Geometrie und Topologie

Übungszettel 10

Abgabe: **Donnerstag, 29.6.**, 10:00 Uhr

(ins Postfach Ihres Tutors)

Jede Aufgabe ist fünf Punkte wert. Paarweise Abgabe ist gestattet. In diesem Fall soll jeder Partner die Hälfte der Aufgaben aufschreiben. Es ist für jede Aufgabe kenntlich zu machen, wer die redaktionelle Verantwortung trägt.

Eine Überdeckung $\mathcal{V}$ heißt <u>Verfeinerung</u> einer Überdeckung $\mathcal{U}$, wenn zu jeder Menge $V \in \mathcal{V}$ eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$ existiert. Eine Verfeinerung heißt <u>offen</u>, wenn sie eine Überdeckung durch offene Mengen ist. Ein Raum heißt <u>parakompakt</u>, wenn jede Überdeckung durch offene Mengen eine lokal-endliche offene Verfeinerung hat.

Aufgabe 1. Zeige: Sei M eine parakompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Zeige, daß es eine glatte Zerlegung der Eins gibt, die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.

Aufgabe 2. Im Beweis, daß Zusammenhang und Weg-Zusammenhang für lokal wegzusammenhängende Räume äquivalent sind, wird benutzt, daß das Einheitsintervall $[0, 1]$ zusammenhängend ist. Für diesen einen Raum muß man also „von Hand“ Zusammenhang nachweisen. Darum, zeige ohne Rückgriff auf Weg-Zusammenhang, daß das Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend ist. (Hint: man kann den Zwischenwertsatz der Analysis für einen Widerspruchsbeweis benutzen.)

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie zusammenhängender, paarweise nicht-disjunkter Teilmengen von X. Zeige, daß die Vereinigung $W := \bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha$ eine zusammenhängende Teilmenge von X ist.

Aufgabe 4. Sei X eine lokal kompakter Hausdorffraum. Zeige, daß X <u>regulär</u> ist, d.h., daß folgende Verschärfung der Hausdorffeigenschaft gilt: Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ und jeder Punkt $x \in X \setminus A$ lassen sich trennen in dem Sinne, daß es *disjunkte* offene Mengen U und V in X gibt mit $A \subseteq U$ und $x \in V$.