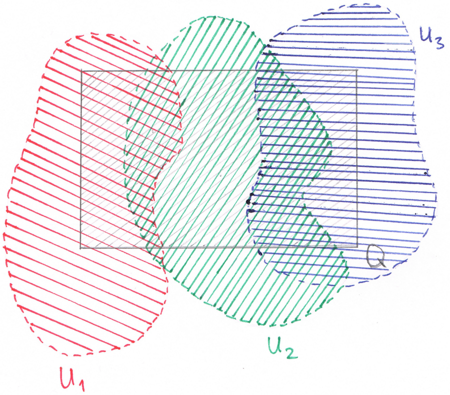
# § 5. Kompaktheit

**Definition (5.1)**

Sei $I$ eine Menge, $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Eine offene Überdeckung von $A$ ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq A$.



## Definition kompakter Teilmengen

**Definition (5.2)**

Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird kompakt genannt, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von $A$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ existiert, so dass bereits $\bigcup_{i \in J} U_i \supseteq A$ erfüllt ist. Den metrischen Raum selbst bezeichnen wir als kompakt, wenn die Teilmenge $A = X$ in $(X, d_X)$ kompakt ist.

wichtiger Hinweis:

Die Kompaktheit einer Menge $A$ ist nicht gleichbedeutend damit, dass $A$ eine endliche offene Überdeckung besitzt. Ist $A \subseteq X$ beliebig, dann ist durch $\{X\}$ immer eine endliche (sogar einelementige) Überdeckung von $A$ gegeben!

## (Gegen-)Beispiele für Kompaktheit

**Proposition (5.3)**

Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine endliche Teilmenge. Dann ist $A$ kompakt.

**Proposition (5.4)**

Die Menge $\mathbb{R}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Beweis von Prop. (5.3):

geg. $(X, d)$ metrischer Raum, $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq X$ endliche Teilmenge, z. zg.: $A$ ist kompakt

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung.

$\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \supseteq A$ Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$a_k \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists\, j_k \in I: a_k \in U_{j_k}$

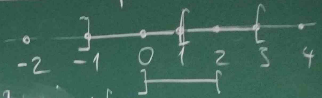
Setze $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subseteq I$ Dann gilt offenbar

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \bigcup_{k=1}^{n} U_{j_k} = \bigcup_{j \in J} U_j$$

Beweis von Prop (5.4):

<u>Beh</u>: $(\mathbb{R}, d)$ ist <u>nicht</u> kompakt

Betrachte die Familie




$(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ geg. durch $U_n = \,]n-1, n+1[$

bekannt: Offene Intervalle sind in $(\mathbb{R}, d)$ offen

außerdem: $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ denn: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ mit

$n \leq x < n+1 \Rightarrow x \in \,]n-1, n+1[\, = U_n$ insgesamt:

$(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist offene Überdeckung von $\mathbb{R}$

<u>Beh</u>: In $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gibt es keine endl. Teilüberdeckung.

Beweis von Prop. (5.5)

Ang. $(U_n)_{n\in J}$ ist eine endl. Teilüberdeckung, ($J \subseteq \mathbb{Z}$ endlich). Sei $n = \max J$. $x \in \bigcup_{j\in J} U_j$

$\Rightarrow x \in U_j$ für ein $j \in J$, wobei $j \leq n$

$\Rightarrow x \in \,]j-1, j+1[\, \Rightarrow x < j+1 \leq n+1$

$\Rightarrow \bigcup_{j\in J} U_j$ enthält keine reelle Zahl $\geq n+1$

$\Rightarrow (U_j)_{j\in J}$ ist keine Überdeckung von $\mathbb{R}$ ↯ $\square$

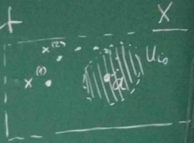
## (Gegen-)Beispiele für Kompaktheit (Forts.)

### Proposition (5.5)

Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum $(X,d)$ mit Grenzwert $a = \lim_n x^{(n)}$. Dann ist die Menge $A = \{x^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt.

Beweis von Prop. (5.5)

geg. $(X,d)$ metrisches Raum, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge, $a = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$ z.zg.: $A = \{x^{(n)} \mid n\in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ ist kompakt




Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überd. von $A$.

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \supseteq A \Rightarrow a \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow$

$\exists\, i_0 \in I : a\in U_{i_0}$ $U_{i_0}$ offen $\Rightarrow U_{i_0}$ ist Umgebung von $a$ §4 $\Rightarrow \exists\, N\in\mathbb{N}: x^{(n)}\in U_{i_0}\ \forall n\geq N$

Für jedes $k\in\{1,\dots,N-1\}$ gibt es ein $i_k\in I$ mit $x^{(k)}\in U_{i_k}$.

Setze $J=\{i_0,i_1,\dots,i_{N-1}\}$. Dann gilt $A\subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$ $\square$

## Kompaktheit abgeschlossener Quader

**Definition (5.6)**

Ein abgeschlossener Quader in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $Q = I_1 \times ... \times I_n$, wobei $I_k \subseteq \mathbb{R}$ für $1 \leq k \leq n$ jeweils ein abgeschlossenes Intervall $[a_k, b_k]$ mit $a_k < b_k$ bezeichnet.

**Satz (5.7)**

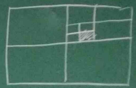
Jeder abgeschlossene Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

$\dots d(Q_n \dots) = \frac{1}{2} d(Q_n) = 2^{-(n+1)} d(Q)$ Setze $Q_{n+1} = Q_n^{(j_1, \dots, j_n)}$

Beweis von Satz (5.7):

geg: Quader $Q = I_1 \times \dots \times I_m \subseteq \mathbb{R}^m$, $I_k = [a_k, b_k]$ $(1 \le k \le m)$, z.zg. $Q$ ist kompakt.

Q



Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $Q$. Annahme: Diese Überdeckung hat keine endliche Teilüberdeckung.

Ansatz: Konstruiere eine Folge von Teilquadern $Q = Q_0 \supsetneq Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq \dots$, so dass $d(Q_n) = 2^{-n} d(Q)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und keiner der $Q_n$ in $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Angenommen, es ist $n \in \mathbb{N}_0$ und $Q_n$ bereits konstruiert. Konstruktion von $Q_{n+1}$:

$n \in \mathbb{N}_0$ und $Q_n$ bereits konstruiert. Konstruktion von $Q_{n+1}$:

Ist $Q_n = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_m, d_m]$, dann definiere
$m_k = \frac{1}{2}(c_k + d_k)$ für $1 \le k \le m$. Setze
$J_k = [c_k, d_k]$, $J_k^{(1)} = [c_k, m_k]$, $J_k^{(2)} = [m_k, d_k]$
Für $(j_1, \dots, j_m) \in \{1,2\}^m$ definiere
$$Q_n^{(j_1, \dots, j_m)} = J_1^{(j_1)} \times J_2^{(j_2)} \times \dots \times J_m^{(j_m)}$$
Die Vereinigung dieser $2^m$ Teilquader ist dann gleich $Q_n$.
Da es in $(U_i)_{i \in I}$ keine endl. Teilüberdeckung von $Q_n$ gibt,
muss auch ein $(j_1, \dots, j_m)$ existieren, so dass für
$Q_n^{(j_1, \dots, j_m)}$ keine endl. Teilüberdeckung existiert. Setze $Q_{n+1} = Q_n^{(j_1, \dots, j_m)}$.
Außerdem gilt $d(Q_n^{(j_1, \dots, j_m)}) = \frac{1}{2} d(Q_n) = 2^{-(n+1)} d(Q)$

$U$ zusammen mit $(U_j)_{j \in J}$ Überdeckung von $A$

$\Rightarrow (U_j)_{j \in J}$ ist endl. Teilüberd. von $A$ $\square$

<u>bisher</u>: $Q = Q_0 \supsetneq Q_1 \supsetneq \dots$ Folge von Teilquadern,
$d(Q_n) = 2^{-n} d(Q)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, kein Quader $Q_n$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung in $(U_i)_{i \in I}$ $(*)$

Schachtelungsprinzip $\Rightarrow \exists\, a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} Q_n$

$a \in Q = Q_0 \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I : a \in U_{i_0}$

$U_{i_0}$ offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $d(Q_n) = 2^{-n} d(Q) < \varepsilon$

<u>Beh</u>: $Q_n \subseteq U_{i_0}$ ($\lightning$ zu $(*)$) Sei $x \in Q_n$

$\Rightarrow a, x \in Q_n,\ d(Q_n) < \varepsilon \Rightarrow d(a, x) < \varepsilon$

$\Rightarrow x \in B_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0}$ ($\Rightarrow$ Beh.) $\square$

## Kompaktheit abgeschlossener Teilmengen

**Satz (5.8)**

Sei $A$ eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raums $(X, d_X)$. Dann ist $A$ kompakt.

**Folgerung (5.9)**

Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Beweis von Satz (5.8)

geg. kompakter metrischer Raum $(X, d)$,
$A \subseteq X$ abgeschlossen z.zg.: $A$ ist kompakt
Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $A$
$A$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $U = X \setminus A$ offen $\Rightarrow$
$(U_i)_{i \in I}$ bildet zusammen mit $U$ eine offene Überdeckung von $X$
$X$ kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ endl. Teilmenge $J \subseteq I$, so dass
$U$ zusammen mit $(U_j)_{j \in J}$ Überdeckung von $X$
$\Rightarrow$ $(U_j)_{j \in J}$ ist endl. Teilüberd. von $A$ $\square$

## Der Satz von Bolzano-Weierstrass

**Definition (5.10)**

Ein Punkt $x$ in einem metrischen Raum $(X, d_X)$ wird Häufungspunkt einer Teilmenge $A \subseteq X$ genannt, wenn in jeder Umgebung von $x$ jeweils unendlich viele Elemente aus $A$ liegen.

**Satz (5.11)**

Jede Folge in einem kompakten metrischen Raum $(X, d_X)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis von Satz (5.11).

geg. kompakter metrischer Raum $(X,d)$

$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $X$


Beh. Die Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Betrachte die Teilmenge $A=\{x^{(n)} \mid n\in\mathbb{N}\}$

1. Fall: $A$ ist endlich

Dann gibt es ein $a\in A$, so dass $\{n\in\mathbb{N} \mid x^{(n)}=a\}$ unendlich ist. Schreibe diese Menge in der Form $\{n_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ mit $n_1<n_2<\dots$ Dann ist $(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konstante und damit auch konvergente Teilfolge

2. Fall: A ist unendlich

Beh. A besitzt einen Häufungspunkt

Ang., dies ist nicht der Fall. Dann gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umg. $U_x$ mit nur endl. vielen Elementen aus A. $x \in U_x \ \forall x \in X \Rightarrow (U_x)_{x \in X}$ ist offene Überd. von X. X kompakt $\Rightarrow \exists$ endl. Teilm. $J \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{j \in J} U_j$. Jedes $U_j$ enthält nur endl. viele Elemente von A $\Rightarrow$ A ist endlich ↯ ($\Rightarrow$ Beh.)

Sei a Häufungspkt. von A. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x^{(n_k)} \in B_{1/k}(a)$, wobei $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Dann ist $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilf. mit $\lim_{k \to \infty} x^{(n_k)} = a$ $\square$

## Folgerungen aus dem Satz von Bolzano-Weierstrass

**Folgerung (5.12)**

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Folgerung (5.13)**

Jede kompakte Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums $(X, d_X)$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis von Folgerung (5.13):

geg. $(X, d)$ met. Raum, $A \subseteq X$ kompakt


(1) Ang.: $A$ ist nicht beschränkt. Sei $a \in A$ und setze $U_n = B_n(a)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine offene Überd. von $X$, erst recht von $A$. Da $A$ unbeschränkt ist, existiert in dieser keine endl. Teilüberdeckung.

(2) Ang. $A$ ist nicht abgeschlossen. §4 $\Rightarrow$ Es gibt eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $A$, die in $X$ konvergiert, mit Grenzwert $x = \lim_{n \to \infty} x^{(n)} \notin A$. Bolzano-W. $\Rightarrow$ $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ hat eine Teilfolge mit Grenzwert $a \in A$ (!)

hat eine Teilfolge mit Grenzwert $a \in A$ (!)

aber: Mit $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ muss auch jede Teilfolge gegen $x$ konvergieren $\Rightarrow a = x \notin A$. $\lightning$ $\square$

## Der Satz von Heine-Borel

**Satz (5.14)**

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

## Beschränktheit und Abgeschlossenheit im Allgemeinen nicht hinreichend für Kompaktheit

**Proposition (5.15)**

Sei $X$ eine unendliche Menge und $\delta_X$ die diskrete Topologie auf $X$. Dann ist $X$ zwar beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt.