

Wintersemester 2009/10

Mathematik I für NWI/Analysis

Übungszettel 8

Aufgabe 28: Seien W_1, W_2 Unterräume eines Vektorraums V .

- (a) Zeigen Sie, dass $W_1 + W_2$ ein Vektorraum ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $W_1 + W_2$ der kleinste Vektorraum ist, der W_1 und W_2 enthält.
- (c) Zeigen Sie: Ist $v \in W_1 \setminus W_2$ und $w \in W_2 \setminus W_1$, so ist $v + w \notin W_1 \cup W_2$.
Hinweis: Widerspruchsbeweis; betrachten Sie $(v + w) - v$ oder $(v + w) - w$.
- (d) Zeigen Sie, dass $W_1 \cup W_2$ genau dann ein Vektorraum ist, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.
Hinweis: Verwenden Sie (c).

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 29: Sei $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \}$.

- (a) Zeigen Sie, dass W Unterraum von \mathbb{R}^3 ist.
- (b) Geben Sie zwei verschiedene Basen von W an.
- (c) Sei $W' = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1 \}$. Ist W' Unterraum von \mathbb{R}^3 ?
- (d) Sei $W'' = \{ v - w \mid v, w \in W' \}$. Ist W'' Unterraum von \mathbb{R}^3 ? Was fällt Ihnen auf?

(1+2+1+1 Punkte)

Aufgabe 30: Sei V Vektorraum und $S \subseteq V$. S heißt Erzeugendensystem von V , falls $\mathcal{L}(S) = V$. Zeigen Sie

- (a) V ist Erzeugendensystem von V .
- (b) Ist V endlich erzeugt, so muss S nicht notwendigerweise endlich sein.
- (c) Ist V n -dimensional, so ist ein Erzeugendensystem S genau dann eine Basis, wenn $|S| = n$.
- (d) Ein Erzeugendensystem ist genau dann eine Basis, wenn es minimal ist, d.h. wenn es kein Erzeugendensystem $S' \neq S$ mit $S' \subseteq S$ gibt.

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 31: Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{ (a, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$, $W_2 = \{ (c, d, d) \mid c, d \in \mathbb{R} \}$. Bestimmen Sie $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$.

(2 Punkte)

Aufgabe 32: Sei K ein endlicher Körper mit k Elementen und V ein n -dimensionaler Vektorraum über K . Wieviele Elemente hat V ?

Bemerkung: Man kann zeigen, dass k nur eine Primzahlpotenz sein kann. Dies ist für die Bearbeitung der Aufgabe aber irrelevant.

(1 Punkt)

Abgabe bis zum 11.12.2009!