13. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Die Anzahl der Kanten in einem Eulerschen Graphen ist gerade.

ii) Es sei A eine $(0,1,-1)$-Matrix, die in jeder Spalte maximal je eine 1 und eine -1 hat. Dann ist A vollständig unimodular.

iii) Es sei A eine $(0,1,-1)$-Matrix, die in jeder Zeile maximal je eine 1 und eine -1 hat. Dann ist A vollständig unimodular.

iv) Ein 5-regulärer Graph auf 10 Ecken ist Hamiltonsch.

v) Die Folge $d := (8,7,7,5,4,3,3,2,1,1,1)$ ist graphisch.

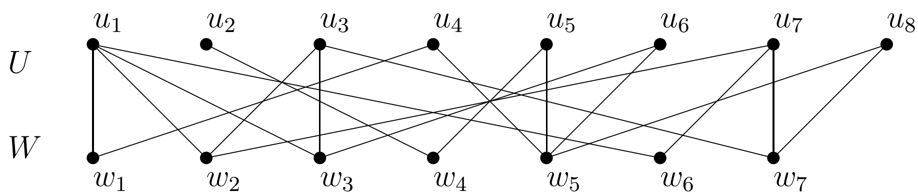
vi) Jede nicht singuläre Untermatrix einer vollständig unimodularen Matrix hat eine ganzzahlige Inverse.

Aufgabe 2. Ein Derangement ist eine Permutation, bei der kein Element auf sich selbst abgebildet wird. D_n bezeichne die Anzahl von Derangements auf n Elementen. Desweiteren sei die Matrix $A_n \in \{0,1\}^{n\times n}$ definiert durch $a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \neq j \\ 0, & \text{falls } i = j \end{cases}$.
Zeigen Sie, dass gilt

$$D_n = \mathrm{Per}(A_n).$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Ein $(2p+1)$-regulärer, $2p$-fach kantenzusammenhängender Graph besitzt ein perfektes Matching.

Aufgabe 4. Verwenden Sie die Ungarische Methode, um im folgenden bipartiten Graphen ein maximales Matching und ein minimales Vertex-Cover zu finden.



Aufgabe 5. Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$. Zeigen Sie:
A ist nicht vollständig unimodular, aber M ist ganzzahlig für alle $b \in \mathbb{Z}^3$.

Aufgabe 6. Zeigen Sie:
Vollständig unimodulare $\{0,1\}$-Matrizen sind balanciert, aber balancierte $\{0,1\}$-Matrizen sind nicht zwangsläufig vollständig unimodular.

Aufgabe 7. Entwickeln Sie eine Turingmaschine, die 1 zu einer Zahl in Binärschreibweise addiert.

Parmanente:

Sei $A \in R^{n\times n}$ eine $n \times n$-Matrix, dann ist die Permanente $\mathrm{Per}(A)$ definiert als

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

wobei sich die Summe über alle Elemente σ der Symmetrischen Gruppe S_n erstreckt.

Blancierte Matrix:

Eine $(0,1)$-Matrix A heißt *blanciert*, falls sie keine quadratische Untermatrix mit ungerader Zeilen-/Spaltenzahl besitzt, die genau zwei Einsen in jeder Zeile und Spalte enthält.