PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Wintersemester 2009/2010
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer
David Schmitz

Aufgaben zum Modul „Holomorphe Funktionen und abelsche Varietäten“ (Funktionentheorie II) – Blatt 8

Abgabe am 03.12.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 28: Nicht holomorph verträgliche Karten

Zeigen Sie, dass die (globalen) Karten $(\mathbb{C}, id)$ und $(\mathbb{C}, z \mapsto \overline{z})$ nicht holomorph verträglich sind.

▸ **Aufgabe 29: Identitätssatz und Maximumprinzip**

(a) Formulieren und beweisen Sie einen Identitätssatz für holomorphe Funktionen auf zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten.

(b) Formulieren und beweisen Sie (zum Beispiel mit Hilfe von (a)) ein Maximumprinzip für holomorphe Funktionen auf zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten.

(c) Sei X eine kompakte, zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Jede holomorphe Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.
Bemerkung: Man schreibt hierfür $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{C}$.

▸ **Aufgabe 30: Komplexe Tori als Hausdorffräume**

Zeigen Sie: Der zu einem Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_{2n} \subset \mathbb{C}^n$ gehörige komplexe Torus $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ ist bezüglich der „Quotiententopologie“

$$U \subset X \text{ offen } :\Longleftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^n \text{ offen}$$

ein Hausdorffraum.

▸ **Aufgabe 31: Komplexe Tori als komplexe Mannigfaltigkeiten**

Weisen Sie die holomorphe Verträglichkeit der in der Vorlesung erhaltenen Karten für den komplexen Torus $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ nach.
Zur Erinnerung: Für $p \in X$ mit $p = v + \Lambda$ betrachten wir das offene Periodenparallelogram um v

$$V := \left\{ v + \sum_{i=1}^{2n} t_i\omega_i \;\middle|\; |t_i| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Dann ist $U := \pi(V)$ eine offene Umgebung von p und

$$\varphi_p := \pi^{-1} : U \longrightarrow V$$

ist eine Karte für X um p.