Vortrag zu Mathematik, Geometrie und Perspektive von Prof. Dr. Bodo Pareigis am 15.10.2007 im Vorlesungszyklus „Naturwissenschaften und Mathematische Wissenschaften“ im Rahmen des Seniorenstudiums der LMU.

Grundregeln der Perspektive und ihre elementargeometrische Herleitung

1. Die Elemente der Perspektive:

1.1. Ich möchte in diesem Vortrag Regeln für perspektivisches Zeichnen (jeweils mit Ausnahmen) entwickeln, die **ohne**

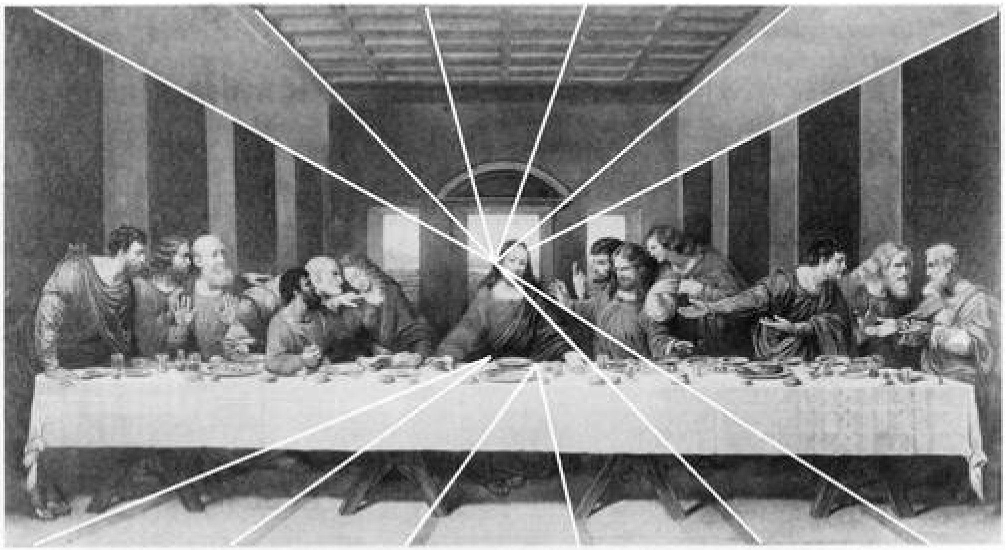
projektive Geometrie,
darstellende Geometrie,
konstruktive Geometrie,
technisches Zeichnen

hergeleitet werden. Wir wollen lediglich die Grundtatsachen der dreidimensionalen Elementargeometrie verwenden. Die Zielsetzung soll sein, Regeln für eine perspektivische Zeichnung ohne reale Vorlagen, ohne Maße aus der Natur, aufzustellen, Regeln, die sich aus der Zeichnung selbst ergeben, Regeln für eine Zeichnung, die perspektivisch korrekt ist.

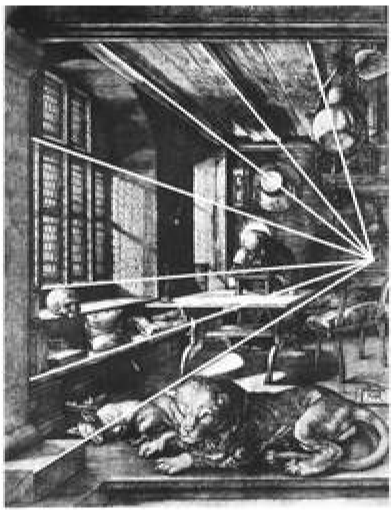
1.2.Bilder zur Entwicklung der Perspektive:

um 1150,

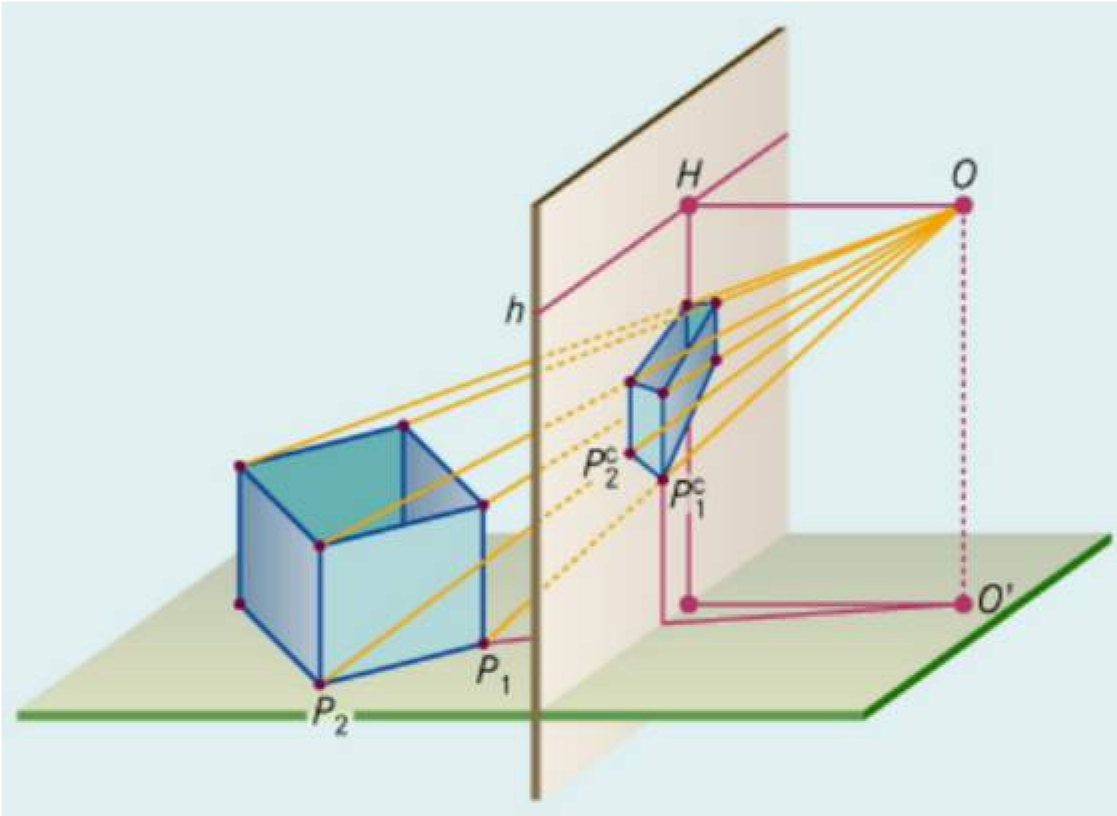
1308,



Leonardo da Vinci,

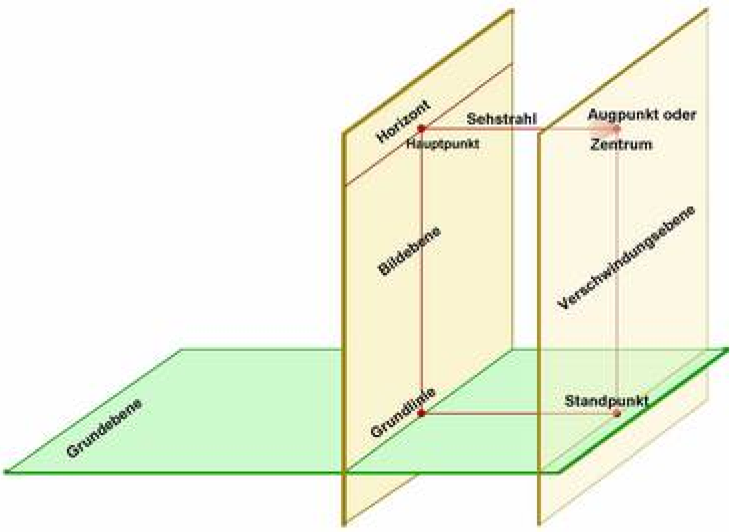


A. Dürer



Perspektive eines Würfels.

1.3.Die Begriffe der Perspektive:



Wir sprechen vom **Raum** oder der **Wirklichkeit** als der Menge der Punkte (und geometrischen Objekte), die durch die perspektivische Abbildung auf die Bildebene abgebildet werden. Die **perspektivische Abbildung** folgt den in den Zeichnungen dargestellten Prinzipien oder auch dem Aufbau unseres Auges. Das Ergebnis einer perspektivischen Zeichnung sollte von dem festgelegten Augpunkt aus (geometrisch) ebenso aussehen, wie die ursprüngliche Vorlage im Raum. Die perspektivische Abbildung soll die Punkte des dreidimensionalen Raumes $\mathbf{R}^3$ in die Bildebene $\mathbf{R}^2$ abbilden.

Die **Grundebene** ist die horizontal verlaufende Ebene, auf die sich alle darzustellenden Objekte beziehen. Die **Bildebene** ist die Ebene, in der das zu zeichnende Bild oder die Bildfläche liegt. Sie steht im allgemeinen (Einpunkt- und Zweipunkt-Perspektive) senkrecht auf der Grundebene, auf der der Betrachter steht. Die **Bildfläche** wird durch den Rahmen markiert. Sie liegt in der Bildebene. Die **Grundlinie** ist die Gerade, die durch den Schnitt der Bildebene mit der Grundebene entsteht.

Der **Augpunkt** oder das **Zentrum** oder **Projektionszentrum** ist die Stelle, an der sich das Auge des Zeichners befindet. Das ist auch die optimale Stelle, an der sich das Auge des Betrachters befinden sollte, wenn er das fertige Bild betrachtet, optimal, um die dargestellte Perspektive ohne Verzerrungen zu sehen. Der **Standpunkt** ist die Stelle, an der der Zeichner steht, genauer ist es der Fußpunkt des Lotes durch den Augpunkt auf die Grundebene. Der **Sehstrahl** ist das Lot vom Augpunkt auf die Bildebene. Der **Öffnungswinkel** ist der größte Winkel, unter dem die Bildfläche vom Augpunkt her erscheint. Er sollte üblicherweise 30-45 Grad nicht überschreiten, da sonst Verzerrungen auftreten können. 60 Grad erfordern schon genaue Konstruktionen. Eine Weitwinkelkamera (Kleinbild mit 35 mm Brennweite) hat einen Öffnungswinkel (über die Diagonalen) von 63 Grad. 50 mm bedeuten 45 Grad Öffnungswinkel. Der **Sehkegel** ist ein Kegel um den Sehstrahl mit dem Augpunkt als Kegelspitze und dem gegebenen Öffnungswinkel an der Kegelspitze. Der **Horizont** der Grundebene (oder auch einer beliebigen Ebene) ist die Schnittgerade der Bildebene mit einer Ebene, die parallel zur Grundebene (oder zur beliebigen Ebene) durch den Augpunkt geht. Alles, was sich in Augenhöhe des Betrachters befindet, wird auf der Höhe der natürlichen Horizontlinie abgebildet.

Die **Verschwindungsebene** ist die zur Bildebene parallele Ebene durch den Augpunkt. Der **Verschwindungspunkt** einer Geraden im Raum ist ihr Schnittpunkt mit der Verschwindungsebene. Der **Fluchtpunkt** einer Geraden im Raum ist der Schnittpunkt der Parallelen durch den Augpunkt mit der Bildebene.

Der **Hauptpunkt** ist der Schnittpunkt des Sehstrahls mit der Bildebene.

2. Dreidimensionale Elementar- oder Inzidenzgeometrie:

Wir verwenden ohne ausdrückliche Hinweise die elementaren Regeln der dreidimensionalen euklidischen Elementargeometrie: Parallele Geraden, parallele Geraden und Ebenen, Schnittpunkte von Geraden mit Geraden und Ebenen, Schnittgeraden von Ebenen,Geraden durch zwei Punkte, Ebenen durch 3 Punkte, Ebenen durch Punkt und Gerade, Abstände, Winkel (Winkelsumme im Dreieck 180 Grad, also euklidische Geometrie), Konstruktionen mit Zirkel und Lineal: also Dreiteilung einer Strecke ist möglich, Dreiteilung eines Winkels ist unmöglich..

3. Die Grundregeln der Perspektive für Punkte, Geraden und Ebenen:

3.1. Die perspektivische Abbildung von Punkten, Geraden und Ebenen

Vorbemerkung:
Um 1450 wurde empirisch entdeckt, dass die Bilder von Scharen von horizontalen, parallelen Geraden in einem **Fluchtpunkt** zusammenlaufen und dass diese Fluchtpunkte auf einem gemeinsamen **Horizont** im Bild lagen.
Satz 1: *Bei perspektivischen Konstruktionen werden Punkte* P *des Raumes auf Punkte* B_P *in der Bildebene abgebildet.*

Konstruktion: Verbinde P *und das Projektionszentrum* Z *durch eine Gerade*. *Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Bildebene ist der Bildpunkt* B_P *von* P.

Ausnahmen: 1. Das Projektionszentrum erhält keinen Bildpunkt.
2. Punkte der Verschwindungsebene erhalten keinen Bildpunkt.

Satz 2: *Geraden* G *des Raumes werden auf Bildgeraden* B_G *in der Bildebene abgebildet.*

Konstruktion: Verbinde die Gerade G *und das Projektionszentrum* Z *durch eine Ebene. Die Schnittgerade dieser Ebene mit der Bildebene ist die Bildgerade* B_G *von* G.

Ausnahmen: 1. Wenn die Gerade G durch das Projektionszentrum verläuft, so wird die ganze Gerade auf einen einzigen Punkt abgebildet.
2. Wenn die Gerade G in der Verschwindungsebene liegt, dann hat sie keine Bildgerade und auch keinen einzigen Bildpunkt.
3. Wenn die Gerade G im Raum nicht parallel zur Verschwindungsebene liegt, dann gibt es einen Punkt von G, der nicht in die Bildgerade (oder auch Bildebene) abgebildet wird. Das ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Verschwindungsebene. Er heißt **Verschwindungspunkt** der Geraden.

Definition: Wenn die Gerade G im Raum nicht parallel zur Verschwindungsebene liegt, dann gibt es einen Punkt der Bildgeraden B_G, der nicht das Bild eines Punktes der Geraden G ist. Das ist der Schnittpunkt der Geraden G_p (im Raum) durch das Projektionszentrum, die zu G parallel ist, mit der Bildebene. Er heißt **Fluchtpunkt** der Geraden G.

Satz 3: *Ebenen* E *des Raumes werden auf die gesamte Bildebene abgebildet.*

Ausnahmen: 1. Wenn die Ebene E durch das Projektionszentrum verläuft, dann wird die ganze Ebene auf eine einzige (Bild-)Gerade abgebildet.
2. Wenn die Ebene E die Verschwindungsebene ist, dann hat sie keine Bildpunkte.
3. Wenn die Ebene E im Raum nicht parallel zur Verschwindungsebene liegt, dann gibt es eine Gerade von E, der nicht in die Bildebene abgebildet wird. Das ist die Schnittgerade der Ebene E mit der Verschwindungsebene. Sie heißt **Verschwindungsgerade** der Ebene.

Definition: Wenn die Ebene E im Raum nicht parallel zur Verschwindungsebene liegt, dann gibt es eine Gerade in der Bildebene, die keine Bildpunkte von Punkten aus der Ebene E enthält. Das ist die Schnittgerade der Ebene E_p (im Raum) durch das Projektionszentrum, die zu E parallel ist, mit der Bildebene. Sie heißt **Horizont (Fluchtgerade)** zur Ebene E in der Bildebene.

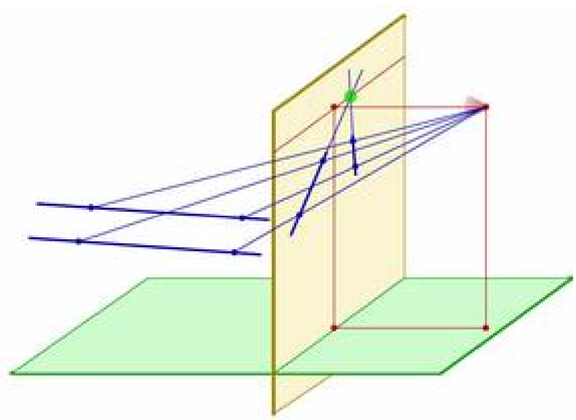
3.2. Parallele Geraden und Ebenen

Satz 4: *Wenn zwei parallele Geraden im Raum gegeben sind und diese parallel zur Bildebene verlaufen, so sind ihre Bildgeraden in der Bildebene parallel (oder gleich).*

Ausnahme: Keine der beiden Geraden darf in der Verschwindungsebene liegen, da sie sonst keine Bildgerade besitzt.

Satz 5: *Wenn zwei parallele Geraden im Raum gegeben sind, die nicht parallel zur Bildebene verlaufen, so schneiden sich ihre Bildgeraden in der Bildebene.*
- Der Schnittpunkt ist der gemeinsame Fluchtpunkt der Geraden.
- Die Fluchtpunkte von Geraden, die in E *liegen oder parallel zu* E *sind, liegen alle auf dem Horizont von* E.
- Also: Eine Schar paralleler Geraden (nicht parallel zur Bildebene) wird auf ein Geradenbündel um den gemeinsamen Fluchtpunkt abgebildet.
- Zwei parallele Ebenen haben einen gemeinsamen Horizont.

Ausnahme: Beide Geraden haben dieselbe Bildgerade.



Satz 6: *Wenn zwei Geraden im Raum einen gemeinsamen Fluchtpunkt besitzen, dann sind sie parallel.*
- Wenn zwei Ebenen im Raum einen gemeinsamen Horizont besitzen, dann sind sie parallel.

Beweis: Beide Geraden sind parallel zur Geraden durch das Zentrum und den gemeinsamen Fluchtpunkt.

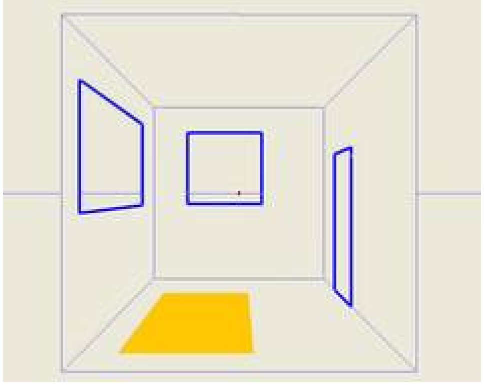
Anmerkungen: - Die obige Konstruktion beschreibt eine eineindeutige Zuordnung zwischen Scharen von parallelen Geraden, mit Ausnahme der zur Bildebene parallelen Geraden, und Punkten in der Bildebene. Die parallelen Geraden im Raum werden auf ein Geradenbüschel in der Bildebene abgebildet.
- Die obige Konstruktion beschreibt eine eineindeutige Zuordnung zwischen Scharen von parallelen Ebenen, mit Ausnahme der zur Bildebene parallelen Ebenen, und Geraden in der Bildebene.
- Der Horizont der Grundebene ist eine horizontale Gerade in Augenhöhe im Bild.
- Die Fluchtpunkte von horizontalen Geraden (parallel zur Grundebene) liegen auf dem Horizont der Grundebene. Die Bildgeraden paralleler Geraden schneiden sich im Horizont.
- Der Horizont einer auf der Grundebene senkrecht stehenden Ebene ist eine senkrechte Gerade im Bild.

Wir fassen zusammen (ohne Erwähnung der Ausnahmefälle insbesondere im Zusammenhang mit der Verschwindungsebene):

1. Alle waagerechten Geraden im Raum, die parallel zur Bildebene verlaufen, ergeben waagerechte Geraden in der Bildebene.
2. Alle senkrechten Geraden im Raum ergeben senkrechte Geraden in der Bildebene.
3. Alle waagerechten Geraden im Raum, die nicht parallel zur Bildebene verlaufen, verlaufen in der Bildebene durch einen gemeinsamen Fluchtpunkt auf dem Horizont der Grundebene.
4. Alle Geraden, Strecken, Winkel im Raum, die in der Bildebene liegen, werden bei der Abbildung nicht verändert.
5. Zwei Geraden haben genau dann denselben Fluchtpunkt, wenn sie zueinander parallel sind.
6. Zwei Ebenen besitzen genau dann denselben Horizont, wenn sie zueinander parallel sind.
7. Der Fluchtpunkt einer Geraden liegt genau dann auf dem Horizont einer Ebene, wenn die Gerade parallel zur Ebene ist.

4. Die verschiedenen linearen Perspektiven:

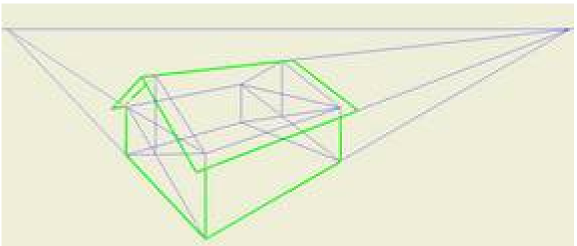
4.1. Die **Zentralperspektive**: Geraden im Raum, die senkrecht auf der Bildebene stehen, heißen **Orthogonale**. Ihr Bild stellt verschwindende Geraden dar, die sich in einem Punkt im **Zentrum des Bildes** treffen, dem **Fluchtpunkt** (1340-1370).



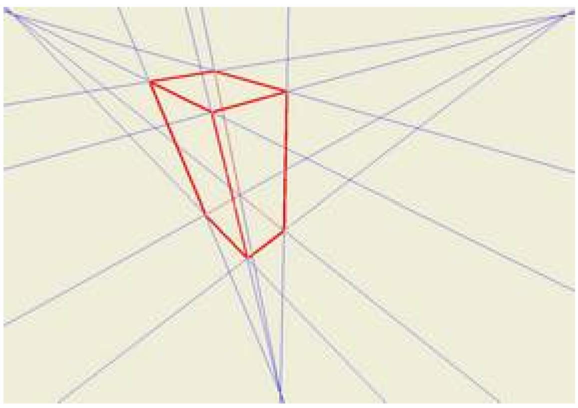
In der Zentralperspektive fluchten alle waagerechten Linien parallel zum Sehstrahl des Betrachters auf den Horizontmittelpunkt.

4.2. In der **Einpunktperspektive** nimmt man an, dass die begrenzenden Geraden etwa eines Hauses oder eines Würfels aus zwei Gruppen bestehen, Geraden, die zur Bildebene parallel sind, und Geraden, die Orthogonale sind. Die ersteren werden in parallele Geraden, horizontal oder vertikal abgebildet, die letzteren laufen durch einen festen Fluchtpunkt im Horizont. Er liegt nicht unbedingt im Zentrum des Bildes.

4.3. Die **Zweipunktperspektive** oder **Eckperspektive**: Um 1420 stellte man fest, dass die parallelen Geraden durch die horizontalen Kanten eines kubischen Hauses sich in **zwei Fluchtpunkten** (links und rechts) auf dem **Horizont** treffen.



4.4. Die **Dreipunktperspektive** und die **allgemeine Perspektive**: Keine der Geraden eines Würfels (oder Gebäudes) ist parallel zur Bildebene. Die drei Richtungen von parallelen Würfelkanten verlaufen durch verschiedene (nicht kollineare) Fluchtpunkte. Weitere Würfel oder Gebäude führen zu weiteren Fluchtpunkten und der allgemeinen Perspektive.



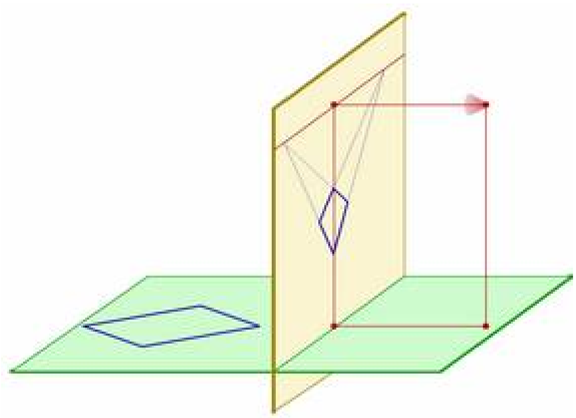
4.5. Die **Frosch-** und die **Vogelperspektive**: Der Sehstrahl ist noch oben bzw. nach unten gerichtet.

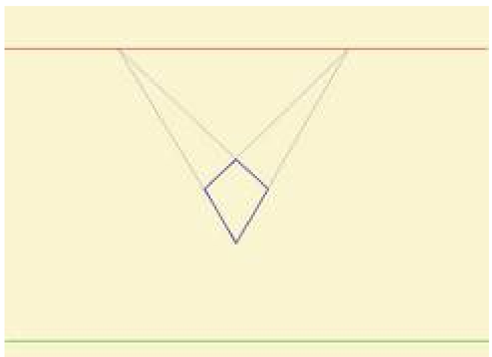
5. Strecken, Winkel und Längen in der Grundebene:

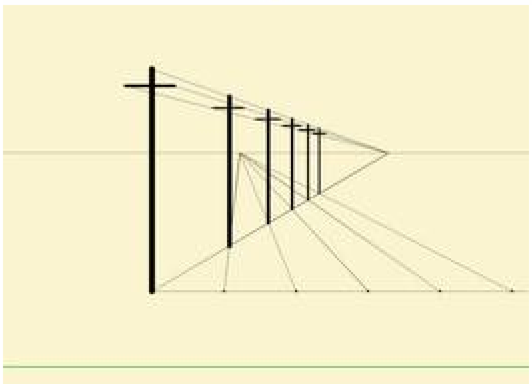
Was für lange Zeit in perspektivischen Zeichnungen fehlte, ist die Bestimmung von gleich weit entfernten (äquidistanten) **Transversalen** (Bilder von Geraden, die zur Bildebene und zu den anderen Geraden parallel laufen). Erste Zeichenvorschriften verlangten fälschlicherweise, dass die Abstände jeweils um ein Drittel verringert wurden.

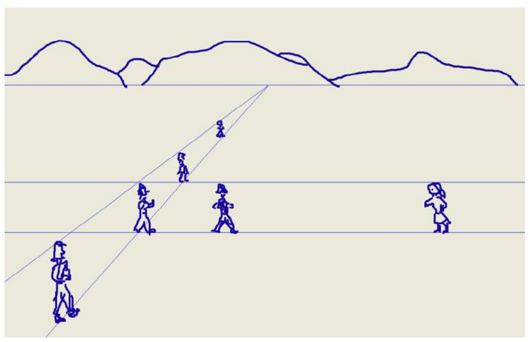
Wir betrachten im folgenden nur solche Strecken im Raum, deren Bild wieder eine Strecke in der Bildebene ist. Übung: Das sind solche Strecken, die keinen Punkt in der Verschwindungsebene haben.

Satz 7: *(Vergleich von Streckenlängen paralleler Strecken)*
Wenn zwei Strecken im Raum parallel und gleichlang sind (und nicht auf einer Geraden liegen), so liegen sie als gegenüberliegende Seiten in einem Parallelogramm in einer Ebene E. Die Paare der Bildgeraden der gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in zwei Fluchtpunkten im Horizont der Ebene E. Umgekehrt konstruiert man das Bild von gleichlangen parallelen Strecken in einer Ebene E durch Schnitt von zwei Geradenpaaren, die sich jeweils im Horizont der Ebene E schneiden.

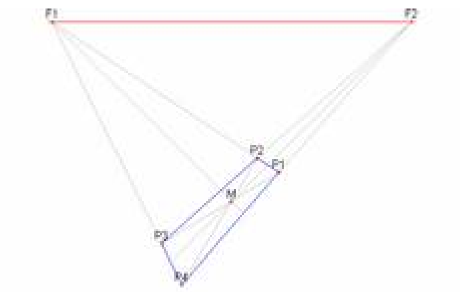




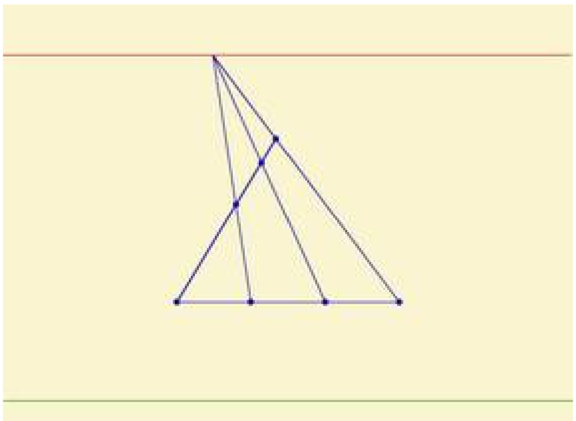




Satz 8: *(Zentrum von Rechtecken und Seitenhalbierende von Dreiecken)*
Das Bild eines Rechtecks bzw. eines Parallelogramms im Raum ergibt in der Bildebene ein Viereck wie in Satz 7. Das Zentrum eines Rechtecks bzw. eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt der Diagonalen. Dieser wird abgebildet auf den Schnittpunkt der Diagonalen des Bildvierecks.

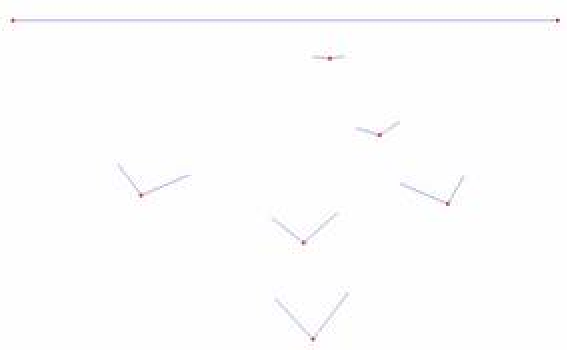


Satz 9: *(Teilung von Strecken)*
Um das Bild B *einer in der Grundebene liegenden Strecke in 3 gleiche Teile (oder allgemein* n *Teile) zu teilen, trage man von einem Endpunkt der Bildstrecke eine zum Horizont parallel verlaufende Strecke ab und verlängere diese zu drei (*n*) Strecken* S. *Dann verbinde man die freien Endpunkte von* S *und der Bildstrecke durch eine Gerade* G *in der Bildebene. Den Fluchtpunkt von G (Schnitt mit dem Horizont) verbinde man durch Geraden mit den zwei (*n*-1) Trennpunkten von* S. *Die Schnittpunkte mit* B *ergeben die gewünschte Dreiteilung des Bildes* B.



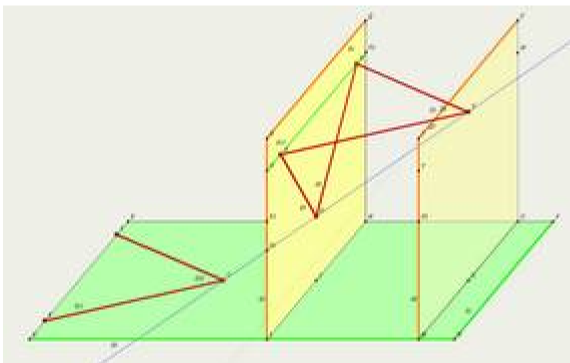
Satz 10: *(Fluchtpunkte von Winkeln)*
Gegeben zwei Punkte auf dem Horizont einer Ebene E. *Dann haben je zwei Geraden in der Ebene, deren Bilder die beiden Punkte als Fluchtpunkte haben, denselben Schnittwinkel.*
Gegeben ein Punkt auf dem Horizont einer Ebene E. *Dann hat jede Gerade in der Ebene, deren Bild den Punkt als Fluchtpunkt hat, mit jeder Parallelen zur Grundlinie von E denselben Schnittwinkel.*

Beweis: Es handelt sich um die Darstellung von sich schneidenden Parallelenscharen.



Satz 11: *Seien zwei Punkte* A *und* B *auf dem Horizont der Grundebene* G *gegeben. Dann ist der durch* A *und* B *definierte Winkel in der Grundebene gleich dem Winkel* $\angle$AZB *in der zur Grundebene parallelen Ebene durch den Augpunkt* Z*.*

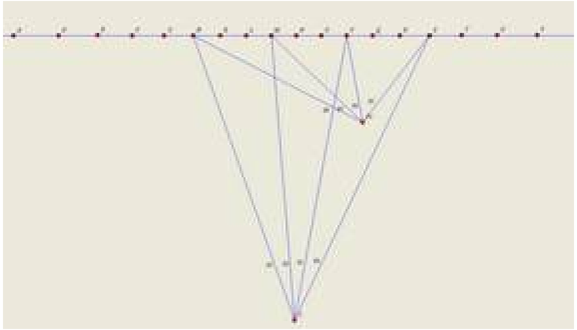
Beweis: Sei C ein Punkt in der Grundebene und D sein Bild in der Bildebene. Dann ist die Gerade AZ parallel zur Schnittgeraden EC von der Ebene durch AZD mit der Grundebene. Ebenso ist die Gerade BZ parallel zur Schnittgeraden FC von der Ebene durch BZD mit der Grundebene. Beide Geradenpaare AZ und BZ sowie EC und FC sind parallel und haben denselben Schnittwinkel. Weiter ist der Winkel $\angle$ADB Bild des Winkels $\angle$ECF in der Grundebene.



Man beachte, dass die nach Satz 10 und 11 gleichen Winkel im Raum „parallel“ zueinander sind, d.h. ihre Schenkel sind jeweils parallel. Natürlich erscheinen die entsprechenden Winkel in der Bildebene nicht als parallel.

Satz 12: *Ein durch Punkte* A *und* B *der Bildebene auf dem Horizont der Grundebene definierter Winkel wird halbiert, indem man den Winkel mit Augpunkt als Scheitel halbiert und den Schnittpunkt mit dem Horizont bestimmt.*

Eine Einteilung des Horizonts in Schritten von 5 oder 10 Grad hilft, alle Winkel und ihre Halbierenden mit genügender Annäherung festzulegen.



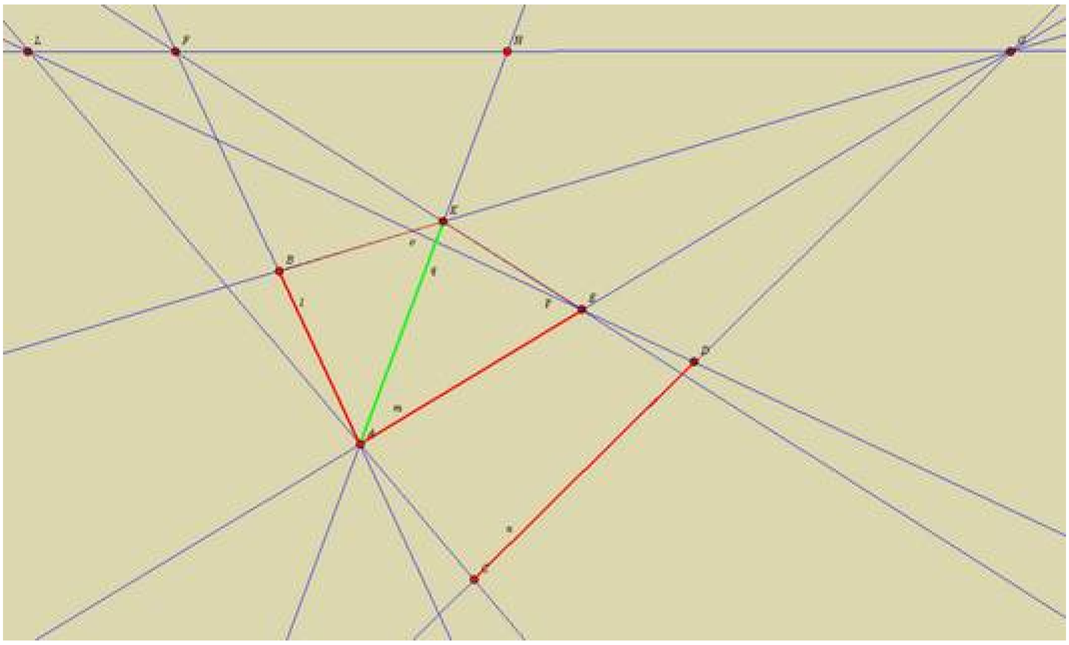
Dreiteilung eines Winkels von 45 Grad

Satz 13: *(Distanzpunkte und die Übertragung von Längen)*

Sei in der Bildebene eine Strecke AB mit Fluchtpunkt F und eine Gerade CG mit Fluchtpunkt G gegeben. Beide seien Bilder einer Strecke bzw. einer Geraden in der Grundebene. Sei H der Fluchtpunkt der Winkelhalbierenden für die beiden Punkte F und G auf dem Horizont. Die Konstruktion von CD aus AB über AE ergibt das Bild einer Strecke in der Bildebene, die die Länge in der Grundebene erhält.

Beweis: In der Grundebene ist ABKE ein gleichseitiges Parallelogramm (Rhombus), weil die Diagonale AK auf der Winkelhalbierenden H liegt und die Seiten mit den Fluchtpunkten F bzw. G parallel sind. Also hat AE dieselbe Länge wie AB. Die Streckenpaare AE und CD bzw. AC und ED sind parallel mit den Fluchtpunkten G bzw. L, also sind auch CD und AE gleich lang.

Der Fluchtpunkt H der Winkelhalbierenden wird oft auch **Distanzpunkt** genannt.



Analoge Konstruktionen von Winkeln und Längen sind auch bzgl. schiefer Ebenen möglich. Wieder wird ein Horizont durch den Schnitt zweier Ebenen definiert. Eine Ebene ist dabei die Bildebene. Wir gehen wieder davon aus, dass das Lot vom Augpunkt auf die Bildebene etwa in der Mitte des Bildes seinen Fußpunkt findet. Die zweite Ebene für den Schnitt zum Horizont ist parallel zur darzustellenden Ebene und verläuft durch den Augpunkt.

Der Abstand des Augpunktes zum Horizont der darzustellenden Ebene berechnet sich mit Pythagoras aus dem Abstand des Augpunktes zur Bildebene und dem Abstand des Hauptpunktes zum Horizont. Wie zuvor kann man Winkel vom Augpunkt aus auf dem Horizont durch zwei Punkte angeben. Ebenso erfolgt die Übertragung von Längen.

6. Schlussbemerkungen

In der Perspektive werden Ebenen ohne Verschwindungsgerade auf Ebenen ohne Horizont 1:1 abgebildet. Ausnahmen sind Ebenen durch das Zentrum. Dabei werden „unendlich ferne Punkte" der Ebene auf entsprechende Punkte des Horizonts abgebildet. Außerdem entsprechen „unendlich ferne Punkte" der Bildebene den Punkten auf der Verschwindungsgeraden.

Die Abbildungen sind nicht längen- oder winkeltreu. Durch die Festlegung eines Zentrums in der Bildebene nebst Horizont der Grundebene wird die Winkelmessung ermöglicht. Winkel werden durch Punktepaare auf dem Horizont festgelegt.

Mithilfe des Zentrums in der Bildebene (und der euklidischen Struktur) können Längen auf eine feste Länge bezogen werden.

Eine Schar paralleler Ebenen wird in der Bildebene durch Angabe ihres Horizonts festgelegt. Durch Festlegung des Zentrums wird Winkelmessung und Längenvergleich ermöglicht. Der Abstand des Zentrums vom Horizont variiert für jede in der Bildebene dargestellte Ebene, ist jedoch nur vom Horizont und nicht von der einzelnen Ebene aus der Schar paralleler Ebenen abhängig.

Wenn in der Bildebene 4 Punkte gegeben sind, die Bildpunkte von 4 Eckpunkten eines Parallelogramms in einer Ebene E des Raumes sind, dann ist dadurch auch der Horizont der Ebene E festgelegt. Man bilde aus den 4 Punkten ein konvexes Viereck und bilde die Schnittpunkte der paarweise gegenüberliegenden Seiten. Diese Schnittpunkte legen den Horizont fest.