Einige Begriffe aus der Linearen Algebra

Sei im Folgenden V ein K-Vektorraum und $S \subset V$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so nennt man den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ eine **Linearkombination** von Elementen von S. Sind alle $\lambda_i = 0$, so spricht man von einer **trivialen Linearkombination.**

Man definiert $\langle S \rangle$:= Menge der aus S bildbaren Linearkombinationen, und dies ist ein Unterraum von V, genannt **der von *S* erzeugte Untervektorraum von *V*.**

S heißt **Erzeugendensystem** von V, wenn $\langle S \rangle = V$, d.h. wenn sich jedes Element von V als Linearkombination aus S schreiben läßt.

Jede Obermenge eines Erzeugendensystems ist offenbar auch ein Erzeugendensystem, und keine Teilmenge einer Menge, die nicht Erzeugendensystem ist, kann Erzeugendensystem sein.

Ein Erzeugendensystem S von V heißt „**minimal**", wenn sich kein Element aus S herausnehmen läßt, ohne daß die verbleibende Menge die Eigenschaft, Erzeugendensystem von V zu sein, verliert.

Ein minimales Erzeugendensystem von V heißt **Basis** von V.

Die Menge S heißt **linear unabhängig**, wenn jede Linearkombination aus Elementen von S, die den Nullvektor ergibt, trivial ist. Sie heißt **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig ist, d.h. wenn der Nullvektor durch eine nicht-triviale Linearkombination von Elementen von S dargestellt werden kann.

Eine Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist selbst linear unabhängig; eine Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig.

Eine linear unabhängige Menge heißt **maximal**, wenn sie durch Hinzunahme eines weiteren Elements linear abhängig wird.

Eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V ist eine Basis.

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
Jeder Vektor läßt sich eindeutig als Linearkombination von Elementen einer Basis darstellen.
Zwischen zwei verschiedenen Basen eines Vektorraums gibt es eine bijektive Abbildung.

Gibt es also zwei endliche Basen, so besitzen diese dieselbe Elementezahl. Diese Elementezahl nennt man die **Dimension** des Vektorraums, **dim *V***. Gibt es keine endliche Basis von V, so nennt man V **unendlichdimensional** und schreibt $\dim V = \infty$. Gibt es eine endliche Basis, so nennt man V **endlichdimensional**. Ein echter Unterraum eines endlichdimensionalen Raums hat eine niedrigere Dimension als dieser.

Es erweist sich als sinnvoll zu sagen, der Nullraum $\{0\}$ habe die Dimension 0 und seine Basis sei die leere Menge[1].

Geometrische Interpretationen für Vektorräume über $\mathbb{R}$:
Eindimensionale Vektorräume „sind" Geraden, zweidimensionale Vektorräume „sind" Ebenen, die jeweils durch den Nullpunkt gehen.

---

1 Die Menge $\{0\}$ ist zwar Erzeugendensystem des Nullraums, aber sie ist nicht linear unabhängig, also keine Basis.