4. Abhängigkeit der Lösung der Lagrange-Gleichungen von den Integrationskonstanten.

Ist eine Lösungsschar der Lagrange-Gleichungen $L_\alpha = 0$ gegeben durch $x_\alpha = x_\alpha(t,c)$, wo c eine Integrationskonstante ist, so ist auch y_α von t, c abhängig, also $y_\alpha = y_\alpha(t,c)$. Das Integral

$$\mathcal{I} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(x\dot{x})\,dt$$

hängt von t, t_0, $\dot{x}$, x ab, ist also eine Funktion von t, t_0 und c

$$\mathcal{I}(t,t_0,c) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(x\dot{x})\,dt$$

Wir bilden die Differentialquotienten dieser Hamilton'schen Wirkung I nach t, t_0 und c:

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} = \mathcal{L}(x,\dot{x})$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t_0} = -\mathcal{L}(x,\dot{x})_{t_0}$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial c} = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial c} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial c}\right)dt = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}\frac{d\frac{\partial x_\alpha}{\partial c}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial c}\right)dt$$

Partielle Integration ergibt unter Berücksichtigung der Beziehung

$$y_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}:$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial c} = y_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial c}\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial c}\,dt$$