Komplexe Analysis Übungen

4. Übungsblatt

---

1. Zeigen Sie dass jede biholomorphe (d.h. bijektive und in beide Richtungen holomorphe) Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst, die den Nullpunkt festläßt, eine Drehung ist.

2. Klassifizieren Sie die isolierte Singularität der folgenden Funktionen beim Punkt $z = 0$.

$$a) \quad \frac{1}{1-e^z}, \qquad b) \quad e^{1/z}, \qquad c) \quad \cos(1/z) \qquad d) \quad \frac{\sin z}{z}.$$

   Heben Sie hebbare Singularitäten, bestimmen Sie den Hauptteil der Laurentreihe bei Polen, und bei wesentlichen Singularitäten bestimmen Sie das Bild von $\{z : \ 0 < |z| < \varepsilon\}$ unter der Funktion (für kleines $\varepsilon > 0$).

3. Finden Sie zwei auf einem Gebiet G holomorphe Funktionen, für die die Menge $\{z \in G : \ f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt besitzt, obwohl f und g nicht auf ganz G übereinstimmen. Warum widerspricht das nicht dem Identitätssatz? (Hinweis: als eine der beiden Funktionen kann man $\sin(1/z)$ wählen.)