Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich

Sommersemester 2014
Blatt 5
Abgabe xxx

Topologie

25. Hausdorff-Metrik
Man zeige, dass auf der Familie $Z(X)$ aller beschränkten, nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums (X, d) durch

$$d_H(A, B) \ = \ \max\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}$$

eine Metrik definiert wird (*Hausdorff-Metrik*).

26. Ist X ein kompakter metrischer Raum, dann ist $2^X = Z(X)$ und die Vietoris-Topologie stimmt mit der von der Hausdorff-Metrik induzierten Topologie überein.

27. Sei X ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann hat X die Eigenschaft: Jede offene Überdeckung $U = \{U_i\}_{i\in I}$ von X hat eine abzählbare Teilüberdeckung $U^* = \{U_{i_\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{N}} \subset U$.

28. Lebesgue-Zahl einer Überdeckung
Sei X ein kompakter metrischen Raum. Man zeige:
a) Zu jeder offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ von X existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ (eine sogenannte *Lebesgue-Zahl* dieser Überdeckung) derart, dass die Überdeckung $\{\mathbb{K}(x, \varepsilon)\}_{x\in X}$ eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i\in I}$ ist;
b) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ eines kompakten metrisierbaren Raumes X in einen metrisierbaren Raum Y ist gleichmäßig stetig bezüglich jedwelchen Metriken d_X bzw. d_Y auf den Räumen X bzw. Y.

29. Man beweise oder widerlege folgende Variante des Sates von Tietze:

Sei X ein $\mathcal{T}_4$-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ eine stetige Funktion. Dann existiert eine stetige Funktion $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^*$ mit $\tilde{f}|_A = f$.