Musterlösungen zur 8. Serie: Lineare inhomogene Systeme und Gleichungen

1. Aufgabe Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad x' + \left(1 + \frac{1}{t}\right) x = -te^t, \quad x(1) = 1 \text{ (für } t > 0) \\
&\text{(b)} \quad x'' - 2x' = e^t \sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0 \\
&\text{(c)} \quad x''' + x' = t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1
\end{aligned}
$$

Lösung für (a) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung erhält man durch Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln x = -\int \left(1 + \frac{1}{s}\right) ds = -t - \ln t + \text{const},$$

also

$$x_{hom} = \text{const}\frac{e^{-t}}{t}.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man durch Variation der Konstanten: Wenn man den Ansatz

$$x = c(t)\frac{e^{-t}}{t}$$

in die inhomogene Gleichung einsetzt, erhält man

$$c'(t) = -t^2 e^{2t}.$$

Eine Stammfunktion erhält man durch

$$-\int t^2 e^{2t} dt = \int te^{2t} dt - \frac{t^2}{2} e^{2t} = -\frac{1}{2}\int e^{2t} dt + \frac{t}{2} e^{2t} - \frac{t^2}{2} e^{2t} = e^{2t}\left(-\frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}\right).$$

Die Integrationskonstante wird durch Einsetzen in die Anfangsbedingung bestimmt, man erhält

$$x = \left(e^{2t}\left(-\frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}\right) + e + \frac{e^2}{4}\right)\frac{e^{-t}}{t}.$$

Lösung für (b) Ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung ist z.B.

$$x_1(t) = 1, \ x_2(t) = e^{2t}.$$

Wegen

$$x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = 2e^{2t}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$
\begin{aligned}
x &= c_1 + c_2 e^{2t} - \int_0^t \frac{e^{2s}}{2e^{2s}} e^s \sin s ds + e^{2t} \int_0^t \frac{1}{2e^{2s}} e^s \sin s ds = \\
&= c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{4} \left[e^s (\sin s - \cos s \right]_0^t - \frac{1}{4} e^{2t} \left[e^{-s} (\sin s + \cos s) \right]_0^t = \\
&= c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} e^t \sin t.
\end{aligned}
$$

Setzt man dies in die Anfangsbedingungen ein, so erhält man

$$c_1 = -c_2 = -\frac{1}{4},$$

also

$$x = -\frac{1}{4} \left(1 - e^{2t} + 2e^t \sin t \right).$$

Lösung für (c) Ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung ist z.B.

$$x_1(t) = 1,\ x_2(t) = \cos t,\ x_3(t) = \sin t.$$

Es gilt

$$\det \begin{bmatrix} t & \cos t \\ 0 & -\sin t \end{bmatrix} = -\sin t,\ \det \begin{bmatrix} t & \sin t \\ 0 & \cos t \end{bmatrix} = \cos t,\ \det \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = 1$$

und

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{bmatrix} = 1.$$

Also ist der Ansatz für die Lösung

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \int_0^t s ds - \cos t \int_0^t s \cos s ds - \sin t \int_0^t s \sin s ds \\
&= c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t.
\end{aligned}
$$

Das in die Randbedingungen eingesetzt ergiebt

$$x(0) = c_1 + c_2 = x'(0) = c_3 = x''(0) = -c_2 = 1,\ \text{also } c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1,$$

also

$$x(t) = 1 + \sin t + \frac{t^2}{2}.$$

2. Aufgabe Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^t, \\ y' = x + 2y - 3e^{4t}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

Lösung Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$. Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_2 sind z.B.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ bzw. } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der Lösungsansatz der Methode der Variation der Konstanten ist also

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1(t)e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2(t)e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dies in das inhomogene System eingesetzt ergibt das folgende lineare Gleichungssystem für $c_1'(t)$ und $c_2'(t)$:

$$\begin{aligned} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{3t} &= 2e^t, \\ -c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{3t} &= -3e^{4t}, \end{aligned}$$

also

$$c_1'(t) = 1 + \frac{3}{2}e^{3t},\ c_2'(t) = e^{-2t} - \frac{3}{2}e^t,$$

also

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(t + \frac{1}{2}e^{3t} + d_1\right) e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^t + d_2\right) e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dies in die Anfangsbedingungen eingesetzt ergibt $d_1 = -1/2$ und $d_2 = 3$, also

$$x = (-1+t)e^t - e^{4t} + 3e^{3t},\ y = -te^t - 2e^{4t} + 3e^{3t}.$$