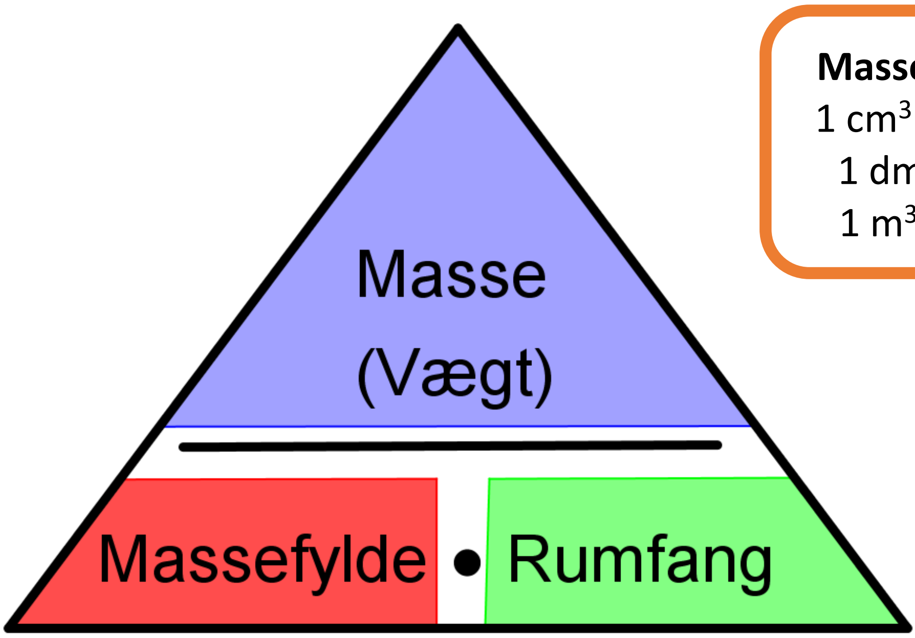
Tager udgangspunkt i et rektangel med siderne 4 og 3
Areal: $4 \cdot 3 = 12$
Fordobler siderne: $8 \cdot 6 = 48, \frac{48}{12} = 4$
Her passer det, men jeg kan ikke være sikker.

Med algebra: $a \cdot b \cdot 4 = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot b$
Reducerer: $a \cdot b \cdot 4 = a \cdot b \cdot 4$

Her er der overensstemmelse og dermed bevist

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Massefylde



Massefylde fortæller hvad:
1 cm³ af stoffet vejer i gram
1 dm³ af stoffet vejer i kg
1 m³ af stoffet vejer i ton

Formler

$$Masse\ (vægt) = Massefylde \cdot Rumfang$$

$$Massefylde = \frac{Masse\ (vægt)}{Rumfang}$$

$$Rumfang = \frac{Masse\ (vægt)}{Massefylde}$$

Eksempler

Eksempel på beregning af massefylde:
Vi ved at en kugles rumfang er 20 cm³ og den vejer 200 gram.

$$Massefylde = \frac{200}{20} = 10$$

$$Massefylden\ er\ derfor\ 10\frac{g}{cm^3}$$

Omregning:

$$10\frac{g}{cm^3} = 10\frac{kg}{dm^3} = 10\frac{tons}{m^3}$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksempel på beregning af rumfang:
Vi ved at en kugles massefylde er 2,5 $\frac{kg}{dm^3}$ og den vejer 2 kg.

$$Rumfang = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$$
$$Rumfang\ er\ derfor\ 0{,}8\ dm^3$$

Omregning:
$$Rumfang\ i\ cm^3 : 0{,}8 \cdot 1000 = 800\ cm^3$$

$$Rumfang\ i\ m^3 : \frac{0{,}8}{1000} = 0{,}0008\ m^3$$

Eksempel på beregning af massen (vægten)
Vi ved at en kugles massefylde er 0,25 $\frac{tons}{m^3}$ og rumfanget er $3m^3$.

$$Masse\ (vægt) = 0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75$$
Massen (vægten) er derfor 0,75 tons

Omregning:
$$Masse\ (vægt)\ i\ kg = 0{,}75 \cdot 1000 = 750\ kg$$

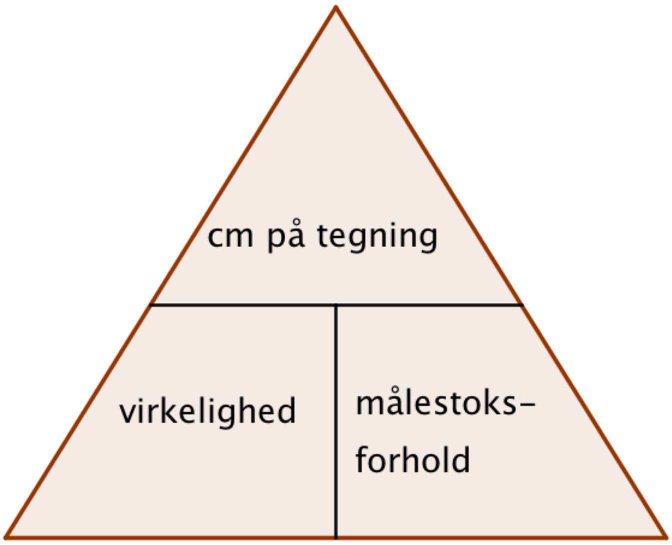
$$Masse\ (vægt)\ i\ kg = 0{,}75 \cdot 1000^2 = 750000\ gram$$

Massefyldetabel

Guld	19,3 $\frac{g}{cm^3}$		Bly	11,4 $\frac{g}{cm^3}$
Vand	1 $\frac{g}{cm^3}$		Vand	1 $\frac{kg}{liter}$
Jern	7,9 $\frac{g}{cm^3}$		Alkohol	0,8 $\frac{g}{cm^3}$
Kviksølv	13,6 $\frac{g}{cm^3}$		Havvand	1,03 $\frac{g}{cm^3}$
Menneske	1,07 $\frac{g}{cm^3}$		Is	0,9 $\frac{g}{cm^3}$
Træ	0,1 - 1,2 $\frac{g}{cm^3}$		Jord	1,3 - 1,8 $\frac{g}{cm^3}$
Sand	1,4 - 1,7 $\frac{g}{cm^3}$		Olie	0,8 $\frac{g}{cm^3}$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Målestok



Afstand i virkeligheden
Du kender hvor langt der er på tegningen og målestoksforholdet

$$Virkelighed = \frac{mål\ på\ tegning}{målestoksforhold}$$

Eksempel:

På en tegning er der 5 cm mellem 2 punkter og kortet er lavet i målestoksforholdet 1:25000

$$Virkelighed = \frac{5}{\frac{1}{25000}}$$

Ligningen løses for Virkelighed vha. CAS-værktøjet WordMat.

$Virkelighed = 125000$ cm = 1,25 km

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Afstand på tegning

Du kender hvor langt der er i virkeligheden og målestoksforholdet

$$cm\ på\ tegning = virkelighed \cdot målestoksforhold$$

Eksempel:

I virkeligheder er der 500 m hen til skatten, hvor langt fra krydset på kortet skal skatten placeres, når korte er lavet i målestoksforholdet 1:2000.
I dette tilfælde er et en god ide at lave de 500 meter om til centimeter ved at gange med 100.

$$tegning = (500 \cdot 100) \cdot \left(\frac{1}{2000}\right)$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for tegning vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$tegning = 25cm$$

Målestoksforholdet

Hvis man kender afstanden i virkeligheden og afstanden på tegningen

$$målestoksforhold = \frac{cm\ på\ tegning}{cm\ i\ virkeligheden}$$

Eksempel:

I virkeligheder er der 5 km fra punkt A til B, og på kortet er den 10 cm. Hvilket målestoksforhold er kortet lavet i? Her er det smart at lave de 5 km om til cm ved at gange med 100 000.

$$målestoksforhold = 10/(5 \cdot 100000)$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for maalestoksforhold vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$målestoksforhold = \frac{1}{50000}$$

Som skrives som 1:50 000

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Præfix

Præfix ved store eller små enheder. Når man sætter et præfix foran en grundenhed, kan man angive, hvor store en del af enheden man har eller hvor mange af grundenheden man har.

Eks.
1000 meter kan skrives som 1 **kilo**meter.
$\frac{1}{1000}$ af en liter kan skrives som 1 **milli**liter.

Ofte vil man møde præfix i forkortelser af enheder. F.eks. er længden 1 meter lig med 100 centimeter. I stedet for at skrive ordene helt ud, kan de forkortes, så meter forkortes til m og centi forkortes til c. Dermed kan man skrive 1m = 100cm.

Der findes mange præfix - de mest almindelige er:

Præfix	Forkortelse	Værdi (Potens)	Værdi
Tera	T	10^{12}	1.000.000.000.000
Giga	G	10^{9}	1.000.000.000
Mega	M	10^{6}	1.000.000
Kilo	k	10^{3}	1000
Hekto	h	10^{2}	100
Deka	da	10^{1}	10
Grundenhed	-	10^{0}	1
Deci	d	10^{-1}	0,1
Centi	c	10^{-2}	0,01
Milli	m	10^{-3}	0,001
Mikro	μ	10^{-6}	0,0000001

Læg mærke til at det betyder noget, om man bruger store eller små bogstaver -
1MW (1 megawatt) er ikke det samme som 1mW (1 milliwatt)!

Præfix kan i princippet bruges foran alle måleenheder, men ikke alle er lige almindelige.

Som udgangspunkt bør man ikke blande flere præfix sammen, men f.eks. 1hkg = 1 hektokilogram = 100 kg bliver anvendt i nogle sammenhænge.

Nogle præfix kan "skjule" sig. Arealenheden 1 hektar betyder 1 hekto-ar = 100 ar. 1 ar = 100m^2, så 1 hektar = 100×100m^2 = 10000m^2. 1 hektar forkortes til 1 ha.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Omregning af enheder

Model 1

Længder

	$\cdot 10$		$\cdot 10$		$\cdot 10$		$\cdot 10$		$\cdot 10$		$\cdot 10$	
km		**hm**		**dam**		**m**		**dm**		**cm**		**mm**
	$/10$		$/10$		$/10$		$/10$		$/10$		$/10$	

Areal

	$\cdot 10^2$		$\cdot 10^2$		$\cdot 10^2$		$\cdot 10^2$		$\cdot 10^2$		$\cdot 10^2$	
km^2		**hm^2**		**dam^2**		**m^2**		**dm^2**		**cm^2**		**mm^2**
	$/10^2$		$/10^2$		$/10^2$		$/10^2$		$/10^2$		$/10^2$	

Rumfang

	$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$	
km^3		**hm^3**		**dam^3**		**m^3**		**dm^3**		**cm^3**		**mm^3**
	$/10^3$		$/10^3$		$/10^3$		$/10^3$		$/10^3$		$/10^3$	

Obs: I de grå områder er enheder, som sjældent anvendes.

Husk

dm^3=L

cm^3=ml

Model 2

Længde				
			↓Gange med 1.000←	**Kilometer (km)**
		↓Gange med 10←	**Meter (m)**	→Dividere med 1.000↑
	↓Gange med 10←	**Decimeter (dm)**	→Dividere med 10↑	
↓Gange med 10←	**Centimeter (cm)**	→Dividere med 10↑		
Millimeter (mm)	→Dividere med 10↑			
Areal				
			↓Gange med 1.000.000 (eller 1.000^2)←	**Kvadratkilometer (km^2)**
		↓Gange med 100 (eller 10^2)←	**Kvadratmeter (m^2)**	→Dividere med 1.000.000 (eller 1.000^2)↑
	↓Gange med 100 (eller 10^2)←	**Kvadratdecimeter (dm^2)**	→Dividere med 100 (eller 10^2)↑	
↓Gange med 100 (eller 10^2)←	**Kvadratcentimeter (cm^2)**	→Dividere med 100 (eller 10^2)↑		
Kvadratmillimeter (mm^2)	→Dividere med 100 (eller 10^2)↑			
Ekstra: *En hektar = kvadrat med en sidelængde på 100 meter = 100 gange 100 = 10.000 m^2*				
Rumfang I (Udgangspunkt i m^3)				
			↓Gange med 1.000.000.000 (eller 1.000^3)←	**Kubikkilometer (km^3)**
		↓Gange med 1.000 (eller 10^3)←	**Kubikmeter (m^3)**	→Dividere med 1.000.000.000 (eller 1.000^3)↑
	↓Gange med 1.000 (eller 10^3)←	**Kubikdecimeter (dm^3)**	→Dividere med 1.000 (eller 10^3)↑	
↓Gange med 1.000 (eller 10^3)←	**Kubikcentimeter (cm^3)**	→Dividere med 1.000 (eller 10^3)↑		
Kubikmillimeter (mm^3)	→Dividere med 1.000 (eller 10^3)↑			
Ekstra: *En kubikdecimeter (dm^3) = en liter (L)* *En kubikcentimeter (cm^3) = en milliliter (ml)*				
Rumfang II (Udgangspunkt i liter)				
			↓Gange med 100←	**Hektoliter (hl)**
		↓Gange med 10←	**Liter (L)**	→Dividere med 100↑
	↓Gange med 10←	**Deciliter (dl)**	→Dividere med 10↑	
↓Gange med 10←	**Centiliter (cl)**	→Dividere med 10↑		
Milliliter (ml)	→Dividere med 10↑			
Ekstra: *En liter (L) = En kubikdecimeter (dm^3)* *En milliliter (ml) = kubikcentimeter (cm^3)*				
Vægt				
		↓Gange med 1000←	**Tons (t)**	
	↓Gange med 1000←	**Kilogram (kg)**	→Dividere med 1000↑	
↓Gange med 1000←	**Gram (g)**	→Dividere med 1000↑		
Milligram (mg)	→Dividere med 1000↑			
Ekstra: *Hvis massefylden er 1 (g/cm^3) gælder følgende:* *1 tons ↔ 1 m^3* *1 kg ↔ 1 dm^3* *1 gram ↔ 1 cm^3* *Hvis massefylden er 2 (g/cm^3) gælder følgende:* *2 tons ↔ 1 m^3 Osv.*				

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Tal og Algebra

Algebra er et område i matematikken, hvor man regner med både tal og bogstaver. Bogstaverne indgår som variabler for tal, hvilket vil sige, at bogstaverne erstatter tal, som man ikke kender.

- Algebra er generelt regler for, hvordan man regner. Herunder regnehierarkiet.
- Et bogstav kan også erstattes med et tal.
- Man møder algebra i forbindelse med fx reduktion.
- Algebra bruger vi tit i formler
  - Fx rumfanget af en kasse $V = l \cdot b \cdot h$
  - (Vi ved fra andre steder at V står for volumen (rumfang), l for længde, b for bredde og h for højde.)
- Man bruger også ofte algebra, når man skal forklare noget inden for matematik.
  - Fx hvordan man dividerer et heltal med en brøk.
    - $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$

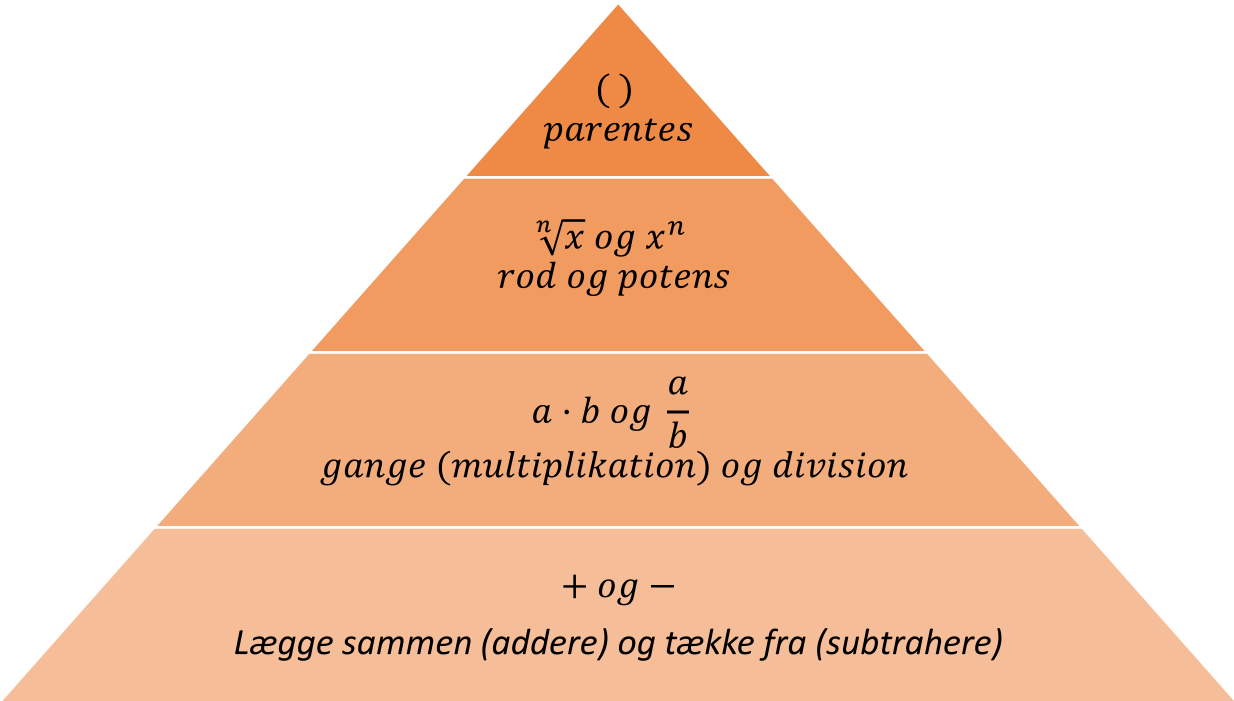
Bemærk:

- Værdier som er **ens** - giver man **ens** bogstav.
- Værdier som er **forskellige** - giver man **forskellige** bogstaver
  - Fx. kan 5+5+4=14 skrives som a+a+b=c
- $2 \cdot a$ kan man skrive som 2a. Der er altså et usynligt gangetegn mellem tallet og bogstavet.
- Forskel mellem at multiplicere og addere:
  - $s \cdot s = s^2$
  - $s + s = 2s$

Husk at lighedstegnet (=) betyder, at værdien på begge sider af lighedstegnet (=) skal være helt ens.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Regneregler-Regnehierarkiet



Regnehierarkiet fungerer på den måde, at det øverst i pyramiden er det, som man regner først. To ”regneoperationer”, som er på samme niveau i pyramiden, regnes i læseretningen fra venstre mod højre.

Eksempel:
$8 - 6 - 4$
Her skal man først sige 8-6 og derefter trække 4 fra.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Parentesregler

Plusparentes

Når der står et plus eller intet fortegn foran parentesen.
En plusparentes kan uden videre fjernes.
Eksempel:

$$(2a+3)+(4a+2)=2a+3+4a+2$$

Minusparentes

Når der står et minus foran parentes. (Markeret med gult)
En minusparentes fjernes ved, at alle led i minusparentesen skifter fortegn og minus foran parentesen fjernes. (Ændrede fortegn vises med grønt)
Eksempel

$$(2a+3)-(-4a+2)=2a+3+4a-2$$

Gange ind i en parentes

Gøres ved at gange ind i alle led i parentesen
Eksempel

$$2\cdot(2a+b)=2\cdot 2a+2\cdot b$$

Division af en parentes med et tal

Gøres ved at alle led i parentesen divideres med tallet

Eksempel

$$\boxed{\frac{(4a+2b)}{2}=\frac{4a}{2}+\frac{2b}{2}=2a+b}$$

Kvadratsætninger

Kvadratet af en toleddet størrelses sum

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

Udregning:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=(a\cdot a)+(a\cdot b)+(b\cdot a)+(b\cdot b)=a^2+b^2+2ab$$

Kvadratet af en toleddet størrelses differens

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

Udregning:

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=(a\cdot a)+(a\cdot -b)+(-b\cdot a)+(-b\cdot -b)=a^2+b^2-2ab$$

To leds sum gange de samme to leds differens

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Udregning:

$$(a+b)\cdot(a-b)=(a\cdot a)+(a\cdot -b)+(b\cdot a)+(b\cdot -b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

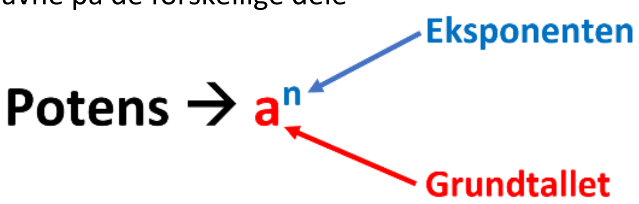
Potens

Potens er en måde at repræsentere et produktet, når samme faktor indgår et bestemt antal gange i en multiplikation.

a^n betyder, at faktoren **a** skal indgå **n** antal gange i multiplikationen.

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a\text{, hvor } \mathbf{a} \text{ indgår som faktor } \mathbf{n} \text{ antal gange.}$$

Navne på de forskellige dele



a kaldes for *grundtallet*, *basen* eller *roden*

n kaldes for *potenseksponenten* eller *eksponenten*.

Eksempel:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

- Grundtallet er 3, hvilket viser, at det er tallet 3, som skal indgå som faktor.
- Eksponenten er 4, hvilket viser antal gange, grundtallet indgå som faktor.
- Produktet er 81, hvilket viser, at $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ giver produktet 81.

Titals-potenser kan bruges til at beskrive meget store eller meget små tal

10^0 =	1	(Et ettal efterfuldt af 0 nuller)	
10^1 =	10	(Et ettal efterfuldt af 1 nul)	**tiere**
10^2 =	100	(Et ettal efterfuldt af 2 nuller)	**hundrede**
10^3 =	1000	(Et ettal efterfuldt af 3 nuller)	**tusinde**
10^4 =	10.000	(Et ettal efterfuldt af 4 nuller)	
10^5 =	100.000	(Et ettal efterfuldt af 5 nuller)	
10^6 =	1.000.000	(Et ettal efterfuldt af 6 nuller)	**million**
10^9 =	1.000.000.000	(Et ettal efterfuldt af 9 nuller)	**milliard**
10^{12} =	1.000.000.000.000	(Et ettal efterfuldt af 12 nuller)	**billion**
10^{15} =	1.000.000.000.000.000	(Et ettal efterfuldt af 15 nuller)	**billiard**

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0{,}1$

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Potensregler

Et grundtal med en eksponent ganget med samme grundtal med en anden eksponent

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

$Eks.\ 4^5 \cdot 4^2 = 4^{5+2} = 4^7 = 16384$

Et grundtal med en eksponent divideret med samme grundtal med en anden eksponent

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$Eks.\ \frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3 = 64$

Et grundtal med en eksponent, som opløftes i en anden potens

$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

$Eks.\ (2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10} = 1024$

Et grundtal med en eksponent ganget med et andet grundtal med samme eksponent

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$Eks.\ 4^3 \cdot 2^3 = (4 \cdot 2)^3 = 8^3 = 512$

Et grundtal med en eksponent divideret med et andet grundtal med samme eksponent

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$Eks.\ \frac{4^3}{2^3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = (2)^3 = 8$

En potens, hvor grundtallet er en brøk

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$Eks.\ \left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$

Et grundtal med en negativ eksponent

$a^{-n} = \frac{\mathbf{1}}{a^n}$

$Eks.\ 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

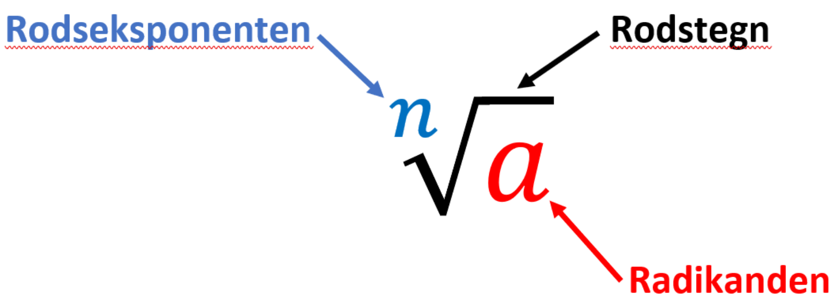
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Rødder

Rødder indenfor matematik betyder, at man skal finde den faktor, som indgår et bestemt antal gange i en multiplikation, hvor produktet har samme værdi, som tallet under rodstegnet.

Man kan skrive det som $\sqrt[n]{a}$, hvor n er antallet af gange samme faktor skal indgå i en multiplikation, for at få værdien **a** som produkt. Det er værdien af denne faktor, som man er interesseret i at finde, når man arbejder med rødder.

Navne på de forskellige dele:



Eksempel:

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

Når faktoren 3 indgår 4 gange i en multiplikation, så giver det 81.

$$(3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81)$$

Derfor er værdien af $\sqrt[4]{81}$ = 3

Navne på rødder

Hvis man skal snakke om eksemplet ovenfor, så omtales $\sqrt[4]{81}$ som "Den 4. rod af 81".
Men ofte vil man kun skulle arbejde med enten kvadratroden som er den 2. rod eller kubikroden, som er den 3. rod.

Kvadratroden $\sqrt{x}$

Kvadratroden vil sige, at man skal finde det tal, der indgår som faktor 2 gange i en multiplikation, som giver den værdi, som står under rodstegnet. Umiddelbart vil det sige, at man finder "Den 2. rod af et tal", hvilket kan skrives således $\sqrt[2]{x}$. Men ofte vil man undlade at skrive 2-tallet og bare skrive $\sqrt{x}$.

Eksempel:

$$\sqrt{25} = 5$$

Det giver tallet 5. Det gør det fordi, at når 5 indgår 2 gange i en multiplikation, så giver det 25.

$$5 \cdot 5 = 25$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Kubikroden $\sqrt[3]{x}$

Kubikroden vil sige, at man skal finde det tal, der indgår som faktor 3 gange i en multiplikation, som giver den værdi, som står under rodstegnet. Umiddelbart vil det sige, at man finder ”Den 3. rod af et tal”, hvilket kan skrives således $\sqrt[3]{x}$.

Eksempel:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

Det giver tallet 4. Det gør det fordi, at når 4 indgår 3 gange i en multiplikation, så giver det 64.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Regler for rødder

Kvadratroden af et produkt

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Eksempel:

$$\sqrt{64 \cdot 81} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{81} = 8 \cdot 9 = 72$$

Produktet af kvadratrødder

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Eksempel:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

Division af to kvadratrødder

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Eksempel:

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$$

Kvadratroden af en division

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Eksempel:

$$\sqrt{\frac{144}{9}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Sammenhæng mellem potens og rødder

Bemærk at der er følgende sammenhæng mellem potens og rødder

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Eksempler

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[r]{a^p} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{p \cdot 1}{r}} = a^{\frac{p}{r}}$$

Eksempel

$$\sqrt[4]{9^2} = \left(9^2\right)^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{2 \cdot 1}{4}} = 9^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Redigeret: 9. november 2023

Ligninger

Når man løser ligninger, handler det i bund og grund om at finde den ukendte værdi, som kan sættes ind på x'ets plads, så der er "balance" mellem højre og venstre side af lighedstegnet.

Så man kan se ligninger som en vægt - hvor der skal være "ligevægt" på begge sider af lighedstegnet

5 = 5	Her er der ligevægt
4=5	Her er der ikke ligevægt, der er noget galt
x+4 = 5	Her er der ligevægt hvis x =1

Regler:

- Du må lægge det samme tal til på begge sider af lig med
- Du må trække det samme tal fra på begge sider af lig med
- Du må gange med det samme tal på begge sider af lig med (Dog må tallet ikke være 0)
- Du må dividere med det samme tal på begge sider af lig med (Dog må tallet ikke være 0)
- (Du må sætte i samme potens på begge sider af lig med)
- (Du må tage den samme rod på begge sider af lig med)

HUSK:

Hvis du ganger eller dividere, er det alle led, som skal ganges eller divideres!

Hvis du er usikker, kan du sætte hele udtrykket i parentes, inden du lægger til, trækker fra, ganger eller dividerer!

Bemærk:

Ofte bruger man bogstavet x til at vise, at der er en ukendt værdi.

Når man løser ligninger, handler det om at få 1 x til at stå alene, så man kan finde den ukendte værdi "x".

Det er ofte en god start, hvis man samler x'erne på den side, hvor der er flest.

Ved ligningsløsning starter man nedefra i regnehierarkiet - Man starter altså med at addere (+) og subtrahere (-).

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksempel 1

$3 + x = 9$	Vi vil gerne have "x'er" samlet på den ene side og tallene på den anden side af lig med. Man siger, at man "isolerer x". Derfor vil vi gerne fjerne de "3" på venstre side af lig med. Det gør vi ved at trække 3 fra på begge sider
$3 + x - 3 = 9 - 3$	Ved at reducere ligningen kommer vi frem til, at x=6.
$x = 6$	Så det betyder, at løsningen på ligningen er værdien 6. Det betyder, at 6 altså er det tal, som vi kan sætte ind på x'ets plads, så der er "balance" i ligningen.

Eksempel 2

$2x + 5 = 9$	Vi skal have x'erne isoleret.
$(2x + 5) - 5 = 9 - 5$	Ved at reducere ligningen kommer vi frem til, at 2x=4
$2x = 4$	Når vi ved, at 2 x er lig med 4, så kan vi finde ud af, hvad 1x er, ved at dividere med 2 på begge sider af lig med.
$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$	Når vi har lavet divisionen, kommer vi frem til, at x=2
$2 = x$	Så løsningen på ligningen er at x skal være 2

Eksempel 3

$2(4x - 3) = 4 - (2x - 8)$	Vi ganger ind i parentesen og ophæver minusparentesen.
$8x - 6 = 4 - 2x + 8$	Når reducerer og kommer frem til at 10x=20
$10x = 18$	Vi divider med 10 på begge sider af lig med
$x = 1{,}8$	Løsningen er at x skal være 1,8

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Uligheder

De fleste regler for løsning af ligninger gælder også for løsning af uligheder.

Det vil sige, at man må…

- Gange
- Dividere
- Lægge til
- Trække fra

…med det samme tal på begge sider (dog ikke 0).

DOG skal man være opmærksom på, at:

- hvis man ganger eller dividerer med et negativt tal, så ”vender man uligheden”.
    - Så ”>” bliver til ”<” og ”<” bliver til ”>”
        - Eks: ”5<x” bliver til ”-5>-x” når man ganger med ”-1”
- man kan ikke bytte om på højre og venstre side på samme måde, som ved ligninger.
    - Eks. er ”x=5” det samme som ”5=x”.
        - **MEN** ”x<5” er **IKKE** det samme som ”5<x”
- ofte er løsningen af en ulighed en gruppe af tal.
    - Derfor kan man ofte angive løsningen i et interval.
        - Eks: løsningen til ”5<x” er]5; ∞[

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Brøker

En brøk:

Består af en TÆLLER (Toppen) og NÆVNER (Nederst). Både tæller og nævner skal være et helt tal, hvis brøken skal være et rationelt tal. Nævnerne kan aldrig være 0.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{tæller}{nævner}}$$

ÆGTE OG UÆGTE BRØKER

Uægte brøk: (brøk, hvor tæller er større end nævneren)

- Fx: $\frac{10}{3}$

Ægte brøk: (brøk, hvor nævneren er større end tælleren)

- Fx: $\frac{3}{10}$

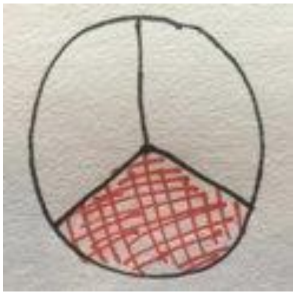
Blandet tal: (Et tal der består af et helt tal samt en brøk og som kan omskrives til en uægte brøk)

Fx: $2\frac{2}{3}$ som kan omskrives til: $2\frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ eller $\frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{8}{3}$

Forkorte og forlænge brøker

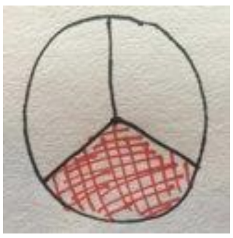
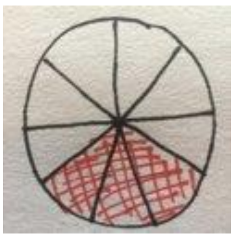
Man forkorter en brøk ved at dividere i både tæller og nævner med det samme tal.

- Fx: $\frac{3}{9} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3}$

 => 

Man kan forlænge en brøk ved at gange i både tæller og nævner med det samme tal.

- Fx: $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$

 => 

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

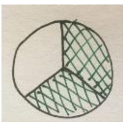
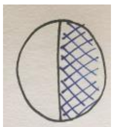
Addere to brøker (+)

Start med at finde en fællesnævner, hvilket er et tal, som begge nævnere går op i.
Det kan f.eks. være de to nævnere ganget med hinanden.
Når du finder en fællesnævner, så forlænger du faktisk brøkerne, så de har samme nævner.
Husk at forlænge både i tæller og nævner.
Når to brøker har samme nævner og skal adderes, må man addere tællerne og lade nævneren stå.

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}}$$

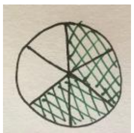
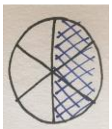
Eksempel:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$$

 + 

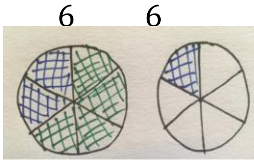
Finder fællesnævner

$$\frac{2\cdot \mathbf{2}}{3\cdot \mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}\cdot 3}{\mathbf{2}\cdot 3}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}$$

 + 

Adder (+) tællerne

$$\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$$



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

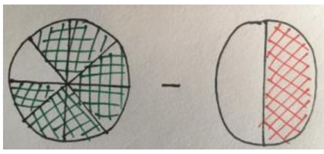
Subtrahere to brøker (-):

Kræver at man finder fællesnævner, et tal som begge nævnere går op i.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$$

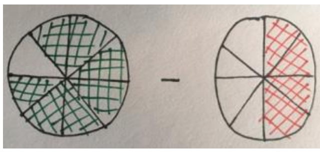
Eksempel:

$$\frac{7}{8}-\frac{1}{2}$$



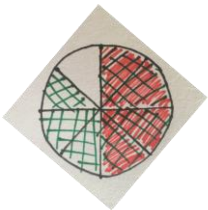
$$\frac{7}{8}-\frac{\mathbf{1}\cdot\mathbf{4}}{\mathbf{2}\cdot 4}=\frac{7}{8}-\frac{4}{8}$$

Find fællesnævner



$$\frac{7-4}{8}=\frac{3}{8}$$

Subtrakter (-) tællerne



- Jeg starter med at forlænge begge brøker med modsatte brøks nævner - husk når man forlænger en brøk skal man gange med det samme tal i tæller og nævner.
- Når to brøker har samme nævner og skal trækkes fra hinanden, trækker man tællerne fra hinanden og lader nævneren stå

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

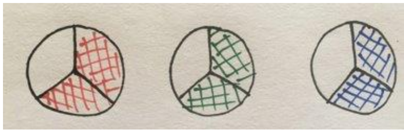
Gange brøk med heltal

Man ganger en brøk med et heltal ved at gange heltallet med tælleren. Det er lige meget om man skal gange en brøk med et heltal eller gange et heltal med en brøk.

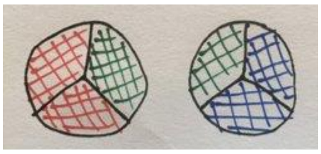
$$\boxed{a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}}$$

Eksempel:

$$3 \cdot \frac{2}{3}$$



$$\frac{3 \cdot 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$



- Jeg starter med at gange 3 med 2
- Nævneren beholder jeg - her 3
- Og til sidst forkorter jeg brøken, hvis det er muligt

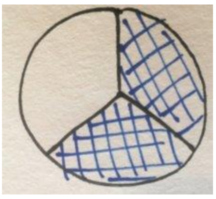
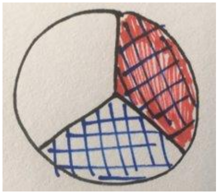
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Gange to brøker med hinanden

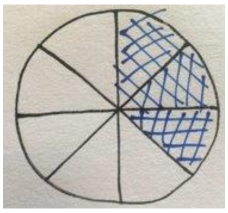
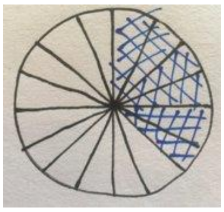
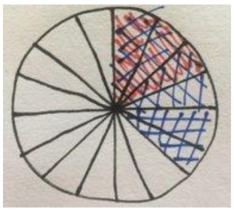
Man ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ dvs. } \frac{2}{3} \text{ en } \frac{1}{2} \text{ gang}$$


=>


$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 2} = \frac{3}{16} \; dvs. \frac{3}{8} \; en\ halv\ gang$$


=>

=>


Om muligt forkorter man brøken - dvs. dividere med det samme tal i tæller og nævner

Division og brøker

Videoforklaring til hvordan man dividerer med brøker:

http://matematikbanken.dk/L/224/

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Dividere to brøker med hinanden:

Man dividerer med en brøk ved at gange med den omvendte

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{ad}{bc}$$

Eksempel:

Eksempel 1

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 1}=\frac{4}{2}=2$$

Hvor mange flaskecolaer (0,25 liter) kan man fylde med en halvliters cola (0,5) liter

->

Eksempel 2

$$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}=\frac{12}{4}=3$$

Hvis du har $\frac{3}{4}$ marzarintærte, hvor mange mennesker kan så få $\frac{1}{4}$ stykke kage?

1. Jeg starter med at skrive den første brøk normalt og så gange med den anden brøk vendt om (hvor tæller er blevet til nævner og nævner er blevet til tæller)
2. Så ganger jeg tæller med tæller og nævner med nævner
3. Om muligt forkorter jeg brøken - dvs. dividerer med det samme tal i tæller og nævner

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Division af brøk med heltal

Man dividerer en brøk med et heltal ved enten at dividere tælleren med heltallet (ofte hvor heltallet går op i tælleren)

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}$$

Eksempel

$$\frac{2}{8}:2=\frac{2:2}{8}=\frac{1}{8}$$

Eller gange i nævneren (ofte hvor heltallet ikke går op i tælleren)

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c}$$

$$\frac{3}{8}:2=\frac{3}{8\cdot 2}=\frac{3}{16}$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Division af heltal med en brøk

Man divider et heltal med en brøk ved at gange med den omvendte brøk

$$a:\frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$$

Eksempel:

$$2:\frac{3}{8} = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Fakultet "!"

Bruges primært, når man arbejder med kombinatorik

$$a! = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Eksempel

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$\frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

Reducering

At reducere vil sige at forenkle et udtryk så meget som muligt.
Når du skal reducere, skal du huske at bruge reglerne i regnearternes hierarki.
Eksempel på reducering:

$$a + b + 5a + b - 2a - 6b + 2a + b = 6 \cdot a - 3 \cdot b$$

Eksempel på reducering hvor det er vigtigt du husker regnearternes hierarki:

$$\frac{a + a \cdot 2 \cdot (2a + 2a)}{2a} = \frac{a + 2a \cdot (4a)}{2a} = \frac{a + 8a^2}{2a} = \frac{a}{2a} + \frac{8a^2}{2a} = 0{,}5 + 4a$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Procent

Hvad er procent

% betyder hundrededele dvs. 5% = 0,05 = $\frac{5}{100}$

*Finde en **procentdel af** et tal?*

$$\text{tal} \cdot \text{procent} = \text{procentdel}$$

Eksempel: Hvor meget er 5% af 50:

$$50 \cdot 5\% = 2{,}5$$

eller

$$50 \frac{5}{100} = 2{,}5$$

eller

$$50\% \cdot 5 = 2{,}5$$

Finde et tal efter en procentdel er lagt til?

$$\text{startværdi} \cdot (100\% + x\%) = \text{slutværdi}$$

Eksempel: Læg 25% til 200

$$200 \cdot (100\% + 25\%) = 250$$

eller

$$200 \cdot (1 + 0{,}25) = 250$$

Finde et tal efter en procentdel er trukket fra?

$$\text{startværdi} \cdot (100\% - x\%) = \text{slutværdi}$$

Eksempel: Træk 20% fra 250

$$250 \cdot (100\% - 20\%) = 200$$

eller

$$250 \cdot (1 - 0{,}2) = 200$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Hvor mange % udgør en del af noget?

$$\frac{del}{noget} = del\ i\ \%$$

Eksempel: Hvor meget er 20 ud af 200?

$$\frac{20}{200} = 0{,}1 = 10\%$$

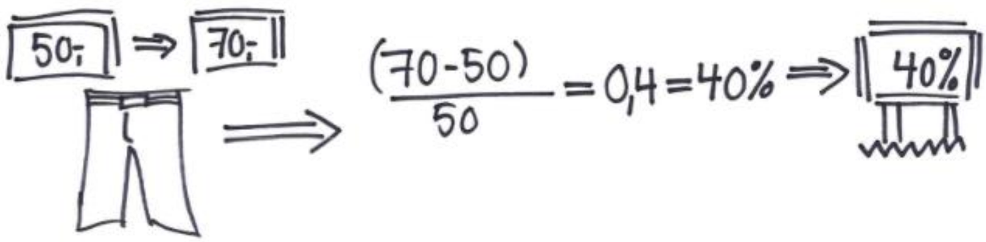
OBS:
Det betragtes som forkert at skrive $\frac{10}{100} \cdot 100 = 10\%$, da $\frac{10}{100} \cdot 100 = 10$ og $10\% = 0{,}1$
$10 = 0{,}1$ er ikke sandt. Ligmed-tegnet "=" betyder netop at begge sider af lighedstegnet er lige stort.

Stigning i procent

$$\frac{stigning}{startværdi} = stigning\ i\ \%$$

Eksempel: Et par bukser er steget fra 50 til 70 kr. Hvor meget er buksernes pris steget i procent?

$$\frac{70 - 50}{50} = 0{,}4 = 40\%$$

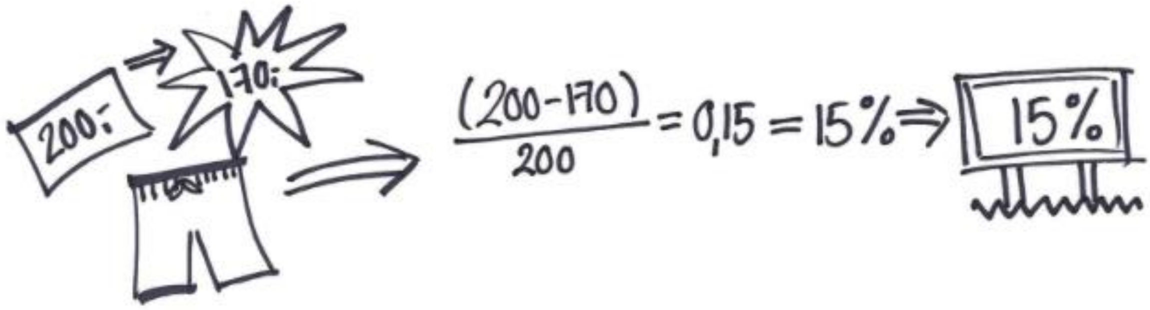


Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Fald i procent

$$\frac{fald}{startværdi} = fald\ i\ \%$$

Eks. Et par shorts er faldet fra 200 til 170 kr. Hvor meget er shortsenes pris faldet i procent?



$$\frac{200 - 170}{200} = 0{,}15 = 15\%$$

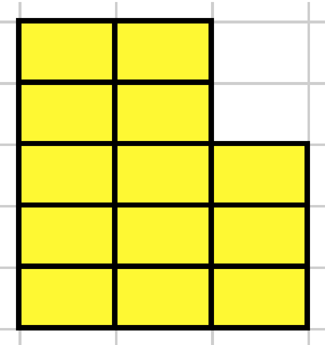
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Finde hele tallet ud fra en procentdel

13% af tallet er 260. Hvad er hele tallet?

13% = 260

$1\% = \frac{260}{13} = 20$



20	20	
20	20	
20	20	20
20	20	20
20	20	20

$100\% = 20 \cdot 100 = 2000$

20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

$$\frac{260}{13} \cdot 100 = 2000$$

Eller løs vha. WordMat og ligningsløsning

$$x \cdot 13\% = 260$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 2000$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Finde det oprindelige tal når man kender tallet efter procentdelen er lagt til

Generel formel:

$$\text{det}\,oprindelige\ tal = \frac{tallet\ \text{det}\,er\ steget\ til}{100\% + stigningsprocenten}$$

Eksempel:
Et tal er steget med 20% til 150.
Hvad var det oprindelige tal?
Dvs. det oprindelige tal er de 100%, så lægges de 20% oveni og det skal så svare til 150.

Eksempel på beregning vha. den blå formel:

$$\frac{150}{100\% + 20\%} = 125$$

Metode vha. WordMat

$$x + x \cdot 20\% = 150$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 125$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Indekstal

Indekstal måler ændringen i priser eller værdier over tid. Et tal over 100 betyder stigning, under 100 betyder fald. Det viser, om ting bliver dyrere eller billigere i forhold til et tidligere tidspunkt, f.eks. sidste år.

Basisår er det årstal man tager udgangspunkt i

$$\textit{indekstal} = \frac{\textit{værdi i aktuelt år}}{\textit{værdi basis år}} \cdot 100$$

Eksempel
Thildes lommepenge

Årstal	2008	2010	2014	2018
Årlig lommepenge	240	480	2400	4000,00
Indekstal	100	200	1000	1666,67

Basis år er 2008

Indekstal for basis år er altid = 100

Indekstal for år 2010 $\frac{480}{240} \cdot 100 = 200$

Indekstal for år 2014: $\frac{2400}{240} \cdot 100 = 1000$

Indekstal for år 2018: $\frac{4000}{240} \cdot 100 \approx 1666{,}67$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Moms

MOMS = meromsætningsskat
En afgift, som butikkerne betaler til skat for de varer, som butikken sælger.
Hvis en butiksindehaver gerne vil have 100 kr. for en vare, er han nødt til at sælge den for 125 kr., da SKAT skal have 25% i moms.

Se videoen
http://matematikbanken.dk/L/55/

Læg moms til

Regnemåde:

Pris uden moms ·(100%+25%)=Pris med moms

Kan omskrive til: Pris uden moms ·1,25=Pris med moms

Eller til: Pris uden moms·125%=Pris med moms

Eksempel

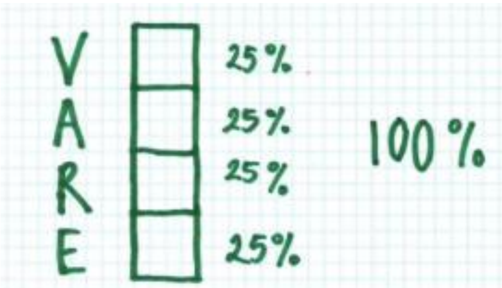
En vare koster *4* kr. uden moms.

Hvad er prisen med moms?

$$4 \cdot (100\% + 25\%) = 5\ kr.$$

Eller

$$4 \cdot 125\% = 5\ kr.$$



Eksempel hvor momsen skal lægges til:
Per skal have 150 kr. for en vare. Når han skal sælge den, er han derfor nødt til at lægge 25% oveni, for at finde den pris, som han skal sælge varen for.

$$150 + 150 \cdot 25\% = 187{,}5$$

Eller

$$150 \cdot (1 + 0{,}25) = 187{,}5$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Når momsen skal trækkes fra

Vare	Vare	Vare	Vare	Moms	=	Varens pris Med moms
20%	20%	20%	20%	20%	=	100%

Som man kan se på tegningen, så hvis kan man sætter varens pris med moms til 100%, så udgør momsen 20%

Eksempel hvor momsen trækkes fra:
I en butik hænger en bluse til 200 kr.
Hvor meget er prisen uden moms?

$$200 - 200 \cdot 20\% = 160$$

Eller

$$200 \cdot (1 - 0{,}2) = 160$$

Eller

$$\frac{200}{(1 + 0{,}25)} = 160$$

Anden moms: Tyskmoms

I andre lande f.eks. Tyskland er der andre satser for moms. Hvis f.eks. satsen for moms er 19%, kan man lægge momsen til ved at gange med 1,19 (1 + 19%). Man kan trække momsen ud af et beløb ved at dividere med 1,19. På samme måde kan man lægge momsen til et dansk beløb ved at gange med 1,25 og man kan trække det ud ved at dividere med 1,25.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Valuta

Når man skal omregne fra en valuta til en anden, skal man forholde sig til kurser.

EUR 759,38 betyder at du skal betale 759,38 DKR for at få 100 EUR fordi det er i Danmark du kigger på kurser.

Omregning fra fremmed valuta til dansk valuta

$$\boxed{Pris\ i\ danske\ kr. = Pris\ i\ fremmed\ valuta \cdot \frac{kursen}{100}}$$

Eksempel:

Du finder et fjernsyn i Tyskland. Du gerne vil købe fjernsynet og det koster 325 EUR. Hvor mange DKK er det?

$$\boxed{325 \cdot \frac{759{,}38}{100} = 2467{,}985}$$

Dvs. det koster 2467,99 DKK.

Omregning fra dansk valuta til fremmed valuta:

$$Pris\ i\ fremmed\ valuta = \frac{Pris\ i\ DKK}{\frac{kurs}{100}}$$

Eller

$$Pris\ i\ fremmed\ valuta = \frac{Pris\ i\ DKK \cdot 100}{kurs}$$

Du arbejder i en is-butik og sælger isvafler til 15 kr.

En tysker kommer og spørger hvad isen koster i euro.

$$\boxed{\frac{15}{\frac{759{,}38}{100}} = 1{,}975296}$$

Eller

$$\boxed{\frac{15 \cdot 100}{759{,}38} \approx 1{,}975296}$$

Dvs. isen koster 1,98 EUR.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Finde kursen når du kender prisen i danske kr. og fremmed valuta:

$$kursen = \frac{Pris\ i\ DK}{Pris\ i\ fremmed\ valuta} \cdot 100$$

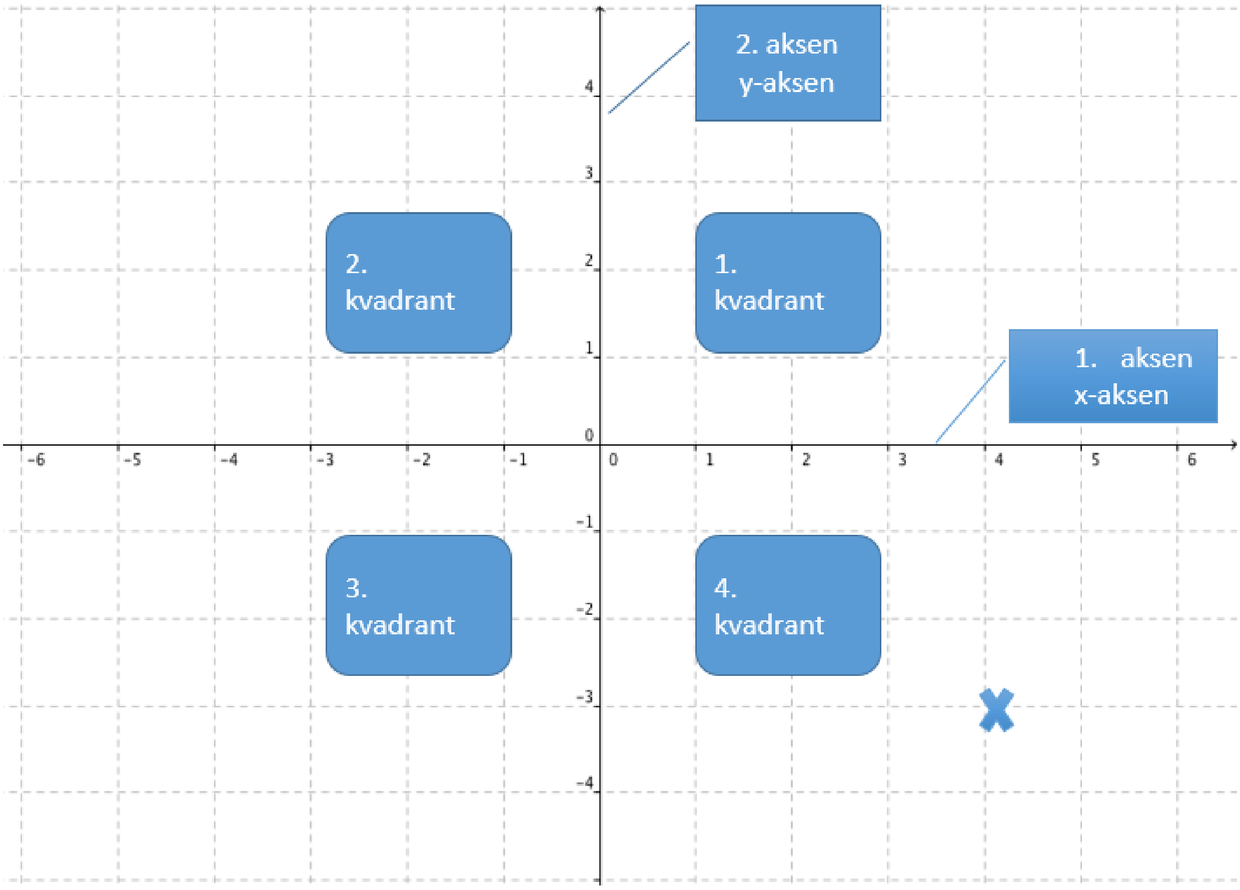
I en grænsebutik kan du købe flødeboller for 15,25 DKK eller 2 euro, hvad er kursen?

$$kursen = \frac{15{,}25}{2} \cdot 100 = 762{,}5$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node
Redigeret: 9. november 2023

Funktioner

Koordinatsystemet



Et koordinatsæt angives (x,y)

Eksempel

Krydset har koordinatsættet
(x,y) = (4,-3).

1. gradsfunktioner (lineær)

De fire repræsentationsformer af en 1. gradsfunktion

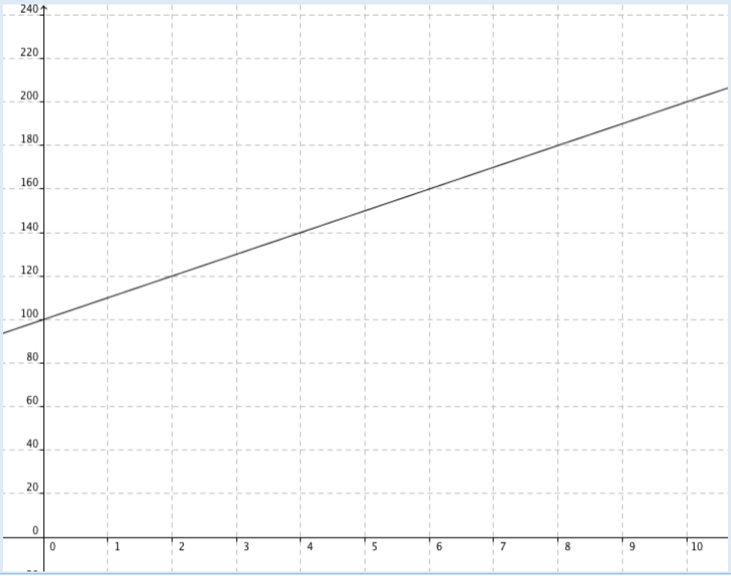
Funktionsforskrift

f(x) = 10x+100

Tabel "Sildeben"

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	80	90	100	110	120	130

Graf



Tekst

Erik sparer **hver uge 10 kr.** op.

Da han **starter** med at føre regnskab over pengene, har han **100 kr**.

Hvordan vil udviklingen se ud på hans bankkonto

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

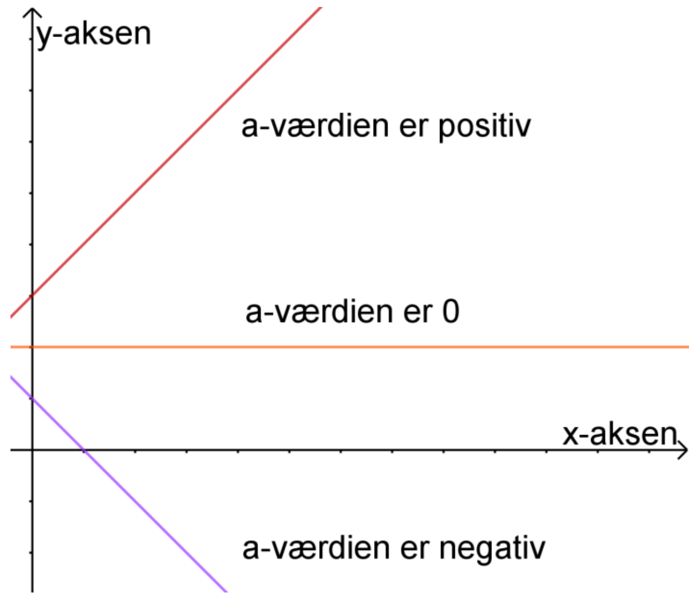
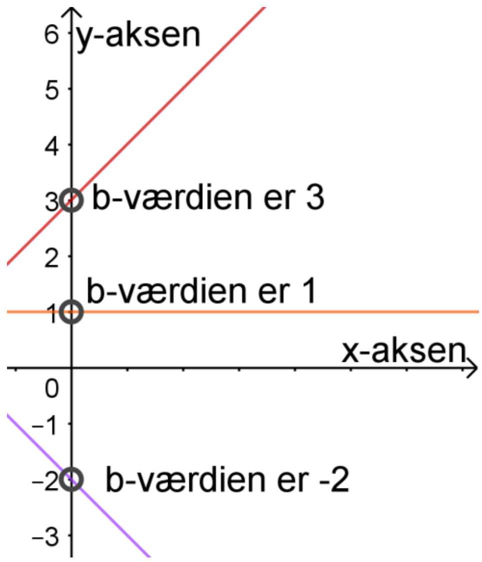
Standardfunktionsforskrift for en førstegradsfunktion:

$$f(x) = ax + b$$

a-værdien bestemmer hældningen på grafen
Hvis a er positiv → Grafen stiger fra venstre mod højre
Hvis a = 0 → Grafen vil være vandret
Hvis a er negativ → Grafen falder fra venstre mod højre
Jo større a-værdi, jo kraftigere hældning

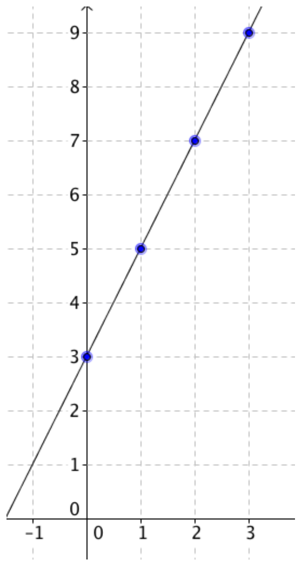
b-værdien bestemmer skæringen på y-aksen

Eksempler:

a-værdien	b-værdien
	

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Tegn grafen

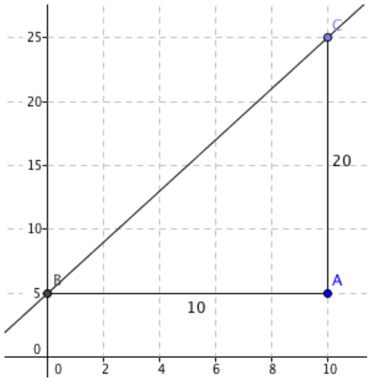


f(x)=2x+3.

Start i (0,b) her (0,3). Herfra bevæger du dig 1 enhed til højre (1 ud af x-aksen) og a enheder op (eller ned hvis a er negativ). I dette tilfælde er a = 2 så vi skal 1 enhed ud af x-aksen mod højre og 2 enheder op. Sådan fortsætter du til du har punkter nok til at lave en linje.

Find funktionsforskriften

Hvis man kigger på hældningen, kan man se, at grafen nedenfor stiger 20 enheder (y-værdien), hver gang men går 10 enheder mod højre (x-værdien bliver 10 større).



Derfor vil a-værdien her være $\frac{20}{10} = 2$

Samtidig kan man se, at grafen skærer y-aksen i 5. Derfor vil vores b-værdi blive 5.

Når vi sætter det ind i vores generelle forskrift f(x)=ax+b kommer vores funktion til at hedde:

f(x)=2x+5

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Beregne sig frem til skæringspunktet

Sæt de to funktioner lig hinanden, f(x) = g(x)

f(x) = 2x - 9 og g(x) = -x + 6

Når f(x) = g(x) så må det også være sådan at::

2x - 9= -x + 6

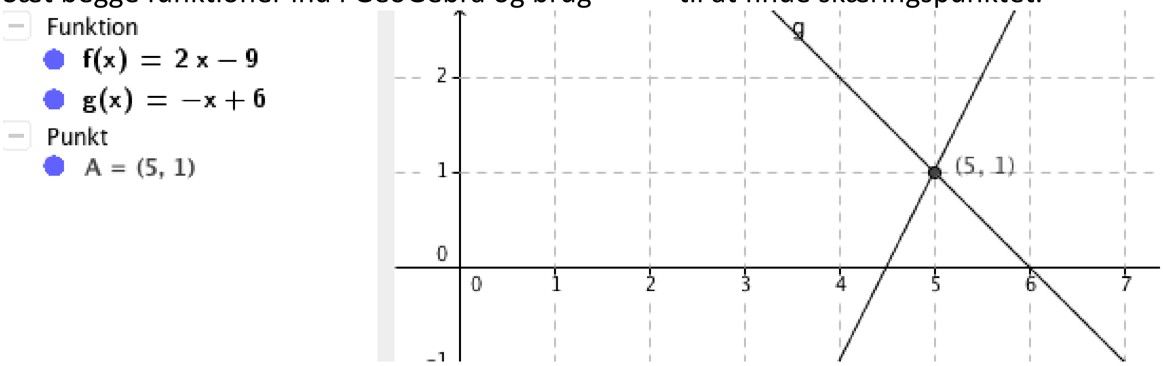
Ved at løse ligningen, finder vi ud af, at x = 5

Nu kan vi så tage vores x-værdi og sætte ind i en af de to funktioner

Når x = 5 så sættes 5 ind på x'ets plads i f(x)=2x-9 det bliver til $f(5) = 2 \cdot 5 - 9 = 1$
Sætter vi den ind i g(x)=-x+6 bliver det til $g(x) = -1 \cdot 5 + 6 = 1$
Hvis ikke det giver det samme, så har man lavet en fejl

Tegne sig frem til skæringspunktet

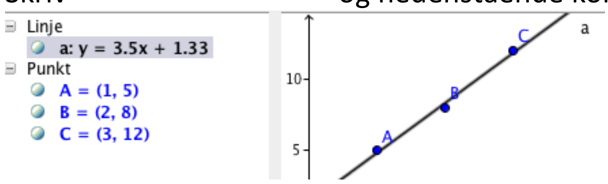
Sæt begge funktioner ind i GeoGebra og brug til at finde skæringspunktet.



Fitlinje

Bruges til at finde den bedst tilnærmede linje ud fra de givne punkter.
Indsæt A(1,5) og B(2,8) og C(3,12) i GeoGebra.

Skriv **FitLinje[A,B,C]** og nedenstående kommer frem.



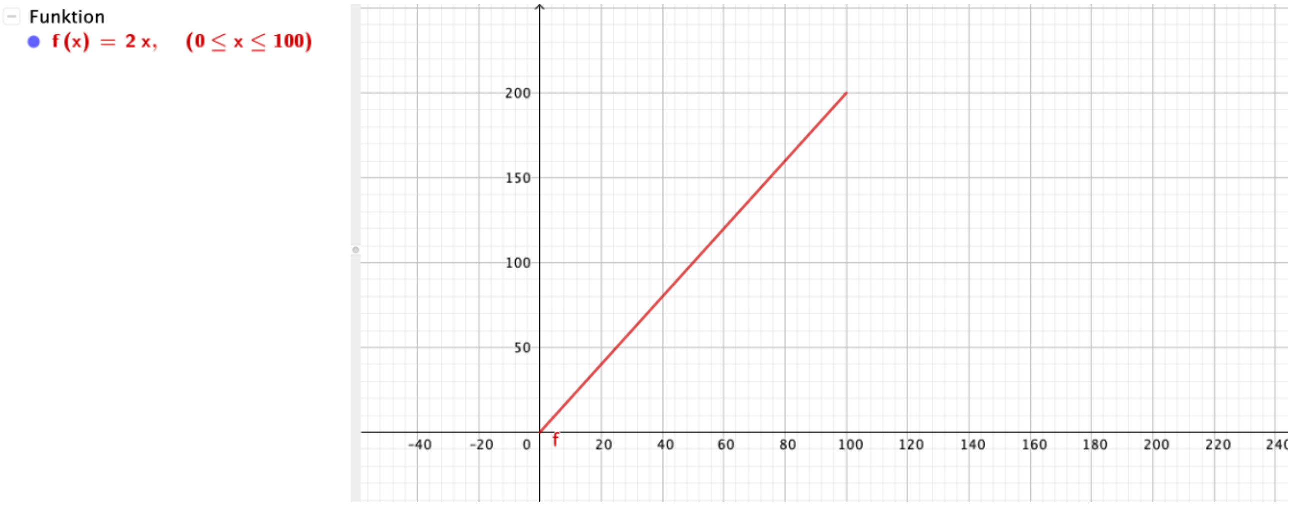
Her kan du aflæse den bedst mulige rette linje gennem punkterne. Det giver en linje med forskriften f(x)=3,5x+1,33

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

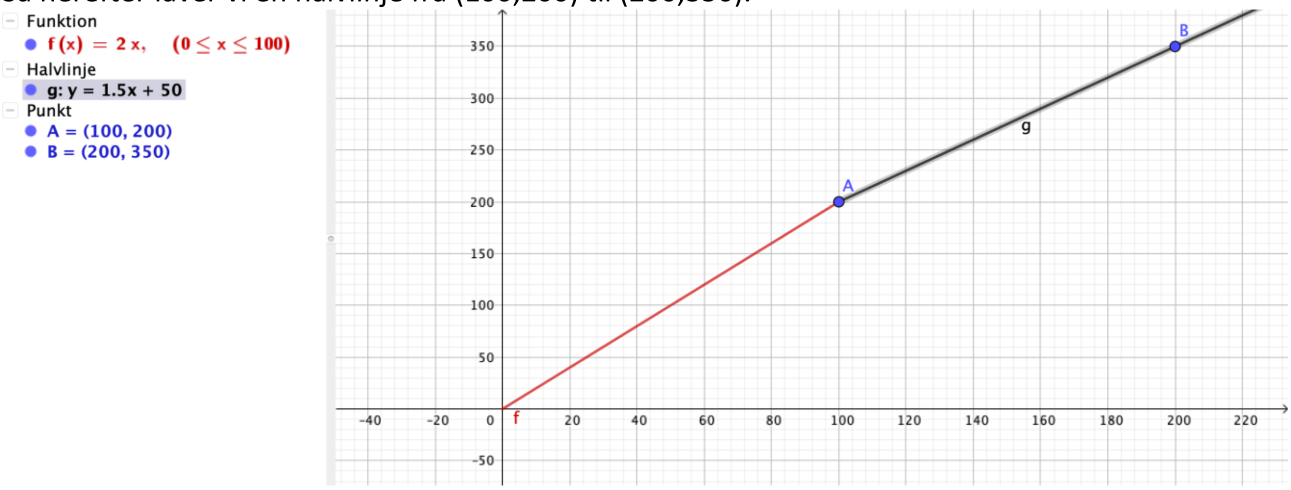
Stykkevis lineære funktioner i GeoGebra

Det koster 2 kr. pr. km de første 100 km og derefter falder prisen til 1,5 kr. pr. km.

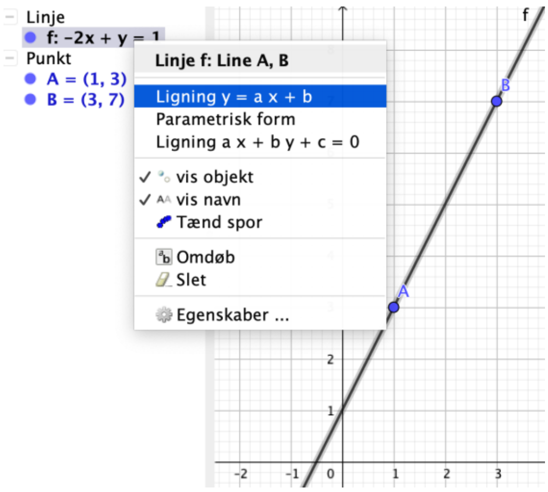
I inputlinjen skrives f(x)=2x,0<=x<=100



Derefter indsætter man 2 punkter.
Første punkt ved (100,200), som er der, hvor funktionen skifter hældning.
Næste punkt sættes ved fx 200 km, det koster 200 kr. (for de første 100km) + 1,5 · 100 kr. (for de næste 100km) =350 kr. Så punktet hedder (200,350)
Så herefter laver vi en halvlinje fra (100,200) til (200,350).



Find funktionsforskrift ud fra 2 punkter



Vi kender 2 punkter (1,3) og (3,7).
Sæt de to punkter ind i GeoGebra.
Lav en linje gennem punkterne.

Så kommer dette frem a: −2x + y = 1

Højre klik på udtrykket a: −2x + y = 1

og vælg Ligning y = a x + b

Så har du forskriften y=2x+1.

Beregn funktionsforskriften ud fra 2 punkter

Eks. Vi har punkterne (2,11) og (3,15)

Vi kalder punktet (2,11) for punkt **1**.
X-koordinaten (her 2) kalder vi for x_1 og y-koordinaten (her 11) kalder vi for y_1

Vi kalder punktet (3,15) for punkt **2**.
X-koordinaten (her 3) kalder vi for x_2 og y-koordinaten (her 15) kalder vi for y_2

(Det er i denne sammenhæng ligegyldigt, hvilket punkt vi vælger som punkt 1 og punkt 2.)

For at finde hældningen **a** skal vi bruge følgende formel:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

For at finde skæringspunktet med y-aksen **b**, skal vi bruge en af disse to formler.
$b = y_2 - x_2 \cdot a$ eller $b = y_1 - x_1 \cdot a$
(Det er lige meget, hvilken en af de 2 formler vi bruger.)

Nå vi sætter vores to punkter ind i formlerne, får vi følgende resultat

$$a = \frac{15 - 11}{3 - 2} = 4$$

$$b = 15 - 3 \cdot 4 = 3$$

Det vil sige at funktionsforskriften for den rette linje, som går gennem punkterne (2,11) og (3,15), er: f(x)=4x+3

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Andre funktioner

Ligefrem og omvendt proportionale funktioner

Ligefrem proportional:

Når en funktion er ligefrem proportional, betyder det, at x-værdierne og værdierne op af y-aksen (f.eks. f(x)) "følger" hinanden.

At en funktion er ligefrem proportional, betyder at:

- Når x-værdien **fordobles** → så **fordobles** f(x)-værdien også
- Når x-værdien **halveres** → så **halveres** f(x)-værdien også
- Når f(x)-værdien **fordobles** → så **fordobles** x-værdien også
- Når f(x)-værdien **halveres** → så **halveres** x-værdien også

En førstegradsfunktion er ligefrem proportional, hvis funktionen skær y-aksen i (0,0). Det vil sige, hvis b=0. Så forskriften skal være på formen: $f(x) = ax + 0$ som ofte bare skrives som $f(x) = ax$
Grafen har form som en ret linje

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

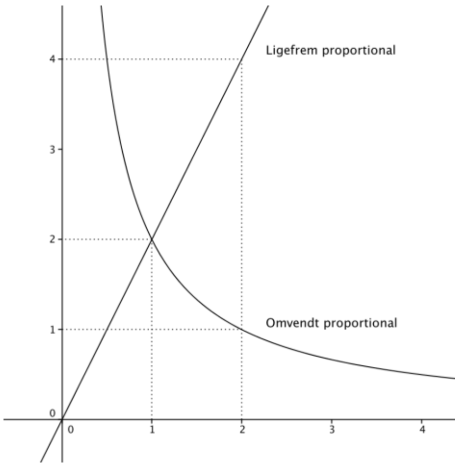
Standardfunktionsforskrift: $f(x) = \frac{a}{x}$

Omvendt proportional:

Når en funktion er omvendt proportional, betyder det, at x-værdierne og værdierne op af y-aksen (f.eks. f(x)) "reagerer" modsat af hinanden.

At en funktion er omvendt proportional, betyder at:

- Når x-værdien **fordobles** → så **halveres** f(x)-værdien også
- Når x-værdien **halveres** → så **fordobles** f(x)-værdien også
- Når f(x)-værdien **fordobles** → så **halveres** x-værdien også
- Når f(x)-værdien **halveres** → så **fordobles** x-værdien også



En funktion er omvendt proportional, hvis den har forskriften $f(x) = \frac{a}{x}$, hvor a≠0

Nogle gange skrives funktionen som $x \cdot f(x) = a$ eller $f(x) = a \cdot x^{-1}$

Grafen har form som en hyperbel.

Bemærk:

På den **ligefrem proportionale funktion**, når vil går fra x-værdien 1 til x-værdien 2, vil værdien på y-aksen gå fra 2 til 4. Altså her medfører en fordobling af x-værdierne, at værdierne på y-aksen også fordobles.

På den **omvendt proportionale funktion**, når vil går fra x-værdien 1 til x-værdien 2, vil værdien på y-aksen gå fra 2 til 1. Altså her medfører en fordobling af x-værdierne, at værdierne på y-aksen også halveres.

Kender du et punkt på hyperblen, så kan du finde forskriften

$$f(x) = \frac{x_1 \cdot y_1}{x}$$

Du kender punktet (2,3)

$$f(x) = \frac{2 \cdot 3}{x}$$

$$f(x) = \frac{6}{x}$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

2. gradsfunktioner (parabel)

Det er en 2. gradsfunktion, fordi x er opløftet i 2. potens (og der er ikke x'er som er opløftet i højere potenser)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Hvis a er større end 0, så vil grenene vender opad ☺

Hvis a er mindre end 0, så vil grenene vender nedad ☹

Jo mindre a-værdi, jo bredere bliver grafen.

Jo større a-værdi, jo smallere bliver grafen

Hvis b-værdien er 0 eller ikke er til stede i forskriften ligger toppunktet på y-aksen.

Hvis a- og b-værdien har **samme** fortegne (+a og +b eller -a og -b), så ligger toppunktet til **venstre** for y-aksen.

Hvis a- og b-værdien har **forskellige** fortegne (+a og -b eller -a og +b), så ligger toppunktet til **højre** for y-aksen.

C fortæller, hvor grafen skærer y-aksen

Formler til beregning

Diskriminant $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Toppunkt: $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$ & $y = \frac{-D}{4 \cdot a}$

Ekstremum

Nulpunkter:

$D < 0 \rightarrow ingen\ løsninger$
Dvs. grafen ikke skærer x-aksen

$D = 0 \rightarrow 1\ løsning$
Dvs. toppunktet ligger på x-aksen
$x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2 \cdot a}$

$D > 0 \rightarrow 2\ løsninger$
Dvs. grafen skærer x-aksen 2 steder

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2 \cdot a}$ & $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2 \cdot a}$

Rod

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksempel: $f(x) = x^2 + 2x - 2$

a= 1, b=2 og c=-2

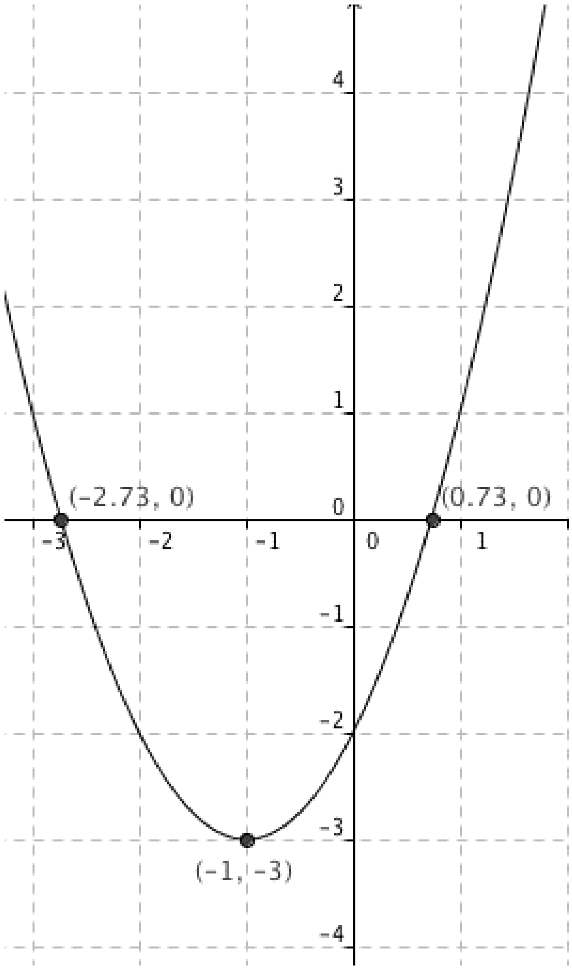
Diskriminant

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$

⇕ *Ligningen løses for D vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$D = 12$

Dvs. D er større end 0 og dermed er der 2 skæringer med x-aksen



Toppunkt (Ekstremum)

x-koordinat:

$$x = \frac{-2}{2 \cdot 1}$$

⇕ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$x = -1$

y-koordinat:

$$y = \frac{-12}{4 \cdot 1}$$

⇕ *Ligningen løses for y vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$y = -3$

Dvs. toppunktet hedder (x,y) = (-1,-3)

Nulpunkter (rod)

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2 \cdot 1}$$

⇕ *Ligningen løses for x1 vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$x_1 = 0{,}732050808$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2 \cdot 1}$$

⇕ *Ligningen løses for x2 vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$x_2 = -2{,}732051$

Dvs. grafen skærer x-aksen i x=0,73 og i x=-2,73

VIGTIGT:

Når I har beregnet/fundet nulpunkter og toppunkt vha. GeoGebra, så SKAL I forholde jer til, hvad de har af betydning, for den opgave der er stillet!

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Statistik

"Den statistiske værktøjskasse" – Statistiske deskriptorer

Hyppighed - h(x)

Hyppigheden angiver, hvor ofte (hyppigt) de forskellige observationer forekommer. Det er altså antallet af gange, en observation forekommer. Normalt angiver man hyppigheden med "h(x)"

Summeret hyppighed - H(x)

- Den summerede hyppighed er hyppighederne lagt sammen med de foregående hyppigheder.
- Den summerede hyppighed skrives "H(x)"

Frekvens - f(x)

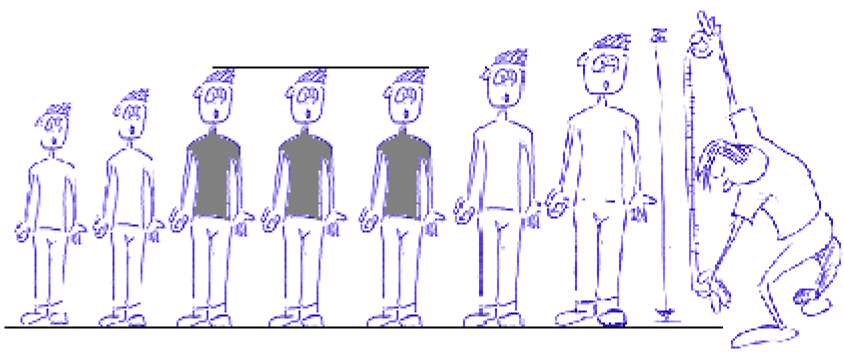
- Den hyppighed observationen kommer med i forhold til det samlede antal observationer.
- Det vil sige hyppighed divideret med antallet af observationer. Dette vil give et resultat i form af en brøk eller decimaltal.
- Vil man have resultatet i procent, skal flytte kommaet to pladser til højre og sætte %-tegnet bagved. Frekvens kan enten være i procent, brøk eller decimaltal. Det bestemmer du selv! Det vil sige, at 10%, $\frac{1}{10}$ eller 0,10 er det samme resultat på forskellige måde.

Summeret frekvens - F(x)

- Er ligesom ved summeret hyppighed, men her er det bare frekvenserne, som skal lægges sammen. Ofte vil det dog bliver mere præcist, hvis man finder den andel, som den summerede hyppighed udgør ud af det samlede antal observationer.

Typetallet

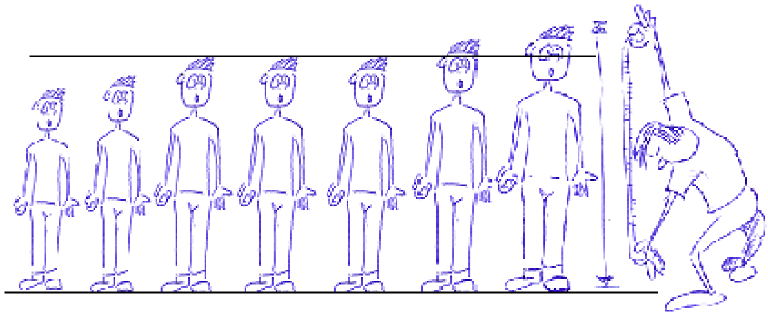
Typetallet er det tal, som er "typisk" for observationssættet. Det vil sige den observation, som forekommer flest gange i observationssættet.



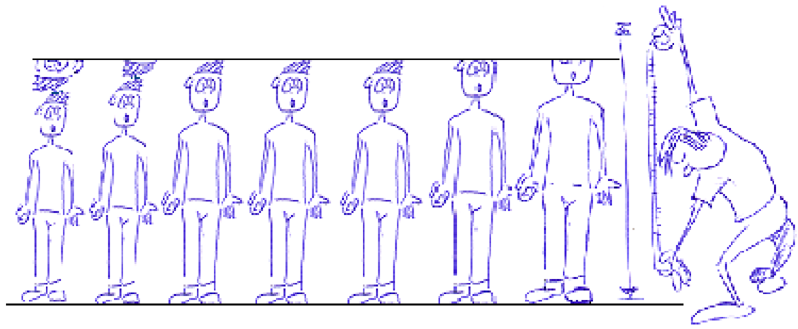
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Gennemsnittet

Gennemsnittet eller middeltallet er det tal, som man får, hvis man lægger alle observationer sammen og dividerer dette tal med antallet af observationer.

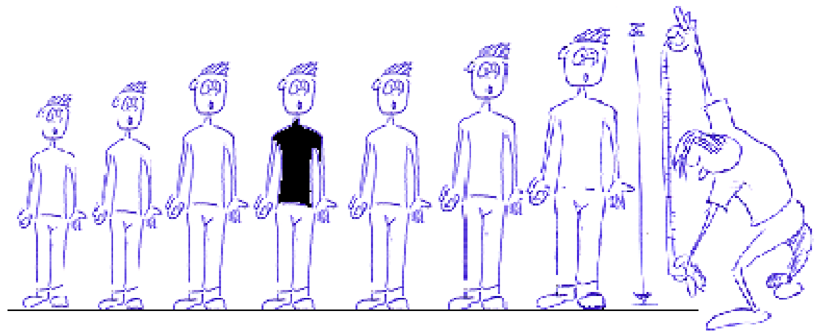


Hvis man forestiller sig, at vi har holdt kniven i den rigtig højde og har lavet det rigtige gennemsnit, vil det være sådan, at den mængde luft, der var mellem kniven og hoved på de første elever, svarer til den mængde, som vi har skåret af på de sidste elever.



Medianen

Den observation, som står i midten, hvis man stiller observationerne op i rækkefølge med de mindste tal først. Hvis der er et lige antal observationer, så der ikke er ***et*** tal i midten, tager du gennemsnittet af de 2 tal.[1]



[1] OBS: Medianen kan bestemmes på flere forskellige måder, men denne måde bruger GeoGebra

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Median, typetal eller gennemsnit

Den ene deskriptor er ikke ”bedre” at bruge end de andre. Det kommer an på observationssættet og det man vil undersøge. F.eks. er en af fordelen ved medianen i forhold til gennemsnittet, at medianen er mindre påvirket af ekstreme observationer (outliers). Er der stor forskel på median og gennemsnit, kan der måske være fejl i observationerne (f.eks. målefejl, tastefejl eller kommafejl) eller der kan bare være en stor spredning.

Størsteværdi

Den største observation i observationssættet.

- NB. Det er **ikke** det største **antal gange** en observation forekommer!

Mindsteværdi

Den mindste observation i observationssættet.

- NB. Det er **ikke** det mindste **antal gange** en observation forekommer!

Variationsbredden

Variationsbredden er forskellen på den største og den mindste observation i sættet.

- Variationsbredden finder man ved at trække største værdien og mindsteværdien fra hinanden.

Observationsdiagram - enkeltgrupperede observationer

Observationer Drenge:	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	Til gennemsnit
36	1	1	1%	1%	36
37	0	1	0%	1%	0
38	1	2	1%	3%	38
39	4	6	6%	9%	156
40	4	10	6%	14%	160
41	7	17	10%	25%	287
42	18	35	26%	51%	756
43	12	47	17%	68%	516
44	16	63	23%	91%	704
45	3	66	4%	96%	135
46	2	68	3%	99%	92
47	1	69	1%	100%	47
48	0	69	0%	100%	0
I alt	69				2927
Gennemsnit					42,42029

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksempler på formler i regnearket

	C	D	E	F	G	H
1	Observationer	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	til gemmensnit
2	36	1	=D2	=D2/$D$15	=F2	=D2*C2
3	37	0	=D3+E2	=D3/$D$15	=F3+G2	=D3*C3
4	38	1	=D4+E3	=D4/$D$15	=F4+G3	=D4*C4
5	39	4	=D5+E4	=D5/$D$15	=F5+G4	=D5*C5
6	40	4	=D6+E5	=D6/$D$15	=F6+G5	=D6*C6
7	41	7	=D7+E6	=D7/$D$15	=F7+G6	=D7*C7
8	42	18	=D8+E7	=D8/$D$15	=F8+G7	=D8*C8
9	43	12	=D9+E8	=D9/$D$15	=F9+G8	=D9*C9
10	44	16	=D10+E9	=D10/$D$15	=F10+G9	=D10*C10
11	45	3	=D11+E10	=D11/$D$15	=F11+G10	=D11*C11
12	46	2	=D12+E11	=D12/$D$15	=F12+G11	=D12*C12
13	47	1	=D13+E12	=D13/$D$15	=F13+G12	=D13*C13
14	48	0	=D14+E13	=D14/$D$15	=F14+G13	=D14*C14
15	i alt	=SUM(D2:D14)				=SUM(H2:H14)
16	Gennemsnit					=H15/D15
17						

Obs: Ovenstående formler skal tilpasses dit regneark - alt efter hvor du har dine kolonner og rækker.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Hjælp til at lave et statistisk observationsdiagram

Eks.

Observationssæt:

6	6	6	6	7	7	8	8	8	8	9	9	10	10	10	10	11	11	12	12
12	12	14	14	15	15	16	16	16	16	16	16	17	17	17	17	17	17	17	17

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)
6				
7				

- Marker boksene indeholdende tallene 6 og 7
- Træk i boksen nederste højre hjørne indtil der er alle tallene til og med 17

Indtast hyppighederne for observationerne i kolonnen h(x).

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)
6	4			
7	2			
8	4			
9	2			
10	4			
11	2			
12	4			
13	0			
14	2			
15	2			
16	6			
17	8			
	*			

- Stil dig i feltet med stjernen og skriv =sum(og marker felterne i h(x) eller tryk på ikonet Σ
- I stjernefeltet fremkommer antallet af observationer. I dette tilfælde er det ”40”, = det man fik at vide

Observation	h(x)	H(x)
6	4	*
7	2	
8	4	
9	2	
10	4	
11	2	
12	4	
13	0	
14	2	
15	2	
16	6	
17	8	
	40	

Stil dig i feltet med stjernen og tryk = og tryk derefter på den første celle i h(x)

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)
6	4	4		
7	2	*		
8	4			
9	2			
10	4			
11	2			
12	4			
13	0			
14	2			
15	2			
16	6			
17	8			
	40			

- Stil dig i feltet med stjernen og skriv =tryk på feltet til venstre (i dette tilfælde, hvor der står 2) skriv + og tryk på feltet over (i dette tilfælde feltet hvor der står 4) og tryk enter
- Marker det felt du har regnet i ved at trykke på det, derefter trækker du i feltets nederste højre hjørne, indtil du når bunden af statistiktabellen.

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)
6	4	4	*	
7	2	6		
8	4	10		
9	2	12		
10	4	16		
11	2	18		
12	4	22		
13	0	22		
14	2	24		
15	2	26		
16	6	32		
17	8	40		
	40			

- I stjernefeltet skriver du = trykker på første felt i h(x) skriver / og trykker på feltet med summen af hyppigheder i dette tilfælde 40 (husk at skrive et dollartegn foran bogstavet og foran tallet fx =B2/$B$14, for at låse cellen. Så refererer formlen til samme celle (med summen) hele vejen ned.
- Vælg at angive tal som procent ved at klikke på procent-knappen % i menuen.
- Marker det felt, du har regnet i, ved at trykke på det, derefter trækker du i feltets nederste højre hjørne, indtil du når bunden af statistiktabellen.

F(x) findes på samme måde som H(x) bare ved at bruge oplysninger fra f(x).

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	
6	4	4	10	10	
7	2	6	5	15	
8	4	10	10	25	nedre kvartil
9	2	12	5	30	
10	4	16	10	40	
11	2	18	5	45	
12	4	22	10	55	Median
13	0	22	0	55	
14	2	24	5	60	
15	2	26	5	65	
16	6	32	15	80	Øvre kvartil
17	8	40	20	100	
	40				

Følgende skema fremkommer og kvartilsættene kan aflæses.
- 8 indeholder fra 15-25% derfor er det nedre kvartil
- 12 indeholder fra 45-55% derfor er det medianen
- 16 indeholder fra 65-80% derfor er det øvre kvartil

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Kvartiler
1. kvartil, 2. kvartil og 3. kvartil er de observationer, som forekommer efter henholdsvis 25%, 50% og 75% af observationerne, når observationerne er stillet i rækkefølge med det mindste først.

Bemærk:
- At 1. kvartilen også kaldes 0,25-kvartilen eller nedre kvartil.
- At 2. kvartilen også kaldes medianen eller 0,50-kvartil.
- At 3. kvartilen også kaldes øvre kvartil eller 0,75-kvartilen

Grupperede og ikke-grupperede observationer
I nogle tilfælde kan det være en fordel at dele observationerne ind i grupper. F.eks. hvis man skulle lave en statistik over en skoleklasse med 25 elever, som springer længdespring i en idrætstime. Højest sandsynlig vil man få 25 forskellige resultater med en hyppighed på 1. Det giver os ikke et så meget bedre overblik over tallene. Derfor vil man ofte se, at tallene bliver inddelt i grupper. F.eks. 0-1 meter, 1 til 2 meter osv. Disse grupper kalder man i statistik for *intervaller.*

Grupperede observationer
Intervaller
Hvis man har mange uens observationer, kan man inddele oplysningerne i grupper, som også kaldes *intervaller*.

Ved grupperede observationer vil man normalt ikke kunne finde hverken typetal, størsteværdi, mindsteværdi og variationsbredde, fordi man ofte ikke kender de enkelte observationer, men kun har observationerne samlet i et hyppighedsskema. I nogle sammenhænge kan man dog snakke om et *typeinterval*, som er det interval, hvor der er flest observationer. Man kan også finde et gennemsnit, median og kvartilerne, men man gør det normalt på en lidt anden måde ved grupperede observationer.

Ofte ser man, at der er ”firkantede parenteser” omkring intervallerne ”[” og ”]” Disse parenteser angiver, om tallet er med eller ej. Hvis parentesen vender ind mod tallet, er tallet med. Vender parentesen væk fra tallet, betyder det, at tallet ikke er med, men tallene op til tallet er med.
- Eks. I intervallet [2;4[er tallet 2 med og så er tallene op til 4 også med, men tallet 4 er ikke med. Det vil sige 3,99999999999999999999999 osv. er med. Så man kan sige fra og med 2 til og ikke med 4.

Gennemsnit i forhold til intervalmidtpunkt
Hvis man skal finde gennemsnittet af observationer, som er inddelt i intervaller, hvor man ikke kan finde tilbage til de oprindelige observationer, skal man i første omgang finde intervalmidtpunktet. Det vil sige, man finder den midterste værdi i intervallet. Eks. hvis intervallet går fra 0 til 10, så er midtpunktet 5. Man finder intervalmidtpunktet, fordi man ikke ved hvordan observationerne

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

fordeler sig i intervallet. Derfor går man ud fra, at observationerne fordeler sig jævnt omkring midten af intervallet.

Hvis man havde kendt observationerne, ville man lægge dem sammen og så til sidst dividere med det samlede antal. Faktisk gør man lidt det samme, når man har observationerne i intervaller. Dog er det lettere at gange intervalmidtpunkterne.

- Eks. hvis intervalmidtpunktet er 5 og hyppigheden af intervallet er 3, så svarer det til, at man har observationerne 5, 5 og 5. Derfor er det lettere at sige 5 gange 3 end 5+5+5.
- De tal, som man får ud for de enkelte intervaller, lægger man sammen og dividerer med antallet af observationer (ikke antallet af intervaller).

Observationsdiagram grupperede observationer

Observationer	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	Interval midtpunkt	Til gennemsnit
[155-160[	1	1	1%	1%	157,5	157,50
[160-165[	1	2	1%	3%	162,5	162,50
[165-170[	2	4	3%	6%	167,5	335,00
[170-175[	10	14	14%	20%	172,5	1.725,00
[175-180[	22	36	32%	52%	177,5	3.905,00
[180-185[	16	52	23%	75%	182,5	2.920,00
[185-190[	12	64	17%	93%	187,5	2.250,00
[190-195]	5	69	7%	100%	192,5	962,50
I alt	69				Højde i alt	12.417,50
					Gennemsnit	179,96

Video der viser hvordan man laver ovenstående observationstabel
http://matematikbanken.dk/L/159/

	A	B	C	D	E	F	G
1	Observationer	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	Interval midtpunkt	Til gennemsnit
2	[155-160[	1	=B2	=B2/$B$10	=D2	157,5	=F2*B2
3	[160-165[	1	=C2+B3	=B3/$B$10	=E2+D3	162,5	=F3*B3
4	[165-170[	2	=C3+B4	=B4/$B$10	=E3+D4	167,5	=F4*B4
5	[170-175[	10	=C4+B5	=B5/$B$10	=E4+D5	172,5	=F5*B5
6	[175-180[	22	=C5+B6	=B6/$B$10	=E5+D6	177,5	=F6*B6
7	[180-185[	16	=C6+B7	=B7/$B$10	=E6+D7	182,5	=F7*B7
8	[185-190[	12	=C7+B8	=B8/$B$10	=E7+D8	187,5	=F8*B8
9	[190-195]	5	=C8+B9	=B9/$B$10	=E8+D9	192,5	=F9*B9
10	I alt	=SUM(B2:B9)		=SUM(D2:D9)		Højde i alt	=SUM(G2:G9)
11						Gennemsnit	=G10/B10

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Kvartiler

1. kvartil, 2. kvartil og 3. kvartil er de observationer, som forekommer efter henholdsvis 25%, 50% og 75% af observationerne, når observationerne er stillet i rækkefølge med det mindste først.

Bemærk:

- At 1. kvartilen også kaldes 0,25-kvartilen eller nedre kvartil.
- At 2. kvartilen også kaldes medianen eller 0,50-kvartil.
- At 3. kvartilen også kaldes øvre kvartil eller 0,75-kvartilen
- Kvartiler kan også findes ved grupperede observationer, men det kræver en sumkurve først

Diagrammer

Det er ikke alle diagramtyper, som bruges ved både grupperede og ikke-grupperede observationer. Nedenfor kan du se, hvornår de forskellige diagramtyper bruges.

Diagrammer til ikke-grupperede observationer

Hvis det er observationer, som ikke er inddelt i intervaller, vil man normalt bruge følgende diagrammer:

Boksplot

Skriv boksplot i input og vælg:

```
Input: Boksplot[ <yOffset>, <ySkalering>, <Start Værdi>, <Q1>, <Median>, <Q3>, <Slut værdi> ]
```

yOffset - hvor den vandrette linje i boksplottet skal være fx 1 (så vil den vandrette linje i boksplottet ligge ud for 1 på y-aksen)

ySkalering - hvor bredt boksplottet er fra den vandrette linje i boksplottet og ud til hver af siderne

Start Værdi - her indskrives mindsteværdien

Q1 - her indskrives 1. Kvartil

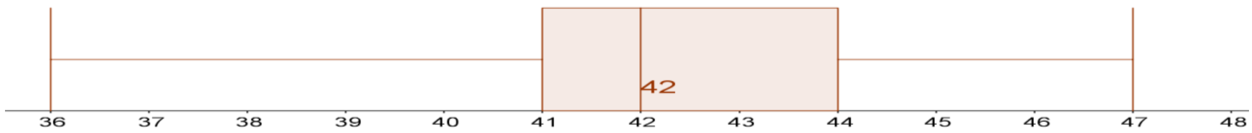
Median - her indskrives medianen

Q3 - her indskrives 3. Kvartil

Slutværdi - her indskrives størsteværdien

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksempel:
Viser drengenes skostørrelse fordeling



Et boksplot viser, mindsteværdi (36), 1. kvartil (41), median (42), 3. kvartil (44), størsteværdi (47) og variationsbredden (47-36=11).

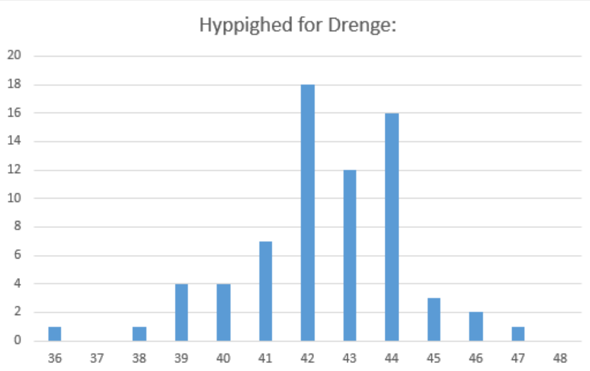
Ud fra boksplottet kan man se:

- at de midterste 50 % har en skostørrelse mellem fra 41 til 44
- at de første 50 % har en skostørrelse mellem fra 36 til 42
- at de sidste 50 % har en skostørrelse mellem fra 42 til 47
- at 25 % har en skostørrelse på max 41
- at 75 % har en skostørrelse på mindst 41
- at 75 % har en skostørrelse på max 44
- at de sidste 25 % har en skostørrelse på 44 eller derover.
- at forskellen i skostørrelsen i blandt de første 25% af observationerne er større end de sidste 25%

Bemærk: Hvis man har grupperet observationer, så er man nødt til at lave en sumkurve for at finde kvartilsættet, før man kan lave et boksplot.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Pindediagram

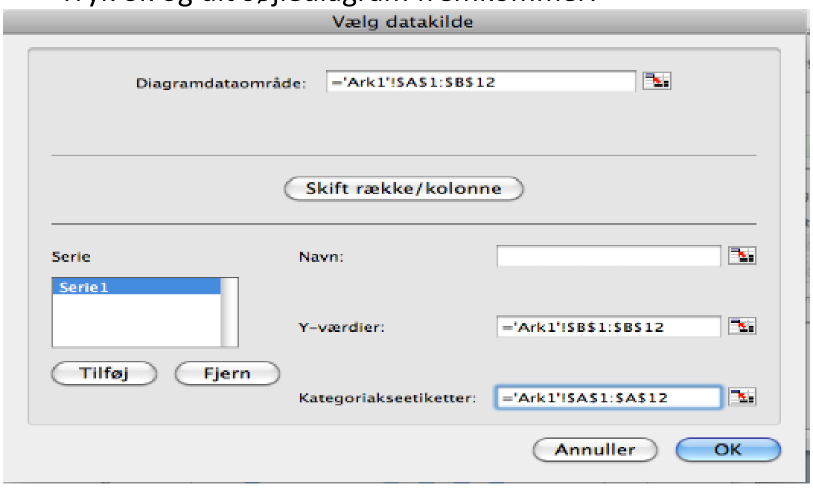


Ofte bliver der brugt mange navne om et diagram, som dette. Nogen kalder det stolpediagram, andre søjlediagram. Der findes ikke en entydig definition på, hvad der er pinde, stolpe- og søjlediagrammer. Man skal dog lægge mærke til, at under hver "pind" er der kun **et** tal.

- Til pindediagrammet bruger man kolonnen h(x) eller f(x) som serieværdi og skostørrelse som kategori.

Laves således i Excel

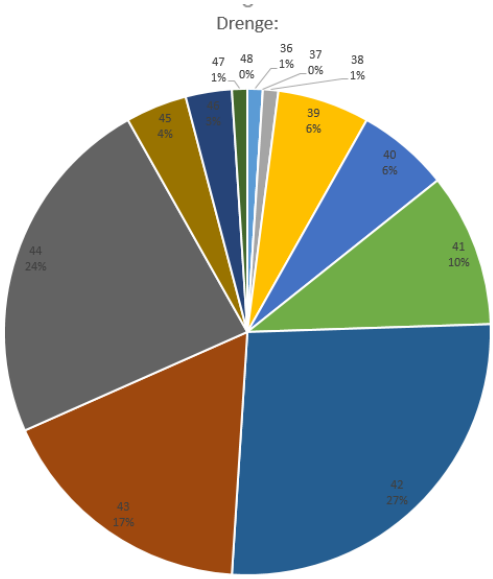
- Stil dig i den celle du gerne vil have diagrammet indsat i
- Tryk på indsæt tabel eller tabelikonet
- Højre klik i feltet der er kommet frem og tryk på marker data
- Tryk på tilføj serie
- Klik på den lille kasse helt ude til højre udfor hvor der står y-værdier, marker i Excel-kolonnen hvor dine y-værdier er (h(x) eller f(x))
- Klik på den lille kasse helt ude til højre udfor hvor der står kategorietiketter
- Marker i Excel-kolonnen, hvor dine x-værdier er (observationer)
- Tryk ok og dit søjlediagram fremkommer.



Det er ca. det samme for i alle versioner af Excel, men der kan være større eller mindre variationer.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Cirkeldiagram



Til cirkeldiagrammet bruges søjlen h(x) eller f(x) som serienavn, og skostørrelsen som kategori.

Laves i Excel

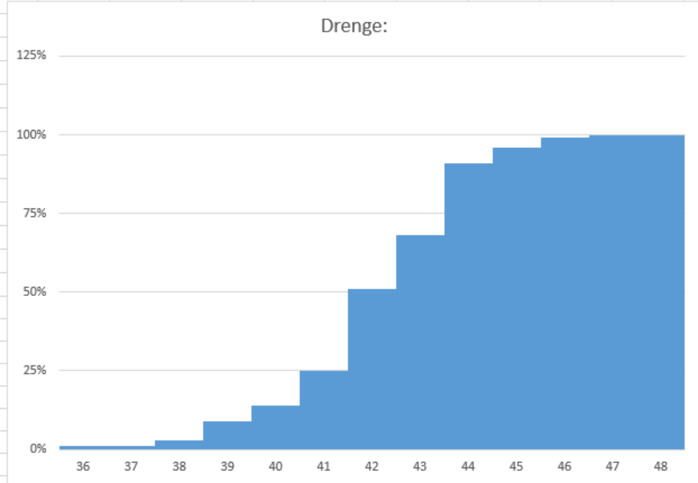
Gøres på samme måde som søjlediagrammet, man trykker bare indsæt cirkeldiagram eller trykker på cirkeldiagramikonet i stedet for. Du skal bruge h(x) eller f(x) som dine y-værdier og observationerne som dine kategoriakse.

Til sidst skal du huske at højreklikke på cirkeldiagrammet og trykke tilføj dataetiketter, så der kommer procentsatser på de forskellige dele. HUSK DET!!

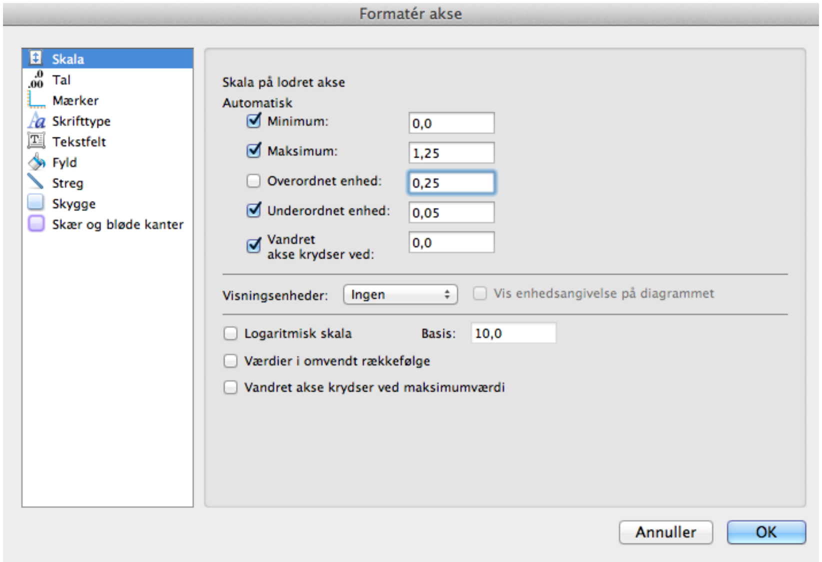
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Trappediagram

Hvis man vil lave et trappediagram, er det normalt lettest at bruge den summerede frekvens-F(x) som udgangspunkt, men summeret hyppighed-H(x) kan også bruges.



Laves i Excel.
Lav et søjlediagram.
Brug summeret frekvens som y-værdi og observationerne som kategoriakse.
Højreklik på grafen og formater dataserie.
Juster mellemrumsbredde til 0%.
Formater y-akse ved at højreklikke på den og trykke formater akse og indstil så den overordnede enhed til 0,25.



Nu kan du på dit trappediagram aflæse kvartilsæt

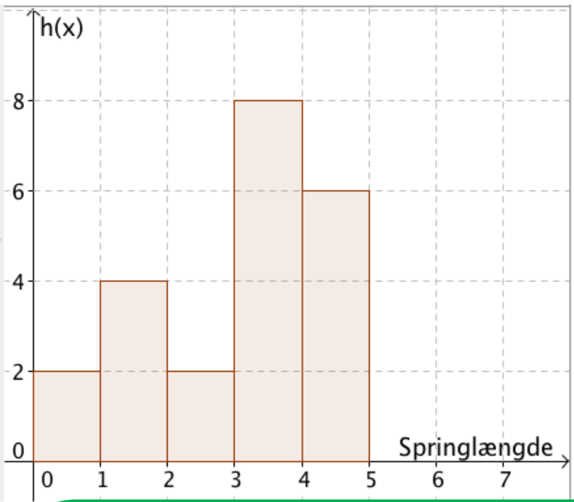
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Diagrammer til grupperede observationer

I forbindelse med oplysninger, som er sat i intervaller, vil man normalt bruge følgende diagrammer.

Søjlediagrammer/histogram

Søjlediagram



Ligesom beskrevet i forbindelse med pindediagrammet, er der ikke nogen fast regel for, hvad der er søjle- og stolpediagrammer. Dog kalder man det kun enten søjle- eller stolpediagram og ikke pindediagram. Det skyldes at det er vigtigt at søjlerne hænger sammen og ikke står som pinde med luft i mellem.

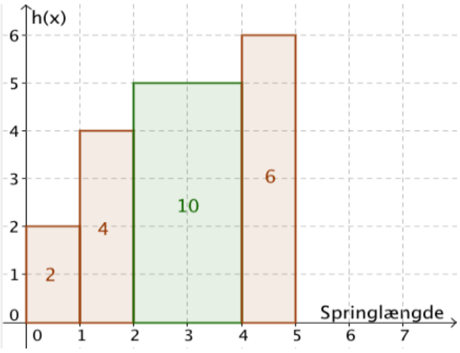
Bemærk at søjlen går **mellem de to yderpunkter i intervallet** . F.eks. fra 1 til 2. Det vil sige at i intervallet fra 1 til 2 er der to observationer, hvis man aflæser søjlediagrammet ovenfor.

Videovejledning til søjlediagrammer: http://matematikbanken.dk/L/225/

Det er normalt kendetegnende for søjlediagrammer, at intervallerne skal være lige store. Det betyder, at man kan aflæse intervalhyppigheden eller intervalfrekvensen ved at se på højden af søjlerne.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Histogram

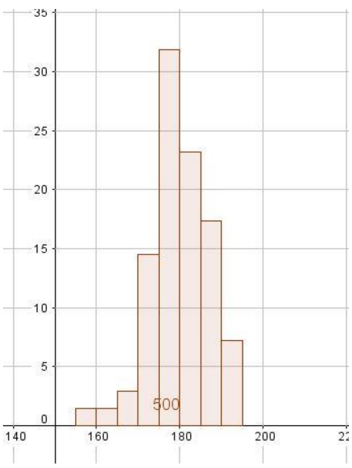


En særlig type af søjlediagrammer er histogrammer. Histogrammer bruger man, når man har intervaller, som **ikke er lige store**. I forhold til søjlediagrammet kigger man ikke på højden af søjlerne i histogrammet. Derimod kigger man på arealet af søjlen, når man skal aflæse intervalhyppighed eller intervalfrekvens. I eksemplet ovenfor er der 10 observationer i intervallet fra 2 til 4. Og der er 6 observationer i intervallet fra 4 til 5. Men da intervallet fra 2 til 4 er dobbelt så bredt som intervallet fra 4 til 5, bliver søjlen for det sidste interval højest. Det er dog som sagt ikke højden, men arealet man kigger på. Og her kan man aflæse at intervallet 2 til 4 har et areal på 10 tern og dermed en intervalhyppighed på 10 og intervallet 4 til 5 har en intervalhyppighed på 6.

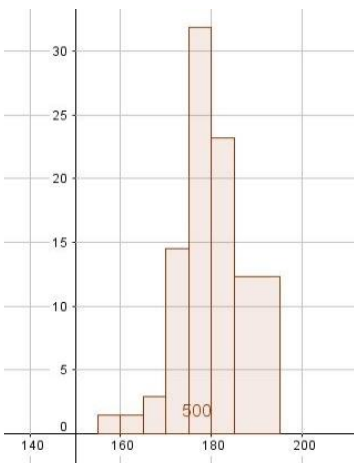
Det er noget mere vanskeligt at lave histogrammer. Derfor vil det ofte være en god ide, at man laver intervallerne lige bredde, da man så kan lave et "almindeligt søjlediagram" og kun skal have fokus på højden, fordi bredden i intervallerne er den samme.

Både søjlediagrammet og histogrammet bruger man til at vise tallene fra enten intervalhyppigheden eller intervalfrekvensen.

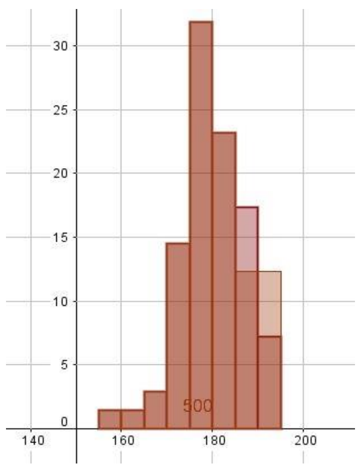
Videovejledning til histogrammer: https://matematikbanken.dk/L/226/



Søjlediagram med lige store intervaller



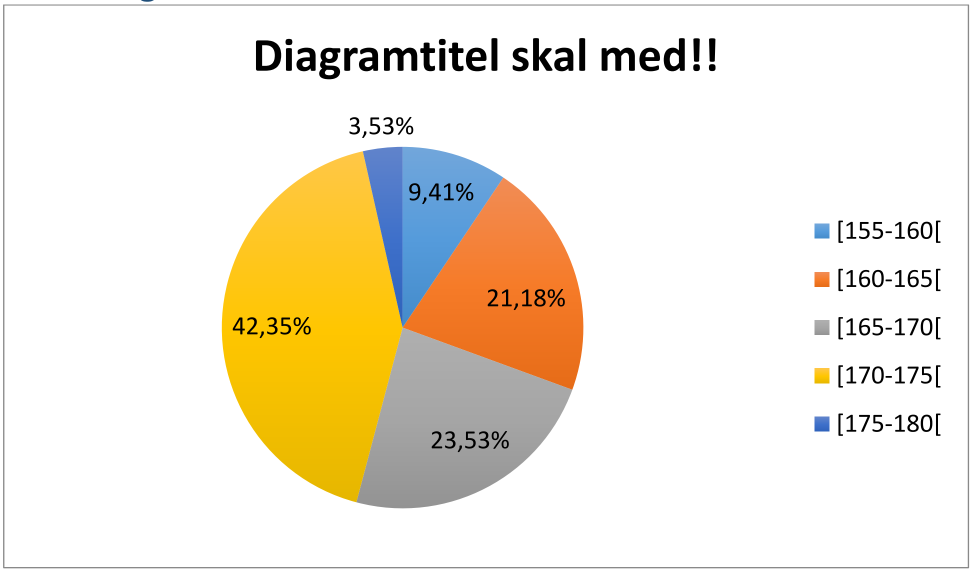
Histogram hvor intervallet ikke er lige store



Viser forskellen mellem søjle- og histogrammet

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Cirkeldiagram

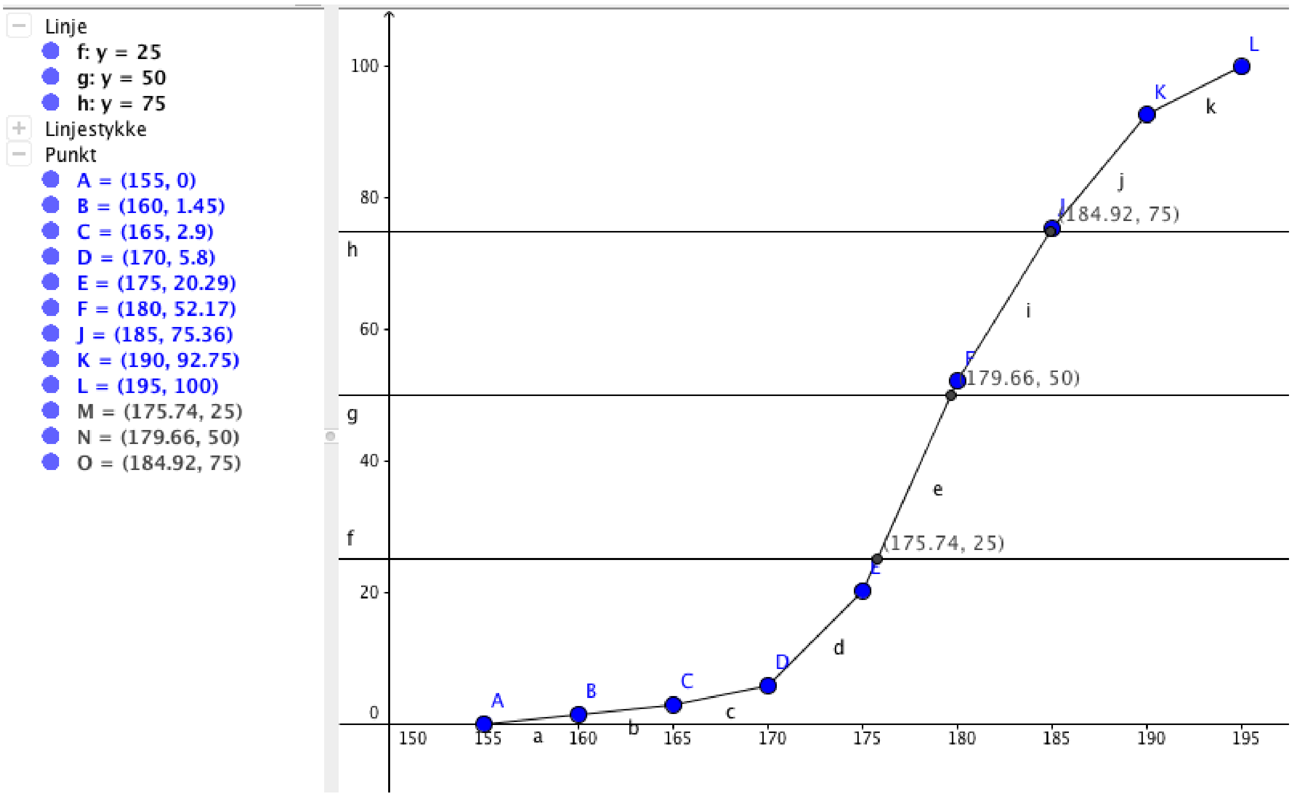


Se hvordan man laver det under enkeltgrupperede observationer

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Sumkurver

Hvis man vil lave en sumkurve, er det bedst at bruge den summerede frekvens-F(x) som udgangspunkt, men summeret hyppighed-H(x) kan også bruges.



Læg mærke til, at kvartilerne er indtegnet. Ved de ikke-grupperede observationer kunne vi finde medianer og kvartiler ved at kigge på observationssættet eller skemaet. Det er ikke så let ved de grupperede observationer. Her er man nødt til at aflæse på grafen. På grafen ovenfor er 50% = medianen 179,66.

Sumkurven bruges som værktøj på linje med boksplot til at beskrive fordelingen af observationer i et observationssæt. Men den er samtidig et redskab til at finde kvartiler.

Excel-vejledning:

For at kunne lave sumkurven kan man enten gøre det i Excel – se denne video https://matematikbanken.dk/L/176/

GeoGebra-vejledning:

Man kan også gøre det i GeoGebra.
Man laver en stykvis graf for hvert interval.
Første interval hedder [0-10] – der er en frekvens på 7,77%
Grafen må derfor gå fra (0,0) → (10,7.77)

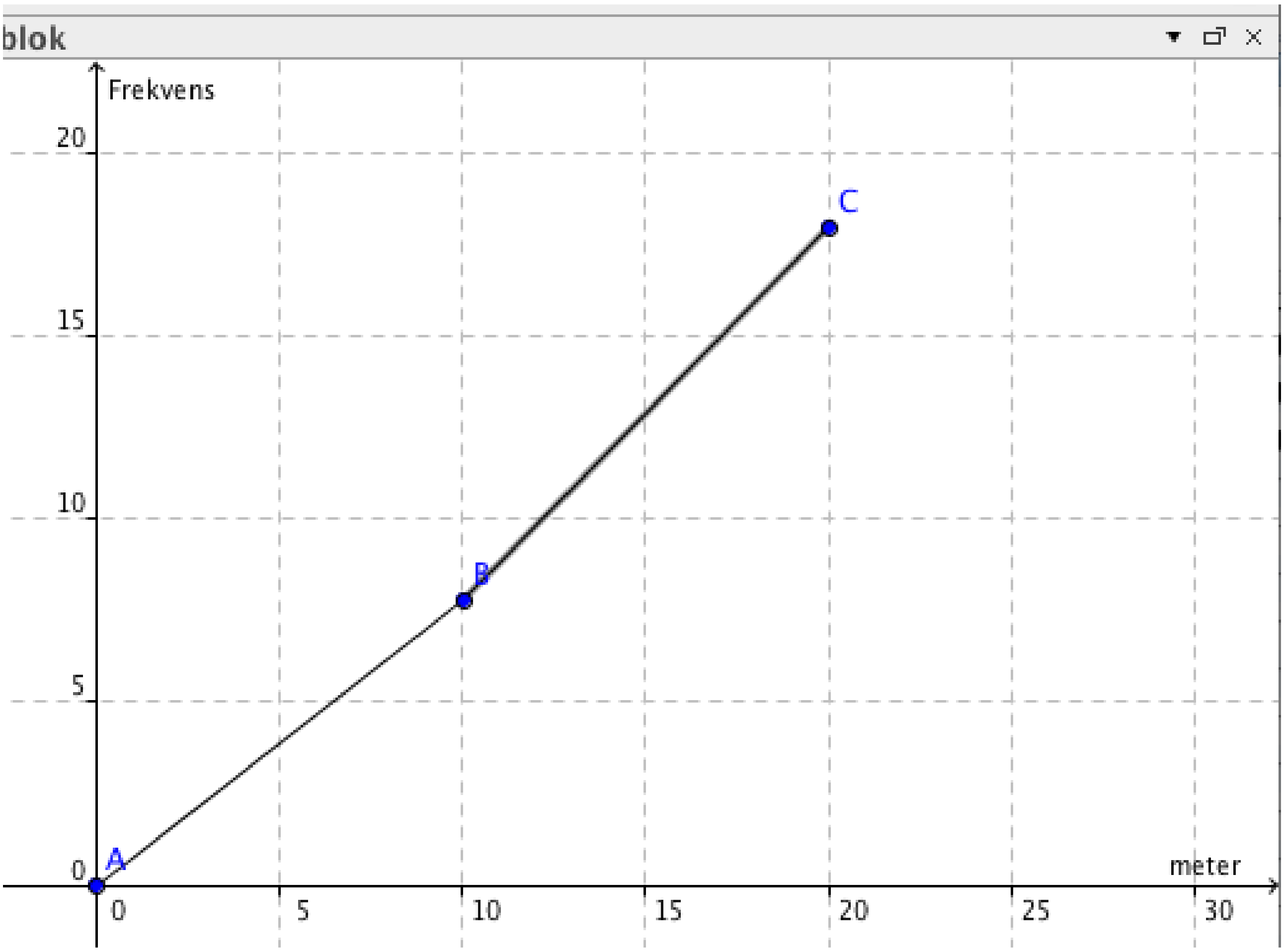
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Andet interval hedder]10,20] – er er yderligere en frekvens på 10,68%. Her er det nemmest at bruge summeret frekvens-F(x). Fra [0-20] er der ca. 18%, så]10-20] går fra 7,77% op til 18%

Denne del må gå fra (10,7.77) → (20,18)
Fortsæt med resten af intervallerne.

Husk at en sumkurve aldrig må falde og ender altid på 1 eller 100% (når man bruger summeret frekvens)

Videovejledning kan findes på: https://matematikbanken.dk/L/365/



For at kunne aflæse kvartilerne indsætter du i input-linjen y=25, y=50 og y=75 og finder skæringspunkterne med grafen

Statistik ud fra rådata i GeoGebra.

Du har en række af data.

En skoleklasse vil undersøge, hvor lang tid eleverne sidder foran en elektronisk skærm på en normal hverdag. Fra de står op til de går i seng.

Oversigt over tid som 9.a's elever bruger på ikke undervisningsrelevant brug af elektronisk skærm. (PC, tablet, fjernsyn, smartphone m.v.)

Rå data

1	2	0	4	6	2	5	3	2	1
5	5	3	2	3	4	7	9	3	7

9. b laver samme undersøgelse, men har sorteret deres data i en hyppighedstabel

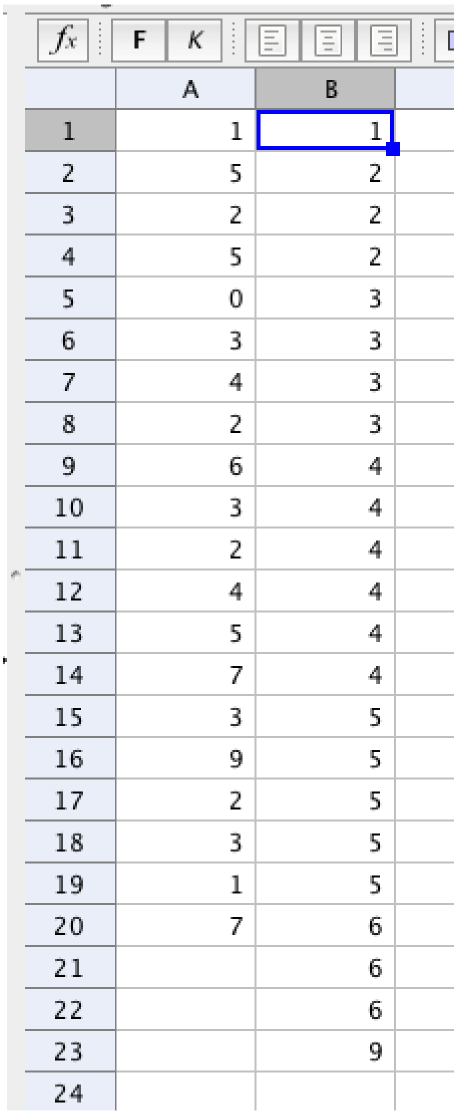
Obs	h(x)
0	0
1	1
2	3
3	4
4	6
5	5
6	3
7	0
8	0
9	1

For at man nemmest kan bruge data i GeoGebra, så skal man lave hyppighedstabellen til rådata.

Fremgangsmåde:

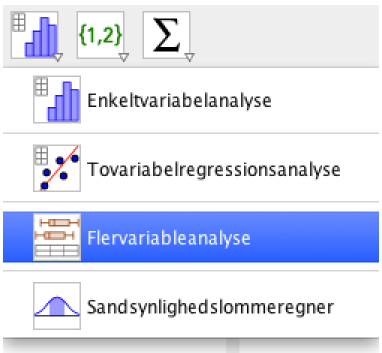
1. Start GeoGebra →Tryk vis → regneark
2. Kopiere 9. A data ind i kolonne A, og 9. B's data i kolonne B
   a. Så ser det sådan her ud

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

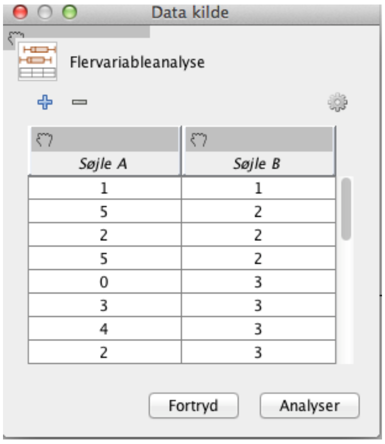


	A	B
1	1	1
2	5	2
3	2	2
4	5	2
5	0	3
6	3	3
7	4	3
8	2	3
9	6	4
10	3	4
11	2	4
12	4	4
13	5	4
14	7	4
15	3	5
16	9	5
17	2	5
18	3	5
19	1	5
20	7	6
21		6
22		6
23		9
24		

Marker nu kolonne A og kolonne B og tryk på grafikonet i menulinjen. Bemærk at dette ikon kun er synligt, når man arbejder i regnearket.

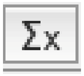


Tryk på flervariabelanalyse

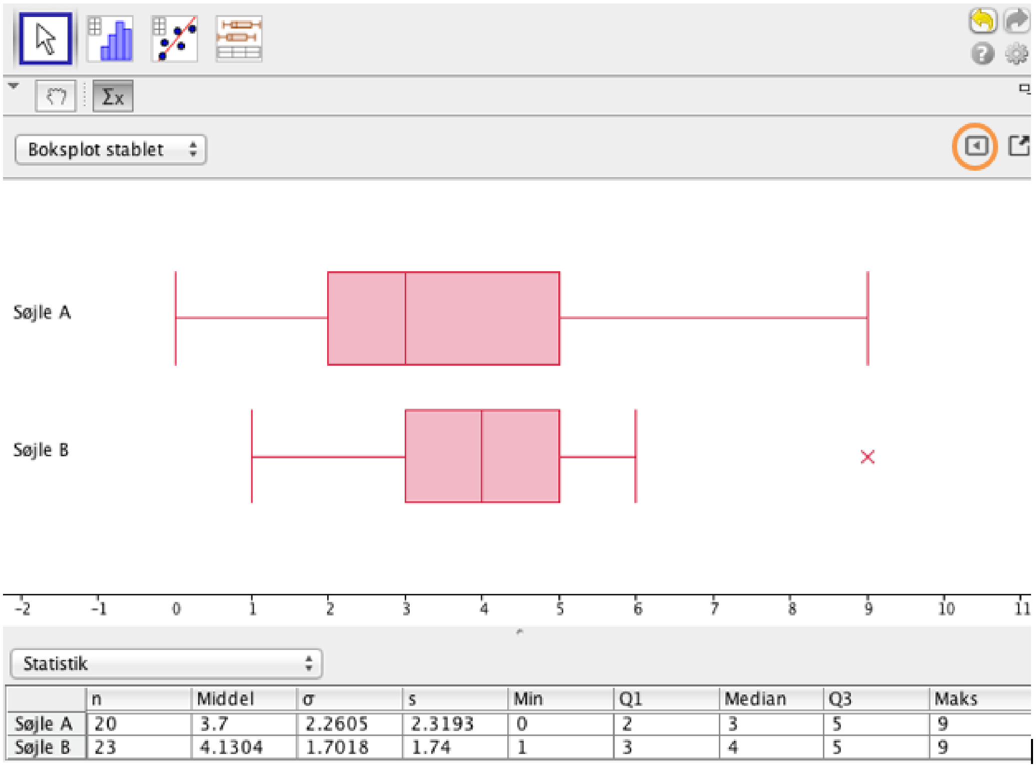


Søjle A	Søjle B
1	1
5	2
2	2
5	2
0	3
3	3
4	3
2	3

Tryk analyser

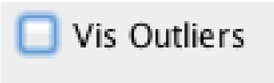
Tryk på  for at få udvidet oplysninger.

Nu skulle det gerne se således ud



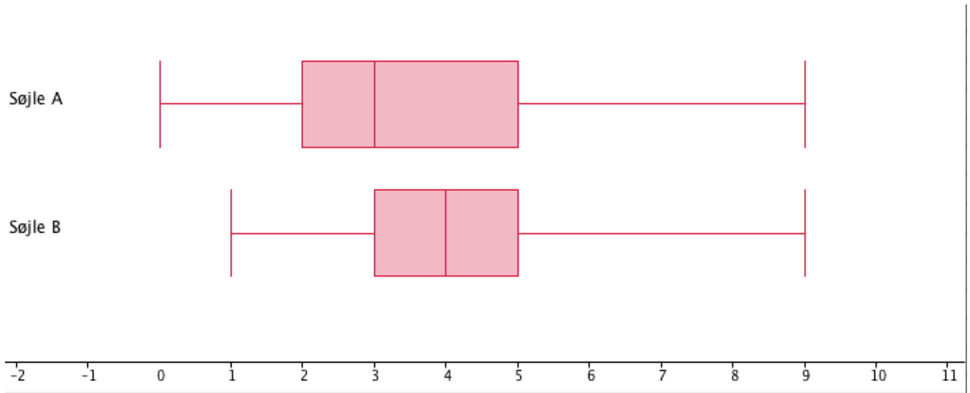
	n	Middel	σ	s	Min	Q1	Median	Q3	Maks
Søjle A	20	3.7	2.2605	2.3193	0	2	3	5	9
Søjle B	23	4.1304	1.7018	1.74	1	3	4	5	9

Læg mærke til krydset - det er en outlier - den kan du slå fra ved at trykke på

 og fjerne fluebenet i vis Outliers 

.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node



Statistik

	n	Middel	σ	s	Min	Q1	Median	Q3	Maks
Søjle A	20	3.7	2.2605	2.3193	0	2	3	5	9
Søjle B	23	4.1304	1.7018	1.74	1	3	4	5	9

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Økonomi

Vækst

Slutkapital (K_n)

Når man vil finde ud af, hvad der står på kontoen efter n terminer med en rentetilskrivning pr. termin.

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

K_n = Slutkapitalen/slutværdien
K_0 = Startkapitalen/startværdien
r = Renten/tilvæksten i % pr. termin
n = Antal terminer

Eksempel:
Bent indsætter 1000 kr. på en konto, hvor han får 3% i rente p.a. (pr. år).
Hvor mange penge er der på kontoen efter 5 år (som er 5 terminer i denne opgave)?

$$K_n = 1000 \cdot (1+0{,}03)^5 \approx 1159{,}274$$

Eller

$$K_n = 1000 \cdot (1+0{,}03)^5$$

Ligningen løses for Kn vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$Kn = 1159{,}274$$

Dvs. der står 1159,27 kr. på kontoen efter 5 år

Alternativ formel

Hvis man løser opgaver ved hjælp af et CAS-program (f.eks. WordMat), så kan det i nogle tilfælde være en fordel at skrive renten som procent i stedet for decimaltal. Så i eksemplet nedenfor er rentens værdi skrevet som **3%** og ikke **0,03,** som skrevet i eksemplet ovenfor.

Eksempel:
Bent indsætter 1000 kr. på en konto, hvor han får 3% i rente p.a. (pr. år).
Hvor mange penge er der på kontoen efter 5 år (som er 5 terminer i denne opgave)?

$$K_n = 1000 \cdot (1+3\%)^5 \approx 1159{,}274$$

Eller

$$K_n = 1000 \cdot (1+3\%)^5$$

Ligningen løses for Kn vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$Kn = 1159.274$$

Dvs. der står 1159,27 kr. på kontoen efter 5 år

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node
Redigeret: 9. november 2023

Startkapital (K_0)

Når man vil finde ud af, hvad man i sin tid indsatte på kontoen, når man ved hvor mange terminer, man har haft pengene stående og til en bestemt rente.

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

K_n = Slutkapitalen/slutværdien
K_0 = Startkapitalen/startværdien
r = Renten/tilvæksten i % pr. termin
n = Antal terminer

Eksempel:
Hanne har i dag 1500 kr. Pengene har udviklet sig med 10% pr. måned (som er terminer i denne opgave). Hvor mange penge havde hun for 5 måneder (terminer) siden?

$$K_0 = \frac{1500}{(1+10\%)^5} \approx 931{,}382$$

Eller

Skriv kendte oplysninger ind i "grundformlen" for vækst og løs i WordMat.

$$1500 = K_0 \cdot (1+10\%)^5$$

Ligningen løses for Ko vha. CAS-værktøjet WordMat

$$K_0 = 931{,}382$$

Dvs. at Hanne for 5 måneder siden havde 931,38 kr.

Halvårlig rentetilskrivning

Når renter tilskrives hvert halve år, skal man bruge den **halve rente** i **dobbelt antal terminer**.

Eksempel: Hvis renten er 4% p.a. med halvårlig rentetilskrivning, og man har pengene stående i 3 år, så er de oplysninger, som man skal regne med, 2% i 6 terminer.

Månedlig rentetilskrivning

Når renter tilskrives hver måned, skal man bruge **rente p.a. divideret med 12** i **12 gange så mange terminer**.

Eksempel: Hvis renten er 6% p.a. med månedlig rentetilskrivning, og man har pengene stående i 3 år, så er de oplysninger, som man skal regne med, 0,5% i 36 terminer.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Renten/tilvæksten i % (r)

Når man gerne vil finde, hvad renten er eller hvor stor tilvæksten har været pr. termin og man kender startværdien, slutværdien og antal terminer.

$$r = \sqrt[n]{\left(\frac{K_n}{k_0}\right)} - 1$$

K_n = Slutkapitalen/slutværdien
K_0 = Startkapitalen/startværdien
r = Renten/tilvæksten i % pr. termin
n = Antal terminer

Eksempel:
I Vanløse Vandpoloklub var der 85 medlemmer i 2000 og 154 medlemmer i 2017.
Antal terminer er $2017 - 2000 = 17$ terminer

$$r = \sqrt[17]{\left(\frac{154}{85}\right)} - 1 \approx 0{,}03557715$$

Eller

$$154 = 85 \cdot (1 + x)^{17}$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat

$$r = 0{,}0355771485$$

Dvs. der har været en tilvækst på 3,56% pr. år

Terminer (n)

Når man gerne vil finde antal af terminer og man kender startværdi, slutværdi og den procentvise tilvækst pr. termin.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1 + r)}$$

K_n = Slutkapitalen/slutværdien
K_0 = Startkapitalen/startværdien
r = Renten/tilvæksten i % pr. termin
n = Antal terminer

Eksempel:
En konto, hvor man får 2% i rente p.a., har udviklet sig fra 500 kr. til 1000 kr. Over hvor mange år er det sket?

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1000}{500}\right)}{\ln(1 + 0{,}02)} \approx 35{,}00279$$

Eller

$$1000 = 500 \cdot (1 + 2\%)^n$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for n vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$n = 35{,}00279$$

Dvs. det tager ca. 35 år at få kontoen op på 1000 kr.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Debitorrente (Kaldes ofte også for effektivrente)

Eksempel:
Et firma har en rente på 24% p.a. med rentetilskrivning hver måned. Det bliver så 2% i rente pr. måneden. (se evt. forklaring ovenfor)

Hvad er debitorrenten?

I denne opgave skal vi forholde os til to begreber:
Den årlige nominelle rente og **Den årlige effektive rente.**

Hvis der er flere terminer/rentetilskrivninger på et år, finder man renten pr. termin ved at dele den opgivne rentesatsen **den årlige nominelle rente** med antallet af terminer. I eksemplet ovenfor er den årlige nominelle rente på 24%, som skal deles ud på 12 måneder. Dette er så 2% pr. måned.

Den samlede rente som tilskrives over et år kaldes **Den årlige effektive rente**.
Den effektive adskiller sig fra den årlige nominelle rente, da beløbet, som man tager de 2% af, bliver højere for hver måned, hvor der bliver tilskrevet renter. Med andre ord, vil der komme rentes rente på rentetilskrivningerne allerede efter den første rentetilskrivning. Derfor vil renten, som reelt tilskrives i løbet af et år (**Den effektive rente**), bliver højere end **den nominelle rente**.

$$Debitorrente = (1 + r\%)^n - 1$$

r=Renten pr. periode
n=Antal rentetilskrivninger pr. år.

Beregning:
Nominel rente på 24% p.a. med rentetilskrivning hver måned

$$Debitorrente = (1 + 2\%)^{12} - 1 \approx 0{,}2682418 = 26{,}8\%$$

Så i dette tilfælde er debitorrenten 26,8%, mens den årlige nominelle rente er 24%.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Vækstfunktion

Når man vil tegne en vækstfunktion, har man typisk antal af terminer ud af x-aksen og værdierne af K_n op af y-aksen.

Standardforskrift til vækstfunktion

$$\boxed{f(x) = K_0 \cdot (1 + renten\%)^x}$$

Når man laver vækstfunktionen, vil man gerne kunne aflæse, hvad der er på kontoen efter en hvilken som helst antal terminer. Så derfor svarer x i forskriften til antallet af terminer og f(x) svarer til slutværdien. Vi skal altså **ikke** sætte et tal ind på x's plads, når vi laver forskriften.

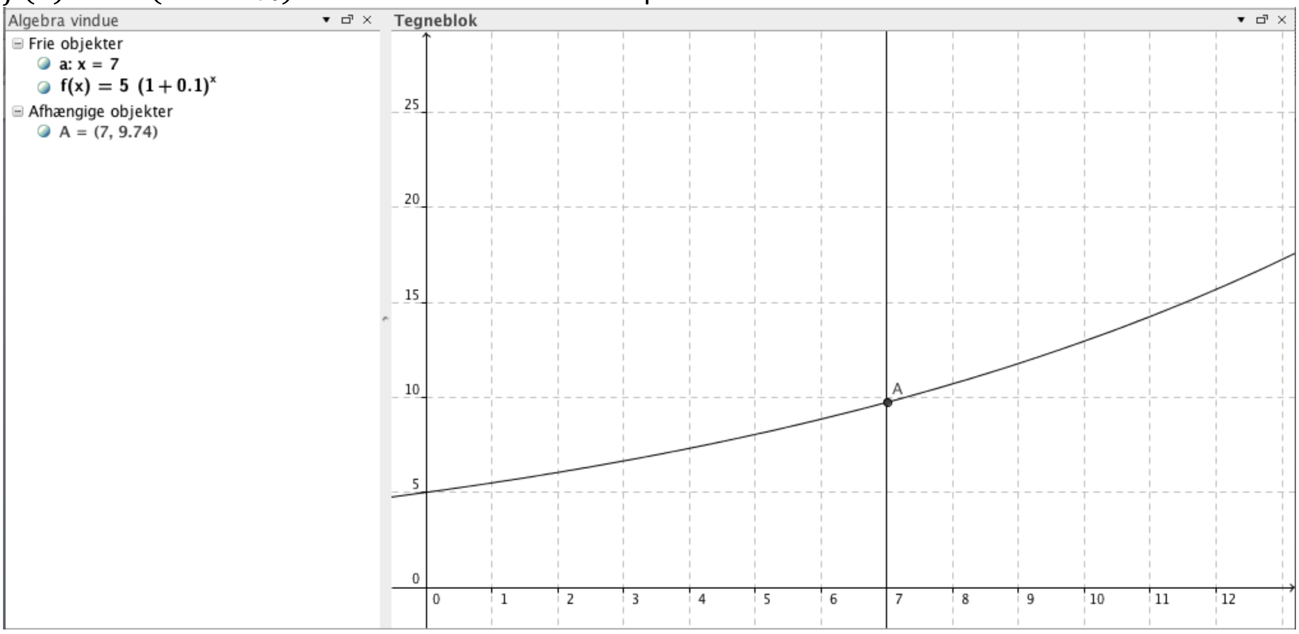
Til gengæld sætter vi en værdi ind på K_0's plads og på den plads, hvor renten er i formlen. Se nedenfor.

Eksempel:

Hvis vi vil lave et grafisk billede af 5 kroners udvikling på en konto med 10 % i rente i x antal år.

Så K_0=5 og renten = 10%

$f(x) = 5 \cdot (1 + 10\%)^x$ Indtastes i GeoGebras inputfelt



Finde skæring med grafen:

Hvis man vil undersøge, hvor mange penge der er på kontoen efter 7 terminer.

Skriver man x=7 i inputlinjen → Find skæringspunktet mellem den lodrette linje og grafen → Aflæs y-koordinaten i skæringspunktet, som her er 9,74 aflæst i algebravinduet.

Dvs. efter 7 terminer er der 9,74 kr. på kontoen.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

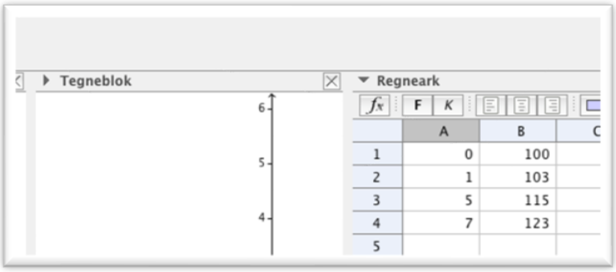
Fremskrivning vha. GeoGebra

I et område bor der 100 beboere i 2008.
Nedenstående tabel viser udviklingen i området.

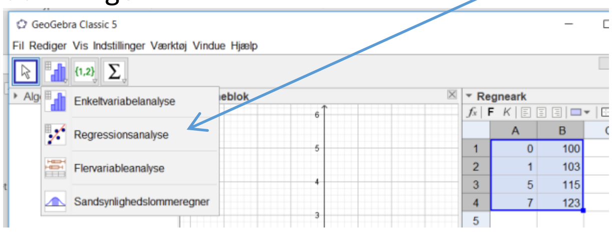
År	År	Antal beboere
2008	0	100
2009	1	103
2013	5	115
2015	7	123
2020	12	?

Opgaven er at lavet et kvalificeret gæt på, hvor mange der vil være i 2020.

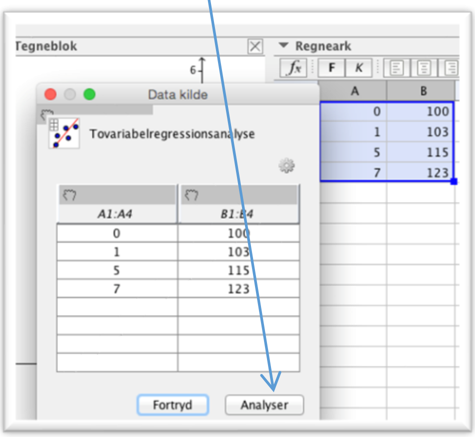
Indtast punkterne i GeoGebra i regnearket.



Marker cellerne og lav en "Regressionsanalyse" for at finde ud af, hvilken graf der passer bedst til udviklingen.

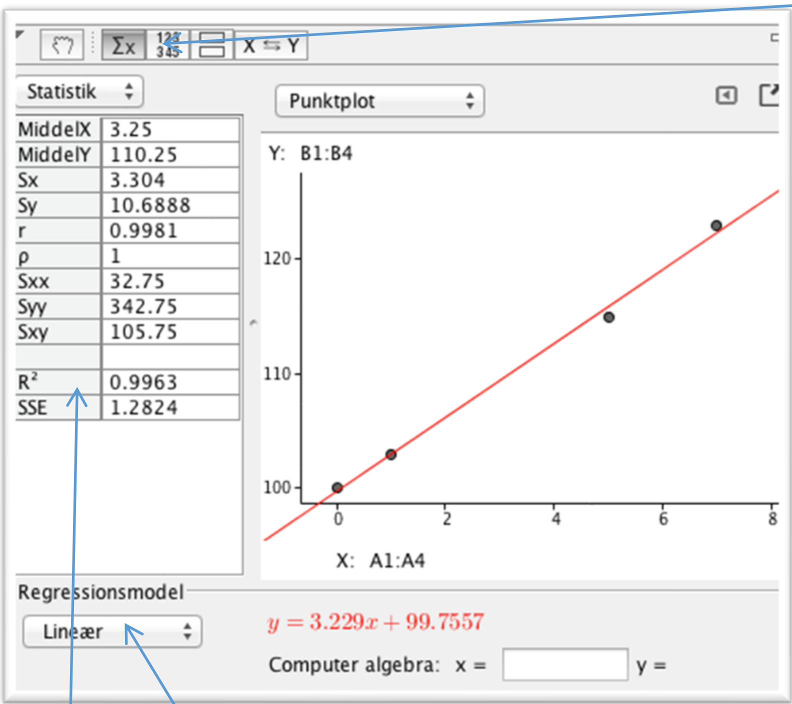


Tryk på analyser



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

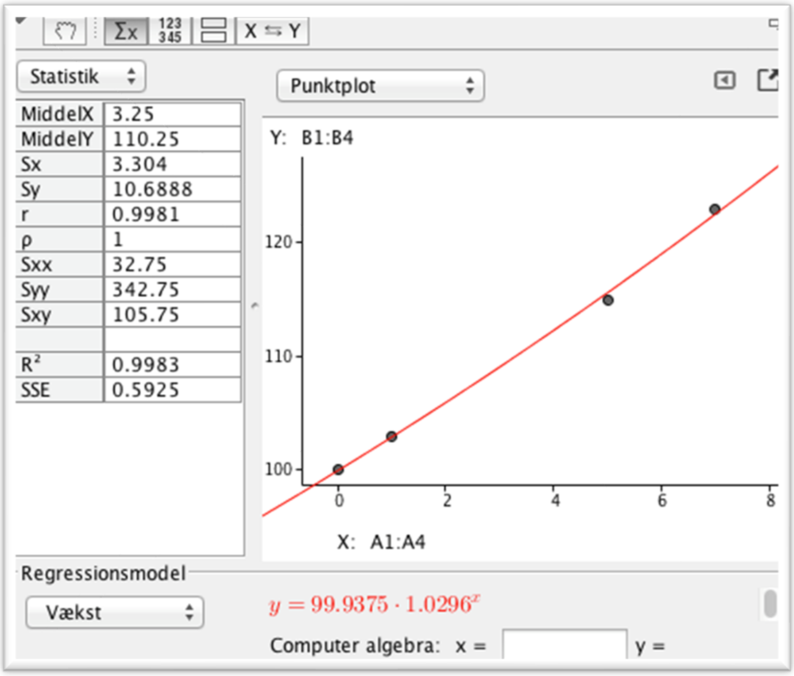
Følgende statistikvindue skulle gerne kom frem (og hvis ikke tryk på dette tegn)



Vælg "Regressionsmodel. Her er der f.eks. valgt "lineær" som regressionsmodel

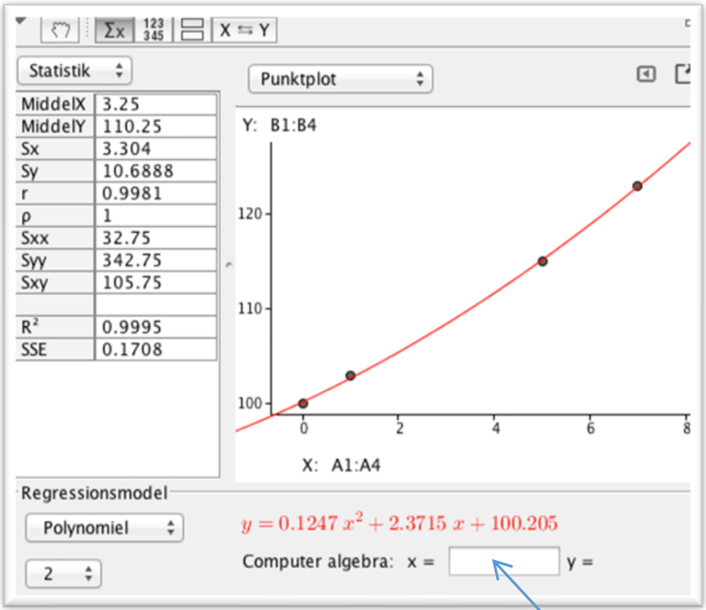
Den regressionsmodel, som umiddelbart bedst beskriver udvikling, er den regression-model, hvor R^2 kommer tættest på 1.

Prøv både lineær, polynomiel og vækst som regressionsmodel



Her er der valgt vækst

atematikbanken.dk
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node



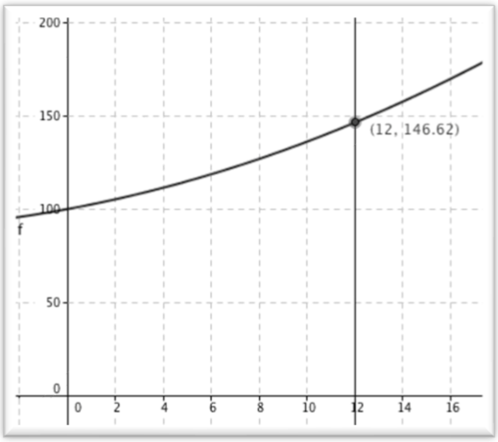
Her er der valgt polynomiel (2. grad)

I dette tilfælde beskriver 2. gradsfunktionen udviklingen bedst, da R^2-testen er tættest på 1
Man kan se, at det er en andengradsfunktion, da Regressionsmodel er Polynomiel og 2-tallet i boksen under angiver, at det er 2. grad.

For at undersøge hvor mange der er efter 12 år, skriver man ”12” her, og der vil komme et output.

Eller

Skriv $f(x) = 0.1247x^2 + 2.3715x + 100.205$ i inputfeltet i GeoGebra (som står med rødt i vinduet ovenfor). Linjen x = 12 indsættes og så kan man aflæse antallet efter 12 perioder
f(12)=146,62 i dette eksempel.



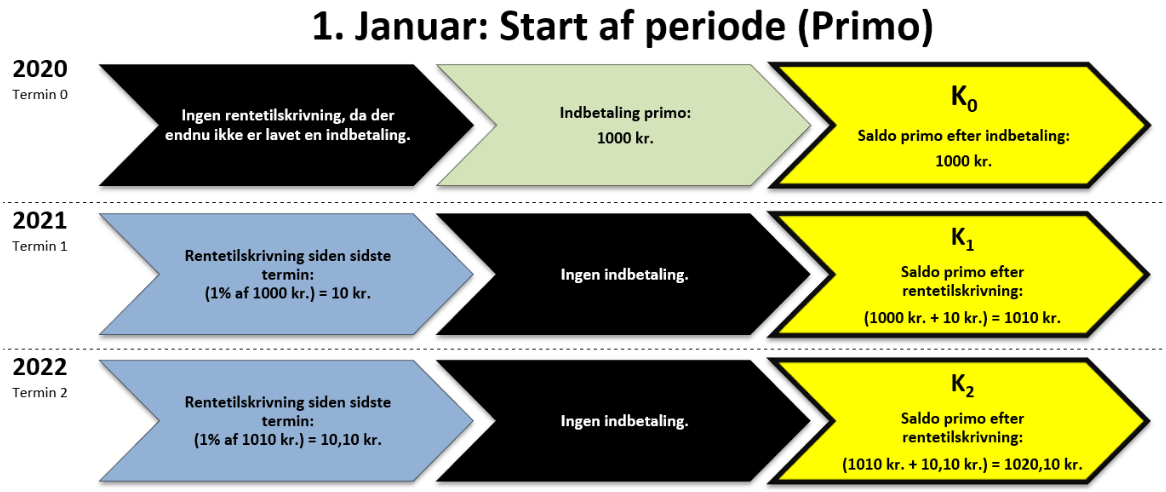
Heraf kan der aflæses at der i 2020 vil være ca. 147 beboere, hvis udviklingen fortsætter, som vi har set hidtil.

Modeller til økonomi

Model for opsparing *uden* løbende indbetalinger

Startindbetaling: **1000 kr.**
Rente: **1% p.a**. (p.a. er en forkortelse for pro anno, som er latin og betyder pr. år.
I denne model er der **helårlig rentetilskrivning**. Det betyder, at renten tilskrives en gang om året og derfor er det 1% i hver rentetilskrivning.

I et regneark, kan man lave en model for denne opsparing. Ved at lave modellen for opsparingen i et regneark, får man den fordel, at modellen kan gøres dynamisk. Når det er dynamisk, betyder det, at hvis man ændrer et sted i regnearket, så vil regnearket automatisk ændre værdierne alle andre steder i modellen.



Et regneark kunne se således ud.:

Opsparing uden løbende indbetaling

			Formel:	$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$
Indbetaling	1000			K_n = Opsparing efter n terminer (Slutkapital)
Rente p.a.	1%			K_0 = Startindbetaling (Startkapital)
Antal terminer pr. år	1			r = Rente pr. termin i procent
Rente pr.termin	1,00%			n = Terminer (Rentetilskrivninger)

Termin (f.eks. år el. måned)	Terminsnr. (n)	Renter siden sidste termin	Indbet. primo	Saldo primo efter rentetilskrivning
2020	0		1000,00	1000,00
2021	1	10,00		1010,00
2022	2	10,10		1020,10

Man kan se en videogennemgang på dette link:
http://matematikbanken.dk/L/169/

Blank model til regneark: http://matematikbanken.dk/L/173/ **(Bemærk regnearket har 3 faner i bunden.)**

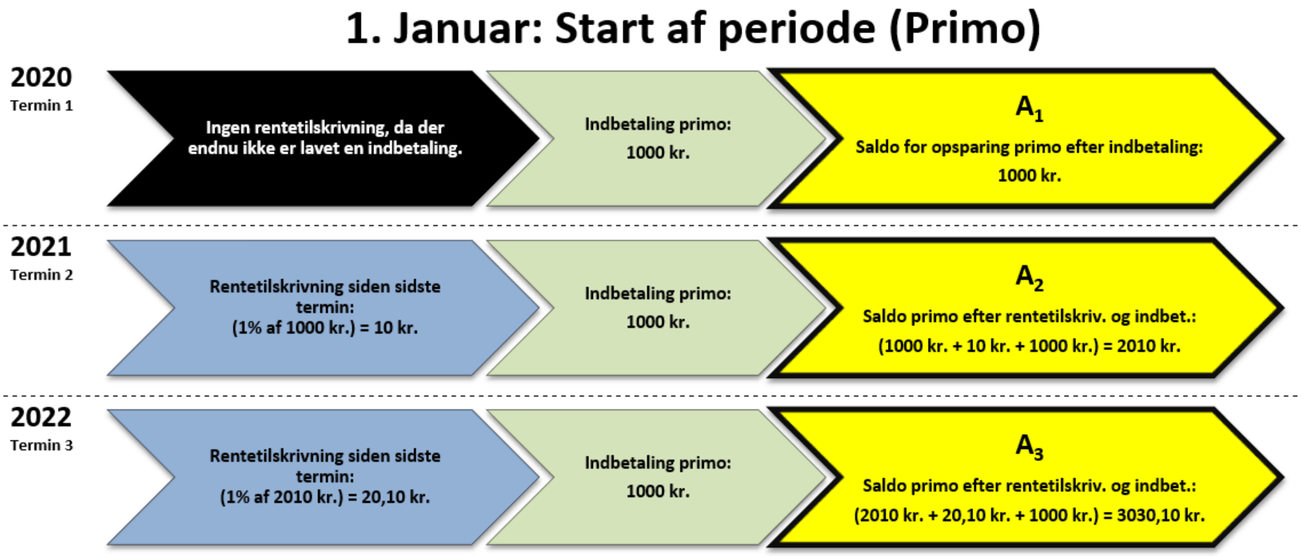
Det er som udgangspunkt er det saldoen primo efter rentetilskrivning, som man er interesseret i. Så ud fra dette kan man aflæse, at de 1000 kr., som man startede med at sætte ind, er blevet til 1010 kr. efter 1 år og 1020,10 kr. efter 2 år.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Opsparing med løbende indbetalinger:

Jeg vil gerne spare penge op. Jeg har mulighed for at indbetale **1000 kr.** på en bankkonto hvert år.
Dem indbetaler jeg til banken den **1. jan hvert år.**
I banken får jeg **1% p.a.** i rente af det, som jeg har stående på kontoen. (**Helårlig rentetilskrivning**)

En model kunne se således ud:



Et regneark kunne se således ud:

Opsparing med løbende indbetaling

Indbetaling pr. termin	1000
Rente p.a.	1%
Antal terminer pr. år	1
Rente pr. termin	1,00%

Formel: $A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

A_n = Opsparing efter n antal indbet.
y = Ydelse (Indbet. pr. termin)
r = Rente pr. termin i procent
n = Terminer (Antal indbet.)

Termin (f.eks. år el. måned)	Terminsnr. (n)	Renter siden sidste termin	Indbet. primo	Saldo primo efter indbet.
2020	1		1000,00	1000,00
2021	2	10,00	1000,00	2010,00
2022	3	20,10	1000,00	3030,10

Man kan se en videogennemgang på dette link:
http://matematikbanken.dk/L/170/

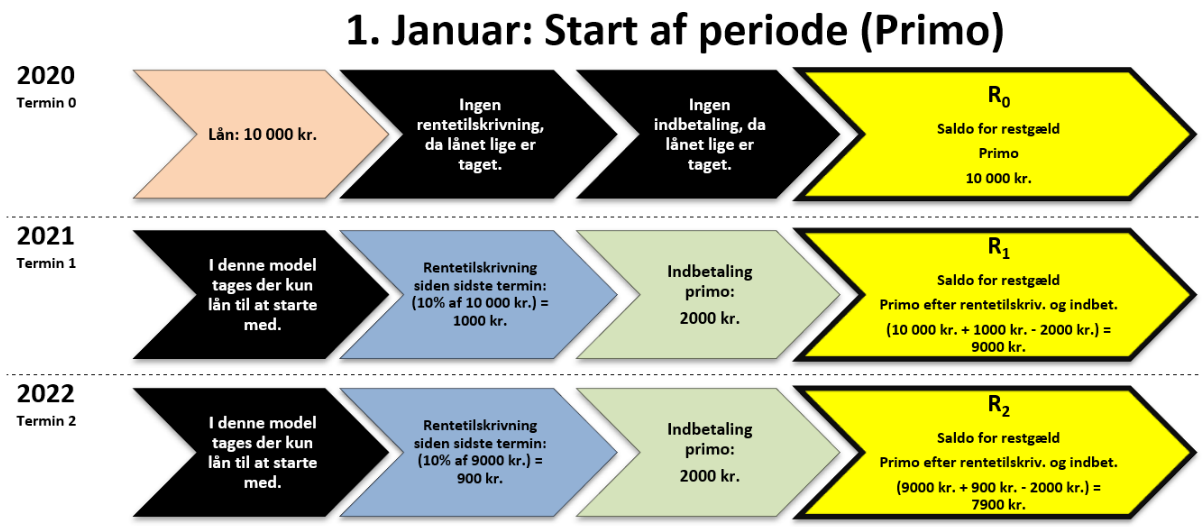
Blank model til regneark: http://matematikbanken.dk/L/173/(Bemærk regnearket har 3 faner i bunden.)

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Gældsafvikling

Vi vil gerne låne nogle penge. Ordningen med banken bliver at:
Vi låner **10 000 kr.** i banken til en rente på **10% p.a.**
Der er rentetilskrivning en gang om året **(Helårlig rentetilskrivning)**
Der er en indbetaling på **2000 kr.** en gang om året. Bemærk at man ofte bruger ordet **"ydelser"** om de indbetalinger, som man laver i forbindelse med et lån.

En model for vores lån kunne se således ud:



Et regneark kunne se således ud:

Afvikling af gæld

Lån	10000
Indbetaling (Ydelse)	2000
Rente p.a.	10,00%
Antal terminer pr. år	1
Rente pr. termin	10,00%

Formel:

$$R_n = A_0 \cdot (1+r)^n - y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

R_n = Restgæld efter n antal indbet.
A_0 = Startgæld
y = Ydelse (Indbet. pr. termin)
r = Rente pr. termin i procent
n = Terminer (Antal indbet.)

Termin (f.eks. år el. måned)	Terminsnr. (n)	Lån	Renter siden sidste termin	Indbet. Primo (ydelse)	Saldo primo efter indbet.
2020	0	10000			10000,00
2021	1		1000,00	2000,00	9000,00
2022	2		900,00	2000,00	7900,00

Man kan se en videogennemgang på dette link:
http://matematikbanken.dk/L/171/

Blank model til regneark: http://matematikbanken.dk/L/173/ (Bemærk regnearket har 3 faner i bunden.)

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Formel til at finde gæld, hvis man kender ydelse, rente og antallet af terminer

$$Gæld = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

y=ydelsen
r=renten
n=antal terminer

Gældsformlen kan benyttes, når man vil kende et låns størrelse og man ved, hvor meget man kan betale pr. termin, antallet af terminer og renten.

Eksempel: Vi kan afdrage 1000 kr. pr. måned i 22 måneder til en rente på 10% p.a. dvs. $\frac{10\%}{12} = 0{,}83\%\ pr.måned$ (og med månedlig rentetilskrivning.)
Vi vil gerne undersøge, hvor meget vi kan låne.

$$Gæld = 1000 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{10}{12}\%\right)^{-22}}{\frac{10}{12}\%} \approx 20025{,}21$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Målsøgning

Målsøgning kan bruges til at finde fx et bestemt beløb på et bestemt tidspunkt. Det kræver dog, at man har lavet et dynamisk regneark, hvor cellerne refererer til hinanden.

Eksempel:
Jeg vil gerne til OL i år 2032. Derfor vil jeg gerne have 50 000 kr. på min konto. 31. dec. 3031.
Her er en nyttig funktionen i Excel målsøgning. Med målsøgning kan man f.eks. angive, at man ønsker en saldo pr. 31. dec. 2031 på 50.000 kr. og at Excel skal tilpasse indbetalingerne. Derefter vil indbetalingerne blive tilpasset, så man har 50.000 kr. på denne dato.

Se video:
https://matematikbanken.dk/L/366/

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Årlige omkostninger i procent (ÅOP)

ÅOP står for **Å**rlige **O**mkostninger i **P**rocent.

Man bruger ÅOP som en sammenligningsfaktor mellem 2 eller flere forskellige lån. Man kan sige, at ÅOP har lidt samme funktion, som når supermarkeder angiver kilo- eller literpris på varer, så man har lettere ved at sammenligne prisen på forskellige varer.

ÅOP medtager alle omkostningerne ved lånet. Det kan være f.eks. stiftelsesudgifter, forskellige gebyrer på lånet, renter og andre udgifter, der hænger sammen med lånet. Umiddelbart er ÅOP større jo kortere løbetiden er på lånet. Det skyldes at udgifterne ved lånet skal "deles ud" over en kortere periode. Derfor kommer omkostningerne ved lånet til at "fylde mere" i ÅOP.

Eksempel med samme lånebeløb men forskellig løbetid

Tilbagebetalingsperiode	24 måneder	36 måneder	48 måneder
Lånebeløb	25.000 kr.	25.000 kr.	25.000 kr.
Månedlig ydelse	1238 kr.	878 kr.	699 kr.
Betalingsgebyr (medregnet i ydelse)	1250 kr.	1250 kr.	1250 kr.
Debitorrente	12,95%	12,95%	12,95%
Samlet kreditomkostninger	4722 kr.	6590 kr.	8529 kr.
Årlige omkostninger i procent (ÅOP)	19,76%	17,79%	16,83%
Samlet tilbagebetaling	29.722 kr.	31.590 kr.	33.529 kr.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Beregning af ÅOP

ÅOP er svært at beregne. I mange tilfælde bliver det kun en tilnærmet værdi, da renter i banker oftest bliver beregnet kvartalsvis, mens betalingerne er månedlige. Her er det normalt en computer, der udfører beregningen.

Andre lån beregnes med månedlig rente og månedlig ydelse. Så her kan vi beregne ÅOP med større præcision. Men det er stadigvæk kun en tilnærmet værdi.

For at kunne beregne ÅOP skal man kende oplysningerne i boks1 ellers skal man beregne ydelsen selv via oplysningerne i boks 2.

Boks 1	Boks 2
Lånebeløb Ydelse Løbetid (antal perioder)	Renten p.a. eller pr. periode Lånebeløb Låneomkostninger og eller gebyrer

Kender man boks 1, så kan man altså spring videre til trin 2.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Trin 1 (Når man skal finde ydelsen først)

Beregn ydelsen

Ydelsen beregnes ud fra følgende formel: $ydelse = \frac{hovedstol \cdot rente\%}{1-(1+rente\%)^{-n}}$

Hovedstol: lånebeløbet + låneomkostninger og lånegebyr.
Rente: renten pr. periode som decimaltal.
Det vil sige at 10% enten skrives i formlen som ”10% eller ”0,1”
Er renten i p.a. er formlen: $\frac{rente\ i\ p.a.}{antal\ perioder\ om\ året}$
n: Antal perioder lånet betales over. (60 perioder = 5 år, ved månedlige betalinger)

Eksempel til beregning af ydelsen.
Lånebeløb: 5000 kr.
Gebyr på oprettelse: 500 kr.
Rente: 12 % p.a. med månedlige ydelser.
Tilbagebetales over 2 år.

$$\frac{5500 \cdot 1\%}{1-(1+1\%)^{-24}} \approx 258{,}9041$$

Ydelsen er 258,91 kr. om måneden

Gæld	5500
Rente p.a.	12%
Rente pr. termin	1,00%
Ydelse pr. termin	258,91

Termin	Saldo start termin	Indbetaling start termin	Rentetilskrivning	Saldo slut termin
0	5500,00		55,00	5555,00
1	5555,00	258,91	52,96	5349,05
2	5349,05	258,91	50,90	5141,04
3	5141,04	258,91	48,82	4930,95
4	4930,95	258,91	46,72	4718,76
5	4718,76	258,91	44,60	4504,45
6	4504,45	258,91	42,46	4288,00
7	4288,00	258,91	40,29	4069,38
8	4069,38	258,91	38,10	3848,57
9	3848,57	258,91	35,90	3625,56
10	3625,56	258,91	33,67	3400,32
11	3400,32	258,91	31,41	3172,82
12	3172,82	258,91	29,14	2943,05
13	2943,05	258,91	26,84	2710,98
14	2710,98	258,91	24,52	2476,59
15	2476,59	258,91	22,18	2239,86
16	2239,86	258,91	19,81	2000,76
17	2000,76	258,91	17,42	1759,27
18	1759,27	258,91	15,00	1515,36
19	1515,36	258,91	12,56	1269,01
20	1269,01	258,91	10,10	1020,21
21	1020,21	258,91	7,61	768,91
22	768,91	258,91	5,10	515,10
23	515,10	258,91	2,56	258,75
24	258,75	258,91	0,00	-0,16

Til venstre er en tilbagebetalingsplan når, man betaler 1% om måneden i rente.

OBS. Ydelsen betales sidste i perioden. (Efter rentetilskrivning)

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Trin 2: (Når man kender ydelsen)

Nu skal renten findes, så der står 0 kr. i saldo efter sidste ydelse.
Ydelsen indeholder både de skjulte udgifter og renten.
For at beregne ÅOP, så skrives der nu i saldo kun det faktiske lånebeløb.
Mens ydelsen reelt er beregnet ud fra lånebeløb + udgifter.

Vi skal nu finde "Den faktiske omkostningsprocent"[2] pr. periode så vi ender på 0 kr. i periode 24.

Periode	Primo saldo	Ydelse	Rente	Ultimo Saldo
0	Kr. 5.000		?	Kr. 5.000
1	Kr. 5.000	kr. 258,91	?	?
2		kr. 258,91	?	?
…		kr. 258,91	?	?
24		kr. 258,91	?	0

Den faktiske omkostningsprocent beregnes ud fra følgende formel.

$$ydelse = \frac{Udbetalt\ lån \cdot x}{1-(1+x)^{-n}}$$

Udbetalt lån: Det rene lån uden udgifter/andre omkostninger
x: Den faktiske omkostningsprocent vi skal finde (da vi ikke kender den, er den sat til x)
n: antal perioder i alt
ydelse: Det man indbetaler pr. periode. (Det der dækker renter og afdrag)

Eksempel

Lån uden udgifter: 5000 (uden de 500 kr. i udgifter)
x: ubekendt som decimaltal
n: 24
ydelse = 258,9041 (som beregnet tidligere ud fra de 5500 kr.)

$$\frac{5000 \cdot x}{1-(1+x)^{-24}} = 258{,}9041$$
$$x = 0{,}018169 = 1{,}81\%$$

Dette løses lettest som en ligning. Kan gøres via WordMat/TI-Nspire, http://www.wolframalpha.com/ eller CAS i GeoGebra
Eks. fra GeoGebra

CAS
1 (5000*x)/(1-(1+x)^(-24))=258.91
NBeregn: $\{x = -1.8603870318, x = 0.0181709881$

Den faktiske omkostningsprocent er derfor ca. 1,82% pr. periode.

[2] Begrebet "Den faktiske omkostningsprocent" er ikke et officielt begreb, men det begreb vi bruger i denne opgave, da vi mener, det gør forståelsen nemmere.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Nu skal den faktiske omkostningsprocenten pr. periode laves om til ÅOP.
Det er ikke nok blot at gange de 1,82% med 12, for så tages der ikke hensyn til rentes-rente-begrebet.

Men man gør det med formlen for effektiv rente

$$(1 + renten\%)^{12} - 1$$

$$(1 + 0{,}0182)^{12} - 1 = 0{,}2416441$$

ÅOP = 24,16%

Den faktiske omkostningsprocent er beregnet ud fra 1,817% pr. periode

Gæld	5000
ÅOP	24,16%
Rente pr. termin	1,817%
Ydelse pr. termin	258,91

Termin	Saldo start termin	Indbetaling start termin	Rentetilskrivning	Saldo slut termin
0	5000,00		90,85	5090,85
1	5090,85	258,91	87,80	4919,74
2	4919,74	258,91	84,69	4745,51
3	4745,51	258,91	81,52	4568,13
4	4568,13	258,91	78,30	4387,51
5	4387,51	258,91	75,02	4203,62
6	4203,62	258,91	71,68	4016,39
7	4016,39	258,91	68,27	3825,75
8	3825,75	258,91	64,81	3631,65
9	3631,65	258,91	61,28	3434,02
10	3434,02	258,91	57,69	3232,80
11	3232,80	258,91	54,04	3027,93
12	3027,93	258,91	50,31	2819,33
13	2819,33	258,91	46,52	2606,94
14	2606,94	258,91	42,66	2390,70
15	2390,70	258,91	38,73	2170,52
16	2170,52	258,91	34,73	1946,35
17	1946,35	258,91	30,66	1718,10
18	1718,10	258,91	26,51	1485,70
19	1485,70	258,91	22,29	1249,08
20	1249,08	258,91	17,99	1008,16
21	1008,16	258,91	13,61	762,87
22	762,87	258,91	9,16	513,11
23	513,11	258,91	4,62	258,82
24	258,82	258,91	0,00	-0,09

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

ÅOP: Formler

Trin 1: Beregn ydelsen:

$$\frac{(lånebeløb + udgifter) \cdot \frac{rente\ p.a}{12}\%}{1 - \left(1 + \frac{rente\ p.a}{12}\%\right)^{-perioder}} \approx ydelse$$

Trin 2:Beregn renten pr. periode: (løs som ligning)

$$\frac{(lånebeløb) \cdot x}{1 - (1 + x)^{-perioder}} = beregnet\ ydelse\ fra\ trin\ 1$$

Find x

Trin 3: Omregn til ÅOP:

Sæt x du lige har fundet ind i

$$(1 + x\%)^{12} - 1 = ÅOP$$

Filer

www.matematikbanken.dk/formelsamling/aaop.xlsm (Excel-fil med makro)

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Kombinatorik og Sandsynlighed

Kombinatorik

Kombinatorik er den gren af matematikken, som omhandler antallet at muligheder for at kombinere forskellige elementer.

Kombinatorik kan bruges som et værktøj for sandsynlighedsregningen.
De kombinationer som man finder i kombinatorikken kan bruges som udfald i sandsynlighedsregningen.

$$P(Hændelse) = \frac{gunstige\ kombinationer}{mulige\ kombinationer}$$

Tællemodeller

For at holde styr på hvilket og hvor mange kombinationer, der findes, kan det være en fordel at bruge en tællemodel.

Tælletræ

Et tælletræ er en model, som giver overblik over antallet af kombinationer.

Tælletræet fungerer på den måde, at hver gang man har en kombination, så sætter man en streg. Når tælletræet er færdigt, tæller man antallet af ender på tælletræet og finder derved resultatet af opgaven.

Eks. Hvilke muligheder har man, når man "Slår plat/krone" med 2 mønter

Et godt sted at lave tælletræer er på http://matematikbanken.dk/L/345/

Matrix

En anden måde at lave en model over kombinationer er en matrix. En matrix er en tabelopstilling med 2 dimensioner. I nogle tilfælde er det en fordel at lave en matrix, fordi de mulige kombinationer bliver lettere at aflæse, da de i modsætning til tælletræet står direkte i en matrix. Dog har en matrix også den svaghed, at den kun kan arbejde i 2 dimensioner. Så man kan lave en matrix over kast med 2 terninger, men ikke for 3 eller flere terninger.

Eks. Matrix for 2 kast med en mønt (Dette eksempel er med tilbagelægning)

	Plat	Krone
Plat	Plat og Plat	Plat og Krone
Krone	Krone og Plat	Krone og Krone

Ud af både tælletræ og matrix kan man aflæse at der er 4 mulige udfald. (Plat-plat, plat-krone, krone-plat og krone-krone)

Dvs. at man f.eks. kan se at der er 3 muligheder ud af de 4, hvor der er mindst 1 plat.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Begreber

"Enten eller" (Additionsprincippet)

Hvis noget er "Enten eller", så skal man **lægge tallene sammen**.

Eks. man har to skåle med bolde i. I den ene skål er der 2 bolde (En sort og en hvid) i den anden skål er der 3 bolde (En grøn, en blå og en rød). Hvor mange muligheder har man for at kombinere boldene, hvis man **enten** tager en bold fra skål 1 **eller** fra skål 2.

Løsning ved beregning:
Man har 2+3 muligheder = 5 muligheder

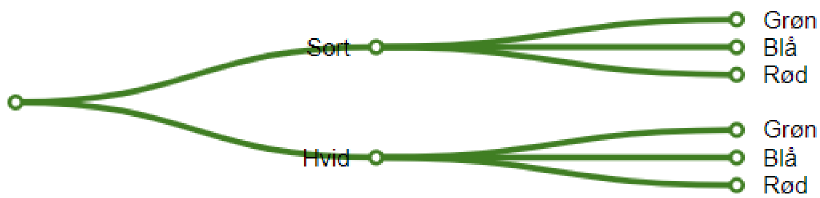
"Både og" (Multiplikationsprincippet)

Hvis noget er "både og", så skal man **gange tallene sammen**.

Eks. man har to skåle med bolde i. I den ene skål er der 2 bolde (En sort og en hvid) i den anden skål er der 3 bolde (En grøn, en blå og en rød). Hvor mange muligheder har man for at kombinere boldene, hvis man **både** tager en bold fra skål 1 **og** en bold fra skål 2.

Løsning ved beregning:
Man har $2 \cdot 3$ muligheder = 6 muligheder

Løsning ved tælletræ:



Som både beregning og tælletræ viser, er der 6 mulige kombinationer.

Med og uden tilbagelægning

Når man tæller antallet af kombinationer, tager man ofte stilling til, om det er med eller uden tilbagelægning.

Med tilbagelægning

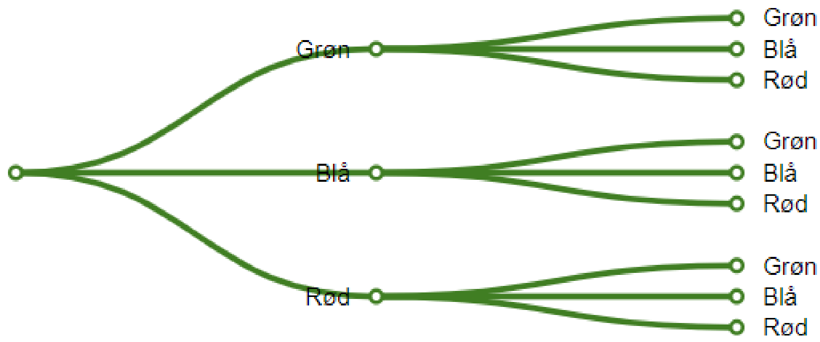
Hvis antallet af kombinationer er **med** tilbagelægning, betyder det, at mulighederne kan bruges flere gange.

Eks. 2 bolde tages op af en pose med 3 bolde i (Grøn, blå og rød). Det er med tilbagelægning

Løsning ved matrix:

	Grøn	Blå	Rød
Grøn	Grøn og Grøn	Grøn og Blå	Grøn og Rød
Blå	Blå og Grøn	Blå og Blå	Blå og Rød
Rød	Rød og Grøn	Rød og Blå	Rød og Rød

Løsning ved tælletræ:



Løsning ved beregning:

3·3= 9 muligheder

(3 muligheder for at trække den første bold. 3 muligheder for at trække nr. 2 bold.)

Som både beregning, matrix og tælletræ viser, er der 9 mulige kombinationer.

Bemærk at f.eks. den grøn bold kan komme op begge gange, man trækker en af de 3 bolde op af posen.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

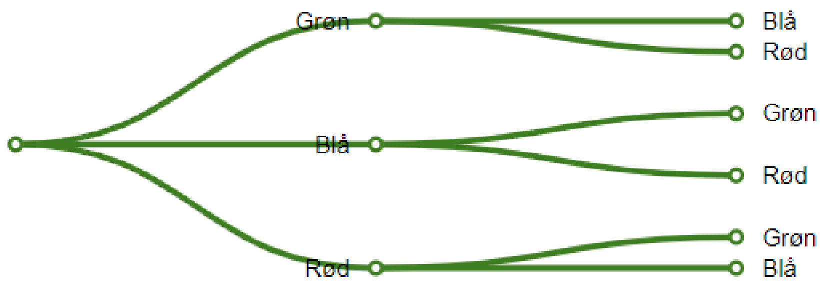
Uden tilbagelægning
Hvis antallet af kombinationer er **uden** tilbagelægning, betyder det, at mulighederne **ikke** kan bruges flere gange.

Eks. 2 bolde tages op af en pose med 3 bolde i (Grøn, blå og rød). Det er uden tilbagelægning.

Løsning via matrix

	Grøn	Blå	Rød
Grøn		Grøn og Blå	Grøn og Rød
Blå	Blå og Grøn		Blå og Rød
Rød	Rød og Grøn	Rød og Blå	

Løsning via tælletræ



Løsning via beregning:
3·2=6 muligheder (3 muligheder for at trække den første bold. Men kun 2 muligheder for at trække nr. 2 bold, da den første bold ikke bliver lagt tilbage i posen. Så den bold kan ikke trækkes igen

Som både beregning, matrix og tælletræ viser, er der 6 mulige kombinationer.

Bemærk at f.eks. den grøn bold ikke kan komme op begge gange, man trækker en af de 3 bolde op af posen.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Ordnet og uordnet stikprøve (kombinationer)

Nogle gange kigger man også på, om de kombinationer, som man kan lave, er **ordnet** eller **uordnet.** Hvis kombinationerne er **ordnet, har rækkefølgen en betydning**. Omvendt har **rækkefølgen ikke en betydning**, hvis kombinationerne er **uordnet.**

Det vil sige at:
- hvis kombinationerne er **ordnet**, så er ”ab” og ”ba” to forskellige kombinationer.
- hvis kombinationerne er **uordnet**, så er ”ab” og ”ba” den samme kombination, fordi det er de samme bogstaver, som bare står i forskellig rækkefølge.
- Der vil altid være flest ordnede kombinationer.

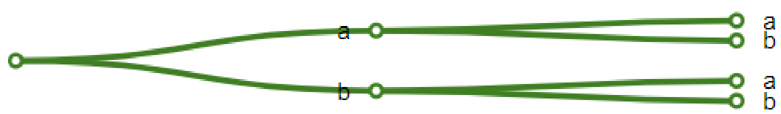
Eks. På hvor mange måde kan man kombinere bogstaverne ”a” og ”b”?

Hvis **orden har betydning** og **med tilbagelægning**

Løsning som matrix

	a	b
a	aa	ab
b	ba	bb

Løsning som tælletræ



Løsning som beregning:
2·2= 4 muligheder

Som både beregning, matrix og tælletræ viser, er der 4 mulige kombinationer.

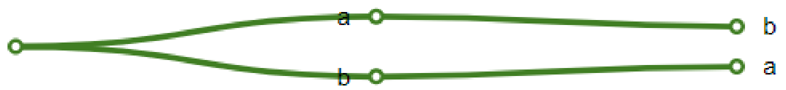
Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Hvis orden har betydning og uden tilbagelægning

Løsning som matrix

	a	b
a		ab
b	ba	

Løsning som tælletræ



Løsning som beregning:
2·1=2 muligheder

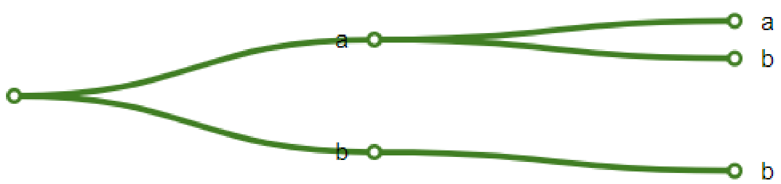
Som både beregning, matrix og tælletræ viser, er der 2 mulige kombinationer.

Hvis orden ikke har betydning og med tilbagelægning

Løsning som matrix

	a	b
a	Aa	ab
b		bb

Løsning som tælletræ



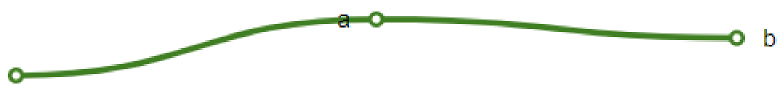
Beregning:
Beregningen er lidt speciel og vil blive vist senere

Som både matrix og tælletræ viser, er der 3 mulige kombinationer.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Hvis **orden ikke har betydning** og **uden tilbagelægning**

	A	b
a		ab
b		



Beregning:
Beregningen er lidt speciel og vil blive vist senere
Som både matrix og tælletræ viser, er der 1 mulige kombinationer.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Kombinatorik – Højt niveau

Nedenstående matrix kan bruge til forskellige kombinatoriske udregninger.
n=Antal der kan udtages fra.
r=Antal der skal udtages.

	Med tilbagelægning	Uden tilbagelægning
Ordnet stikprøve Rækkefølgen har betydning "ab" og "ba" er to forskellige muligheder (ab≠ba)	n^r Eks. En tipskupon De 13 rækker svarer til 13 udtrækninger (r=13) I hver række er der 3 muligheder(n=3) $3^{13} = 1594323$ måder kan man sammensætte en tipskupon på. (Bruges ofte (jævnt udfaldsrum))	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ Eks. Der skal i en gruppe på 5 personer (n=5) laves en bestyrelse med en formand, en næstformand og en kasserer (3 udtag (r=3)). Bemærk: det er forskellige bestyrelser, hvis de tre samme personer besætter posterne som formand, næstformand og kasserer forskelligt. $P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ måder kan man sammensætte bestyrelsen på. (Bruges ofte (jævnt udfaldsrum))
Uordnet stikprøve Rækkefølgen har IKKE betydning **"ab" og "ba" tæller kun som <u>en</u> mulighed (ab=ba)**	$A(n,r) = \frac{(n+r-1)!}{r!\cdot(n-1)!}$ Eks. I Yatzy slår man med 5 terninger(r=5), hvor der er 6 sider på (n=6). Hvor mange forskellige kombinationer kan man lave? (Alle terninger kastes på en gang, så rækkefølgen er uden betydning) $A(6,5) = \frac{(6+5-1)!}{5!\cdot(6-1)!} = 252\ udfald$ (Bruges næsten aldrig, da **muligheder ikke er lige sandsynlige** (Ujævnt udfaldsrum))	$K(n,r) = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ Eks. Der skal ud af en gruppe på 5 personer (n=5) sammensættes et udvalg på 3 personer. (r=3) $K(5,3) = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}$=10 måder kan man sammensætte udvalget på. (Bruges ofte (jævnt udfaldsrum))

Eksempel

Hvis man skal kombinere to bogstaver og har bogstaverne a, b og c til rådighed, har man følgende muligheder:

	Med tilbagelægning	Uden tilbagelægning
Ordnet stikprøve Rækkefølgen har betydning "ab" og "ba" er to forskellige muligheder (ab≠ba)	Eks. aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc $3^2 = 9\ måder$	Eks. ~~aa~~, ab, ac, ba, ~~bb~~, bc, ca, cb, ~~cc~~ $P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6\ måder$
Uordnet stikprøve Rækkefølgen har IKKE betydning "ab" og "ba" tæller kun som <u>en</u> mulighed (ab=ba)	Eks. aa, ab, ac, ~~ba~~, bb, bc, ~~ca~~, ~~cb~~, cc $A(n,r) = \frac{(3+2-1)!}{2!\cdot(3-1)!} = 6$ måder Bemærk: at aa (med 2 ens bogstaver) kan kombineres på 1 måde, mens ab (2 forskellige bogstaver) kan kombineres på to måder (ab ba). MEN begge dele tæller kun som en mulighed her. (Ujævnt udfaldsrum)	Eks. ~~aa~~, ab, ac, ~~ba~~, ~~bb~~, bc, ~~ca~~, ~~cb~~, ~~cc~~ $K(3,2) = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 3\ måder$

Tastevejledning:

Lommeregner (TI-30X IIB og TI-30XB MultiView):

3!: "3" → "PRB" → Vælg "!" med piletaster → "Enter" → "Enter"
P(3,2): "3" → "PRB" → Vælg "nPr" med piletaster → "Enter" → "2" → "Enter"
K(3,2): "3" → "PRB" → Vælg "nCr" med piletaster → "Enter" → "2 " → "Enter"

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Computerprogrammer:

MathCad: 3!: ”3!” P(3,2): ”permut(3,2)” K(3,2): ”combin(3,2)”	**Excel (dansk):** 3!: ”FAKULTET(3)” P(3,2): ”PERMUT(3;2)” K(3,2): ”KOMBIN(3,2)”	**GeoGebra** 3!:”3!” P(3,2): ”nPr[3,2]” K(3,2): ”nCr[3,2]”
TI-InterActive: 3!: ”3!” P(3,2): ”nPr(3,2)” K(3,2): ”nCr(3,2)”	**WolframAlpha**: http://www.wolframalpha.com/ 3!: I inputfeltet skrives: ”3!” P(3,2) I inputfeltet skrives: ”P(3,2)” K(3,2) I inputfeltet skrives: ”C(3,2)”	

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Sandsynlighed

Sandsynlighed bruges til at kunne forudsige noget om fremtiden for at en bestemt hændelse sker.

Umiddelbart kan vi inddele sandsynlighed i **to former**.

Statistisk sandsynlighed

Statistisk sandsynlighed bygger på data vi finder. Enten noget der er opsamlet eller noget vi eksperimentere os frem til

Allerede opsamlet data

Her finder man sandsynligheden for en hændelse ved at kigge på en statistik.

- Eks.: Statistisk set har hver 5 skoleelev en smartphone med knækket glas. Derfor er sandsynligheden for den *hændelse,* at en tilfældig elev har en ødelagt skærm, $\frac{1}{5}$, 20 % eller 0,2. (Man bestemmer selv, hvordan man angiver sandsynligheden)

Eksperimentel sandsynlighed

En anden form for statistisk sandsynlighed er, at man eksperimenterer sig frem til sandsynligheden.

Kombinatorisk sandsynlighed

I den kombinatorisk sandsynlighed ”regner” man sig frem til en sandsynlighed ud fra de mulige udfald, som der er.

- Eks. Ved en alm. terning er der mulighed for 6 udfald $\{1,2,3,4,5,6\}$. Sandsynlighed for hændelsen at slå et lige tal er altså 3 $\{2,4,6\}$ud af 6 mulige udfald. Derfor er sandsynligheden for hændelsen et lige tal: $\frac{1}{2}$, 50 % eller 0,5.

Udfaldsrum:

Dette er alle de mulige udfald der er.

- Eks.
  - Udfaldsrummet for en alm. terning er $\{1,2,3,4,5,6\}$
- I forbindelse med udfaldsrum snakker man ofte om
  - ”Et **jævnt** udfaldsrum” hvor der er lige stor sandsynlighed for alle udfald
    - Eks. en alm. terning med 6 lige store sider.
  - ”Et **ujævnt** udfaldsrum” hvor der ikke er lige stor sandsynlighed for alle udfald.
    - Eks. ”Vinde i lotto” eller ”Ikke vinde i lotto”. Der er meget større sandsynlighed for, at man ”ikke vinder” end for at man ”vinder”.
  - Det ”ujævne udfaldsrum” er sværere at regne på.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Hændelse:
Dette er det eller de udfald, som man har fokus på. En hændelse kan bestå af både et og flere udfald.

- Eks.
  - En hændelse kunne være at slå en ”2’er” eller at ”samfundsfag” bliver udtrukket.
  - Men det kunne også være at slå ”et lige tal” med en alm. terning, som er udfaldene $\{2,4,6\}$
- I forbindelse med hændelser snakker man ind i mellem om
  - ”En **sikker** hændelse” er et udfald, som med sikkerhed vil komme.
    - Eks. at slå mindre end 7 med en alm. terning.
      - Ved en sikker hændelse vil sandsynligheden være 1 eller 100 %
  - ”En **umulig** hændelse” er et udfald, som med sikkerhed aldrig vil komme.
    - Eks. at slå en 7’er med en alm. terning.
      - Ved en umulig hændelse vil sandsynligheden være 0

Gunstige udfald:
Dette er de udfald i vores udfaldsrum, som passer til vores hændelse.

- Eks. Hvis vi vil undersøge sandsynligheden for hændelsen ”et ulige tal” i udfaldsrummet $\{1,2,3,4,5,6\}$, vil de gunstige udfald være $\{1,3,5\}$.

Beregning af sandsynligheden
Når man skal regne sig frem til en sandsynlighed for en hændelse, bruger man formlen:

$$P(hændelse) = \frac{antal\ gunstige\ udfald}{udfaldsrum}$$

I formlen ovenfor står P for ”sandsynligheden” for en hændelse. P står for det engelske ord **probability**.

- Eks. Sandsynligheden for hændelsen at slå en 2’er med en alm. terning skrives og beregnes således:

$$P(2) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\% \approx 0{,}167$$

- Eks. Sandsynligheden for hændelsen at slå et ”lige tal” med en alm. terning skrives og beregnes således:

$$P(lige\ tal) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\% = 0{,}5$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksperimenter

Nogle gange kan det være svært at beregne sig frem til en sandsynlighed. I disse tilfælde vil man ofte kunne finde et tilnærmet resultat ved at lave et eksperiment. Resultatet vil ofte være brugbart men sjældent 100% præcist.

De store tals lov

Teorien bagved de store tals lov er, jo flere gange man udfører et eksperiment - Jo tættere vil man komme på den faktiske sandsynlighed.

Simulation

Når man skal udføre eksperimenter i forbindelse med sandsynlighed, kan det være en fordel at kunne lave en simulation i regneark.

I denne video https://matematikbanken.dk/L/367/ vises et eksempel på, hvordan man kan opbygge en simulering.

Formler der bruges:

=SLUMP.MELLEM(1;6)

=TÆL.HVIS(område;kriterier)

Trykker man på **F9**, får man en ny simulering, hvilket svarer til et nyt eksperiment (kast)

(Husk at man kan låse en celle ved at trykke **F4** på en Windows-computer eller **cmd+t** på en Mac.)

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

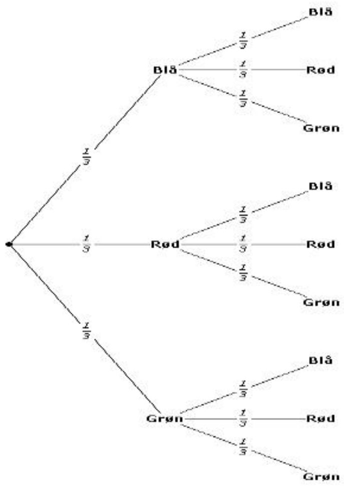
Sammensat sandsynlighed

Indimellem har man behov for at finde sandsynligheden for en hændelse, hvor to udfald hænger sammen.

Eks.
Et lykkehjul har tre felter (Blå, rød og grøn). Felterne er lige store, hvilket betyder, at det er et jævnt udfaldsrum.

Hvad er sandsynligheden for, at lykkehjulet stopper på den blå to gange i træk?

Tælletræ



Her kan man sige, at sandsynligheden for at stoppe på en blå i første runde er $\frac{1}{3}$
Sandsynligheden for at stoppe på en blå i anden runde er $\frac{1}{3}$. Da lykkehjulet både skal stoppe på en blå i først og anden runde skal disse to sandsynligheder ganges med hinanden.

Så regnestykket bliver: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
Sandsynligheden er altså $\frac{1}{9}$ for at stoppe på blå to gange i træk.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

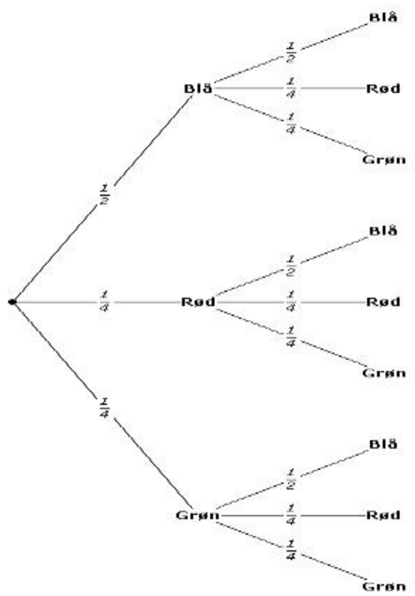
Ujævnt udfaldsrum

Nogle gange er udfaldsrummet ikke jævnt. Hvilket betyder, at sandsynlighederne for forskellige udfald ikke er lige store.

Eks.

Et lykkehjul har tre felter (Blå, rød og grøn). Felterne er IKKE lige store, hvilket betyder, at det er et ujævnt udfaldsrum.

Hvad er sandsynligheden for, at lykkehjulet stopper på den blå to gange i træk?



Da sandsynligheden for en blå i hver omgang er $\frac{1}{2}$, bliver regnestykket: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Bemærk:

At her kan man ikke længere tælle grenene i tælletræet, men er nødt til at kigge på, hvad der står på grenene!

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Modsat hændelse (Komplementær hændelse)

Nogle gange er det lettere at finde ud af ”sandsynligheden for at en hændelse ikke sker” end et er at finde ”sandsynligheden for at en hændelse sker”. Når man finder en ”modsatte” hændelse, siger man, at man finder ”en komplementær hændelse”.

Eksempel: Hvad er sandsynligheden for at slå mindst en 6 i kast.

I første omgang finder vi ud af, hvad er sandsynligheden for ingen af de 3 kast er 6’ere.

P(ingen 6’ere) = $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

Det vil sige, at 125 ud af de 216 forskellige kombinationer, som er mulige i forbindelse med 3 kast med en almindelig terning, indeholder IKKE en eller flere 6’ere. Derfor må der være (216-125=91) 91 kombinationer, som indeholder mindst en 6’er. Derfor er sandsynligheden for at slå mindst en 6’er i 3 slag.

P(mindst en 6’er) = $\frac{216}{216}-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}\approx 0{,}423\approx 42{,}3\%$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Tid - Omregning mellem sekunder, minutter og timer

Gange med 60

time	min	sek

Dividere med 60

Bemærk
Vær altid opmærksom på decimaltal i forhold til timer.
1,5 time er IKKE det samme som 1 time og 50 min.
1,5 time er 1 og en halv time, hvilket vil sige 1 time og 30 min.

Begrebet Decimaltimer
Decimaltimer er når tiden er skrevet som decimaltal. F.eks. kan 1 time og 30 min. skrives som 1,5 time.
1,5 time er 1 og en halv time, hvilket vil sige 1 time og 30 min.

Omsætning fra decimaltimer til minutter
Her skal man gange decimaltimerne med 60 (fordi der er 60 min. på en time)

1,5 time skal omsættes til min.
$1{,}5 \cdot 60 = 90$
Så bliver det 90 minutter

Omsætning fra minutter til decimaltimer:

Her skal man dividere minutterne med 60 (fordi der er 60 min. på en time)

75 min. skal omsættes til decimaltimer.

$$\frac{75}{60} = 1{,}25$$

Så bliver det 1,25 decimaltime

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Omsætning fra decimaltimer til timer og minutter
Her skal man lade de hele timer stå og derefter gange decimaltimerne minus de hele timer med 60.

1,6 time skal laves om til timer og minutter
$(1{,}6-1)\cdot 60 \approx 36$
Så bliver det 1 time og 36 min.

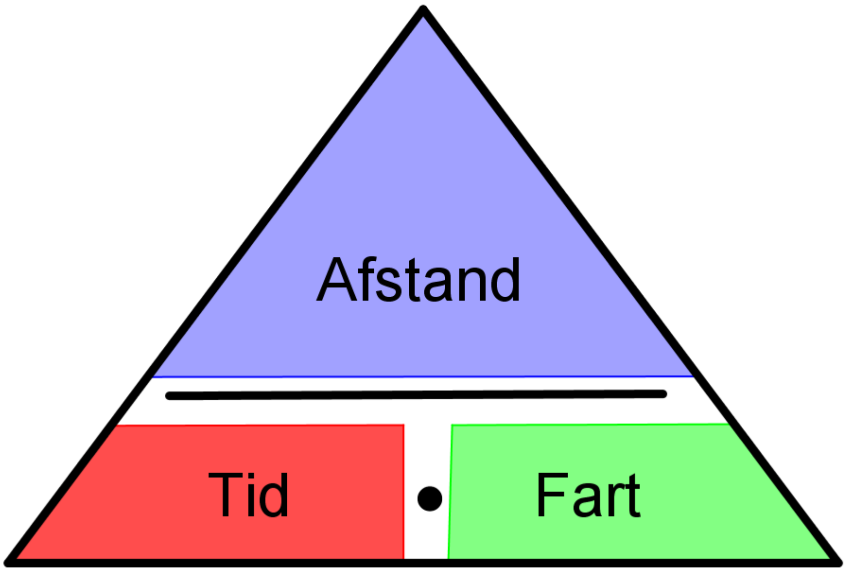
Omsætning fra timer og minutter til decimaltimer
Her skal man lade de hele timer stå og derefter dividere minutterne med 60.

1 time og 45 min. skal laves om til decimaltimer.
$45/60=0{,}75$
Så bliver det 1,75 decimaltime

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Fart

Fart er et udtryk for hvor lang tid, det har taget at tilbagelægge en given afstand.



$$Fart = \frac{afstand}{tid} \qquad Tid = \frac{afstand}{fart} \qquad Afstand = fart \cdot tid$$

HUSK enhederne skal passe - fx km, timer og km/t

Omregning

km/t → m/s ved at dividere med 3,6
m/s → km/t ved at gange med 3,6

Eksempel på omregning fra km/t til m/sek. og omvendt:

m/s → km/t

$Omregn\ 10\frac{m}{s}\ til\ \frac{km}{t}$:

$$10 \cdot 3{,}6 = 36\frac{km}{t}$$

km/t → m/s

$Omregn\ 36\frac{km}{t}\ til\ \frac{m}{s}$:

$$\frac{36}{3{,}6} = 10\frac{m}{s}$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Beregning af afstand:

$$Afstand = fart \cdot tid$$

Vi ved at en bil bevæger sig med 40 km/t og det tager 30 min.
30 min omregnet til decimaltimer: $\frac{30}{60} = \frac{1}{2} = 0{,}5t$

$$\boldsymbol{Afstand = 0,5\ t\ \cdot 40\frac{km}{t} = 20km}$$

Beregning af farten:

$$Fart = \frac{afstand}{tid}$$

Vi ved at en cyklist cykler 5 km på 20 min.
20 min omregnet til decimaltimer: $\frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0{,}333t$

$$\boldsymbol{fart = \frac{5km}{0,33t} = 15\frac{km}{t}}$$

Beregning af tiden:

$$Tid = \frac{afstand}{fart}$$

Hvis man går med 5 m/s, hvor lang tid tager det så at tilbagelægge 1,5 km
Omregning af km til m: 1,5·1000 = 1500 m

$$tid = \frac{1500m}{5\frac{m}{s}} = 300s$$

De 300 sekunder kan efterfølgende laves om til minutter:

$$\frac{300}{60} = 5 \text{ min}$$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Omregning af 5000 sek. til timer, minutter og sekunder:

Først finder vi ud af, hvor lang tid vi har i minutter:

$$\frac{5000}{60} = 83{,}33\ min$$

Hvor at finde antal hele timer dividere vi med 60 (60 min. på en hel time)

$$\frac{83{,}33}{60} \approx 1{,}388833$$

Så vi har 1 hel time.

For at finde antal hele minutter ganger vi det, som er udover hele timer, med 60 (da der er 60 minutter på en time). Her er det 0,388833

$$0{,}388833 \cdot 60 = 23{,}32998$$

Så vi har 23 hele minutter.

For at finde antal sekunder ganger vi det, som er udover hele minutter, med 60 (da der er 60 sekunder på et minut). Her er det 0,32998

$$60 \cdot 0{,}33 \approx 20$$

Så vi har 20 sekunder

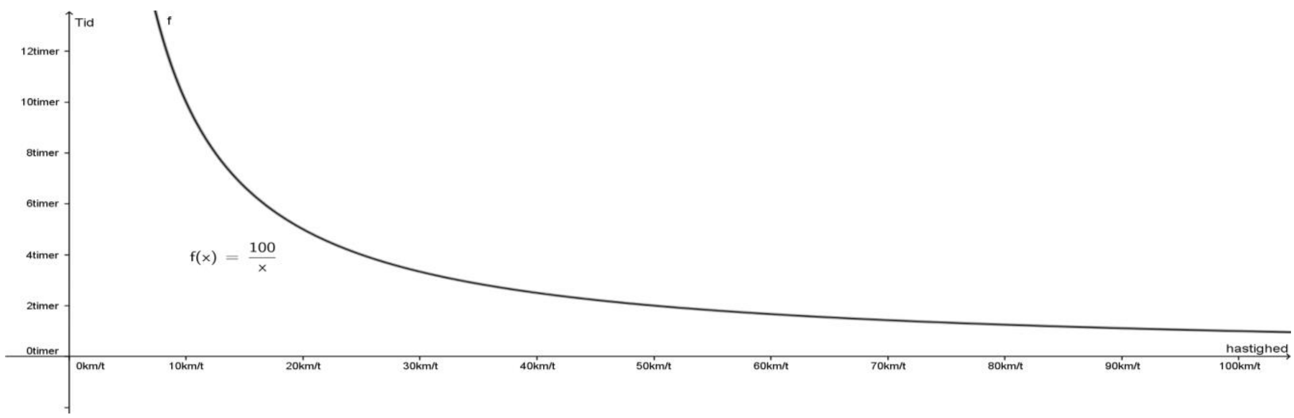
Så alt i alt har vi 1 time, 23 minutter og 20 sekunder, hvis vi har 5000 sekunder.

Grafisk afbildning af hastighedens betydning

Hvilken betydning har farten for tiden ved en strækning på 100 km

$f(x) = \frac{100km}{x\frac{km}{t}}$, x:=farten i km/t; f(x):= tiden i timer

Denne funktion er omvendt proportional



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Acceleration

Acceleration er ændring af hastigheden pr. tidsenhed eller den matematiske tidsafledede af hastigheden.

Den afledte SI-enhed for acceleration er m/s².

Tyngdeaccelerationen er ca. 9,81 m/s² i Danmark.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Δ betyder ændringer i

Eller omskrevet, så er accelerationen lig ændringer i hastigheden divideret med ændringer i tiden.

Eksempel

En bil kan accelerere fra 0km/t til 100km/t på 4,5 sek.

$$accelrationen = \frac{100\frac{km}{t} - \frac{0km}{t}}{4{,}5s - 0s} = \frac{100}{4{,}5} = 6{,}173\frac{m}{s^2}$$

Det betyder så at for hvert sekund der går - så øger bilen sin hastighed med yderligere 6,173 m/s. (22.22 km/t)

Dvs. at bilen
efter 1 s. har en hastighed på 22,22 km/t
efter 2 s. har en hastighed på 44,44 km/t
efter 3 s. har en hastighed på 66,66 km/t
efter 4 s. har en hastighed på 88,88 km/t
efter 4,5 s. har en hastighed på 100 km/t

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

2. eksempel

Se video med Usain Bolt, som løber 100 m på 9,58 sek.

https://matematikbanken.dk/L/368/

Se tiderne for løbet, fordelt på intervaller, længere nede

Jeg kan se at i interval nr. 7 har han en hastighed på 44,44 km/t
I interval nr. 8 har en hastighed på 43,90 - Han har altså løbet dette interval langsommere end nr. 7. Så vi har altså en negativ acceleration.

Acceleration for interval 8 er $\frac{12{,}2-12{,}35}{0{,}82} = -0{,}1829\,\frac{m}{s^2}$

Vi kan også se, at i interval nr. 2 sker den største acceleration.
Han ændrer hastigheden fra 19,05 km/t til 36,36 km/t på 0,99 sek.

Acceleration for interval 2 er $\frac{10{,}1-5{,}29}{0{,}99} = 4{,}859\,\frac{m}{s^2}$

Interval nr.	Tid fra start i sek.	Tid pr. interval	Længde fra start i m	Hastigheden for intervallet i m/sek.	Hastighed for intervallet i km/t	Accelerationen
0	0	0	0			
1	1,89	1,89	10,0000	5,29	19,05	2,8
2	2,88	0,99	20,0000	10,10	36,36	4,86
3	3,78	0,9	30,0000	11,11	40,00	1,12
4	4,64	0,86	40,0000	11,63	41,86	0,6
5	5,47	0,83	50,0000	12,05	43,37	0,51
6	6,29	0,82	60,0000	12,20	43,90	0,18
7	7,1	0,81	70,0000	12,35	44,44	0,19
8	7,92	0,82	80,0000	12,20	43,90	-0,18
9	8,75	0,83	90,0000	12,05	43,37	-0,18
10	9,58	0,83	100,0000	12,05	43,37	0

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

3. eksempel

En bil kører 72 km/t og bringes til standsning på 3 sek. Hvad er den negative acceleration?

Ændring i hastighed er 72 km/t til 0 km/t = 72 km/t
72 km/t omregnes til m/s (Der dividerer med 3,6) 72 km/t svarer til 20m/s

Farten ændres på 3 sek. Accelerationen må så være

Accelerationen er $\frac{0-20}{3} \approx -6{,}666667\,\frac{m}{s^2}$

Den negative acceleration skal som minimum være $\frac{5m}{s^2}$ for at overholde lovkravet til bremserne.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Alkohol

Så meget er en genstand

En genstand indeholder 12 gram ren alkohol. Dette svarer til 1,5 cl. ren alkohol.
I en almindelig øl er der 1 genstand.

Formler

Så lang tid er du om at forbrænde en genstand

$F = 0{,}12 \cdot x \cdot t$
F = Antal gram forbrændt alkohol
x = Din vægt i kg.
t = Antal timer siden den første genstand

Sådan regner du promillen ud.

Kvinde	
Når man kender gram alkohol	Når man kender antal genstande
$\frac{\boldsymbol{Gram\ alkohol}}{\boldsymbol{0,55 \cdot Vægt}} = \boldsymbol{Promille}$	$\frac{Genstand \cdot 12}{0{,}55 \cdot Vægt} = Promille$
Mand	
Når man kender gram alkohol	Når man kender antal genstande
$\frac{\boldsymbol{Gram\ alkohol}}{\boldsymbol{0,68 \cdot Vægt}} = \boldsymbol{Promille}$	$\frac{Genstand \cdot 12}{0{,}68 \cdot Vægt} = Promille$

Sådan regner du antal genstandene ud i flaske

På flere flasker er alkoholindholdet både oplyst i procent og antal genstande. Hvis ikke, kan du finde frem til antallet af genstande ved at regne ud, hvor meget ren alkohol flasken indeholder. Du ved at massefylden for ren alkohol er $0{,}8\frac{g}{cm^3}$ eller $0{,}8\frac{g}{mL}$

OBS		
$\boldsymbol{cm^3 = mL}$	$12\ gram\ alkohol = 15\ mL\ alkohol$	$33\ cL = 330\ mL = 0{,}33\ L = 3{,}3\ dL$

Hvad og styrke	Finder hvor meget der er ren alkohol	Antal genstande
0,75 liter Gajol 16,6%	$750 \cdot 16{,}6\% = 124{,}5ml$	$\frac{124{,}5}{15} = 8{,}3$
0,75 liter Gajol 16,6%	$750 \cdot 16{,}6\% \cdot 0{,}8\frac{g}{cm^3} \approx 99{,}6\text{gram}$	$\frac{99{,}6}{12} \approx 8{,}3$
0,75 liter Gajol 32,5%	$750 \cdot 32{,}5\% \cdot 0{,}8 = 195\text{gram}$	$\frac{195}{12} = 16{,}25$
0,75 liter Vodka 40%	$750 \cdot 40\% \cdot 0{,}8 = 240\ gram$	$\frac{240}{12} = 20$
2 cl. Vodka 40%	$20 \cdot 40\% \cdot 0{,}8 = 6{,}4gram$	$\frac{6{,}4}{12} \approx 0{,}5333333$
2 cl. Gajol 16,6%	$20 \cdot 16{,}6\% \cdot 0{,}8 = 2{,}656gram$	$\frac{2{,}656}{12} \approx 0{,}2213333$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Sådan finder du styrken af hjemmelavet drinks

OBS: Omregner alt til ml. først. Derefter kan man bruge massefylde-formlerne til at omregne til gram.

Sodavand med vodka

Mængde væske uden alkohol	20 cl sodavand
Mængde væske med alkohol	2 cl 40%
Mængde væske i alt	22 cl
Mængde alkohol	$20mL \cdot 40\% = 8\ mL$
Styrke	$\frac{8mL}{220mL} \approx 3{,}63\%$
Antal genstande	$\frac{8 \cdot 0{,}8}{12} \approx 0{,}5$ genstande

Bowle

Mængde væske uden alkohol	1 liter juice
Mængde væske med alkohol	0,5L vodka 40%
Mængde væske i alt	1,5L = 1500mL
Mængde alkohol	$500mL \cdot 40\% = 200\ mL$
Styrke	$\frac{200mL}{1500mL} \approx 13{,}33\%$
Antal genstande	$\frac{200 \cdot 0{,}8}{12} \approx 13{,}3$ genstande

Long Island Iste

Mængde væske uden alkohol	2 dl
Mængde væske med alkohol	8 cl. 35%
Mængde væske i alt	28cL
Mængde alkohol	$8\ \cdot 35\% = 2{,}8\ cL$
Styrke	$\frac{2{,}8cL}{28cL} \approx 10\%$
Antal genstande	$\frac{28 \cdot 0{,}8}{12} \approx 1{,}9$ genstande

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Som tommelfingerregel kan du i øvrigt regne med, at der er en genstand i:

1 alm. øl (33 cl)
1 glas vin (12 cl)
1 glas hedvin (8 cl)
1 glas spiritus (4 cl)

1 guldøl indeholder ca. 1¼ genstand
1 flaskevin (75 cl) indeholder ca. 6 genstande
1 flaskespiritus (70 cl) indeholder ca. 18 - 20 genstande

Promillen ved indtagelse af en genstand

Alt efter hvor meget man vejer, påvirkes man forskelligt. Som tommelfingerregel kan du regne med at 1 genstand giver disse promiller:

	Kvinde			Mand		
Vægt	Promille	Tid om at forbrænde genstanden	Antal genstande forbrændt på en time	Promille	Tid om at forbrænde genstanden	Antal genstande forbrændt på en time
50 kg	0,44‰	Ca. 120 min	0,5	0,35‰	Ca. 120 min	0,5
60 kg	0,36‰	Ca. 100 min	0,6	0,29‰	Ca. 100 min	0,6
70 kg	0,31‰	Ca. 86 min	0,7	0,25‰	Ca. 86 min	0,7
80 kg	0,27‰	Ca. 75 min	0,8	0,22‰	Ca. 75 min	0,8
90 kg	0,24‰	Ca. 67 min	0,9	0,20‰	Ca. 67 min	0,9
100 kg	0,22‰	Ca. 60 min	1	0,18‰	Ca. 60 min	1

Som man kan se af ovenstående skema:

- Har det stor betydning, om man er mand eller kvinde i forhold til den promille, som man får, når man indtager alkohol.
- Har vægten stor betydning i forhold til den tid, det tager for kroppen at forbrænde den alkohol, som man har drukket.

Promille	Kroppens reaktion
0,2	Øjets evne til hurtigt at fokusere og omstille sig fra lys til mørke forringes.
0,5	Evnen til på en gang at opfatte situationer og samtidig udføre præcise bevægelser begynder at forringes. Synsvinklen indsnævres.
0,8	Nedsat koordinationsevne og øget reaktionstid.
1,0	Opmærksomheden og koncentrationsevnen er svækket, begyndende træthedssymptomer og nedsat balance- og bevægelsesevne.
1,5	Udtalt forringet bevægelsesevne og talebesvær. Centralnervesystemet har fået nok - og maven sikkert også.
2,0	Udtalte forgiftningssymptomer. Selvkontrollen er helt væk.
3,0	Manglende kontrol med fx urinblæren, evt. bevidstløshed.
4.0	Bevidstløs. Livsfare

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Alkohol i kroppen

$$genstande \cdot 12 - 0{,}12 \cdot vægt \cdot t = gram\ alkohol$$

genstande = Antal genstande du har drukket i løbet af t timer
vægt = Din vægt i kg.
t = timer du har drukket
gram alkohol = den mængde alkohol, du har tilbage i kroppen målt i gram

Funktion der viser promille i timerne efter, at man er stoppet med drikke alkohol

Mand: $f(x) = \frac{gram\ alkohol - 0{,}12 \cdot vægt \cdot x}{0{,}68 \cdot vægt}$

Kvinde: $g(x) = \frac{gram\ alkohol - 0{,}12 \cdot vægt \cdot x}{0{,}55\ \cdot vægt}$

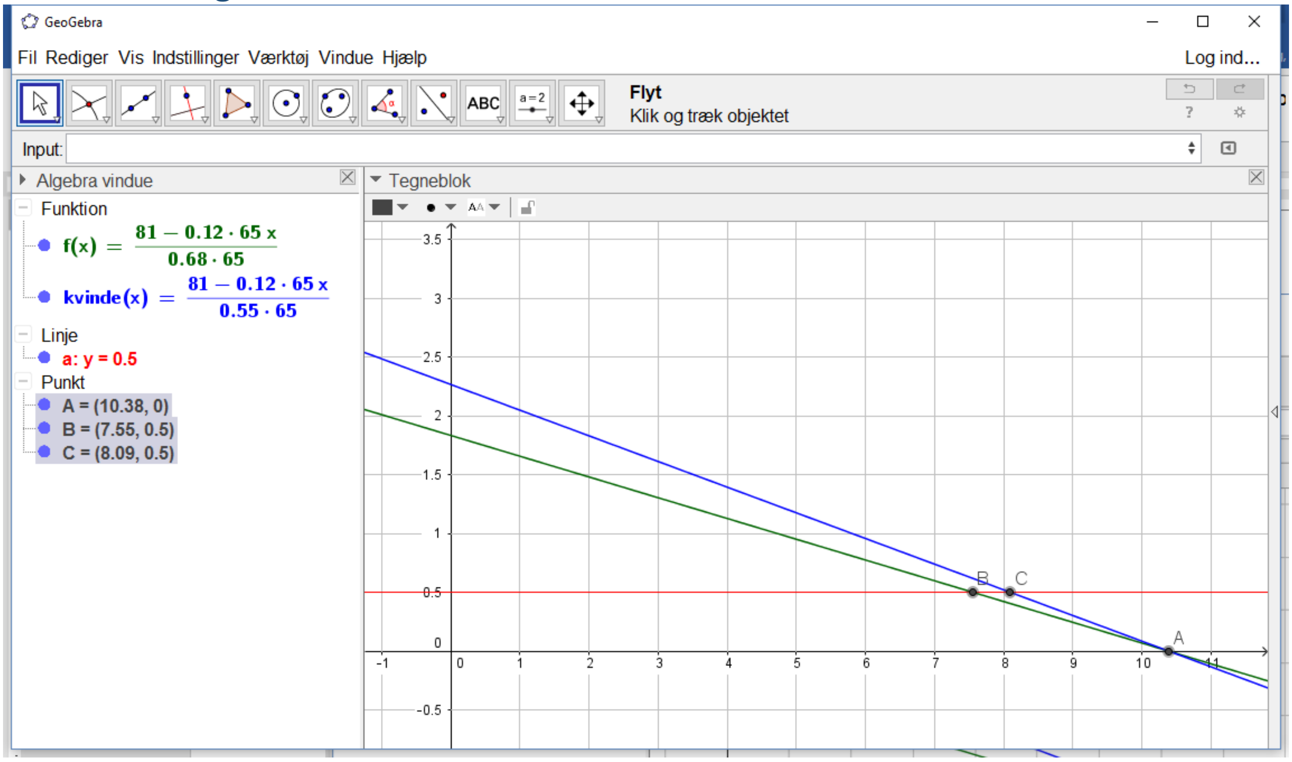
gram alkohol = den mængde alkohol i gram, som man har tilbage fra den tidligere formel
x = timer

Eks:
En mand og en kvinde som begge vejer 65 kg har hver drukket 10 genstande i løbet af en aften fra 19 - 24. Hvornår må de køre bil igen? Dvs. de har en promille på under 0,5?

Mand	Kvinde
$10 \cdot 12 - 0{,}12 \cdot 65 \cdot 5 = 81$ Efter 5 timer han personen stadig 81 gram alkohol tilbage i kroppen. $\frac{81 - 0{,}12 \cdot 65 \cdot x}{0{,}68 \cdot 65} < 0{,}5$ *Uligheden løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.* $x > 7{,}551282$ Efter 7,55 timer $0{,}55 \cdot 60 = 33$ Efter 7 timer og 33 min har manden en promille under 0,5	$10 \cdot 12 - 0{,}12 \cdot 65 \cdot 5 = 81$ Efter 5 timer han personen stadig 81 gram alkohol tilbage i kroppen. $\frac{81 - 0{,}12 \cdot 65 \cdot x}{0{,}55 \cdot 65} < 0{,}5$ *Uligheden løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.* $x > 8{,}092949$ Efter 8,1 timer $0{,}1 \cdot 60 = 6$ Efter 8 timer og 6 min har kvinden en promille under 0,5

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Grafisk løsning



Ud fra grafen kan man se, at kvinden har en større promille end manden, og at manden må køre bil før kvinden må. Men efter 10,38 timer, har de begge en promille på nul. Det skyldes at de vejer lige meget og har drukket samme mængde alkohol

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Programmer

GeoGebra

Komma
Bruges til koordinatsæt. Koordinatsæt skrives (x,y)

Punktum
Bruges til decimaler fx $\frac{1}{2} = 0.5$

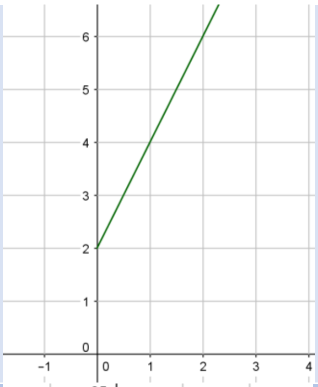
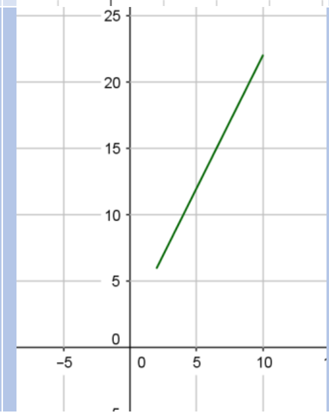
Funktioner
Funktioner skrives som 2x+5. Så kan GeoGebra regne med funktionen f.eks. finde hældning

Boksplot (når man kender 1.,2. og 3. kvartil, mindste- og størsteværdi)

Vigtige kommandoer i GeoGebra

Kommando	Effekt	Eksempel
Boksplot[<yOffset>, <ySkalering>, <Start Værdi>, <Q1>, <Median>, <Q3>, <Slut værdi>]	Kan tegne et boksplot ud fra mindsteværdi, kvartilsæt og størsteværdi	Boksplot[1,0.5,1,2,5,7,8]
Skæring[<Objekt>, <Objekt>]	Skæring mellem to objekter	Skæring[f,r]
FitVækst[<liste med punkter>]	Tegner den bedst mulige vækstfunktion ud fra punkter	FitVækst[A,B,C]
FitLinje[<liste med punkter>]	Tegner den bedst mulige rette linje ud fra punkter	FitLinje[A,B,C]
FitPoly[<liste med punkter>, <grad>]	Tegner den bedst mulige funktion ud fra punkter og grad	FitPoly[A,B,C,2]
FitPot[<liste med punkter>]	Tegner den bedst mulige potensfunktion ud fra punkter (Kan bruges til omvendt proportionalitet)	FitPot[A,B,C]
FitExp[<liste med punkter>]	Tegner den bedst mulige ekspotentielle funktion ud fra punkter	FitExp[A,B,C]
Funktion[<Funktion>, <Start x-Værdi>, <Slut x-Værdi>]	Kan ”afskære” en funktion til et interval	Funktion[f(x), 0,10]
Ekstremum[<Polynomium>]	Kan finde toppunkt	Ekstremum[f(x)]
Rod[<Polynomium>]	Kan finde nulpunkter	Rod[f(x)]
Polynomium[<Liste med Punkter>]	Kan ud fra punkter tegne en funktion	Polynomium[A,B,C]

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

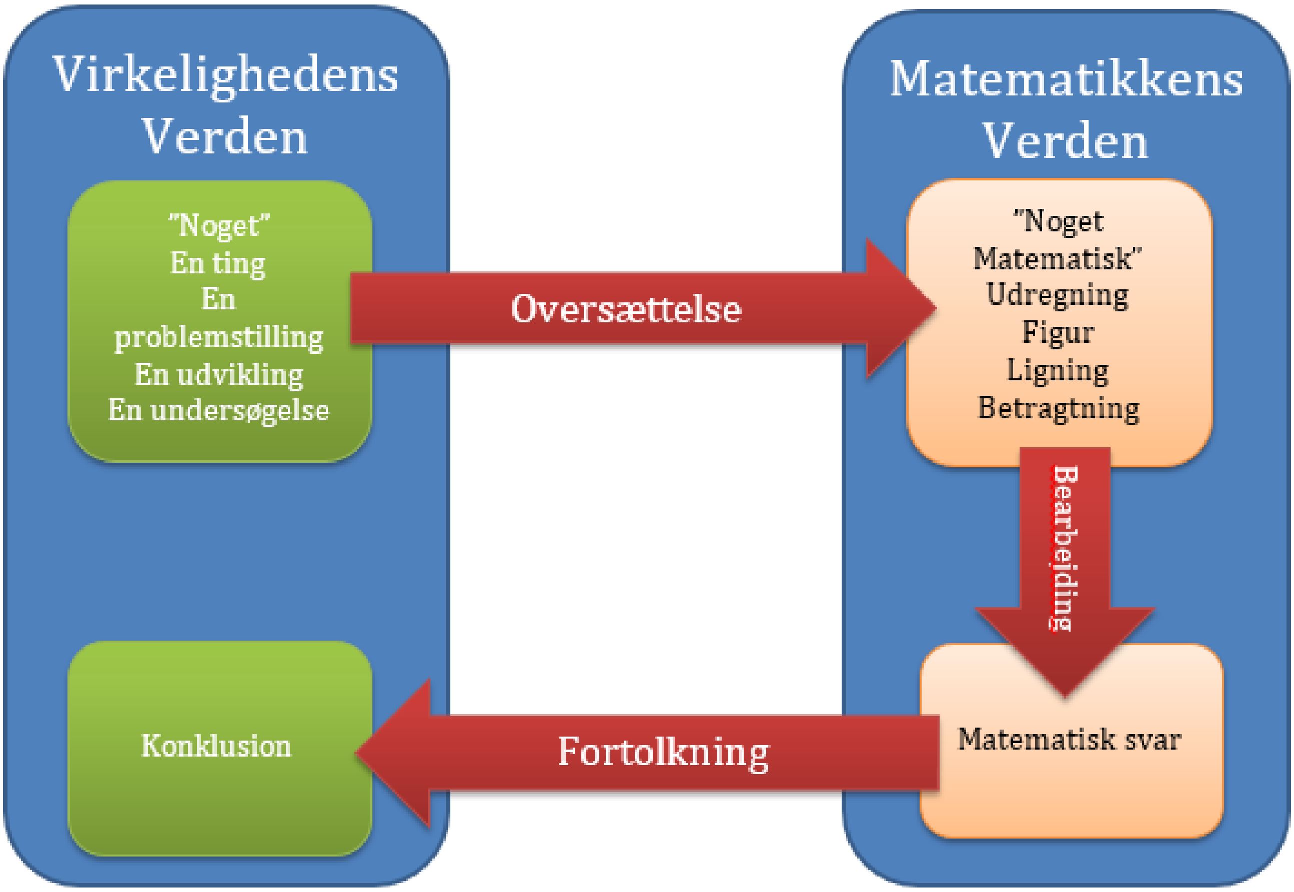
f(x)=2x+2,x>0	Afgrænser en funktion, så den kun viser værdier større end 0	
f(x)=2x+2,2<x<10	Viser værdier mellem 2 og 10	

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Kommunikation i skriftlig matematik med hjælpemidler

Opsætning i WordMat

Indskrivning med henblik på god kommunikationsværdi (orden)



Opgavenummer Hvad skal jeg undersøge: Omsætte til matematisk udregning=matematisk facit **Omsættes til et svar, som giver mening for læseren. (en konklusion indeholdende en matematisk forståelse)**

Om layout.
Det skal tydeligt fremgå, hvilken opgave man løser (opgavenummer)
Det skal tydeligt fremgå, hvad man skal finde ud af. (En opgavetekst - ikke over en linje)
Der skal være en tegning og/eller beregning og/eller betragtning og/eller forklaring
Der skal være et matematisk facit
Der skal være en konklusion. Med et **passende** antal decimaler.
Det skal tydeligt fremgå hvad der er konklusionen (**FED, farvet boks, farvet baggrund)**
3 deling af opgaven og dobbeltstreger under facit er en gammel mulighed, da man ikke havde de layoutmuligheder, som man har i dag. (Det betragtes dog ikke som forkert, hvis man alligevel gør det)

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Eksempel på hvordan indskrivning kan se ud

6.1 Rumfanget af kassen er:

$$10 \cdot 12 \cdot 15 = 1800$$

Rumfanget af kassen er 1800m³

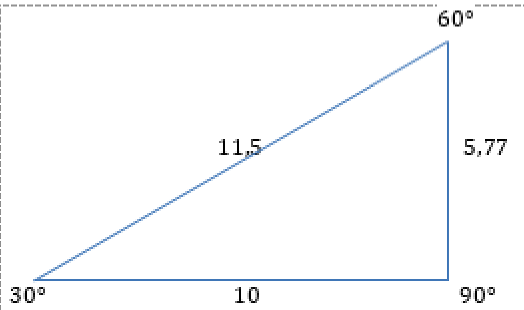
6.2 Er gennemsnitsalderen på håndboldholdet over 16 år?

$$\frac{15+15+16+17+15+16+17}{7} = \frac{111}{7} = 15{,}85714$$

Nej gennemsnitsalderen er ikke over 16 år, som Peter hævder, men 15,86 år

6.3 Hvad er højden på flagstangen

WordMat's trekantsløser anvendes med input: A = 30° , C = 90° , b = 10



A = 30°
B = 60°
C = 90°

a = 5,773503
b = 10
c = 11,54701

Vinkel B findes vha. vinkelsum = 180° i en trekant

$$B = 180° - A - C = 180° - 30° - 90° = 60°$$

Længden af siden a findes vha. tangens

$$a = b \cdot \tan(A) = 10 \cdot \tan(30) = 5{,}773503$$

Længden af siden c findes vha. cosinus

$$c = \frac{b}{\cos(A)} = \frac{10}{\cos(30)} = 11{,}54701$$

Højden på flagstangen må derfor være ca. 5,8 meter høj

Kompetencer

Tankegangskompetence	At kunne udøve matematisk tankegang
Problembehandlingskompetence	At kunne formulere og løse matematiske problemer
Modelleringskompetence	At kunne analysere og skabe matematiske modeller
Ræsonnementskompetence	At kunne ræsonnere matematisk
Repræsentationskompetence	At kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold
Symbolbehandlingskompetence	At kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme
Kommunikationskompetence	At kunne kommunikere i, med og om matematik
Hjælpemiddelkompetence	At kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder it.

Problembehandlingskompetencen

- Hvordan I formulerer/opstiller det problem I skal løse
- Hvordan I løser problemet - evt. på flere måder
- Hvordan I går til problemet

Tankegangskompetencen

- Hvordan I bruger de matematiske tankegange.
- At kende til hvilke type spørgsmål, der er gode at stille sig selv og hinanden i matematik
- At kunne forstå andres tanker
- At kunne generalisere, fx regler eller sammenhænge på baggrund af resultater eller flere enkelttilfælde

Ræsonnementskompetencen

- At kunne opstille en slutningsrække
- At kunne opstille argumenter / hypoteser og arbejde videre på tidligere argumenter/ræsonnementer/hypoteser
- At kunne bruge fornuft og logik
- At have forståelse for, om ens resultater er rigtige
- At kunne forholde sig til et matematisk ræsonnement - fx et bevis
- At kunne bedømme og vurdere et matematisk ræsonnement

Modelleringskompetencen

- At kunne opsætte en (forenklet) model af en virkelighed - og oversætte den til matematik
- At kunne behandle en model af virkeligheden matematisk
- At kunne forstå andres modeller
- At kunne strukturere matematik
- At kunne analysere matematik
- At kunne undersøge matematik
- At kunne kommunikere om/forklare modellen

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Hjælpemiddelkompetencen

- At vælge det rigtige hjælpemiddel (værktøj)
- At kunne bruges sit hjælpemiddel (passer, IT, computer, lineal mv)
- At vide, hvornår et hjælpemiddel kan være godt at bruge og hvornår det ikke er brugbart

Kommunikationskompetencen

- At kunne udtrykke sig matematisk
- At kunne forstå andres matematiske kommunikation

Symbolbehandlingskompetencen

- At kunne forstå og anvende symboler
- At kunne omsætte mellem dagligsprog og matematisk sprog
- At kunne bruge formler
- At kunne forklare former
- At kunne lave jeres egne formler

Repræsentationskompetencen

- At kunne afkode forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne fortolke forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne skelne forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne vise flere forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne betjene forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne forstå forskellige matematiske repræsentationer

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

PROBLEMBEHANDLINGSKOMPETENCEN

Få overblik

- Hvilke oplysninger har vi?
  - Kan oplysningerne samles på en skitse?
- Hvilken ”form” har svaret på opgaven? F.eks.: En tegning? En tekst? Et tal? En tabel?

Vi fik overblik

Vi fik ikke lagt en plan. Kan vi få et bedre overblik?

Læg plan

- Hvilke dele af matematikken skal vi bruge?
  - F.eks. Geometri? Statistik? Ligningsløsning?
- Kan problemstillingen i opgaven opdeles i flere dele?
- Hvilke hjælpemidler kan vi bruge for at løse problemstillingen?
  - F.eks.: Computer? Tegnetrekant? Passer? Formelsamling?
- Har vi mulighed for at hente viden?
  - F.eks.: Formelsamling? Notater? Tidligere opgaver?
- Skal vi lave en model og/eller et ræsonnement?
- Kan vi sammensætte viden til en plan/løsningsstrategi?
  - I hvilken rækkefølge skal vores viden sammensættes?

Vi fik lagt en plan

Vi løste ikke opgaven. Kan vi lægge en ny plan?

Løs problemstillingen

- Brug den plan, som vi har lagt

Vi fik løs problemstillingen

Løsning giver ikke mening. Har vi fulgt planen?

Kontroller løsning

- Giver løsningen mening i forhold til problemstilling i opgaven?
  - Har løsningen den ”form”, som vi forventede?
  - Er løsningen realistisk i forhold til ”Den virkelige verden”?

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node
Redigeret: 9. november 2023

Problemløsning

De 4 trin

- **Få overblik**
    - Hvad er problemstillingen?
    - Hvad er målet, når jeg løser den?
    - Hvad ved jeg?
- **Læg plan**
    - Hvordan vil jeg løse problemstillingen?
- **Løse opgaven**
    - Brug af metode til at løse opgaven
- **Kontrol af løsning**
    - Giver den løsning, som er fundet, mening i forhold til problemstillingen?

Få overblik:

- Læs opgaven meget grundigt
    - Ligger der et skjult hint eller en oplysning, som du skal bruge til noget?
    - Er der et mønster i oplysningerne?
- Hvad er problemet?
    - Evt. gør problemstillingen grafisk. (Eks. som en skitse)
    - Evt. nedskriv de oplysninger, du har fået (huske mål, enheder mv.)
    - Evt. redegør for andre (f.eks. i en gruppe), hvad problemstillingen er.
        - Dette kan ofte give nye vinkler på problemstillingen
        - Hvis I skal samarbejde om en opgave, er det vigtigt, at I har en fælles forståelse.
- Hvor ligger matematikken henne i problemstillingen?
- Hvilket vil jeg gerne finde frem til, når jeg løser problemstillingen

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Læg plan:

- Hvilken type af matematik skal der bruges for at løse problemstillingen
  - Brøkregning: Ofte hvor noget er delt i mindre stykker end en hel.
  - Funktioner: Ofte hvor der er en sammenhæng, der skal undersøges.
  - Ligninger: Ofte hvor du kender alle oplysninger på nær en.
  - Geometri/trigonometri: Ofte når der er nogle figurer i problemstillingen.
  - Statistik: Ofte hvor et talmateriale skal undersøges.
  - Kombinatorik: Ofte hvor man skal finde antallet af muligheder/måder at gøre tingene på.
  - Sandsynlighed: Ofte hvor man skal vurdere om noget kan lade sig gøre eller ej/ eller om det er en god ide.
  - Logik: Hvad siger den umiddelbare fornemmelse?
  - Eller noget helt andet?
- Hvilke oplysninger har jeg brug for at løse opgaven
  - Har jeg disse oplysninger?
  - Kan jeg finde disse oplysninger?
- Hvilke hjælpemidler kan jeg bruge
  - Tegneredskaber
  - IT
- Kan jeg arbejde baglæns?
- Kan et evt. mønster i oplysninger bruges til noget?
- Kan jeg lave en model?
- Hvilke formler hører til emnet?
- Har jeg prøvet et lignende problem før, hvad gjorde jeg der?
- Opstil en hypotese for, hvordan jeg kan løse problemet
  - Undersøg at denne hypotese, kan give svar på den problemstilling, som er i opgaven
  - Mangler du oplysninger, så søg om der er andre oplysninger, du måske kan finde ad omveje, ved evt. at bruge mere viden
- Kan problemet deles op i små dele?
- Lav en kort plan - skriv den ned i stikord. Hvad skal du vide først før du kan gå videre?
- Lav et kvalificeret gæt på hvad løsningen måske skal være

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Løse opgaven

- Holder jeg mig til den plan, jeg har lagt, når jeg går i gang med de enkelte dele?
- Giver de enkelte dele af løsningen mening i løbet af processen op til den samlede løsning af problemstillingen?
    - Virker de resultater jeg får realistiske i forhold til det, som jeg havde forestillet mig?
- Virkede det ikke undervejs i løsningsprocessen, skal jeg måske lave en ny plan - hvor jeg bruger den nye viden, som jeg fik i første forsøg.

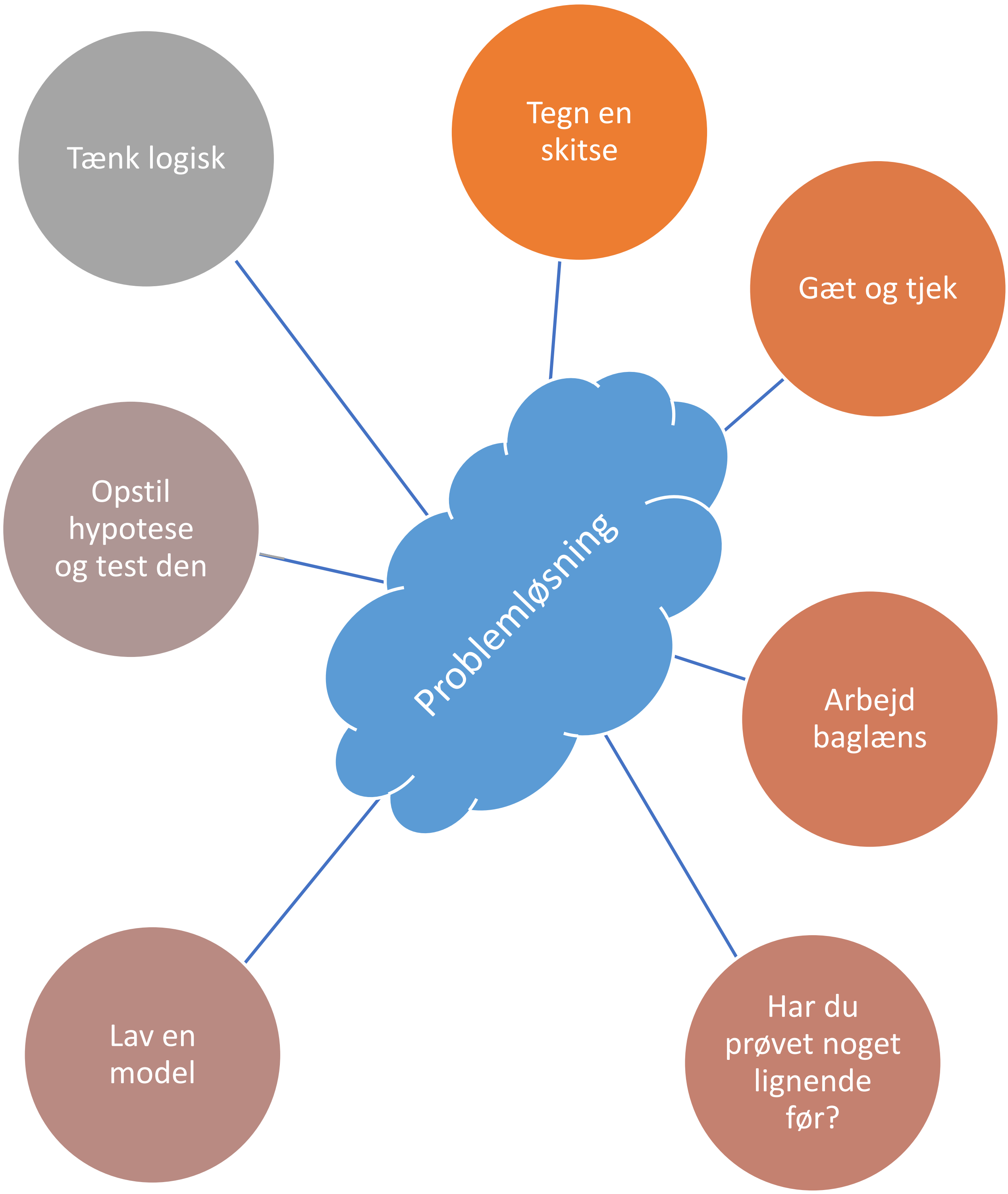
Kontrol af løsning

- Passer løsningen til problemstillingen?
- Virkede det? Kan problemet løses på andre måder?
    - Hvis flere måder giver det samme resultat, så er det mere sandsynligt, at du har regnet rigtigt.
- Hvis man har regnet baglæns, så regn forlæns og se om det giver det forventede resultat.
    - Løser du en ligning, så kan du altid sætte det beregnede ind på x's plads.

OBS: Det, at en antagelse eller påstand holder, er ikke altid et egentligt bevis, da det godt kan være et enkelttilfælde

- Eks. Kan en antagelse om at den indskrevne og omskrevne cirkel har samme centrum godt holde, hvis man arbejder med en ligesidet trekant, men det er ikke et bevis for at det gælder i alle trekanter, hvilket det ikke gør!
- Nogle gange kan forkaste et bevis, ved at lave et modbevis. Altså en løsning som ikke passer med hypotesen.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node



Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Ordliste

Afdrag (ved lån)
Den del af ydelsen, som lånet falder med, kalder man afdrag. Et lån stiger med en vis rente. En ydelse ved lån består af afdrag og rente

Afgør
Sammenlign tal eller diagrammer og konkluder noget på det i sammenhængende tekst typisk med brug af tal fra sammenligningen

Aflang
Noget som er længere end det er bredt

Aflæs
Find og nedskriv oplysninger på tegning, tabel eller diagrammer

Afmærk
Marker på tegning eller diagram

Afrunding
Afrunding er når man fjerner decimaler fra et tal ved at kigge på det ciffer, som står til højre for (er det 5, 6, 7, 8 eller 9 rundes op). Eks. afrund 46,23**8** til to decimaler efter komma hvilket giver 46,24.

Afstand
Længden af den rette linje, som man kan tegne mellem to punkter.

Algebra
Algebra er et område i matematikken, hvor man regner med både tal og bogstaver.
Bogstaverne indgår som variabler for tal, hvilket vil sige, at bogstaverne erstatter tal, som man ikke kender.
Ofte møder man algebra i forbindelse med reduktion og ligninger

Annuitet
Lån eller opsparing, hvor man arbejder med en række lige store ydelser (indbetalinger)

Bag
Bag når en ting er bag en anden ting, er den efter den anden ting.

Bagefter
Bagefter betyder, at en ting eller tal følger efter en anden ting eller tal.

Bagved
Bagved er efter: 5 står bagved eller efter 4. Eller når man står i en kø i en forretning.

Beregn
Her skal du lave en beregning med regnestykker for at komme frem til resultatet

Beskriv
Giv en fyldestgørende forklaring på den matematiske problemstilling. Brug resultater og diagrammer som udgangspunkt for din beskrivelse

Bestem
Aflæs, beregn eller tegn for at løse opgaven

Blandet tal
Et blandet tal er et tal, som består af et helt tal og en brøk

Ciffer
Beskriver tallene fra 1-9 og bruges enten alene eller i sammenhæng med andre cifre. 349 er et trecifret tal.

Faktorer
Faktorer er de tal der er adskilt af et gangetegn.
Ex består 7*17 af to faktorer 7 og 17

Fakultet
Fakultet er i matematikken produktet af en talrække af de positive hele tal fra 1 til og med tallet selv. Fakultet-funktionen angives med et udråbstegn efter tallet, fx 5!
Et tal som er resultatet af en fakultet-funktion kaldes et fakultetstal.
Eks. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Forhold
Hvordan to eller flere størrelser er sammenlignet med hinanden.

Fx er er forholdet mellem 10 og 5, at 10 er dobbelt så stort som 5 og 5 er halvt så stort som ti. Det kan man udtrykke som 2:1 - eller 1:2 alt efter hvilket man sammenligner med.

Forholdet findes ved at dividere det ene tal med det andet. $\frac{a}{b} = forhold$

Forskel
Man finder en forskel ved at trække to størrelser fra hinanden.

Fx mellem 5 og 10. Der er en forskel på 5

$$a - b = forskel$$
a er det største tal

Gennemsnit
Gennemsnittet eller middeltallet er det tal, som man får, hvis man lægger alle observationer sammen og dividerer dette tal med antallet af observationer

Grundflade
Grundflade er arealet af det en figur kan stå på. Grundfladen kan være det samme som et tværsnit, hvis figuren har samme form hele vejen op eller hen.

Kongruent
Kongruent betyder indenfor geometri "ens". F.eks. betyder kongruent, at 2 figurerer er nøjagtig ens. (Dvs. hvis man lagde dem oven på hinanden dækkede de hinanden fuldstændigt) Den ene er altså en kopi af den anden, men kan godt være spejlet eller drejet. Det vil sige at både vinkler og sidelængder er parvis ens i de 2 figurer

Korde
En korde er et linjestykke, der forbinder to punkter på en cirkel eller en kurve

Kvadrattal
Et kvadrattal er et tal, hvor kvadratroden af tallet er et helt tal.
Kvadrattal fra 1 til 100
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 og 100

Multiplikation
Multiplikation er et andet ord for regnearten gange. Man kan fx multiplicere 6 og 6 = 36. Når man har multipliceret hedder resultatet produktet

Naturlige tal
Alle hele positive tal. Nul er ikke et naturligt tal.

Omregn
Omregn fra en enhed til en anden

Primtal
Et primtal er et naturligt tal, som er større end 1 og hvor kun tallet selv og 1 går op i. 2 er det mindste primtal og det eneste, som er lige.
Primtal fra 1-100:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Produkt
Et produkt er resultatet af tal som er ganget sammen.

Sammenlign
Her skal du matematisk sammenligne tal, diagrammer eller tabeller og konkludere matematisk på det, du ser. (Forhold dig IKKE til, hvorfor du tror det kan være set i et samfundsperspektiv)

Skitse
En skitse er ikke målbar, og er en grov model af en tegning. Alle tal passer dog.

Symmetriakse
En symmetriakse deler en figur, så figuren er helt ens (kongruent) på begge sider af aksen

Talfølge
En talfølge er når en række af tal fortsætter i et bestemt mønster

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Tværsnit
Et tværsnit af en rummelig figur, er en tegning af endefladen, der fremkommer, hvis man skærer figuren over.

Ydelse
Det man indbetaler pr. periode, man betaler af på et lån. Det dækker både afdrag og renten.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Trigonometri tabel

Vinkel (grader)	Vinkel (radianer)	Cos	Sin	Tan
0	0	1	0	0
5	0,087266	0,996195	0,087156	0,087488664
10	0,174533	0,984808	0,173648	0,176326981
15	0,261799	0,965926	0,258819	0,267949192
20	0,349066	0,939693	0,34202	0,363970234
25	0,436332	0,906308	0,422618	0,466307658
30	0,523599	0,866025	0,5	0,577350269
35	0,610865	0,819152	0,573576	0,700207538
40	0,698132	0,766044	0,642788	0,839099631
45	0,785398	0,707107	0,707107	1
50	0,872665	0,642788	0,766044	1,191753593
55	0,959931	0,573576	0,819152	1,428148007
60	1,047198	0,5	0,866025	1,732050808
65	1,134464	0,422618	0,906308	2,144506921
70	1,22173	0,34202	0,939693	2,747477419
75	1,308997	0,258819	0,965926	3,732050808
80	1,396263	0,173648	0,984808	5,67128182
85	1,48353	0,087156	0,996195	11,4300523
90	1,570796	0	1	0

Omregning grader/radianer

$360° = 2 \cdot \pi$

$radianer = \frac{grader \cdot \pi}{180}$ $\quad$ $grader = \frac{radianer \cdot 180}{\pi}$

Gode råd til mundtlig prøve

Forberedelsen til prøven
- Det er en god ide, at I læser matematik op i grupper, så I kan få snakket noget matematik
- Fremlæg for hinanden, så I øver jer i at sige noget
- Planlæg læsning i forhold til opgivelser
- Vær udhvilet inden prøven og lav gerne noget andet efter kl. 20 aftenen inden
- Løb evt. en tur inden prøven
- Brug den sidste tid til at slappe af (i hovedet) inden prøven
- ”Prøver er en fest for den velforberedte”
  - Er I velforberedte så forlanger vi ikke mere
  - Men pas på ikke at ”over-læse”

Opstart
- Præsenter jer når I kommer ind – hils på censor med håndtryk
  - Måske vil der være en navnelabel, som I sætter på tøjet
- Det er ok at være nervøs, men lad være med at overgøre det
  - Sig det gerne til læreren inden prøvedagen.

Trækning
- Kom ikke med glædesudbrud eller tårer, når emnet trækkes
  - Sig ”Ok…spændende!”

Disposition
- Dan jer et overblik over opgaven, ved at kigge den igennem
- Lav disposition
  - Vis overblik
  - Start med noget, som I føler jer sikker i, så I kommer godt i gang
    - Sørg for at alle i gruppen kommer godt i gang.
  - Sørg for at lave det, som kan bruges til at give et svar på problemstillingen.
    - Vis gerne noget forskelligt, ikke kun procentregning
  - Det er en god ide at fortælle, hvilken del af matematikken I vil arbejde med.
    - F.eks. statistik, vækst, andengradsfunktioner osv.
  - Vent ikke på lærer og censor inden I går i gang

Selve prøven
- Der findes ikke ét facit I SKAL nå frem til, men der er nogle rammer i problemformuleringen, som I skal forhold jer til
  - F.eks. står der ”lav en model”, så skal I lave en model
- Gå videre, når I umiddelbart føler, at en problemstilling er udtømt
- Skriv jeres tanker ned
- Er I i tvivl om et svar – tag et glas vand og tænk – pas på med bare at skyde
- Brug ikke meget tid på orden – Men det skal være læseligt
- Hav struktur på det, som I vil sige

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

- Brug ikke tid på at lave de samme beregninger flere gange
  - Brug evt. computeren ved ensartede beregninger
  - Evt. spørg om I skal vise det!
- Husk det er mundtlig matematik - Det betyder at I skal sige noget (gerne meget)
- Tro gerne, vi ikke ved noget, så skal læreren nok sige, hvis det er overflødigt.
- Tænk på det sprog, som I bruger
- Husk I skal vise, hvad I **kan**!
  - ikke hvad I ikke kan
    - F.eks. hvis man ikke kan bruge computer, skal man ikke
- Og slut med noget, I virkelig vil vise
- Computeren kan være et godt redskab
  - I bliver bedømt på jeres brug af hjælpemidler
- I skal samle op til sidst – og svare på problemformuleringen
- Husk censor er også bare en lærer!
- Lad være med at stresse – men selvfølgelig skal I ikke falde hen
- Vejen til en løsning er langt vigtigere end selve løsningen.
- Fejl behøves ikke at have stor betydning, men det er bedst, hvis I selv finder dem.
  - Ofte er det godt at være kritisk overfor sine resultater.
- Det er vigtigt at alle er med i alle opgaver. (Evt. regne på samme opgave, hver for sig)
- Sig aldrig ”Det kan vi ikke finde ud af”. Det er langt bedre at sige ”Vi har tænkt sådan og sådan” eller ”Vi ved, at vi ikke kan gøre sådan fordi…”
  - Sidder I helt fast, er det bedre at fortælle lærer og censor om jeres overvejelser, end at I ikke at komme videre.
- Mange af opgaverne kender I ikke en færdig løsning (metode) på, men skal arbejde jer frem til en løsning
  - Det er ræsonnementskompetencen og modelleringskompetencen, som skal ”vise” jer svaret.
  - Det er vigtigt at I har det grundlæggende på plads og kan bruge det som redskab. F.eks. Pythagoras
    - Vi venter ikke 5 min. på, at I slår det op.
- Hvis I selv snakker, så stiller lærer og censor ikke så mange spørgsmål. Medmindre I er på vej ud over kanten
  - Men samtidig er prøven en samtale, så det er ikke meningen I bare skal fremlægge, uden lærer og censor blander sig.
- Brøker er bedre end afrundede decimaltal
- Hjælpearket er til dem, der ikke selv kan lave en problemløsning frem mod et svar på problemstilling.
- Gør det bedst I kan – lidt er bedre end ingenting!
  - I skal handle! Lad være med at vente på, at læreren kommer med en løsning.
  - Find den bedst mulige løsning.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Medbring

- Alm. redskaber
  - To spidse blyanter (ok at skrive med blyant, men det skal se ordentlig ud)
  - Viskelæder
  - Lineal (Ikke fra Fætter BR!)
  - Passer
  - Vinkelmåler
  - Lommeregner (Ikke mobiltelefon)
  - Egen formelsamling, som I har styr på.
  - Egne notater, som I har styr på.
- Computer
  - Styr på program
    - Excel
      - Datoproblem (f.eks. 5/5 bliver 5. Maj)
        - Formater – celler –tal
      - Decimaler (næsten altid 2)
        - Formater – celler –tal
      - Procentproblem (f.eks. 34% opfatter regneark som 0,34)
  - Husk at gemme løbende
- Hold orden
  - Medbring kun det, som I har brug for.
    - Nogle elever bruger mere tid på slik og sodavand end opgaver
    - I kan ikke komme ud og tisse
  - Sæt vand og lign. på gulvet
  - Brug de redskaber, du har brugt i løbet af året.

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Hvad er godt at kunne til mundtlig prøve?

Førstegradsfunktioner	Tegne en graf til en funktionsforskrift Opstille en funktionsforskrift til nogle oplysninger Kunne finde skæringen mellem to funktioner Kunne redegøre for betydning af skæring mellem to funktioner Kunne redegøre for sammenhængen mellem x- og y-værdier Kunne fortælle om ligefrem proportionalitet Beregne hvor to funktioner skærer hinanden* Kunne tegne stykvis lineære funktioner Kunne finde forskrifter for stykvis lineære funktioner*
Andengradsfunktioner	Fortælle hvad a-, (b-*), c- og D-værdiens betydning for grafen. Tegne en parabel Udregne diskriminanten Udregne nulpunkter / rødder Udregne toppunkt Kunne finde en forskrift ud fra 3 punkter* Kunne løse en andengradsligning* Udregne skæringspunkter mellem to grafer**
Ligninger	Alm. ligningsløsning og reduktion Opstille en ligningsforskrift til nogle oplysninger Kende til uligheder* Kunne anvende en CAS-funktion
Regneregler	Kunne bruge brøker Kunne bruge procent Kunne bruge potens Kunne bruge rødder Kunne udføre reduktion
Vækst	Udregne Kn Kunne arbejde med negativ vækst Kunne tegne en vækstfunktion* Finde K_0, r og n* Finde hvornår to vækstfunktioner krydser hinanden **
Omvendt proportionalitet	Opstille en funktionsforskrift til nogle oplysninger Kunne finde forskrift ud fra graf* Tegne en hyperbel Forklare om grafen kan skære akserne* Fortælle om spejlingsakser i forbindelse med en hyperbel Kunne bestemme hvad der er 1. 2. 3. og 4. kvadrant

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

	Kunne finde konstanten og forklare hvilken betydning, den har for hyperblen Kunne forklare, hvad det betyder, at en funktion er omvendt proportional. *
Geometri	Pythagoras - Udregne a, b og c Kunne beregne: Areal, omkreds, rumfang, målestok og massefylde • Herunder figurer i koordinatsystem Kende begreber: Højde, vinkelhalveringslinje, median, midtnormal, kongruente og ligedannede trekanter, omskreven og indskreven cirkel.
Trigonometri	Bruge sinus, cosinus og tangens i forhold til retvinklet trekant Bruge sinus, cosinus og tangens i forhold til vilkårlig trekant * Sinusrelationen* Cosinusrelationen** Redegørelse for enhedscirklen **
Sandsynlighed Kombinatorik	Have styr på begreberne: Hændelse, udfaldsrum og gunstige udfald Kunne lave og aflæse både matrix og tælletræ Have styr på begreberne: • ”Både/og” og ”Enten/eller” • Med tilbagelægning og uden tilbagelægning • Ordnet og uordnet stikprøve * • Permutationer og kombinationer **
Statistik	Kunne afgøre hvornår det er enkelte og grupperede observationer Kunne bruge intervaller Udfylde skema med h(x), H(x), f(x) og F(x) Udregne gennemsnit, median og typetal Finde størsteværdi, mindsteværdi og variationsbredde Tegne sumkurve ud fra F(x) • Trappediagram for enkelte obs. • Sumkurve for grupperede obs. Bestemme kvartiler Tegne cirkeldiagram (gerne på computer) Tegne pindediagram (enkelte obs.) (gerne på computer) Tegne søjlediagram (grupperede obs.) Tegne histogram (grupperede obs.) ** Tegne boksplot
Økonomi	Valutaberegninger – til og fra DKK Kunne aflæse og lave et budget
Fart	Kunne lave beregninger med m/s og km/t

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node

Tid	Have styr på timer, minutter og sekunder i forhold til decimaltimer og decimalminutter.
Enhedsregning	Kunne omregne mellem forskellige enheder.

IT-matematik

Have styr på de mest alm. funktioner i

- Regneark
  - Udnytte funktioner i forhold til statistik*
- WordMat (el. andet CAS-program)
  - Løse ligninger
- GeoGebra
  - Tegne geometriske konstruktioner
  - Tegne grafer

Kompetencer

Have overblik over, hvornår de forskellige kompetencer bruges.

- Modelleringskompetencen
- Ræsonnements- og tankegangskompetencen
- Hjælpemiddelkompetencen
- Kommunikationskompetencen
- Repræsentations- og symbolbehandlingskompetencen
- Problembehandlingskompetencen

* betyder, at det ikke er et krav til alle
** betyder, at det absolut ikke er et krav til alle

Eksemplarfremstilling af papirkopier/prints til undervisningsbrug
er tilladt med en aftale med Copydan Tekst & Node