ÜA Funktionalanalysis 1 - 9. Serie

1. (mündlich)

   Zeigen Sie, dass für eine reelle Zahlenfolge (a_k) die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (i) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

   (ii) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konvergiert für jede Nullfolge (x_k).

   Hinweis: Man betrachte geeignete Funktionale auf dem Raum c_0 und wende das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit an.

2. (schriftlich)

   Seien X, Y, Z Banachräume und $B : X \times Y \to Z$ *partiell stetig* und bilinear, d.h.

   $\forall\, x \in X$ ist die Abbildung $y \mapsto B(x, y)$ linear und stetig, und

   $\forall\, y \in Y$ ist die Abbildung $x \mapsto B(x, y)$ linear und stetig.

   Beweisen Sie, dass B dann stetig ist, d.h. es gilt

   $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n = x}_{\text{in } X} \text{ und } \underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n = y}_{\text{in } Y} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\lim_{n\to\infty} B(x_n, y_n) = B(x, y)}_{\text{in } Z} .$$

   Hinweis: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

   Zusatzfrage: Gilt das auch, wenn B nicht bilinear ist?

   (Beweis oder Gegenbeispiel angeben!)

3. (schriftlich)

   Sei X ein Vektorraum, der bezüglich zweier Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ vollständig ist. Weiterhin existiere eine Konstante $c > 0$ mit

   $$\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2 \qquad \text{für alle } x \in X.$$

   Man zeige, dass die beiden Normen dann sogar äquivalent sind.

Abgabe vor der Vorlesung am Dienstag, dem 19.12.2017